DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

MATEMĀTIKAS KATEDRA

**Vitolds Gedroics**

# VAIRĀKU ARGUMENTU FUNKCIJU INTEGRĀLRĒĶINI

2004

# ANOTĀCIJA

Mācību līdzeklis ir turpinājums V. Gedroica mācību līdzeklim "Vairāku argumentu funkciju diferenciālrēķini". Mācību līdzeklī iekļautas 6 nodaļas:

- divu argumentu funkcijas integrējamība;
- mainīgo aizvietošana divkāršajā integrālī;
- divkāršā integrāļa lietojumi;
- trīskāršais integrālis;
- līnijintegrālis;
- pielikums.

Mācību līdzeklī iekļauts daudz uzdevumu ar atrisinājumiem. Pierādījuma sākums un beigas apzīmēti atbilstoši ar simboliem ► un ◄.

# 1. nodaļa

# DIVU ARGUMENTU FUNKCIJAS INTEGRĒJAMĪBA

## 1.1. Telpas ķermenis un tā tilpums

**1.1. definīcija.** Par **telpas ķermeni** $F$ (turpmāk ķermeni $F$) sauc katru ierobežotu[1] punktu kopu telpā $\mathbb{R}^3$.

No skolas ģeometrijas kursa ir zināms, ka katram daudzskaldņu ķermenim (sastāv no galīga skaita daudzskaldņiem) atbilst nenegatīvs skaitlis, kuru sauc par šī daudzskaldņu ķermeņa tilpumu. Daudzskaldņu ķermeņa tilpumam piemīt aditivitāte, monotonitāte un invariance.

Apskata ķermeni $F \subset \mathbb{R}^3$, izveido visu iespējamo ievilktu daudzskaldņu ķermeņu $P$ ($P \subset F$) kopu $\{P\}$ un visu iespējamo apvilktu daudzskaldņu ķermeņu $Q$ ($Q \supset F$) kopu $\{Q\}$. Daudzskaldņu ķermeņa $P$ tilpumu apzīmē ar $mP$, bet daudzskaldņu ķermeņa $Q$ tilpumu - atbilstoši ar $mQ$.

Skaitļu kopa $\{mP\}$ nav tukša[2] un ir ierobežota no augšas ar jebkura apvilkta daudzskaldņu ķermeņa $Q$ tilpumu $mQ$. Tāpēc eksistē galīgs $\sup\limits_{P \subset F}\{mP\}$, kuru apzīmē $m_* = m_*F$ un sauc par **ķermeņa $F$ iekšējo tilpumu**.

Tādējādi

$$m_* = m_*F = \sup_{P \subset F}\{mP\}.$$

[1] Eksistē tāda lode ar centru patvaļīgajā punktā un galīgu rādiusu, kas satur $F$.

[2] Ja kopa $\{mP\}$ ir tukša, t.i., ķermenī $F$ nevar ievilkt nevienu daudzskaldņa ķermeni, tad uzskata, ka $m_* = m_*F = 0$.

**Ķermeņa $F$ ārējo tilpumu** definē

$$m^* = m^*F = \inf_{Q \supset F} \{mQ\}.$$

(Patstāvīgi pamatot ārējā tilpuma eksistenci).

Tā kā $mP \leq mQ$, tad $m_*F \leq m^*F$.

**1.2. definīcija.** Ķermeni $F$ sauc par **kubējamu**, ja tā iekšējais tilpums sakrīt ar ārējo tilpumu, t.i., $m_*F = m^*F$, pie tam šo kopīgo skaitli sauc par **ķermeņa $F$ tilpumu** un apzīmē $mF$.

**1.1. teorēma.** [**Kubējamības 1. kritērijs**]

*Ķermenis $F \subset \mathbb{R}^3$ kubējams tad un tikai tad, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds ievilkts daudzskaldņu ķermenis $P$ un tāds apvilkts daudzskaldņu ķermenis $Q$ $(P \subset F \subset Q)$, ka*

$$mQ - mP < \varepsilon.$$

► ***Nepieciešamība***.

Tā kā $F$ ir kubējams ķermenis, tad $m_*F = m^*F$. Saskaņā ar kopas $\{mP\}$ augšējā sliekšņa $m_*F$ definīciju jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds daudzskaldņu ķermenis $P$ $(P \subset F)$, ka

$$mP > m_*F - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.1}$$

Analogi eksistē tāds $Q$ $(F \subset Q)$, ka

$$mQ < m^*F + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.2}$$

No nevienādības (1.2) atņem (1.1) un iegūst

$$mQ - mP < \varepsilon.$$

***Pietiekamība***.

Šoreiz jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tādi daudzskaldņu ķermeņi $P$ un $Q$ $(P \subset F \subset Q)$, ka $mQ - mP < \varepsilon$. No $F$ iekšējā tilpuma un ārējā tilpuma definīcijas seko, ka

$$mP \leq m_*F \leq m^*F \leq mQ.$$

Tāpēc

$$0 \leq m^*F - m_*F \leq mQ - mP.$$

Tā kā $mQ - mP < \varepsilon$, tad $0 \leq m^*F - m_*F < \varepsilon$. Nenegatīvā konstante $m^*F - m_*F$ var kļūt pēc patikas maza tikai tad, kad tā ir nulle. Tādējādi $m_*F = m^*F$, un ķermenis $F$ ir kubējams. ◄

**1.2. teorēma.** [**Kubējamības 2. kritērijs**]

*Ķermenis $F \subset \mathbb{R}^3$ kubējams tad un tikai tad, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds ievilkts kubējams ķermenis $P$ un tāds apvilkts kubējams ķermenis $Q$ ($P \subset F \subset Q$), ka*

$$mQ - mP < \varepsilon.$$

Pierāda analogi tam kā tika pierādīts kvadrējamības 2. kritērijs.

**1.1. piezīme.**

1. Šādi definētam ķermeņa $F$ tilpumam piemīt aditivitāte, monotonitāte un invariance.
2. Divu kubējamu ķermeņu starpība $F_1 \setminus F_2$ un šķēlums $F_1 \cap F_2$ ir kubējami ķermeņi.
3. Ar matemātiskās indukcijas metodi tilpuma aditivitātes īpašību var vispārināt attiecībā uz jebkuru galīga skaita kubējamu ķermeņu, kuriem nav kopīgu iekšējo punktu, apvienojumu.

## 1.2. Taisns cilindrs un tā tilpums

Apskata kvadrējamu plaknes figūru $E \subset \mathbb{R}^2$. Caur katru $E$ punktu perpendikulāri plaknei (kurā atrodas $E$) un vienā pusē no šīs plaknes konstruē nogriezni ar garumu $h$.

Visi šādi nogriežņi veido ķermeni $F$, kuru sauc par **taisnu cilindru**, pie tam figūru $E$ sauc par **cilindra pamatu**, $h$ - **cilindra augstumu**.

**1.3. teorēma.** *Taisns cilindrs $F$ ir kubējams un tā tilpums $m_3F = hm_2E$, kur $m_2E$ - figūras $E$ laukums.*

▶ Tā kā $E$ ir kvadrējama plaknes figūra, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē daudzstūri $P$ un $Q$ ($P \subset E \subset Q$), ka

$$m_2Q - m_2P < \frac{\varepsilon}{h}.$$

Par pamatu ņemot $P$ (vai $Q$) un augstumu $h$, iegūst ievilktu (vai apvilktu) daudzskaldņu ķermeni $F_P$ (vai $F_Q$), pie tam $F_P \subset F \subset F_Q$.

Daudzskaldņu ķermeņi $F_P$, $F_Q$ ir kubējami, pie tam to tilpumi

$$m_3 F_P = m_2 P h, \quad m_3 F_Q = m_2 Q h.$$

$$m_3 F_Q - m_3 F_P = h(m_2 Q - m_2 P) < h\,\frac{\varepsilon}{h} = \varepsilon.$$

Tādējādi $F$ ir kubējams ķermenis, pie tam

$$m_3 F = \sup\{m_3 F_P\} = \sup\{h m_2 P\} = h \sup\{m_2 P\} = h m_2 E. \quad \blacktriangleleft$$

## 1.3. Divu mainīgo funkcijas zemgrafika kubējamība

Apskata nenegatīvu, nepārtrauktu divu argumentu funkciju $f(x,y)$, definētu slēgtā un kvadrējamā kopā $E \subset \mathbb{R}^2$.

**1.3. definīcija.** Par **funkcijas** $f(x,y)$ **zemgrafiku** sauc punktu kopu

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| (x,y) \in E,\ \ 0 \le z \le f(x,y)\right\}.$$

**1.4. teorēma.** *Slēgtā un kvadrējamā kopā $E$ nenegatīvas un nepārtrauktas funkcijas $f(x,y)$ zemgrafiks ir kubējams ķermenis.*

$\blacktriangleright$ Vispirms izveido kopas $E$ sasmalcinājumu galīga skaita slēgtās un kvadrējamās apakškopās $e_1, e_2, \ldots, e_n$, kuras pa pāriem nepārklājas.

Apzīmē

$$\operatorname{diam} e_k = \sup_{M',M'' \in e_k} \left\{\rho(M', M'')\right\},$$

kur $\rho(M', M'')$ ir attālums starp kopas $e_k$ diviem patvaļīgiem punktiem $M'$ un $M''$ un nosauc to par **kopas $e_k$ diametru**.

Apzīmē

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \{\operatorname{diam} e_k\}$$

un nosauc par kopas $E$ **sasmalcinājuma soli**. Kopu $E$ var sasmalcināt apakškopās $e_k$ ar jebkuru sasmalcinājuma soli $\lambda > 0$. Tam nolūkam uz plaknes uzklāj tīklu, kurš sastāv no horizontālām un vertikālām taisnēm, pie tam attālums starp vienas saimes divām blakustaisnēm ir $\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$ (1.1. zīm.).

Šādi rīkojoties plakne tiks sadalīta slēgtos kvadrātos $D_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, kuri pa pāriem nepārklājas. Kvadrējama kopa $E$ ir arī ierobežota kopa, tāpēc to satur galīgs šādu kvadrātu $D_1, D_2, \ldots, D_n$ apvienojums. Apzīmē $e_k = E \cap D_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Acīmredzami:

1. $\operatorname{diam} e_k \leq \operatorname{diam} D_k = \lambda$;

2. $e_k$ ir slēgta un kvadrējama kopa kā divu slēgtu un kvadrējumu kopu šķēlums;

3. kopas $e_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ pa pāriem nepārklājas, jo pa pāriem nepārklājas kopas $D_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$;

4. $\bigcup\limits_{k=1}^{n} e_k = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (E \cap D_k) = E \cap \left( \bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k \right) = E.$

Tā kā funkcija $f(x, y)$ ir nepārtraukta ierobežotā un slēgtā kopā $E$, tad tā ir arī nepārtraukta katrā no kopām $e_k$ (ierobežotas un slēgtas kopas). Saskaņā ar Veierštrāsa 2. teorēmu eksistē tādi punkti $M_k', M_k'' \in e_k$, ka $f(M_k') = \min\limits_{e_k} f(x, y)$, $f(M_k'') = \max\limits_{e_k} f(x, y)$. Saskaņā ar Kantora teorēmu par nepārtrauktas funkcijas vienmērīgo nepārtrauktību, jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta_\varepsilon > 0$, ka visiem kopas $E$ sasmalcinājumiem ar soli $\lambda < \delta$ izpildās nevienādība

$$f(M_k'') - f(M_k') < \frac{\varepsilon}{m_2 E}. \tag{1.3}$$

Apskata kubējamus ķermeņus $P$ un $Q$, kuri katrs sastāv no $n$ taisniem cilindriem un kuriem par pamatiem ir kopas $e_k$, bet augstumiem atbilstoši ir $f(M_k')$ un $f(M_k'')$. Šo ķermeņu tilpumi

$$m_3 P = \sum_{k=1}^{n} f(M_k')\, m_2 e_k \quad \text{un} \quad m_3 Q = \sum_{k=1}^{n} f(M_k'')\, m_2 e_k,$$

pie tam $P \subset F \subset Q$.

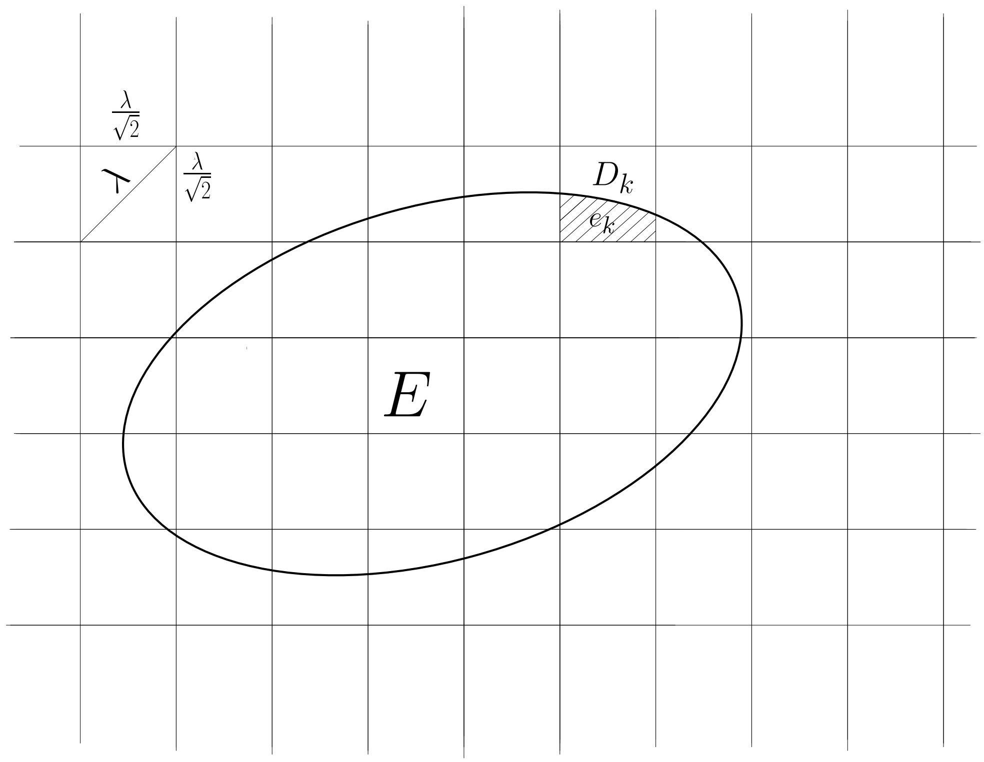
Apskata

$$m_3 Q - m_3 P = \sum_{k=1}^{n} \big(M_k'') - f(M_k')\big) m_2 e_k < \frac{\varepsilon}{m_2 E} \cdot \sum_{k=1}^{n} m_2 e_k = \frac{\varepsilon}{m_2 E} m_2 E = \varepsilon.$$

Tika izmantota nevienādība (1.3) un laukuma aditivitāte.

Saskaņā ar kubējamības 2. kritēriju $F$ ir kubējams ķermenis, pie tam

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k') m_2 e_k \leq m_3 F \leq \sum_{k=1}^{n} f(M_k'') m_2 e_k. \quad \blacktriangleleft$$




**1.1. zīm.**

## 1.4. Darbū summas un to īpašības

Katru kvadrējamu kopu $E \subset \mathbb{R}^2$ var sadalīt galīga skaita kvadrējamās apakškopās $e_k$, kuras pa pāriem nepārklājas, pie tam var iegūt kopas $E$ sasmalcinājumu (apzīmē $T = \{e_k\}_{k=1}^n$) ar jebkuru sasmalcinājuma soli $\lambda$, kur $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \{\operatorname{diam} e_k\}$.

**1.4. definīcija.** Ja ir izveidoti kopas $E$ divi sasmalcinājumi $T = \{e_k\}_{k=1}^n$ un $T' = \{e'_k\}_{k=1}^m$ un otra sasmalcinājuma $T'$ katra kopa $e'_i$ iekļaujas pirmā sasmalcinājuma $T$ kādā kopā $e_j$, tad saka, ka otrais sasmalcinājums ir pirmā **sasmalcinājuma sasmalcinājums**.

**1.2. piezīme.**

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} m_2 e_k = m_2 E.$
2. Kādi arī nebūtu kopas $E$ divi sasmalcinājumi $T$, $T'$, eksistē trešais šīs kopas sasmalcinājums, kurš ir abu sasmalcinājumu sasmalcinājums.

