

DAUGAVPILS UNIVERSITĀTES  
JAUNO MATEMĀTIĶU SKOLA

Grafu teorija

*Docētājs: Dr. P. Daugulis*

*2008./2009.studiju gads*

# Saturs

<b>1. Ramseja skaitļi</b>	<b>3</b>
1.1. 6 cilvēki vienā istabā . . . . .	3
1.1.1. Uzdevums . . . . .	3
1.1.2. Grafu modelis un uzdevuma formulējums modeļa terminos . . . . .	4
1.1.3. Risinājums . . . . .	5
1.2. Vispārinājumi un problēmas . . . . .	7
<b>2. Mājasdarbs</b>	<b>8</b>

# 1. Ramseja skaitļi

## 1.1. 6 cilvēki vienā istabā

### 1.1.1. Uzdevums

Istabā atrodas 6 cilvēki.

Pierādīt, ka izpildās vismaz viens no šādiem diviem nosacījumiem:

- eksistē 3 cilvēki, kas pazīst viens otru;
- eksistē 3 cilvēki, kas nepazīst viens otru.

### 1.1.2. Grafu modelis un uzdevuma formulējums modeļa terminos

Modelēsīm uzdevumu ar *grafu* palīdzību:

- virsotnes - cilvēki;
- balta šķautne starp divām virsotnēm - atbilstošie cilvēki ir pazīstami;
- sarkana šķautne starp divām virsotnēm - atbilstošie cilvēki nav pazīstami.

Katrai 6 cilvēku kopai var piekārtot grafu ar 6 virsotnēm un divu krāsu šķautnēm. Katram šādam grafam var piekārtot cilvēku kopu.

Jāpierāda, ka katram grafam ar 6 un divu krāsu šķautnēm eksistē trijstūris vismaz vienā krāsā.

### 1.1.3. Risinājums

No katras virsotnes  $v$  iziet 5 šķautnes, tādējādi ir iespējami šādi varianti:

- visas šķautnes ir baltas - 5 šķautnes baltas, 0 - sarkanas,
- 4 šķautnes baltas, 1 - sarkana,
- 3 šķautnes baltas, 2 - sarkanas,
- 2 šķautnes baltas, 3 - sarkana,
- 1 šķautnes baltas, 4 - sarkanas,
- visas šķautnes sarkanas - 0 baltas, 5 sarkanas.

Redzam, ka katrā gadījumā virsotnei  $v$  vismaz 3 šķautnes  $v - x$ ,  $v - y$  un  $v - z$  ir vienā krāsā. Pieņemsim, ka šī krāsa ir balta.

Apskatīsim virsotņu kopu  $\{x, y, z\}$ .

Ir iespējami divi gadījumi:

- starp virsotnēm  $x, y, z$  nav nevienas baltas šķautnes, tātad visas šķautnes starp šīm virsotnēm ir sarkanas - eksistē sarkans trijstūris  $\widehat{x - y - z}$ ;
- eksistē balta šķautne starp virsotnēm  $x, y, z$ , piemēram,  $x - y$  - eksistē balts trijstūris  $\widehat{v - x - y}$ .

Līdzīgi pierādam, ka eksistē vienas krāsas trijstūris, ja no  $v$  iziet vismas trīs šķautnes sarkanā krāsā.

## 1.2. Vispārinājumi un problēmas

**1.1. teorēma.** Ja grafam ar divu krāsu šķautnēm ir vismaz 6 virsotnes, tad tam eksistē trijstūris vienā krāsā.

PIERĀDĪJUMS Apskatīsim jebkuru grafa daļu (*apakšgrafu*), kas satur 6 elementus, tajā eksistē meklējamais trijstūris.



Grafu sauksim par *pilnu*, ja tajā jebkuras divas virsotnes ir savienotas.

**1.2. teorēma.** (*Ramseja teorēma*) Katram  $n \in \mathbb{N}$  eksistē  $R(n)$  (*n-tais Ramseja skaitlis*) ar šādu īpašību - ja grafam ar divu krāsu šķautnēm ir vismaz  $R(n)$  virsotnes, tad tajā eksistē pilns apakšgrafs ar virsotnēm vienā krāsā.

Ir zināms, ka  $R(3) = 6$  un  $R(4) = 18$ . Un viss.

## 2. Mājasdarbs

1. Pierādiet, ka  $R(4) = 18$ . Citiem vārdiem sakot, ja telpā ir 18 cilvēki, tad eksistē 4 cilvēki, kas nepazīst viens otru, vai eksistē 4 cilvēki, kas pazīst viens otru.