Kvadrējamā kopā $E$ apskata **ierobežotu** funkciju $f(x,y) = f(P)$, kur $P \in E$ un izveido kopas $E$ patvaļīgu sasmalcinājumu $T = \{e_k\}_{k=1}^n$. Apzīmē ar

$$m_k = \inf_{e_k} f(x,y) \quad \text{un} \quad M_k = \sup_{e_k} f(x,y),$$

kur $m_k, M_k \in \mathbb{R}$.

**1.5. definīcija.** Par kvadrējamā kopā $E$ ierobežotas funkcijas $f(x,y)$ **apakšējo** (vai **augšējo**) **Darbū summu**, kas atbilst kopas $E$ sasmalcinājumam $T$, sauc

$$s_T = \sum_{k=1}^{n} m_k m_2 e_k \quad \left(\text{vai } \; S_T = \sum_{k=1}^{n} M_k m_2 e_k\right).$$

Darbū summām piemīt šādas **īpašības**.

1. Jebkuram kopas $E$ sasmalcinājumam $s_T \leq S_T$.
2. Ja $T''$ ir kopas $E$ sasmalcinājuma $T'$ sasmalcinājums, tad $s_{T'} \leq s_{T''}$ un $S_{T'} \geq S_{T''}$.
3. Kādi arī nebūtu kopas $E$ sasmalcinājumi $T'$ un $T''$

$$s_{T'} \leq S_{T''} \quad \text{un} \quad s_{T''} \leq S_{T'}.$$

Pierāda analogi kā pierāda viena argumenta funkcijas Darbū summu īpašības.

No 3. īpašības izriet, ka apakšējo Darbū summu kopa $\{s_T\}$ ir ierobežota no augšas ar jebkura sasmalcinājuma augšējo Darbū summu, tāpēc eksistē galīgs $\sup_T\{s_T\} = \underline{\mathfrak{I}}$ un analogi eksistē galīgs $\inf_T\{S_T\} = \overline{\mathfrak{I}}$, pie tam

$$s_T \leq \underline{\mathfrak{I}} \leq \overline{\mathfrak{I}} \leq S_T.$$

## 1.5. Divkāršā integrāļa definīcija un īpašības

Kvadrējamā kopā $E$ definē ierobežotu funkciju $f(x,y)$. Apskata visus iespējamos kopas $E$ sasmalcinājumus un tiem atbilstošās Darbū summas. Iegūst divas kopas $\{s_T\}$ un $\{S_T\}$. Kā tika atzīmēts iepriekš eksistē galīgi $\sup_T\{s_T\} = \underline{\mathfrak{I}}$ un $\inf_T\{S_T\} = \overline{\mathfrak{I}}$, pie tam $\underline{\mathfrak{I}} \leq \overline{\mathfrak{I}}$.

**1.6. definīcija.** Kvadrējamā kopā $E$ ierobežotu funkciju $f(x,y)$ sauc par **integrējamu** funkciju šajā kopā, ja $\sup_T\{s_T\} = \inf_T\{S_T\}$ ($\underline{\mathfrak{I}} = \overline{\mathfrak{I}}$), pie tam šo kopīgo skaitli $\mathfrak{I}$ sauc par funkcijas $f(x,y)$ **divkāršo integrāli** kopā $E$ un apzīmē

$$\mathfrak{I} = \iint\limits_E f(x,y)dxdy.$$

**1.3. piezīme.**

1. Tā kā $s_T \leq \underline{\mathfrak{I}} \leq \overline{\mathfrak{I}} \leq S_T$, tad divkāršais integrālis $\mathfrak{I}$ (ja tāds eksistē) $s_T \leq \mathfrak{I} \leq S_T$.
2. Kvadrējamā kopā ierobežota funkcija $f(x,y)$ ir integrējama šajā kopā tad un tikai tad, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta_\varepsilon > 0$, ka visiem kopas $E$ sasmalcinājumiem ar soli $\lambda < \delta$, izpildās nevienādība $S_T - s_T < \varepsilon$. Pierāda analogi kā pierādīja viena argumenta funkcijas integrējamības kritēriju.
3. Ja izveido kvadrējamas kopas $E$ sasmalcinājumu $T = \{e_k\}_{k=1}^n$ un katrā no kopām $e_k$ izvēlas pa patvaļīgam punktam $P_k \in e_k$, tad summu $\sigma = \sum\limits_{k=1}^n f(P_k)m_2 e_k$ sauc par funkcijas $f(x,y)$ **integrālo summu**, kas atbilst konkrētam kopas $E$ sasmalcinājumam $T$ un konkrētai starppunktu $P_k$ izvēlei. Acīmredzami integrālā summa $\sigma$ atrodas starp Darbū summām, kuras atbilst šim sasmalcinājumam, t.i., $s_T \leq \sigma \leq S_T$.
4. Kvadrējamā kopā $E$ ierobežotu funkciju $f(x,y)$ varēja nosaukt par integrējamu funkciju šajā kopā, ja eksistē galīga $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma$, pie tam
$$\iint\limits_E f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sigma.$$

**Divkāršā integrāļa īpašības**.

Divkāršam integrālim (tāpat kā noteiktam integrālim) piemīt linearitāte, aditivitāte un monotonitāte.

1. **Linearitāte**. Ja kvadrējamā kopā $E$ ir integrējamas funkcijas

$$f_1(x,y), f_2(x,y), \ldots, f_n(x,y),$$

tad šajā kopā ir integrējama arī šo funkciju lineārā kombinācija, t.i., funkcija $f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$ ($c_k \in \mathbb{R}$), pie tam

$$\iint\limits_E \sum_{k=1}^{n} c_k f_k(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{n} c_k \iint\limits_E f_k(x,y)dxdy.$$

2. **Aditivitāte**. Ja kvadrējama kopa $E$ ir $n$ kvadrējamu kopu $E_1, E_2, \ldots, E_n$ apvienojums (kopas $E_1, E_2, \ldots, E_n$ pa pāriem nepārklājas) un $f(x,y)$ ir integrējama funkcija kopā $E$, tad tā ir integrējama katrā no kopām $E_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), pie tam

$$\iint\limits_E f(x,y)dxdy = \sum_{k=1}^{n} \iint\limits_{E_k} f(x,y)dxdy.$$

3. **Monotonitāte**. Ja kvadrējamā kopā $E$ ir integrējamas funkcijas $f(x,y)$ un $g(x,y)$, pie tam kopā $E$ izpildās nevienādība

$$f(x,y) \le g(x,y),$$

tad

$$\iint\limits_E f(x,y)dxdy \le \iint\limits_E g(x,y)dxdy.$$

Pierāda analogi kā pierādīja noteiktā integrāļa atbilstošās īpašības.

## 1.6. Nepārtrauktas funkcijas integrējamība

**1.5. teorēma.** *Ja $f(x,y)$ ir nepārtraukta slēgtā un kvadrējamā kopā $E$, tad $f(x,y)$ ir integrējama funkcija šajā kopā.*

Pierādīt patstāvīgi[3].

Iepriekš tika pierādīts, ka slēgtā un kvadrējamā kopā $E$ nenegatīvas un nepārtrauktas funkcijas zemgrafiks $F$ ir kubējams ķermenis un tā tilpums $m_3 F$ apmierina nevienādību

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k')m_2 e_k \le m_3 F \le \sum_{k=1}^{n} f(M_k'')m_2 e_k,$$

[3]Izmantot integrējamības kritēriju un Kantora teorēmu par vienmērīgo nepārtrauktību.

kur $\sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k')m_2 e_k$ ir ķermenī $F$ ievilkta daudzskaldņu ķermeņa $P$ tilpums, bet $\sum\limits_{k=1}^{n} f(M_k'')m_2 e_k$ ir ap $F$ apvilktā daudzskaldņu ķermeņa $Q$ tilpums. Šīs summas var uzskatīt arī par funkcijas $f(x,y)$ Darbū summām kopā $E$, t.i., $s = m_3 P$, $S = m_3 Q$. Tāpēc $s \le m_3 F \le S$ un arī $s \le \mathfrak{I} \le S$, kur $\mathfrak{I} = \iint\limits_E f(x,y)dx$. (Funkcija $f(x,y)$ ir integrējama kopā $E$ kā nepārtraukta funkcija). Divas konstantes $m_3 F$ un $\mathfrak{I}$ ir ieslēgtas starp Darbū summām $s$ un $S$, kuras var kļūt pēc patikas tuvas. Tas ir iespējams tikai tad, kad šīs konstantes sakrīt, t.i., $m_3 F = \mathfrak{I}$ jeb

$$\boxed{m_3 F = \iint\limits_E f(x,y)dxdy.}$$

Tādējādi tika iegūta formula zemgrafika tilpuma aprēķināšanai ar divkāršo integrāli.

Ja $f(x,y) \equiv 1$ visiem $(x,y) \in E$, tad no vienas puses

$$m_3 F = 1 \cdot m_2 E = m_2 E,$$

bet no otras puses

$$m_3 F = \iint\limits_E 1 \cdot dxdy = \iint\limits_E dxdy.$$

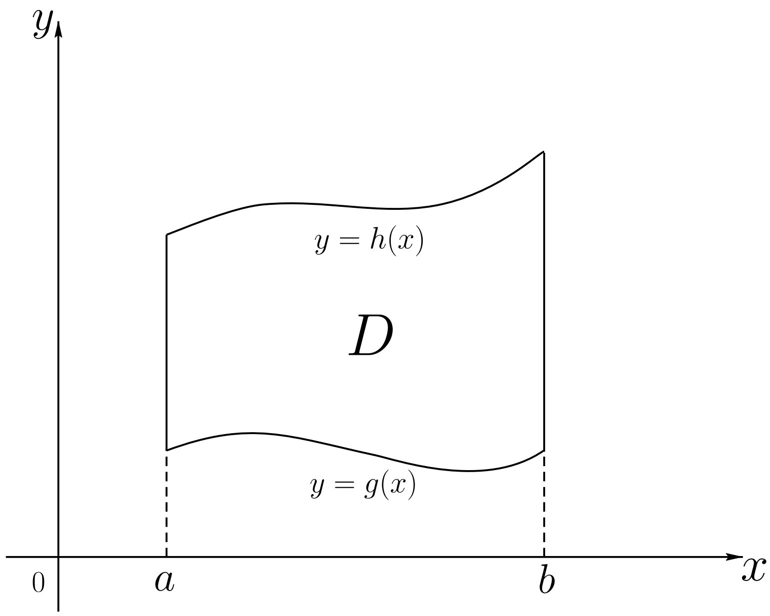
Tādējādi

$$\boxed{m_2 E = \iint\limits_E dxdy.}$$

Tika iegūta formula kvadrējamas figūras $E$ laukuma aprēķināšanai ar divkāršo integrāli.

## 1.7. Divkāršā integrāļa aprēķināšana

Iepriekš tika noskaidrots: ja $f(x,y)$ ir nenegatīva un nepārtraukta funkcija slēgtā un kvadrējamā kopā $D$, tad tā ir integrējama funkcija šajā kopā, pie tam $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ izsaka tās zemgrafika tilpumu.




**1.2. zīm.**

Apskata kopu $D$, kuru ierobežo taisnes $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ un intervālā $[a, b]$ nepārtrauktu funkciju $y = g(x)$, $y = h(x)$ $(g(x) \leq h(x))$ grafiki (1.2. zīm.).

Šādu kopu $D$ sauc par **I veida kopu**. Acīmredzami $D$ ir slēgta un kvadrējama kopa. Kopā $D$ definē nenegatīvu un nepārtrauktu funkciju $f(x, y)$. Šīs funkcijas zemgrafika $F$ tilpums

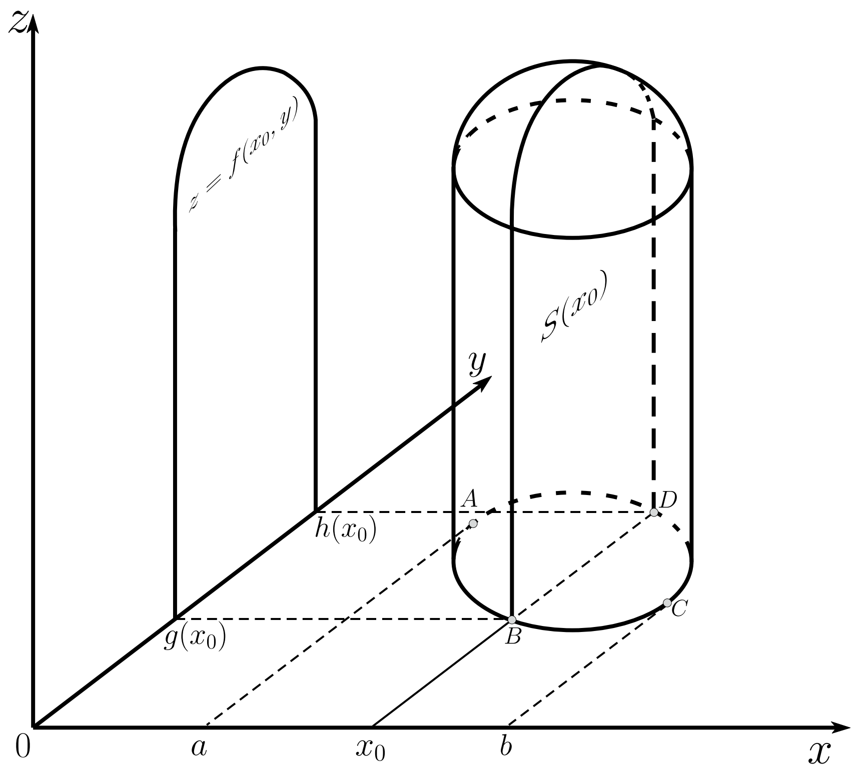
$$mF = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

Izveido zemgrafika $F$ šķēlumu ar plakni $x = x_0$ (1.3. zīm.) un apzīmē šī šķērsgriezuma laukumu ar $S(x_0)$. Kā zināms tilpumu ķermenim pēc tā šķērsgriezuma laukuma var aprēķināt ar noteikto integrāli, pie tam

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx.$$

Līknes $ABC$ vienādojums ir $y = g(x)$, bet $ADC$ vienādojums ir $y = h(x)$. Ja šķērsgriezumu projicē uz $yOz$ plakni, tad iegūst līklīnijas trapeci, kuras laukums ir vienāds ar šķērsgriezuma laukumu $S(x_0)$ un kuru var aprēķināt ar noteikto integrāli. Tādējādi

$$S(x_0) = \int\limits_{g(x_0)}^{h(x_0)} f(x_0, y)dy.$$




**1.3. zīm.**

Patvaļīgam $x \in [a, b]$ šķērsgriezuma laukums

$$S(x) = \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dy.$$

Tāpēc zemgrafika $F$ tilpumu var aprēķināt šādi

$$mF = \int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \left( \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dy \right) dx.$$

**1.4. piezīme.** Reizinātājus $\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dy$ un $dx$ parasti apmaina vietām un raksta

$$mF = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)dy.$$

Tā kā $mF = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$, tad tika iegūta formula divkāršā integrāļa aprēķināšanai ar tā saucamo **atkārtoto integrāli**. Tādējādi

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy.$$

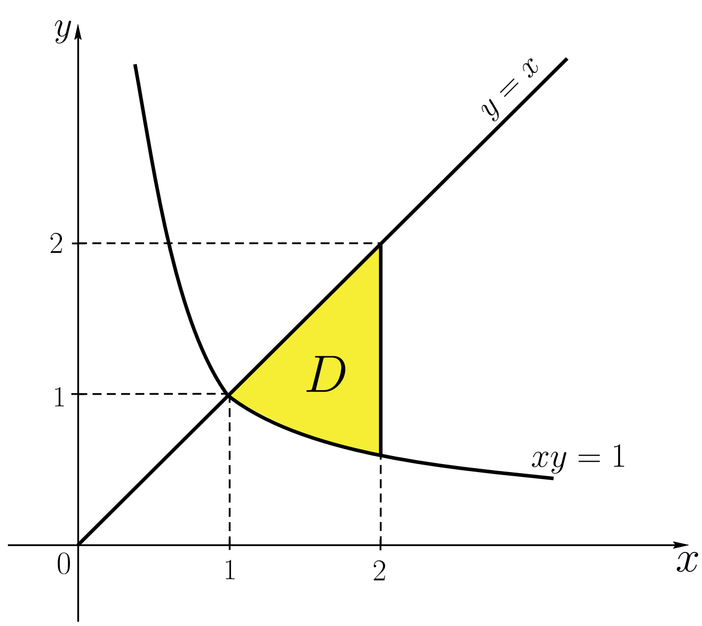
**1.5. piezīme.** Formula izpildās I veida kopā $D$ nepārtrauktai funkcijai $f(x,y)$, pie tam šai funkcijai nav obligāti būt nenegatīvai. Saskaņā ar šo formulu divkārša integrāļa izskaitļošana tiek reducēta uz divu noteikto integrāļu izskaitļošanu: vispirms, aprēķinot iekšējo integrāli

$$\int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy,$$

iegūst funkciju $S(x)$ un pēc tam to integrē intervālā $[a,b]$.

**1.1. piemērs.** Aprēķināt $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, kur $D$ figūra, kuru ierobežo līknes $x=2$, $y=x$, $xy=1$.

Vispirms koordinātu sistēmā $xOy$ attēlo $D$ (1.4. zīm.).




**1.4. zīm.**

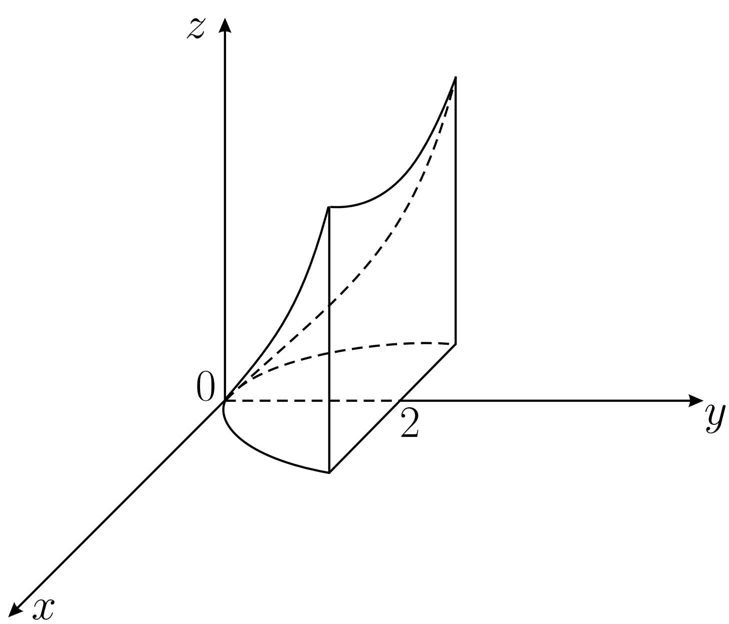
$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_1^2 dx \int\limits_{\frac{1}{x}}^{x} (x^2+y^2)dy = \int\limits_1^2 dx \left( x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{\frac{1}{x}}^{x} =$$

$$= \int\limits_1^2 \left( x^3 + \frac{x^3}{3} - x^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{3x^3} \right) dx = \int\limits_1^2 \left( \frac{4}{3}x^3 - x - \frac{1}{3x^3} \right) dx =$$

$$= \left( \frac{x^4}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{6x^2} \right) \Bigg|_1^2 = \frac{16}{3} - 2 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{27}{8}.$$

**1.2. piemērs.** Aprēķināt tilpumu ķermenim, kuru ierobežo virsmas $y = x^2$, $y = 2$, $z = 0$, $z = x^2 + y^2$.

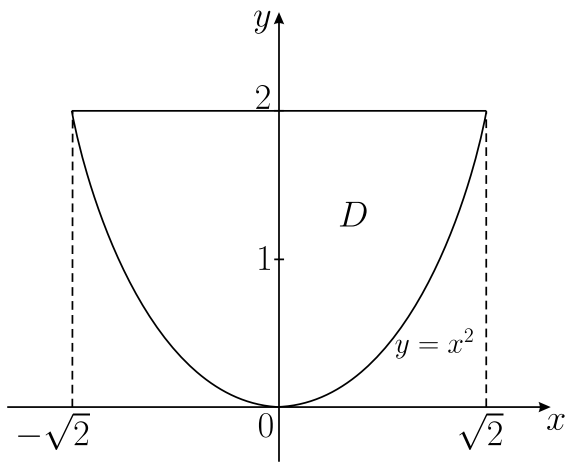
Vispirms koordinātu sistēmā attēlo ķermeni, kuru ierobežo paraboliskais cilindrs $y = x^2$, plaknes $y = 2$, $z = 0$ un rotācijas paraboloīds $z = x^2 + y^2$ (1.5. zīm.).




**1.5. zīm.**

Koordinātu sistēmā $xOy$ attēlo kopu $D$ (1.6. zīm.).

Doto ķermeni no augšas ierobežo virsma $z = x^2 + y^2$. Tā tilpums




**1.6. zīm.**

$$V = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{2} (x^2+y^2)dy = 2\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{2} (x^2+y^2)dy =$$

$$= 2\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{2} = 2\int\limits_0^{\sqrt{2}} \left(2x^2 + \frac{8}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right) dx =$$

$$= 2\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{8}{3}x - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{2}} = 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{3} + \frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{5} - \frac{8\sqrt{2}}{21}\right) =$$

$$= \frac{592\sqrt{2}}{105}.$$

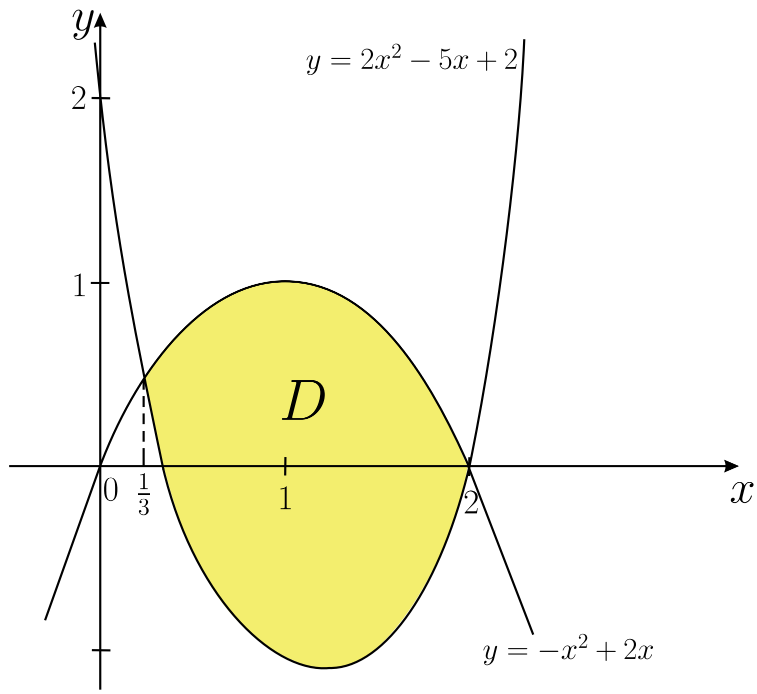
**1.3. piemērs.** Aprēķināt laukumu figūrai, kuru ierobežo līknes

$$y = -x^2 + 2x, \quad y = 2x^2 - 5x + 2.$$

Koordinātu plaknē $xOy$ attēlo plaknes figūru $D$, kuru ierobežo parabolas $y = -x^2 + 2x$ un $y = 2x^2 - 5x + 2$ (1.7. zīm.). Vispirms atrod šo parabolu krustpunktu abscisas. Tam nolūkam atrisina vienādojumu

$$-x^2 + 2x = 2x^2 - 5x + 2 \quad \text{jeb} \quad 3x^2 - 7x + 2 = 0.$$

Atrod $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = 2$. Krustpunktu ordinātes atbilstoši ir $y_1 = \frac{5}{9}$ un $y_2 = 0$.




**1.7. zīm.**

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{2} dx \int\limits_{2x^2-5x+2}^{-x^2+2x} dy = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{2} y\Big|_{2x^2-5x+2}^{-x^2+2x} dx =$$

$$= \int\limits_{\frac{1}{3}}^{2} (-x^2 + 2x - 2x^2 + 5x - 2)dx = \int\limits_{\frac{1}{3}}^{2} (-3x^2 + 7x - 2)dx =$$

$$= \left(-x^3 + \frac{7x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{\frac{1}{3}}^{2} = -8 + 14 - 4 + \frac{1}{27} - \frac{7}{18} + \frac{2}{3} = \frac{125}{54}.$$

**1.6. piezīme.** Ja $D$ ir I veida kopa (1.2. zīm.), t.i.,

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \big|\ a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\right\},$$

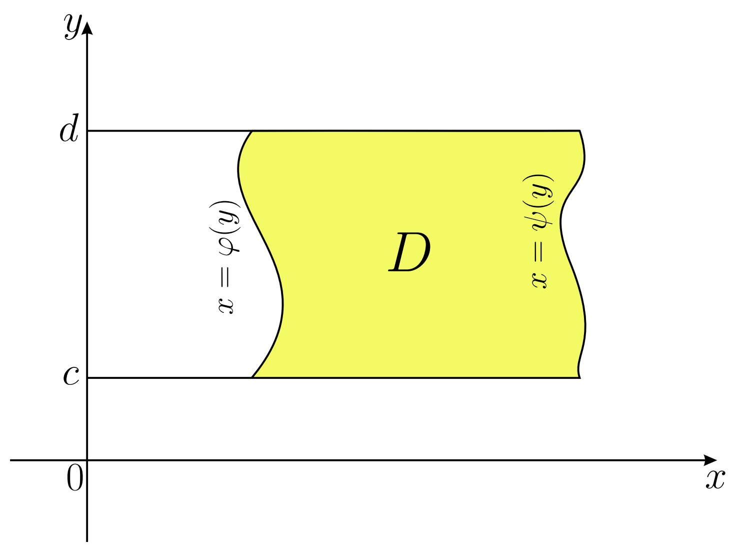
pie tam $g(x), h(x)$ ir nepārtrauktas funkcjas intervālā $[a, b]$, tad tās laukumu var aprēķināt

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{h(x)} dy = \int\limits_a^b dxy\Big|_{g(x)}^{h(x)} = \int\limits_a^b \big(h(x) - g(x)\big)dx.$$

Tika iegūta jau iepriekš zināmā laukuma aprēķināšanas formula ar noteikto integrāli.

Ja $D$ ir **II veida kopa**, t.i., plaknes figūra, kuru ierobežo taisnes $y = c$, $y = d$ $(c < d)$ un intervālā $[c, d]$ nepārtrauktu funkciju $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$ $\big(\varphi(y) \le \psi(y)\big)$ grafiki (1.8. zīm.), tad iegūst

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx.$$




**1.8. zīm.**

**1.7. piezīme.**

1. Ja $D$ vienlaicīgi ir gan I veida, gan II veida kopa, tad ir spēkā formula
$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx.$$
Šī formula izsaka **integrācijas secības maiņu** atkārtotajā integrālī.

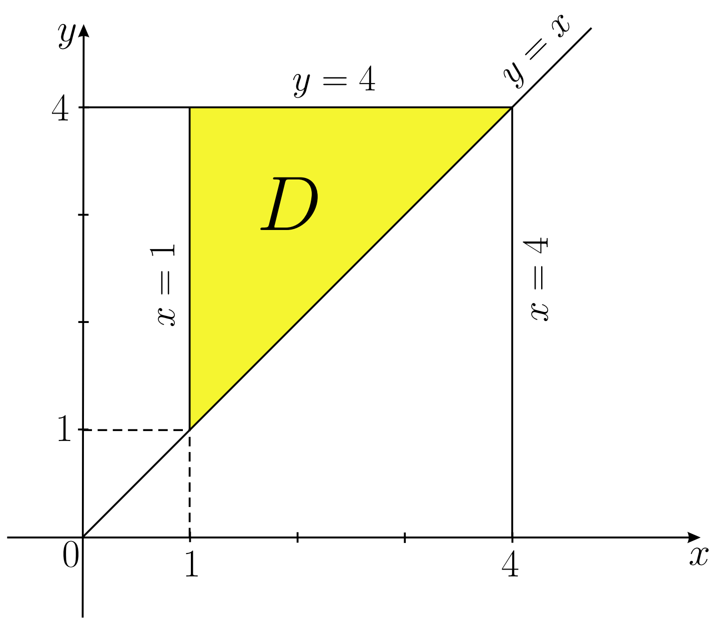
2. Ja $D$ nav ne I veida, ne II veida kopa, tad to sadala galīga skaita šādās kopās un divkāršo integrāli (saskaņā ar integrāļa aditīvo īpašību) uzraksta kā atbilstošu integrāļu summu.

**1.4. piemērs.** Uzrakstīt līniju vienādojumus, kuras ierobežo integrācijas apgabalu, uzzīmēt šo apgabalu un mainīt integrācijas kārtību.

1. $\int\limits_1^4 dx \int\limits_x^4 f(x,y)dy$;

2. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{\frac{1}{2}x^2}^{\frac{1}{2}x+1} f(x,y)dy$.

1. Līniju vienādojumus atrod, izmantojot atkārtotā integrāļa integrācijas robežas: $x = 1, x = 4, y = x, y = 4$. Integrācijas apgabals $D$ (1.9. zīm.) ir gan I veida, gan II veida kopa.



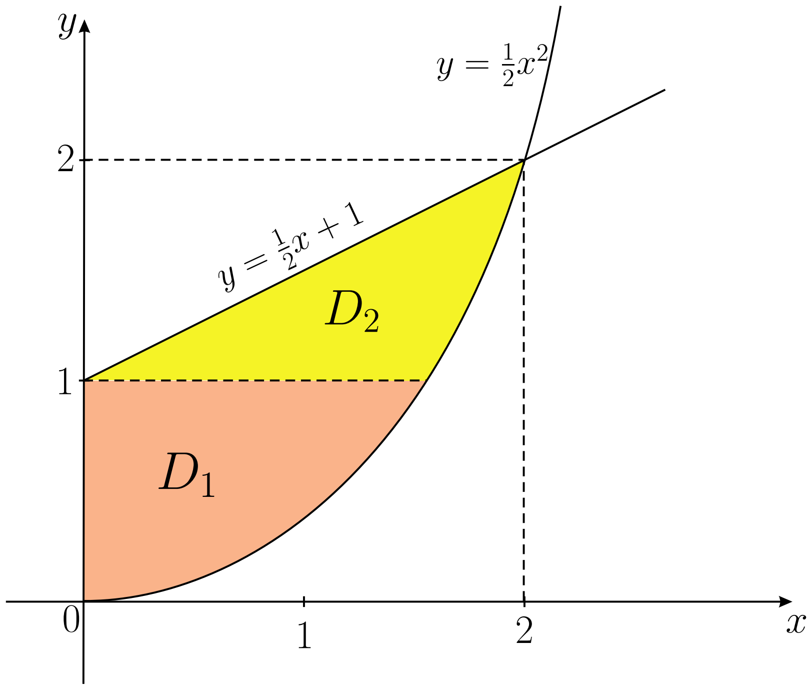

**1.9. zīm.**

Otra atkārtotā integrāļa integrācijas robežas: $y = 1$, $y = 4$, $x = 1$, $x = y$. Tādējādi šis atkārtotais integrālis ir

$$\int\limits_1^4 dy \int\limits_1^y f(x,y)dx.$$

2. Līniju vienādojumi $x = 0, x = 2, y = \frac{1}{2}x^2, y = \frac{1}{2}x + 1$. Integrācijas apgabals $D$ (1.10. zīm.) šoreiz nav II veida kopa, bet to var sadalīt divās II veida kopās $D_1$ un $D_2$.

Apgabalā $D_1$ atkārtotā integrāļa integrācijas robežas ir: $y = 0$, $y = 1$, $x = 0$, $x = \sqrt{2y}$, bet apgabalā $D_2$: $y = 1$, $y = 2$, $x = 2y-2$,




**1.10. zīm.**

$x = \sqrt{2y}$. Tādējādi iegūst šādu atkārtotu integrāļu summu

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{2y}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{2y-2}^{\sqrt{2y}} f(x,y)dx.$$

**1.8. piezīme.** Skaitļojot divkāršu integrāli, ir svarīgi paredzēt, ar kuru atkārtotu integrāli to izteikt. No izdarītās izvēles bieži ir atkarīgs atkārtotu integrāļu skaits un iekšējā integrāļa aprēķināšanas paņēmiens.

**1.5. piemērs.** Aprēķināt $\iint\limits_D xe^{xy}dxdy$, ja $D$ ierobežo līnijas $x = 0$, $x = 1, y = -1, y = 0$.

Šoreiz integrācijas apgabals $D$ ir kvadrāts, kas ir gan I veida, gan II veida kopa. Tomēr šoreiz ir izdevīgi iekšējā integrālī integrēt pēc $y$, t.i.,

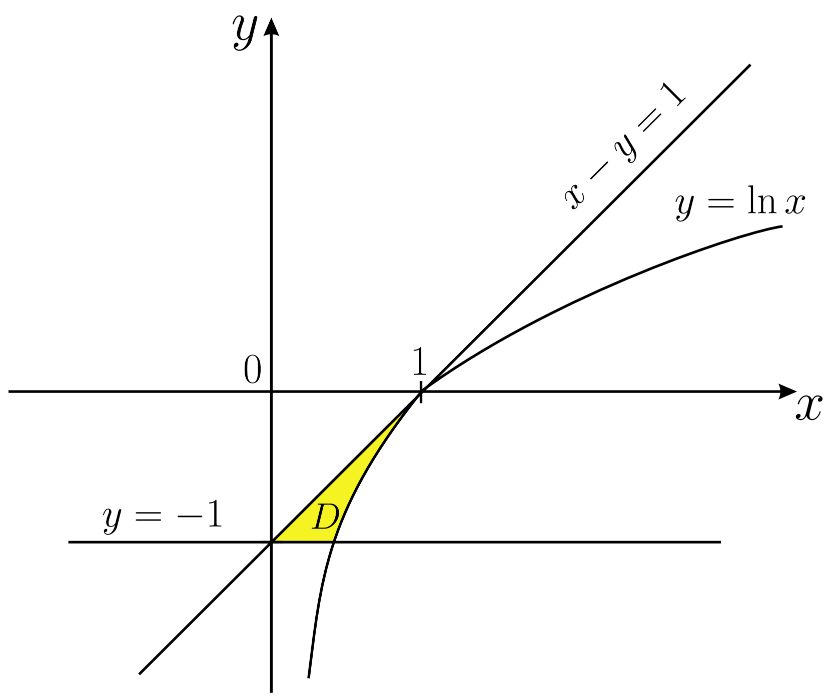
$$\iint\limits_D xe^{xy}dxdy = \int_0^1 xdx \int_{-1}^0 e^{xy}dy = \int_0^1 xdx \frac{e^{xy}}{x}\bigg|_{-1}^0 =$$

$$= \int_0^1 (e^0 - e^{-x})dx = (x + e^{-x})\bigg|_0^1 = 1 + e^{-1} - e^0 = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Ja būtu izvēlējušies otru atkārtotu integrāli, tad, integrējot iekšējo integrāli, būtu jāintegrē parciāli.

**1.6. piemērs.** Aprēķināt $\iint\limits_D dxdy$, ja $D$ ierobežo līnijas $y = \ln x$, $x - y = 1$, $y = -1$.

Attēlo apgabalu $D$ (1.11. zīm.).




**1.11. zīm.**

Šoreiz

$$\iint\limits_D dxdy = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y+1}^{e^y} dx = \int\limits_{-1}^{0} x\Big|_{y+1}^{e^y} dy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{0} (e^y - y - 1)dy = \left(e^y - \frac{y^2}{2} - y\right)\Bigg|_{-1}^{0} = 1 - e^{-1} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}.$$

Ja būtu izvēlējušies otru atkārtotu integrāli, tad integrācijas apgabals būtu jāsadala divās daļās un vajadzētu parciāli integrēt $\ln x$. Starp citu, aprēķinātais divkāršais integrālis izsaka $D$ laukumu.

# 2. nodaļa

# MAINĪGO AIZVIETOŠANA DIVKĀRŠAJĀ INTEGRĀLĪ

## 2.1. Līklīniju koordinātas plaknē

Apgabalā $D'$ definē divas divu mainīgo funkcijas $x(u,v)$, $y(u,v)$ un šīm funkcijām apgabalā $D'$ eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi $x'_u$, $x'_v$, $y'_u$, $y'_v$. Pie tam sistēma

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

$uOv$ plaknes apgabalu $D'$ savstarpēji viennozīmīgi attēlo par $xOy$ plaknes apgabalu $D$. Tas nozīmē, ka katram punktam $M'(u,v) \in D'$ atbilst viens noteikts punkts $M(x,y) \in D$ un otrādi. Punkta $M$ stāvokli $xOy$ plaknē pilnīgi nosaka tā koordinātas $x, y$. Izmantojot minēto sistēmu, var teikt, ka šī punkta stāvokli $xOy$ plaknē arī pilnīgi nosaka $u, v$, kas ir punkta $M'$ koordinātas.

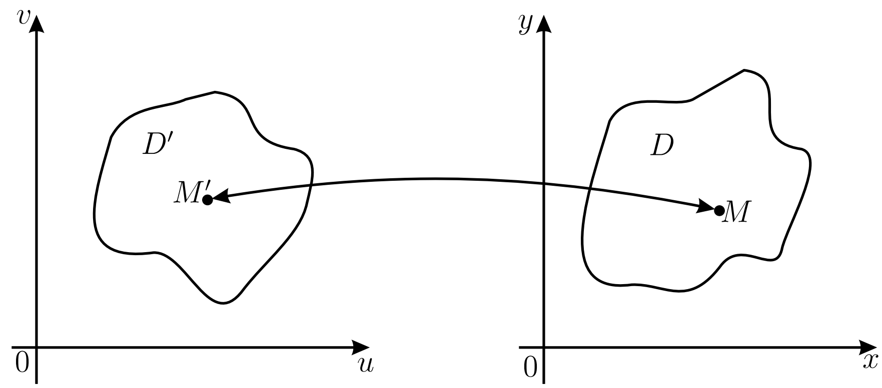
Ja $x, y$ sauc par punkta $M$ koordinātām, tad $u, v$ sauc par šī punkta **līklīniju koordinātām**.

Ja funkciju sistēmā

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

vienu argumentu, piemēram, $v$ fiksē, t.i., izvēlas $v = v_1$ - const, tad $xOy$ plaknē iegūst kādu līniju, kuras parametriskais vienādojums ir

$$\begin{cases} x = x(u,v_1), \\ y = y(u,v_1), \end{cases}$$



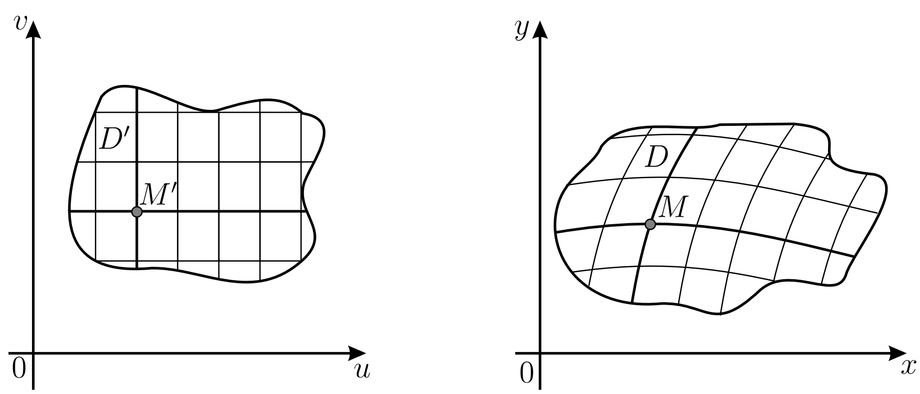

**2.1. zīm.**

kur $u$ ir parametrs. Tādējādi $uOv$ horizontālā taisne $v = v_1$ tiek attēlota par kaut kādu līniju $xOy$ plaknē. Analogi vertikālā taisne $u = u_1$ - const tiek attēlota par $xOy$ plaknes līniju

$$\begin{cases} x = x(u_1, v), \\ y = y(u_1, v), \end{cases}$$

kur $v$ ir parametrs.

Iegūtās līnijas ($xOy$ plaknē) sauc par **koordinātu līnijām**. Taisns koordinātu tīkls $uOv$ plaknē tiek attēlots par līklīniju koordinātu tīklu $xOy$ plaknē (2.2. zīm.), pie tam caur katru apgabala $D$ punktu iet pa vienai katras saimes koordinātu līnijai.

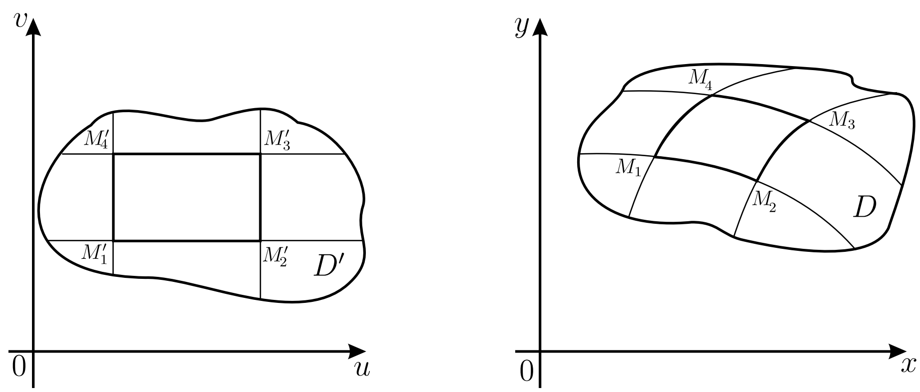



**2.2. zīm.**

## 2.2. Divkāršais integrālis līklīniju koordinātās

Apgabalā $D'$ apskata kādu četrstūri $M_1'M_2'M_3'M_4'$, kura virsotņu koordinātas $M_1'(u,v)$, $M_2'(u+\Delta u, v)$, $M_3'(u+\Delta u, v+\Delta v)$, $M_4'(u, v+\Delta v)$, kur $u$ -

const, $v$ - const un $\Delta u > 0$, $\Delta v > 0$. Šī taisnstūra laukums $\Delta S' = \Delta u \cdot \Delta v$. Šim taisnstūrim $xOy$ plaknē atbilst līklīniju četrstūris $M_1M_2M_3M_4$, kura laukumu apzīmē ar $\Delta S$. (2.3. zīm.)




**2.3. zīm.**

Līklīniju četrstūra $M_1M_2M_3M_4$ virsotņu koordinātas ir

$$\begin{aligned}
&M_1\big(x(u,v), y(u,v)\big),\\
&M_2\big(x(u+\Delta u,v), y(u+\Delta u,v)\big),\\
&M_3\big(x(u+\Delta u,v+\Delta v), y(u+\Delta u,v+\Delta v)\big),\\
&M_4\big(x(u,v+\Delta v), y(u,v+\Delta v)\big).
\end{aligned}$$

Lai aprēķinātu šī līklīniju četrsstūra laukumu, aizstāj to ar paralelogramu, kas konstruēts uz vektoriem $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$. Izmantojot vektoriālā reizinājuma moduļa ģeometrisko interpretāciju, var teikt, ka paralelograma laukums un aptuveni arī līklīniju četrstūra laukums ir $\left|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4}\right|$.

Atrod vektoru $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_4}$ koordinātas

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_1M_2} &= \big\{x(u+\Delta u,v) - x(u,v), y(u+\Delta u,v) - y(u,v)\big\},\\
\overrightarrow{M_1M_4} &= \big\{x(u,v+\Delta v) - x(u,v), y(u,v+\Delta v) - y(u,v)\big\}.
\end{aligned}$$

Pārveido šo vektoru koordinātu izteiksmes. Tā kā

$$\begin{aligned}
x(u+\Delta u,v) - x(u,v) &= \Delta_u x \approx d_u x = x'_u \Delta u,\\
y(u+\Delta u,v) - y(u,v) &= \Delta_u y \approx d_u y = y'_u \Delta u,\\
x(u,v+\Delta v) - x(u,v) &= \Delta_v x \approx d_v x = x'_v \Delta v,\\
y(u,v+\Delta v) - y(u,v) &= \Delta_v y \approx d_v y = y'_v \Delta v,
\end{aligned}$$

tad aptuveni

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_1M_2} &= \left\{x'_u \Delta u, y'_u \Delta u\right\},\\
\overrightarrow{M_1M_4} &= \left\{x'_v \Delta v, y'_v \Delta v\right\}.
\end{aligned}$$

Tādējādi

$$\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_2} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x'_u\Delta u & y'_u\Delta u & 0 \\ x'_v\Delta v & y'_v\Delta v & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{k} \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \Delta u\Delta v,$$

bet

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_2}\right| = \quad \mathrm{mod} \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \Delta u\Delta v.$$

**2.1. definīcija.** Determinantu

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$$

sauc par funkciju sistēmas

$$\begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

**Jakobi**[1] **determinantu** jeb **jakobiāni**.

Tādējādi līklīniju četrsstūra $M_1M_2M_3M_4$ laukums

$$\Delta S \approx S_{\text{paralelogr.}} \approx |J|\Delta u\Delta v = |J|\Delta S'.$$

Starp citu, parciālie atvasinājumi $x'_u$, $x'_v$, $y'_u$, $y'_v$ un arī Jakobi determinanta $J$ vērtība ir aprēķināta punktā $M'_1(u,v)$.

Izrādās, ka taisnstūrī $M'_1M'_2M'_3M'_4$ eksistē punkts $M'(\overline{u},\overline{v})$, kurā, atrodot jakobiāņa vērtību $J(\overline{u},\overline{v})$, ir spēkā precīzā vienādība

$$\Delta S = |J(\overline{u},\overline{v})|\, \Delta u\Delta v.$$

Šim punktam atbilst $xOy$ plaknes līklīniju četrsstūra $M_1M_2M_3M_4$ punkts $M(\overline{x},\overline{y})$. Veidojot divkārša integrāļa integrālsummu par starppunktiem apgabala $D$ katrā daļā $D_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ izvēlas tieši šādus punktus $M\left(\overline{x}_i,\overline{y}_i\right)$, pie tam

$$\overline{x}_i = x\left(\overline{u}_i,\overline{v}_i\right), \quad \overline{y}_i = y\left(\overline{u}_i,\overline{v}_i\right).$$

[1]K. Jakobi (1804 - 1851) - vācu matemātiķis.

Tātad

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\left(\overline{x}_i,\overline{y}_i\right)\Delta S_i =$$
$$= \lim_{\lambda'\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\Big(x\left(\overline{u}_i,\overline{v}_i\right), y\left(\overline{u}_i,\overline{v}_i\right)\Big)\left|J\big(\overline{u}_i,\overline{v}_i\right|\Delta u_i\Delta v_i =$$
$$= \lim_{\lambda'\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\Big(x\left(\overline{u}_i,\overline{v}_i\right), y\left(\overline{u}_i,\overline{v}_i\right)\Big)\left|J\big(\overline{u}_i,\overline{v}_i\right|\Delta S_i' =$$
$$= \iint\limits_{D'} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|J(u,v)\right| dudv,$$

kur $\lambda$ ir apgabala $D$ sasmalcinājuma solis, bet $\lambda'$ ir apgabala $D'$ atbilstošā sasmalcinājuma solis. Tika iegūta mainīgo aizvietošanas divkāršajā integrālī formula

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f\big(x(u,v),y(u,v)\big)\left|J(u,v)\right| dudv.}$$

**2.1. piezīme.**

1. Mainīgā aizvietošanu noteiktajā integrālī lietoja, lai vienkāršotu zemintegrāļa funkciju. Divkāršajā integrālī svarīgāk par zemintegrāļa funkcijas vienkāršošanu ir integrācijas apgabala vienkāršošana.
2. No ģeometriskā viedokļa Jakobi determinanta modulis ir koeficients, izsakot $xOy$ plaknes laukuma elementu caur $uOv$ plaknes laukuma elementu.

## 2.3. Divkāršais integrālis polārajās koordinātās

Apskata sistēmu

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Šīs sistēmas funkcijām eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi

$$x'_\rho = \cos\varphi, \quad x'_\varphi = -\rho\sin\varphi, \quad y'_\rho = \sin\varphi, \quad y'_\varphi = \rho\cos\varphi$$

un Jakobi determinants

$$J(\rho,\varphi)=\begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix}=\rho\cos^2\varphi+\rho\sin^2\varphi=\rho.$$

Viegli pamanīt, ka šīs formulas $\rho O\varphi$ plaknes taisnstūra $0\le\rho\le a$, $0\le\varphi\le 2\pi$ iekšieni savstarpēji viennozīmīgi attēlo par plaknes $xOy$ riņķa $x^2+y^2\le a^2$ iekšieni bez $Ox$ ass nogriežņa $0\le x\le a$, pie tam $xOy$ plaknes punkta Dekarta koordinātas ir $x,y$, bet tām atbilstošās vērtības $\rho,\varphi$ ir šī punkta polārās koordinātas. Izmantojot sistēmu

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi, \end{cases}$$

divkāršajā integrālī $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ pāriet uz polāro koordinātu sistēmu un iegūst šādu formulu

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\varphi d\rho.}$$

Pāreja uz polārajām koordinātām ir izdevīga, ja integrēšanas apgabals ir riņķis vai tā daļas vai arī zemintegrāļa funkcija ir izteiksmes $x^2+y^2$ funkcija. Ja integrēšanas apgabalu ierobežo elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

tad izdevīgi ir pāriet uz **vispārinātajām polārām** koordinātām, ievērojot, ka $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$. Šādās līklīniju koordinātās elipses vienādojums ir $\rho=1$, bet Jakobi determinants $J(\rho,\varphi)=ab\rho$.

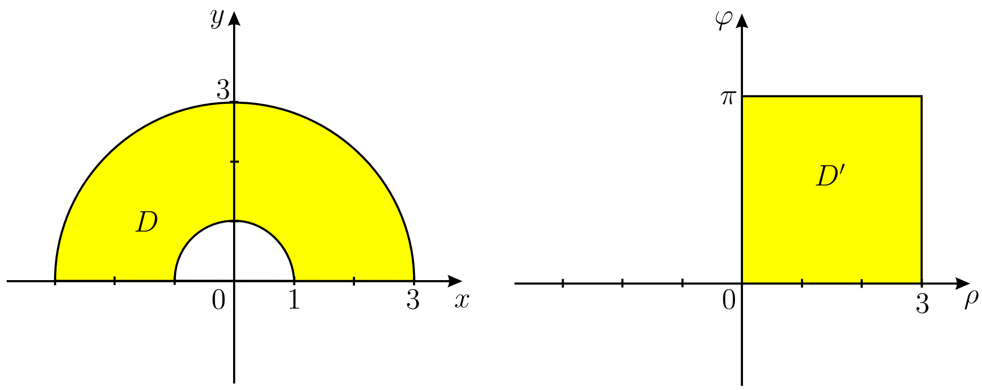
**2.1. piemērs.** Aprēķināt integrāli

$$\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2},$$

ja $D$ ierobežo līnijas $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=9$, $y\ge 0$.

Vispirms riņķa līniju vienādojumus uzraksta polārajā koordinātu sistēmā, izmantojot pārejas formulas $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Tā kā

$$x^2+y^2=\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=\rho^2$$




**2.4. zīm.**

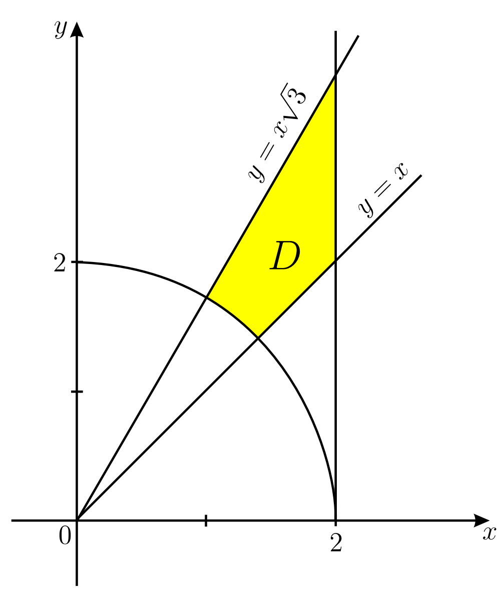
un $\rho \geq 0$, tad riņķa līniju vienādojumi ir $\rho = 1$ un $\rho = 3$. Koordinātu sistēmā $\rho O \varphi$ apgabals $D'$ ir taisnstūris $1 \leq \rho \leq 3$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ (2.4. zīm.).

Līdz ar to

$$\iint_D \frac{dxdy}{x^2+y^2} = \iint_{D'} \frac{\rho d\varphi d\rho}{\rho^2} = \int_0^\pi d\varphi \int_1^3 \frac{d\rho}{\rho} = \int_0^\pi d\varphi \ln \rho \Big|_1^3 =$$

$$= \int_0^\pi (\ln 3 - \ln 1) d\varphi = \ln 3 \cdot \varphi \Big|_0^\pi = \pi \ln 3.$$

**2.2. piemērs.** Aprēķināt integrāli $\iint_D dxdy$, ja $D$ ierobežo līnijas $x^2 + y^2 = 4$, $x = 2$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$.




**2.5. zīm.**

Koordinātu sistēmā $xOy$ attēlo $D$, kuru ierobežo riņķa līnija $x^2+y^2=4$ un taisnes $x=1$, $y=x$, $y=x\sqrt{3}$ (2.5. zīm.)

Polārajās koordinātās riņķa līnijas $x^2+y^2=4$ vienādojums ir $\rho=2$, bet taisnes $x=2$ vienādojums ir $\rho=\frac{2}{\cos\varphi}$. Koordinātu sistēmā $\rho O\varphi$ iegūst apgabalu $D'$, kuram $2\le\rho\le\frac{2}{\cos\varphi}$, bet $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$. Tādējādi

$$\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D'}\rho d\varphi d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int\limits_2^{\frac{2}{\cos\varphi}}\rho d\rho=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\frac{\rho^2}{2}\bigg|_2^{\frac{2}{\cos\varphi}}=$$

$$=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{2}{\cos^2\varphi}-2\right)d\varphi=(2\operatorname{tg}\varphi-2\varphi)\bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}=$$

$$=2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=2\left(\sqrt{3}-1-\frac{\pi}{12}\right)=2(\sqrt{3}-1)-\frac{\pi}{6}.$$

Starp citu šī divkārša integrāļa vērtība izsaka $D$ laukumu.

**2.3. piemērs.** Aprēķināt laukumu figūrai, kuru ierobežo elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Šoreiz ir izdevīgi pāriet uz vispārinātām polārām koordinātām, ievērojot, ka $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$. Elipses vienādojums ir $\rho=1$, bet Jakobi determinants $J(\rho,\varphi)=ab\rho$. Laukums

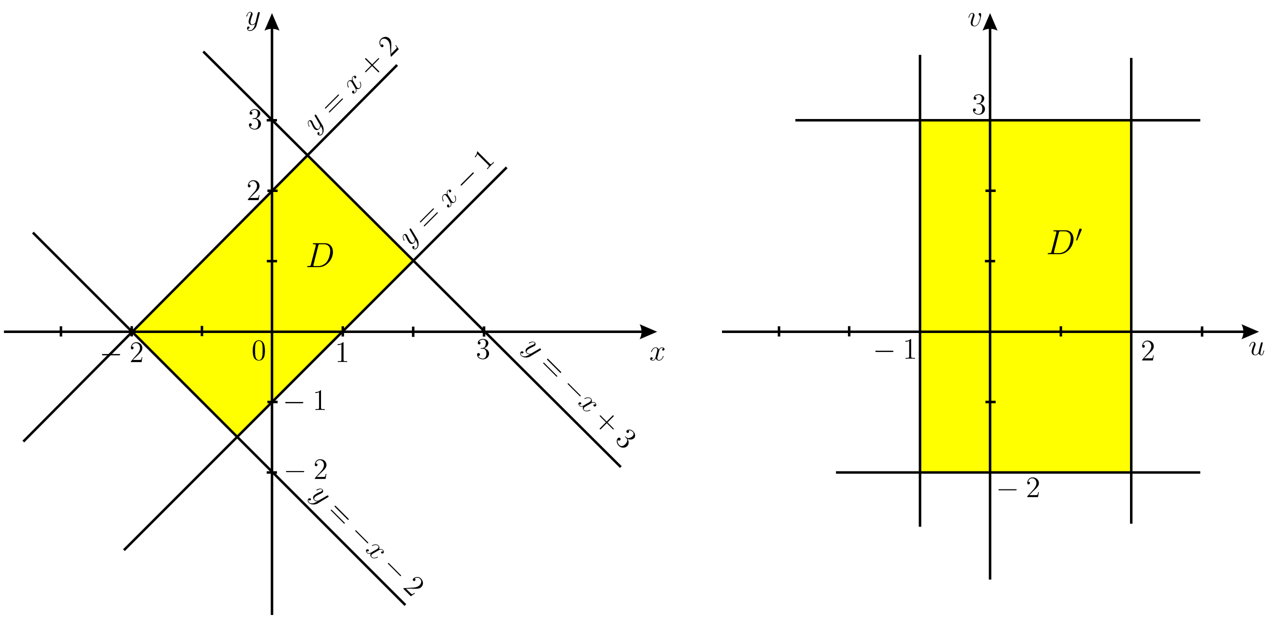
$$S=\iint\limits_D dxdy=\iint\limits_{D'}ab\rho d\varphi d\rho=ab\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\rho d\rho=$$

$$=ab\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^1=\frac{1}{2}ab\varphi\bigg|_0^{2\pi}=\pi ab.$$

**2.4. piemērs.** Aprēķināt $\iint\limits_D(x+y)dxdy$, ja $D$ ierobežo taisnes $y=x-1$, $y=x+2$, $y=-x-2$, $y=-x+3$.

Šoreiz pāriet uz līklīniju koordinātām, uzskatot, ka $u=y-x$, $v=y+x$. Taisnes $y=x-1$ un $y=x+2$ tiek attēlotas atbilstoši par taisnēm

$u = -1$ un $u = 2$, bet taisnes $y = -x - 2$ un $y = -x + 3$ - atbilstoši par taisnēm $v = -2$ un $v = 3$. Dotais apgabals $D$ un tam atbilstošais apgabals $D'$ attēloti (2.6. zīm.)




**2.6. zīm.**

No sistēmas $\begin{cases} u = y - x, \\ v = y + x \end{cases}$ izsaka $x$ un $y$:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(v - u), \\ y = \frac{1}{2}(u + v). \end{cases}$$

Atrod Jakobi determinantu

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Tādējādi

$$\iint\limits_{D} (x + y)dxdy = \iint\limits_{D'} v\frac{1}{2}dudv = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2} du \int\limits_{-2}^{3} vdv =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2} du \frac{v^2}{2}\Big|_{-2}^{3} = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{2} \left(\frac{9}{2} - \frac{4}{2}\right) du = \frac{5}{4}u\Big|_{-1}^{2} = \frac{15}{4}.$$

# 3. nodaļa

# DIVKĀRŠĀ INTEGRĀĻA LIETOJUMI

## 3.1. Tilpuma aprēķināšana

Kā tika atzīmēts iepriekš, ar divkāršo integrāli var aprēķināt slēgtā un kvadrējamā kopā $D$ nenegatīvas un nepārtrauktas funkcijas $f(x, y)$ zemgrafika tilpumu, pie tam

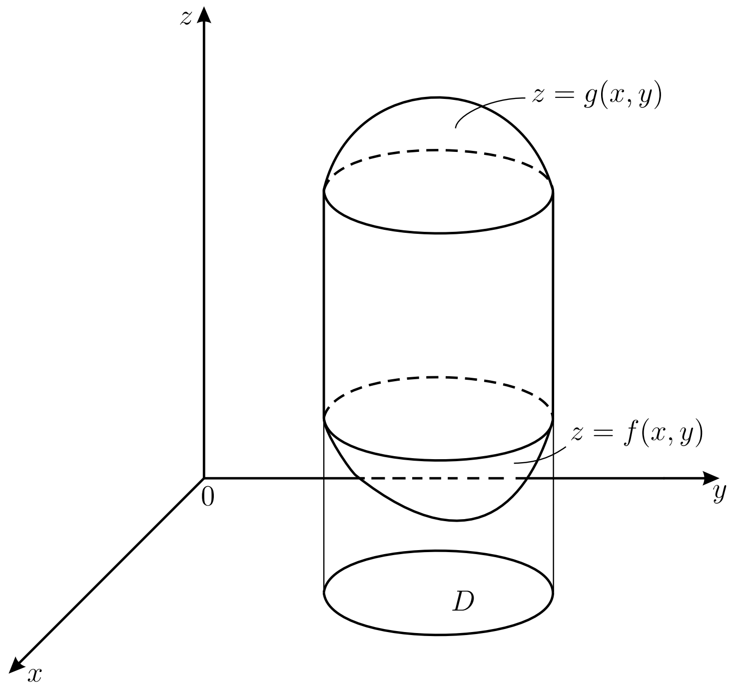
$$V = \iint\limits_D f(x, y)dxdy.$$

Tagad apskata ķermeni, kuru no apakšas ierobežo virsma $z = f(x, y)$, no augšas - virsma $z = g(x, y)$, pie tam $0 \leq f(x, y) \leq g(x, y)$ un funkcijas $f(x, y)$, $g(x, y)$ - nepārtrauktas slēgtā un kvadrējamā kopā $D$. No sāniem ķermeni ierobežo $Oz$ asij paralēla cilindriska virsma, kas iet caur $D$ robežu (3.1. zīm.)

Šāda ķermeņa tilpums

$$V = \iint\limits_D g(x, y)dxdy - \iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_D \Big(g(x, y) - f(x, y)\Big)dxdy.$$

Viegli pamatot, ka šī formula ir spēkā, ja ķermenis daļēji vai pilnīgi atrodas zem $xOy$ plaknes. Svarīgi ir tikai, lai $f(x, y) \leq g(x, y)$ visiem $(x, y) \in D$.

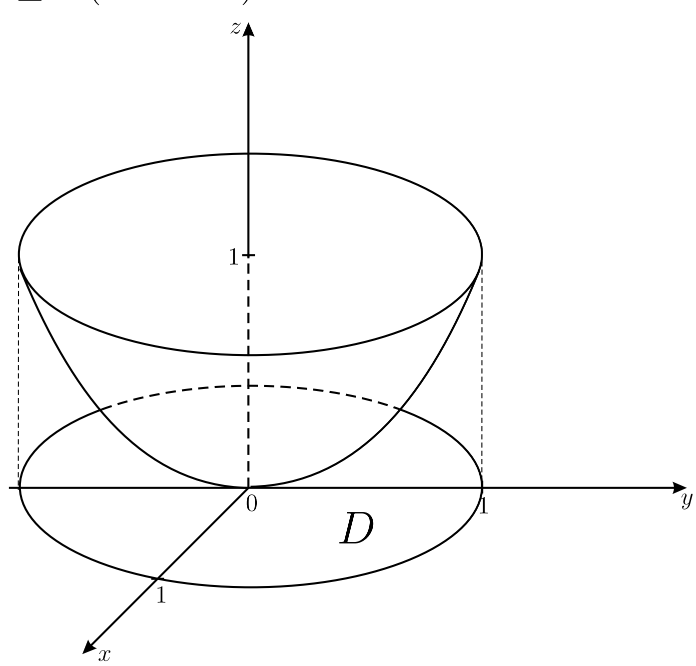



**3.1. zīm.**

**3.1. piemērs.** Aprēķināt tilpumu ķermenim, kuru ierobežo virsmas

$$z = x^2 + y^2,\ z = 1.$$

Rotācijas paraboloīds $z = x^2 + y^2$ šķeļas ar plakni $z = 1$ pa vienības riņķa līniju $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$. Ķermeņa projekcija uz $xOy$ plakni ir riņķis $x^2 + y^2 \leq 1$ (3.2. zīm.)




**3.2. zīm.**

Ķermeni no augšas ierobežo plakne $z = 1$, bet no apakšas - virsma $z = x^2 + y^2$, tāpēc tā tilpums

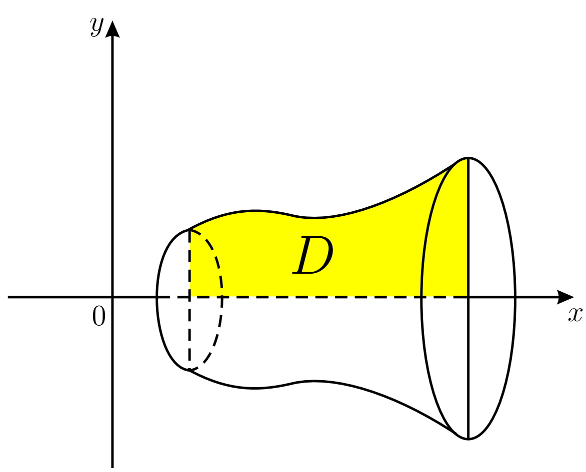
$$V = \iint\limits_D (1 - x^2 - y^2)dxdy.$$

Pārējot uz polārām koordinātām, iegūst

$$V = \iint\limits_{D'} (1 - \rho^2)\rho d\varphi d\rho = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (\rho - \rho^3)d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) d\varphi = \frac{1}{4}\varphi\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Apskata ķermeni, kurš rodas līklīnijas trapecei $D$ (3.3. zīm.) rotējot ap $Ox$ asi.




**3.3. zīm.**

Funkcijas $f(x)$ grafiks apraksta virsmu, kuras vienādojums ir

$$y^2 + z^2 = f^2(x).$$

Ja apskata iegūtā rotācijas ķermeņa to daļu, kura atrodas I oktantā ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$), tad tās projekcija uz $xOy$ plakni ir līklīnijas trapece $D$. Šo ķermeni no augšas ierobežo virsma $z = \sqrt{f^2(x) - y^2}$. Ievērojot rotācijas ķermeņa simetriskumu pret atbilstošām koordinātu plaknēm, tā tilpums

$$V = 4\iint\limits_D \sqrt{f^2(x)-y^2}dxdy = 4\int\limits_a^b dx \int\limits_0^{f(x)} \sqrt{f^2(x)-y^2}dy =$$

$$= 4\int\limits_a^b dx \left(\frac{f^2(x)}{2}\arcsin\frac{y}{f(x)} + \frac{y}{2}\sqrt{f^2(x)-y^2}\right)\Bigg|_0^{f(x)} =$$

$$= 4\int\limits_a^b \frac{f^2(x)}{2}\arcsin 1 dx = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Aprēķinot iekšējo integrāli, tika izmantota formula

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

Rezultātā tika iegūta rotācijas ķermeņa tilpuma aprēķināšanas formula ar noteikto integrāli.

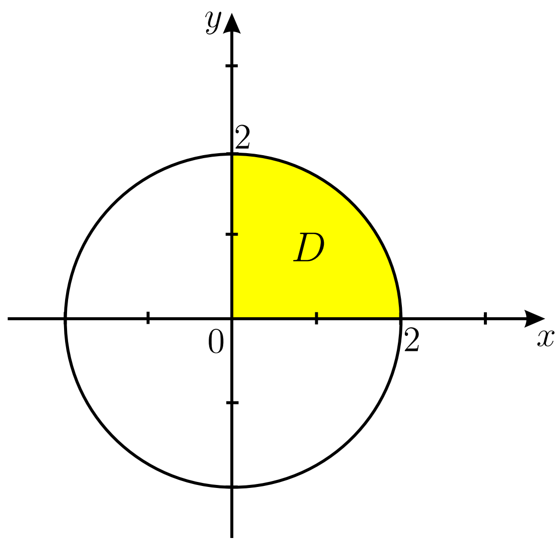
**3.1. piezīme.**

1. Atsevišķos gadījumos pašu ķermeni nezīmē, bet zīmē tikai šī ķermeņa projekciju uz koordinātu plakni. Ja ķermeni projicē, piemēram, uz $xOy$ plakni, tad svarīgi ir noskaidrot, kādas virsmas to ierobežo no augšas un no apakšas.
2. Bieži, ievērojot ķermeņa simetriskumu pret kādu no koordinātu plaknēm, ar divkāršo integrāli aprēķina šī ķermeņa atbilstošās daļas tilpumu. Visa ķermeņa tilpumu iegūst, reizinot šīs daļas tilpumu ar atbilstošu koeficientu.

**3.2. piemērs.** Aprēķināt tilpumu ķermenim, kuru ierobežo $z = 4 - x^2$, $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$.

Ķermeni no apakšas ierobežo $xOy$ plakne, no sāniem - cilindriska virsma $x^2 + y^2 = 4$ ar veiduli paralēlu $Oz$ asij, bet no augšas - paraboliskais cilindrs $z = 4 - x^2$ ar veiduli paralēlu $Oy$ asij. Šoreiz attēlo tikai ķermeņa projekciju uz $xOy$ plakni (3.4. zīm.).

Ķermeņa projekcija ir riņķis $x^2 + y^2 \leq 4$. (Paraboliskais cilindrs $z = 4 - x^2$ šķeļas ar $xOy$ plakni pa taisnēm $x = -2$, $x = 2$).




**3.4. zīm.**

Ievērojot to, ka ķermenis ir simetrisks attiecībā pret $xOz$ un $yOz$ plaknēm, tad var skaitļot tikai tā ceturtdaļas tilpumu (tās projekcija uz $xOy$ plakni ir $D$) un pēc tam iegūto rezultātu reizināt ar 4.

Ķermeņa tilpums

$$V = 4\iint\limits_{D}(4-x^2)dxdy = 4\iint\limits_{D'}(4-\rho^2\cos^2\varphi)\rho d\varphi d\rho =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 (4\rho-\rho^3\cos^2\varphi)d\rho = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\cos^2\varphi\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (8-4\cos^2\varphi)d\varphi = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \big(8-2(1+\cos 2\varphi)\big)d\varphi =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (6-2\cos 2\varphi)d\varphi = 4(6\varphi - \sin 2\varphi)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(6\cdot\frac{\pi}{2}-0\right) = 12\pi.$$

## 3.2. Plaknes figūras laukuma aprēķināšana

Kā tika atzīmēts iepriekš kvadrējamas figūras $D$ laukumu var aprēķināt ar divkāršo integrāli, pie tam

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

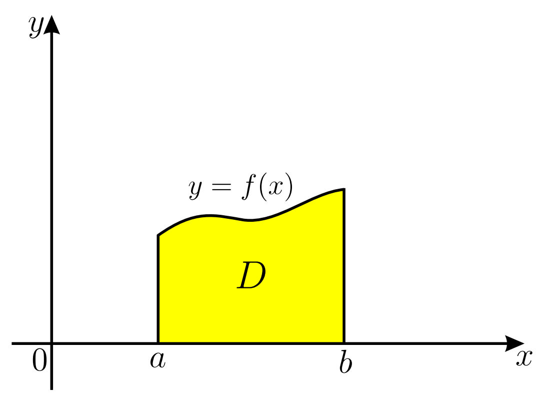
Ja $D$ ir līklīnijas trapece, t.i.,

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, a \leq x \leq b, \; 0 \leq y \leq f(x) \right\},$$

kur $f$ ir intervālā $[a,b]$ nepārtraukta funkcija (3.5. zīm.), tad $D$ laukumu var izteikt ar divkāršo integrāli

$$S = \iint\limits_D dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_0^{f(x)} dy = \int\limits_a^b dxy\Big|_0^{f(x)} = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Tika iegūta līklīnijas trapeces laukuma aprēķināšanas formula ar noteikto integrāli



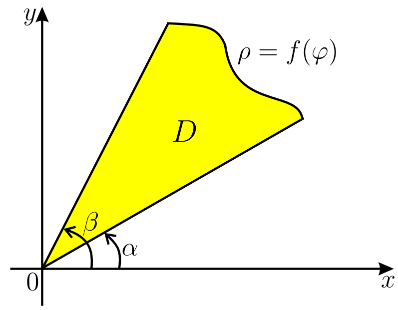

**3.5. zīm.**

Ja $D$ ir līklīniju sektors, t.i.,

$$D = \left\{ (\rho,\varphi) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, \alpha \leq \varphi \leq \beta, \;\; 0 \leq \rho \leq f(\varphi) \right\},$$

(3.6. zīm.), tad tā laukums

$$S = \iint\limits_D dxdy = \iint\limits_{D'} \rho d\varphi d\rho = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_0^{f(\varphi)} \rho d\rho = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{f(\varphi)} = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi.$$




**3.6. zīm.**

Tika iegūta līklīniju sektora laukuma aprēķināšanas formula ar noteikto integrāli.

**3.3. piemērs.** Aprēķināt laukumu figūrai, kuru ierobežo līkne

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \ a > 0.$$

Dotās līknes vienādojumu uzraksta polārajās koordinātās. Iegūst

$$\rho^4 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi).$$

Tātad $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$. Skaidrs, ka jābūt $\cos 2\varphi \geq 0$. Tas nozīmē, ka

$$-\frac{\pi}{4} + \pi k \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Tā kā līkne ir simetriska attiecībā pret koordinātu asīm (to var viegli saskatīt jau no sākotnējā līknes vienādojuma), tad figūras tai daļai, kura atrodas I kvadrantā, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, bet $0 \leq \rho \leq a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

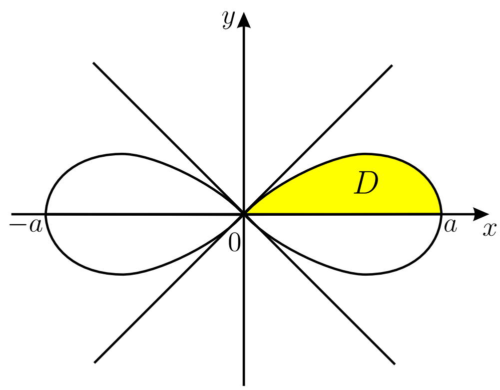
Līkne (un arī figūra) attēlota 3.7. zīm. Šādu līkni sauc par **Bernulli lemniskātu**[1].

Figūras laukums

$$S = 4\iint\limits_D dxdy = 4\iint\limits_{D'} \rho d\varphi d\rho = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho d\rho =$$

$$= 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} = 2a^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = a^2 \sin 2\varphi\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

[1]Gr. lēmniskos - lente.




**3.7. zīm.**

## 3.3. Virsmas laukums un tā aprēķināšana

Apskata virsmu $z = f(x, y)$, kur $f(x, y)$ ir apgabalā $D$ definēta funkcija, kurai šajā apgabalā eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$. Šai virsmai katrā tās punktā varēs konstruēt pieskarplakni.

Lai definētu minētās virsmas laukumu, vispirms izveido apgabala $D$ sasmalcinājumu elementārkopās $d_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ar sasmalcinājuma soli $\lambda$. Katrā no $d_k$ izvēlas pa patvaļīgam punktam $N_k(\xi_k, \eta_k)$. Šim punktam atbilstošais punkts uz virsmas $z = f(x, y)$ ir $M_k(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, kur $\zeta_k = f(\xi_k, \eta_k)$.

Punktā $M_k$ virsmai $z = f(x, y)$ konstruē pieskarplakni un konstruē taisnu cilindru, kuram par pamatu ir $d_k$. Atbilstošā cilindriskā virsma izgriež no virsmas elementu $g_k$, bet no pieskarplaknes - elementu $g'_k$ (3.8. zīm.).

Pieskarplaknes elements $g'_k$ var aptuveni aizstāt virsmas elementu $g_k$. Tas nozīmē, ka $g'_k$ laukumu $mg'_k$ var uzskatīt par virsmas elementa $g_k$ laukuma aptuveno vērtību, bet $\sum\limits_{k=1}^{n} mg'_k$ - par visas virsmas laukuma aptuveno vērtību. Tāpēc virsmas $z = f(x, y)$, kur $(x, y) \in D$, laukumu $S$ var definēt kā

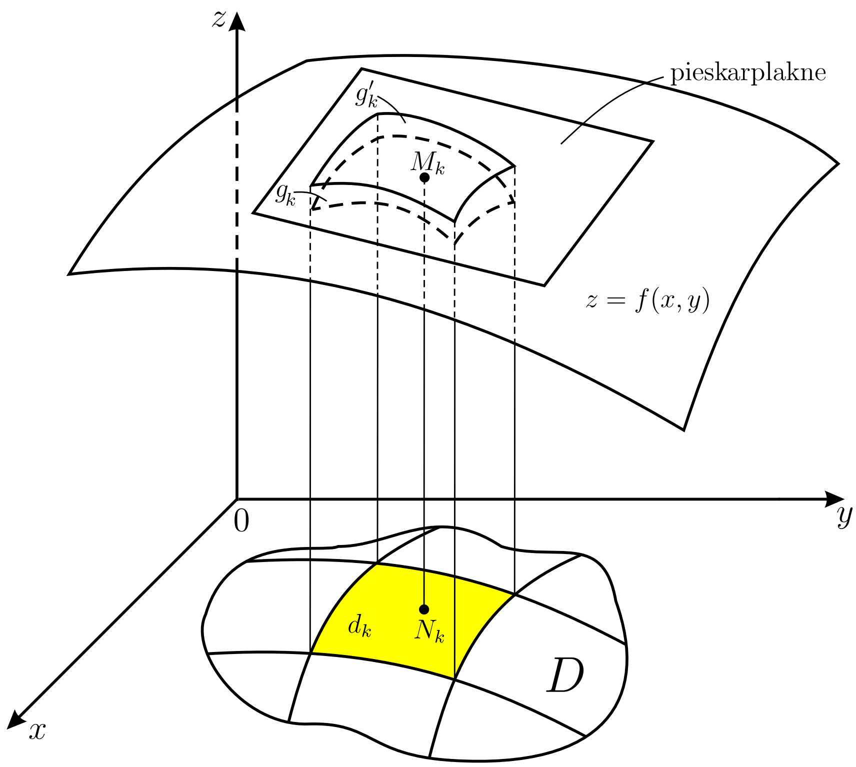
$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} mg'_k.$$

Tādējādi

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} mg'_k.$$

Elementa $g'_k$ laukumu var izteikt ar tā projekcijas uz $xOy$ plakni, t.i., ar $d_k$ laukumu

$$mg'_k = \frac{md_k}{\cos \gamma_k},$$




**3.8. zīm.**

kur $\gamma_k$ ir leņķis, kuru veido atbilstošā pieskarplakne ar $xOy$ plakni. Pieskarplaknes normāle ir

$$\overrightarrow{n}_k = \left\{ f_x'(\xi_k, \eta_k), f_y'(\xi_k, \eta_k), -1 \right\},$$

bet $xOy$ plaknes normāle $\overrightarrow{n}_0 = \{0, 0, -1\}$. Leņķis starp minētajām plaknēm ir leņķis starp to normālēm. Tāpēc

$$\cos \gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(\xi_k, \eta_k) + f_y'^2(\xi_k, \eta_k)}}.$$

Tātad

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_k, \eta_k) + f_y'^2(\xi_k, \eta_k)} m d_k.$$

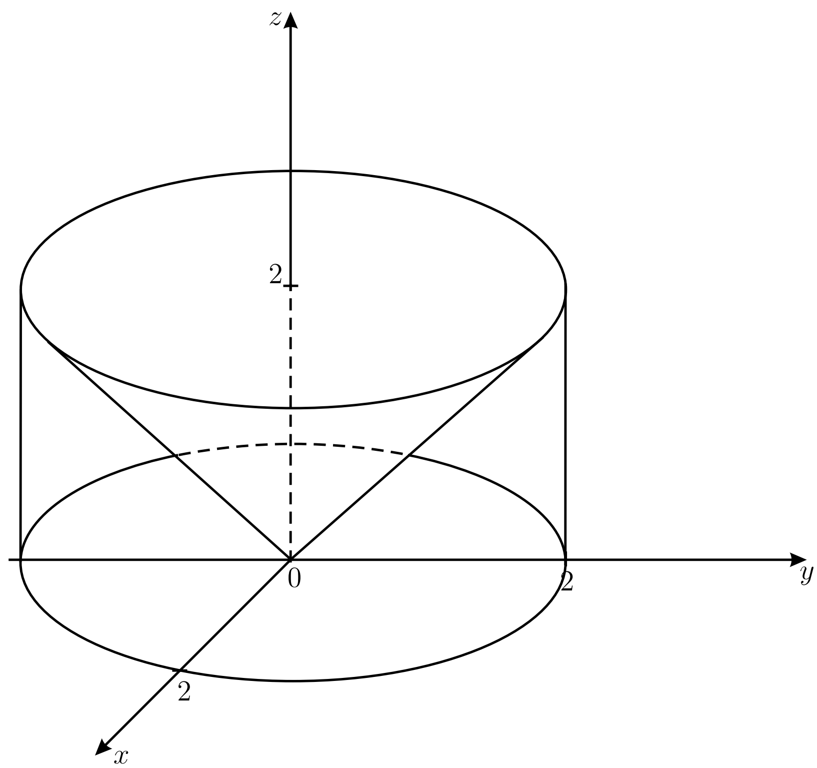
Šāda robeža eksistē un ir vienāda ar funkcijas $\sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)}$ divkāršo integrāli apgabalā $D$ (robeža eksistē, jo minētā funkcija ir nepārtraukta apgabalā $D$).

Tādējādi

$$\boxed{S = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2(x, y) + f_y'^2(x, y)} dx dy.}$$

**3.4. piemērs.** Aprēķināt virsmas laukumu konusa $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ daļai, kura atrodas cilindra $x^2 + y^2 = 4$ iekšpusē.

Šīs virsmas šķeļas pa riņķa līniju $x^2+y^2 = 4$, $z = 2$, bet konusa minētās daļas projekcija uz $xOy$ plakni ir riņķis $x^2 + y^2 \leq 4$ (3.9. zīm.).




**3.9. zīm.**

Atrod

$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad z'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}} = \sqrt{2}.$$

Skaitļojot virsmas laukumu, ievēro tās simetriskumu pret atbilstošajām koordinātu plaknēm un pāriet uz polārām koordinātām.

Tādējādi

$$S = \iint\limits_D \sqrt{2}dxdy = 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho =$$

$$= 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\rho^2}{2}\bigg|_0^2 = 8\sqrt{2}\varphi\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi\sqrt{2}.$$

Apskata virsmu, kura veidojas intervālā $[a, b]$ nepārtrauktas un nenegatīvas funkcijas $f(x)$ grafikam rotējot ap $Ox$ asi, pie tam funkcija ir nepārtraukti diferencējama šajā intervālā. Šīs rotācijas virsmas vienādojums ir $y^2 + z^2 = f^2(x)$. Ar divkāršo integrāli aprēķina tās laukumu.

Ievērojot virsmas simetriskumu attiecībā pret atbilstošajām koordinātu plaknēm, var skaitļot tās $\frac{1}{4}$ laukumu ($y \geq 0,\ z \geq 0$). Šoreiz

$z = \sqrt{f^2(x) - y^2}$ un šīs virsmas projekcija uz $xOy$ plakni ir līklīnijas trapece

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, a \leq x \leq b,\ \ 0 \leq y \leq f(x) \right\}.$$

Atrod

$$z'_x = \frac{f(x)f'(x)}{\sqrt{f^2(x) - y^2}},\quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{f^2(x) - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} = \sqrt{1 + \frac{f^2(x)f'^2(x)}{f^2(x) - y^2} + \frac{y^2}{f^2(x) - y^2}} = \frac{f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x) - y^2}}.$$

Visas rotācijas virsmas laukums

$$S = 4\iint\limits_D \frac{f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}}{\sqrt{f^2(x) - y^2}} dxdy =$$

$$= 4\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)} dx \int\limits_0^{f(x)} \frac{dy}{\sqrt{f^2(x) - y^2}} =$$

$$= 4\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)} dx \arcsin \frac{y}{f(x)}\bigg|_0^{f(x)} =$$

$$= 4\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)} \arcsin 1 dx =$$

$$= 2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Tika iegūta rotācijas virsmas laukuma aprēķināšanas formula ar noteikto integrāli.

## 3.4. Materiālās figūras masas un masas centra aprēķināšana

Apskata materiālu figūru $D$, kas no matemātiskā viedokļa ir kvadrējama figūra. Blīvumu katrā $D$ punktā nosaka nepārtraukta funkcija $\delta(x,y)$. Kopu $D$ sasmalcina apakškopās $d_1, d_2, \ldots, d_n$ ar sasmalcinājuma soli $\lambda$. Katrā no $d_k$ izvēlas pa patvaļīgam punktam $M_k(\xi_k, \eta_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Blīvumu katrā no $d_k$ uzskata par konstantu un vienādu ar blīvumu punktā $M_k$, t.i., $\delta(\xi_k, \eta_k)$. Daļiņas $d_k$ masa aptuveni ir $\delta(\xi_k, \eta_k) md_k$, kur $md_k$ - laukums $d_k$. Visas figūras $D$ masa aptuveni ir

$$\sum_{k=1}^{n} \delta(\xi_k, \eta_k) md_k.$$

Figūras masu $m$ definē kā

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \delta(\xi_k, \eta_k) md_k.$$

Šāda robeža eksistē, jo funkcija $\delta(x,y)$ ir nepārtraukta kopā $D$, pie tam šī robeža ir vienāda ar atbilstošu divkāršo integrāli. Tādējādi

$$\boxed{m = \iint\limits_D \delta(x,y)\,dxdy.}$$

Izveido šādas attiecības

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \delta(\xi_k, \eta_k) md_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \delta(\xi_k, \eta_k) md_k}, \quad \overline{y} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \eta_k \delta(\xi_k, \eta_k) md_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \delta(\xi_k, \eta_k) md_k}.$$

Šīs attiecības aptuveni izsaka figūras $D$ masas centra koordinātas. Figūras $D$ masas centra $C$ koordinātas $x_C$, $y_C$ definē kā robežas no šīm attiecībām, kad sasmalcinājuma solis $\lambda \to 0$. Tātad

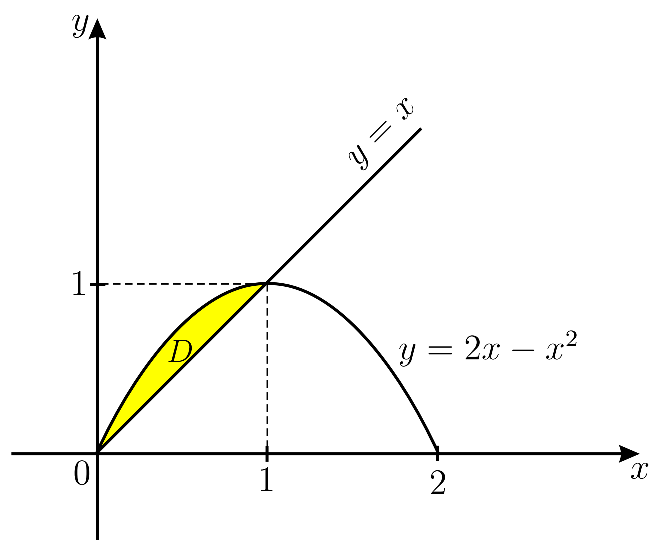
$$x_C = \lim_{\lambda \to 0} \overline{x} = \frac{\iint\limits_D x\delta(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_D \delta(x,y)\,dxdy}, \quad y_C = \lim_{\lambda \to 0} \overline{y} = \frac{\iint\limits_D y\delta(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_D \delta(x,y)\,dxdy}.$$

Šajās formulās saucēji izsaka figūras $D$ masu $m$, bet skaitītāji - spēka momentus attiecībā pret atbilstošām asīm. Konkrēti

$$M_x = \iint\limits_D y\delta(x,y)dxdy, \quad M_y = \iint\limits_D x\delta(x,y)dxdy.$$

**3.5. piemērs.** Aprēķināt plāksnītes $D$ masu un masas centru, ja figūru $D$ ierobežo līnijas $y = 2x - x^2$, $y = x$ un blīvums katrā $D$ punktā $\delta = x^2 + 2xy$.

Figūru $D$ ierobežo parabola $y = 2x - x^2$ un taisne $y = x$ (3.10. zīm.).




**3.10. zīm.**

Vispirms aprēķina $D$ masu $m = \iint\limits_D \delta(x,y)dxdy$. Konkrēti

$$m = \iint\limits_D (x^2 + 2xy)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x-x^2} (x^2 + 2xy)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 dx(x^2y + xy^2)\Big|_x^{2x-x^2} =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2x^3 - x^4 + 4x^3 - 4x^4 + x^5 - x^3 - x^3\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (x^5 - 5x^4 + 4x^3)dx = \left(\frac{x^6}{6} - x^5 + x^4\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Tālāk atrod spēka momentus.

$$M_x = \iint\limits_D y\delta(x,y)dxdy = \iint\limits_D y(x^2+2xy)dxdy =$$
$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x-x^2} (x^2y+2xy^2)dy = \int\limits_0^1 dx \left(\frac{x^2y^2}{2} + \frac{2xy^3}{3}\right)\Bigg|_x^{2x-x^2} =$$
$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{37}{6}x^4 - 10x^5 + \frac{9}{2}x^6 - \frac{2}{3}x^7\right) dx =$$
$$= \left(\frac{37}{30}x^5 - \frac{5}{3}x^6 + \frac{9}{14}x^7 - \frac{1}{12}x^8\right)\Bigg|_0^1 = \frac{53}{420}.$$

$$M_y = \iint\limits_D x\delta(x,y)dxdy = \iint\limits_D x(x^2+2xy)dxdy =$$
$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_x^{2x-x^2} (x^3+2x^2y)dy = \int\limits_0^1 dx \left(x^3y + x^2y^2\right)\Bigg|_x^{2x-x^2} =$$
$$= \int\limits_0^1 \left(4x^4 - 5x^5 + x^6\right) dx = \left(\frac{4}{5}x^5 - \frac{5}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7\right)\Bigg|_0^1 = \frac{23}{210}.$$

Masas centra koordinātas

$$x_C = \frac{M_y}{m} = \frac{\frac{23}{210}}{\frac{1}{6}} = \frac{23}{35}, \quad y_C = \frac{M_x}{m} = \frac{\frac{53}{420}}{\frac{1}{6}} = \frac{53}{70}.$$

Tādējādi masas centrs $C\left(\frac{23}{35}, \frac{53}{70}\right)$.

# 4. nodaļa

# TRĪSKĀRŠAIS INTEGRĀLIS

## 4.1. Trīskāršā integrāļa jēdziens un aprēķināšana

Kubējamā kopā $E \subset \mathbb{R}^3$ definē ierobežotu funkciju $f(x, y, z)$. Izveido kopas $E$ sasmalcinājumu $T = \{e_k\}_{k=1}^n$ ar sasmalcinājuma soli $\lambda$, kur $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \{\text{diam } e_k\}$. Kopu $E$ sasmalcina galīga skaita kubējamās apakškopās $e_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, kuras pa pāriem nepārklājas, ar brīvi izraudzītām virsmām.

Apskata Darbū summas

$$s_T = \sum_{k=1}^{n} m_k m_3 e_k, \quad S_T = \sum_{k=1}^{n} M_k m_3 e_k,$$

kur

$$m_k = \inf_{e_k} f(x, y, z), \quad M_k = \sup_{e_k} f(x, y, z),$$

$m_3 e_k$ ir apakškopas $e_k$ tilpums.

Šādi definētām summām piemīt visas Darbū summu īpašības, tai skaitā

$$s_T \le \underline{\mathfrak{I}} \le \overline{\mathfrak{I}} \le S_T,$$

kur

$$\underline{\mathfrak{I}} = \sup_T \{s_T\}, \quad \overline{\mathfrak{I}} = \inf_T \{S_T\}.$$

**4.1. definīcija.** Kubējamā kopā $E$ ierobežotu funkciju $f(x, y, z)$ sauc par **integrējamu** funkciju šajā kopā, ja $\underline{\mathfrak{I}} = \overline{\mathfrak{I}}$, pie tam šo kopīgo skaitli $\mathfrak{I}$ sauc par funkcijas $f(x,y,z)$ **trīskāršo integrāli** kopā $E$ un apzīmē

$$\mathfrak{I} = \iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz.$$

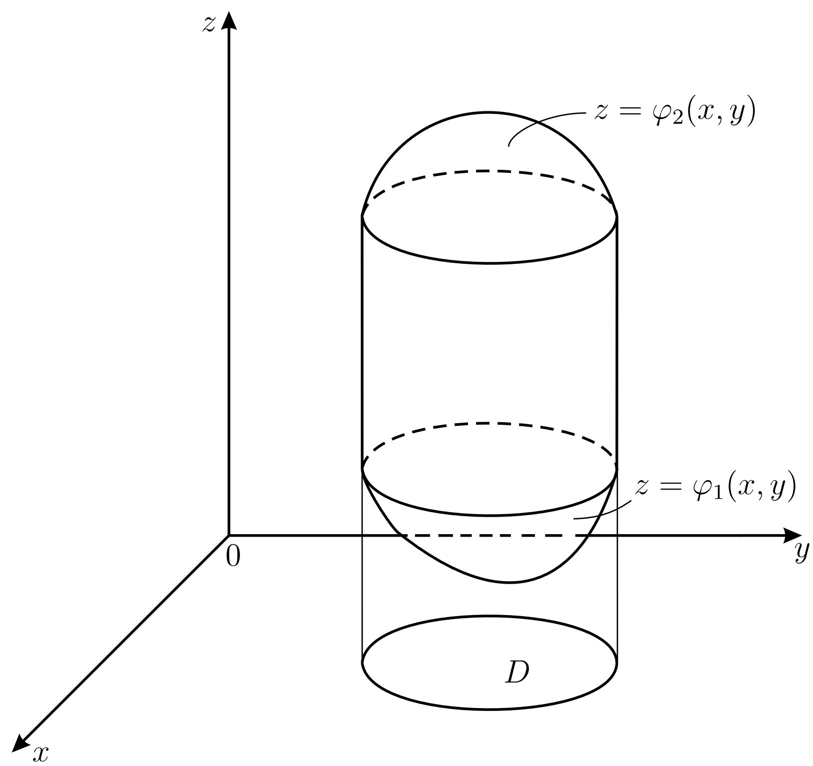
**4.1. piezīme.**

1. Trīskāršo integrāli varēja definēt kā robežu no funkcijas $f(x,y,z)$ **integrālās summas**, kas atbilst konkrētam kopas $E$ sasmalcinājumam $T$ un konkrētai starppunktu $P_k \in e_k$ izvēlei. Konkrēti
$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\lambda\to 0} \sigma,$$
kur $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(P_k) m_3 e_k$. Pie tam, ja funkcija $f(x,y,z)$ ir nepārtraukta kopā $E$, tad šāda robeža eksistē (funkcija integrējama kopā $E$).
2. Trīskāršam integrālim piemīt linearitāte, aditivitāte un monotonitāte.
3. Ja $f(x,y,z) \equiv 1$ visiem $(x,y,z) \in E$, tad trīskāršais integrālis $\iiint\limits_E dxdydz$ izsaka kopas $E$ tilpumu. Tādējādi
$$\boxed{m_3 E = \iiint\limits_E dxdydz.}$$

Apskata kubējamu kopu $E \subset \mathbb{R}^3$, kuras projekcija uz $xOy$ plakni ir kvadrējama kopa $D \subset \mathbb{R}^2$. Pie tam kopu $E$ no apakšas ierobežo virsma $z = \varphi_1(x,y)$, no augšas - virsma $z = \varphi_2(x,y)$, kur $\varphi_1(x,y) \leq \varphi_2(x,y)$ visiem $(x,y) \in D$, un funkcijas $z = \varphi_1(x,y)$, $z = \varphi_2(x,y)$ - nepārtrauktas kopā $D$. No sāniem kopu $E$ ierobežo cilindriska virsma ar veidulēm paralēlām $Oz$ asij (4.1. zīm.).

Trīskāršo integrāli no kopā $E$ definētas nepārtrauktas funkcijas $f(x,y,z)$ var izteikt ar šādu atkārtotu integrāli

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D \left( \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy.$$




**4.1. zīm.**

Parasti šo atkārtotu integrāli pieraksta šādi

$$\iint\limits_D dxdy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$$

Šeit vispirms funkciju $f(x, y, z)$ integrē pēc $z$, pieņemot, ka $x$ -const un $y$ -const. Iegūtajā izteiksmē $z$ vietā ievieto augšējo un apakšējo integrācijas robežu (saskaņā ar Ņūtona-Leibnica formulu). Pēc tam iegūtai divu argumentu funkciju aprēķina divkāršo integrāli apgabalā $D$.

**4.2. piezīme.** Dažreiz kopu $E$ ir izdevīgi projicēt uz kādu no koordinātu plaknēm $xOz$ vai $yOz$. Rezultātā iegūst atbilstoši šādus atkārtotos integrāļus

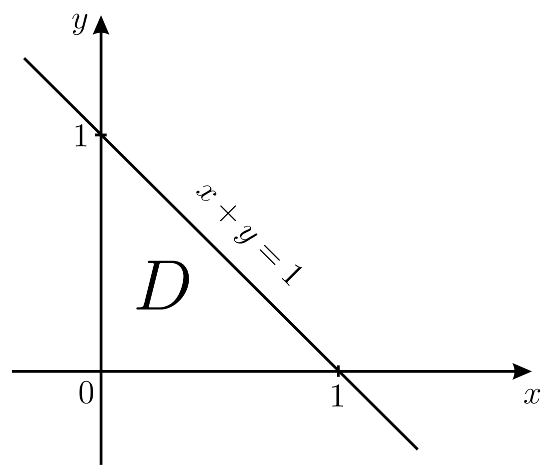
$$\iint\limits_D dxdz \int\limits_{\varphi_1(x,z)}^{\varphi_2(x,z)} f(x, y, z)dy, \quad \iint\limits_D dydz \int\limits_{\varphi_1(y,z)}^{\varphi_2(y,z)} f(x, y, z)dx.$$

**4.1. piemērs.** Aprēķināt

$$\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^3},$$

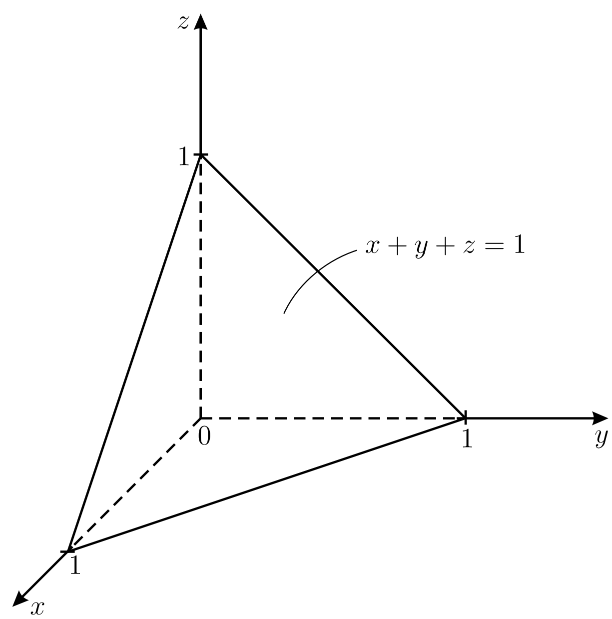
ja $E$ ierobežo plaknes $x = 0$, $y = 0$, $x + y + z = 1$.

Kopas $E$ projekcija $D$ uz $xOy$ plakni ir trijstūris, kuru ierobežo taisnes $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ (4.2. zīm.).




**4.2. zīm.**

Kopu $E$ no apakšas ierobežo $xOy$ plakne, bet no augšas - plakne $x + y + z = 1$ (4.3. zīm.).



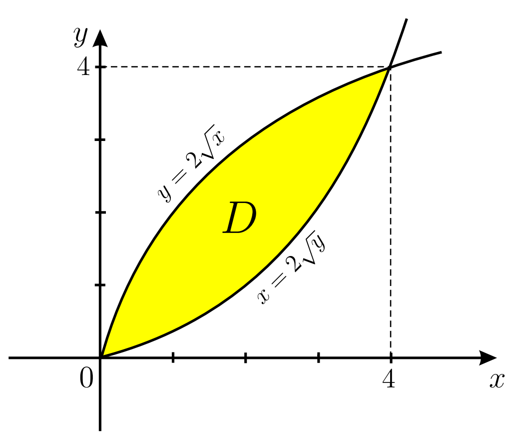

**4.3. zīm.**

$$\iiint\limits_E \frac{dxdydz}{(1+x+y)^3} = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint\limits_D dxdy \left(-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y} = \\
&= \iint\limits_D \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2}\right) dxdy = \\
&= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2}\right) dy = \\
&= \int\limits_0^1 dx \left(-\frac{y}{8} - \frac{1}{2(1+x+y)}\right)\Bigg|_0^{1-x} = \\
&= \int\limits_0^1 \left(\frac{x-1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(1+x)}\right) dx = \\
&= \left(\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\ln(1+x)\right)\Bigg|_0^1 = \\
&= -\frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \frac{5}{8}\right).
\end{aligned}
$$

**4.2. piemērs.** Aprēķināt tilpumu ķermenim, kuru ierobežo virsmas $z = 4 - x$, $x = 2\sqrt{y}$, $y = 2\sqrt{x}$.

Ķermeni $E$, kuru ierobežo $Oy$ asij paralēla plakne $z = 4 - x$, paraboliskie cilindri $x = 2\sqrt{y}$, $y = 2\sqrt{x}$, projicē uz $xOy$ plakni. Koordinātu plaknē $xOy$ iegūst kopu $D$, kuru ierobežo taisne $x = 4$ un parabolu zari $x = 2\sqrt{y}$, $y = 2\sqrt{x}$ (4.4. zīm.).




**4.4. zīm.**

Ķermeni $E$ no apakšas ierobežo $xOy$ plakne ($z = 0$), bet no augšas - plakne $z = 4 - x$.

Ķermeņa $E$ tilpums

$$V = m_3 E = \iiint\limits_E dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_0^{4-x} dz =$$

$$= \iint\limits_D z\Big|_0^{4-x} dxdy = \iint\limits_D (4-x)dxdy = \int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} (4-x)dy =$$

$$= \int\limits_0^4 dx(4y - xy)\Big|_{\frac{x^2}{4}}^{2\sqrt{x}} = \int\limits_0^4 \left(8\sqrt{x} - x^2 - 2x\sqrt{x} + \frac{x^3}{4}\right) dx =$$

$$= \left(\frac{8x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^4}{16}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{16}{3}\cdot 8 - \frac{64}{3} - \frac{4}{5}\cdot 32 + 16 = \frac{176}{15}.$$

## 4.2. Mainīgo aizvietošana trīskāršajā integrālī

Tāpat kā divkāršajā integrālī mainīgo aizvietošanu arī šoreiz, galvenokārt, lieto, lai vienkāršotu integrācijas kopu $E$. Mainīgo aizvietošanu trīskāršajā integrālī izsaka formula

$$\iiint\limits_E f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{E'} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) \cdot \big|J(u,v,w)\big| dudvdw,$$

kur $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ un šīs funkcijas apgabalu $E'$ savstarpēji viennozīmīgi attēlo par apgabalu $E$, pie tam šīm funkcijām apabalā $E'$ eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi. Šoreiz Jakobi determinants

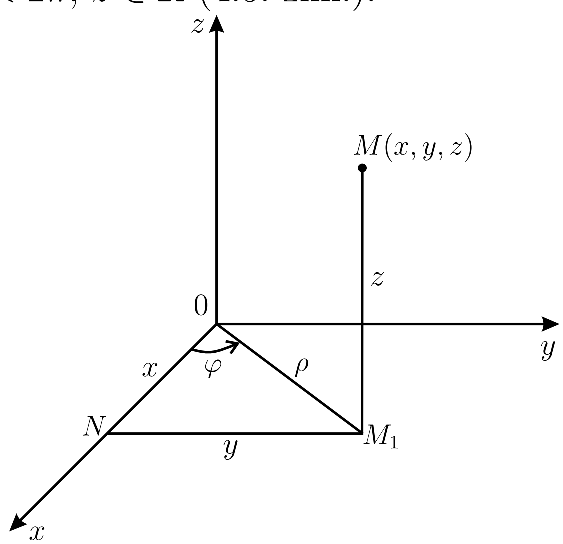
$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Punkta $M$ stāvokli telpā nosaka tā Dekarta koordinātas $(x, y, z)$, kā arī šī punkta līklīniju koordinātas $(u, v, w)$. Līklīniju koordinātu starpā biežāk lietotās ir **cilindriskās** koordinātas un **sfēriskās** koordinātas.

Cilindriskās koordinātas ir analogs polārajām koordinātām plaknē. Pārejas formulas ir

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases}$$

pie tam $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $z \in \mathbb{R}$ (4.5. zīm.).




**4.5. zīm.**

Aprēķina parciālos atvasinājumus un Jakobi determinantu:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi, && \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi, && \frac{\partial x}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi, && \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi, && \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial z}{\partial \rho} = 0, && \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, && \frac{\partial z}{\partial z} = 1. \end{aligned}$$

$$J(\rho, \varphi, z) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

Trīskāršais integrālis cilindriskajās koordinātās tiks pierakstīts šādi

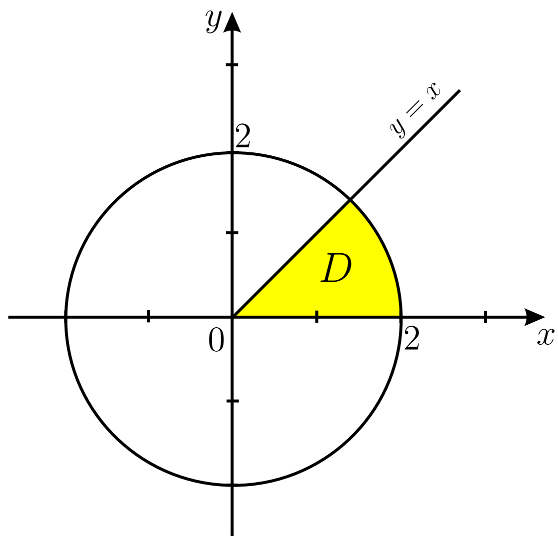
$$\boxed{\iiint\limits_E f(x, y, z)dxdydz = \iiint\limits_{E'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz.}$$

**4.3. piemērs.** Aprēķināt

$$\iiint\limits_E \frac{xydxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}},$$

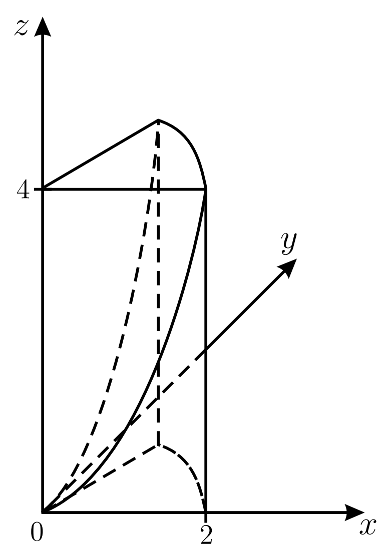
ja $E$ ierobežo $z = x^2 + y^2$, $z = 4$, $y = x$, $y \geq 0$.

Ķermeņa $E$ projekciju $D$ uz $xOy$ plakni ierobežo taisnes $y = x$, $y = 0$ un riņķa līnija $x^2 + y^2 = 4$ (4.6. zīm.)




**4.6. zīm.**

Ķermeni no apakšas ierobežo rotācijas paraboloīds $z = x^2 + y^2$, bet no augšas - plakne $z = 4$ (4.7. zīm.)




**4.7. zīm.**

Integrāli aprēķina, pārejot uz cilindriskajām koordinātām. Ķermenim $E$ $\quad x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z$, pie tam $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \rho \leq 2,$

$\rho^2 \le z \le 4$. Jakobi determinants $J(\rho, \varphi, z) = \rho$.

$$\iiint\limits_E \frac{xydxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}} = \iiint\limits_{E'} \frac{\rho^3 \cos\varphi \sin\varphi}{\rho^3} d\rho d\varphi dz =$$

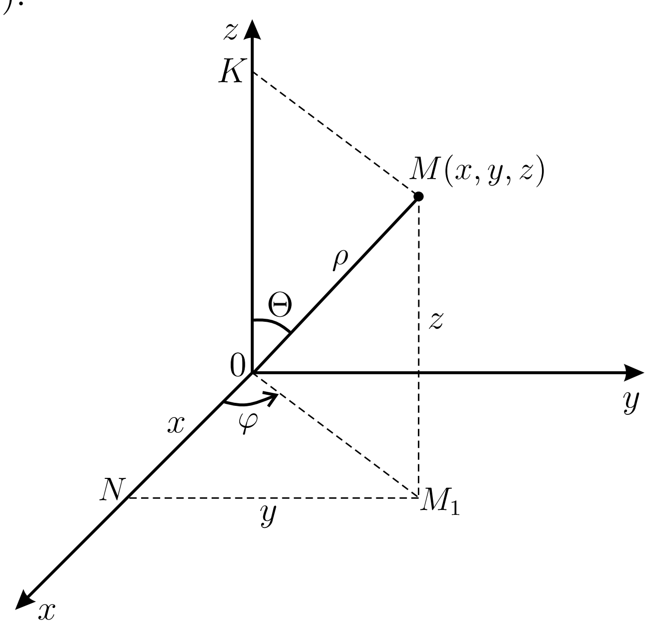
$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi d\varphi \int\limits_0^2 d\rho \int\limits_{\rho^2}^4 dz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi d\varphi \int\limits_0^2 z\Big|_{\rho^2}^4 d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi d\varphi \int\limits_0^2 (4-\rho^2) d\rho = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi d\varphi \left(4\rho - \frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(8 - \frac{8}{3}\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{4}{3}\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = \frac{4}{3}.$$

Telpā apskata punktu $M(x, y, z)$. Tā projekcija uz $xOy$ plakni ir punkts $M_1$, kura projekcija uz $Ox$ asi ir punkts $N$ (4.8. zīm.). Apzīmē $OM = \rho$, leņķi, kuru $OM_1$ veido ar $Ox$ ass pozitīvo virzienu, ar $\varphi$ ($\rho \ge 0$, $0 \le \varphi < 2\pi$). Leņķi, kuru $OM$ veido ar $Oz$ asi, apzīmē ar $\Theta$, pie tam $0 \le \Theta \le \pi$. Šos skaitļus $\rho$, $\varphi$ un $\Theta$ sauc par punkta $M$ **sfēriskajām koordinātām** un pieraksta $M(\rho, \varphi, \Theta)$.




**4.8. zīm.**

Atrod sakarību formulas starp punkta Dekarta koordinātām un šī punkta sfēriskajām koordinātām.

$$\begin{aligned} x &= ON = OM_1 \cos\varphi = OM \sin\Theta \cos\varphi = \rho \sin\Theta \cos\varphi, \\ y &= NM_1 = OM_1 \sin\varphi = OM \sin\Theta \sin\varphi = \rho \sin\Theta \sin\varphi, \\ z &= OK = MM_1 = OM \cos\Theta = \rho \cos\Theta. \end{aligned}$$

Tādējādi

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \sin\Theta, \\ y = \rho \sin\varphi \sin\Theta, \\ z = \rho \cos\Theta. \end{cases}$$

Atrod šo funkciju parciālos atvasinājumus un Jakobi determinantu.

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi \sin\Theta, & \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin\varphi \sin\Theta, & \frac{\partial x}{\partial \Theta} = \rho \cos\varphi \cos\Theta, \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi \sin\Theta, & \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos\varphi \sin\Theta, & \frac{\partial y}{\partial \Theta} = \rho \sin\varphi \cos\Theta, \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} = \cos\Theta, & \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0, & \frac{\partial z}{\partial \Theta} = -\rho \sin\Theta. \end{array}$$

$$J(\rho, \varphi, \Theta) = \begin{vmatrix} \cos\varphi \sin\Theta & -\rho \sin\varphi \sin\Theta & \rho \cos\varphi \cos\Theta \\ \sin\varphi \sin\Theta & \rho \cos\varphi \sin\Theta & \rho \sin\varphi \cos\Theta \\ \cos\Theta & 0 & -\rho \sin\Theta \end{vmatrix} = -\rho^2 \sin\Theta,$$

$$\left| J(\rho, \varphi, \Theta) \right| = \rho^2 \sin\Theta,$$

jo $\sin\Theta \geq 0$ $(0 \leq \Theta \leq \pi)$.

Tādējādi trīskāršais integrālis sfēriskajās koordinātās tiks pierakstīts šādi

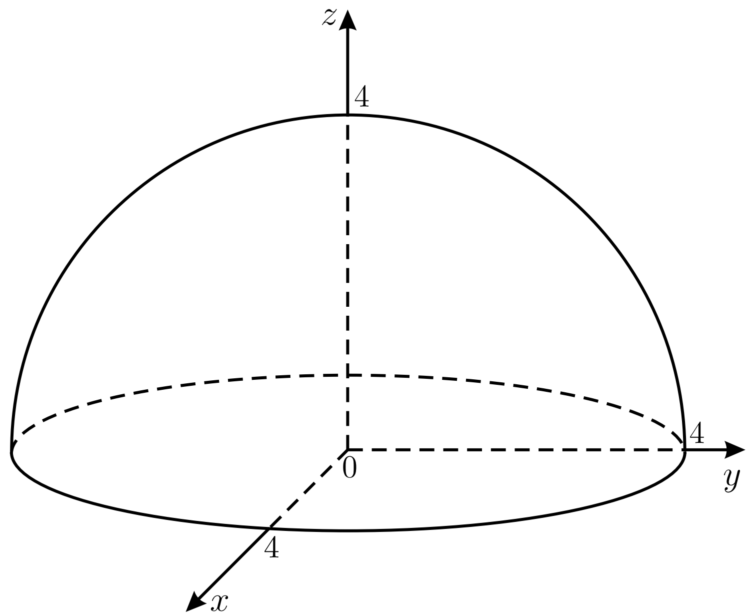
$$\boxed{\begin{aligned} &\iiint\limits_E f(x, y, z) dx dy dz = \\ &= \iiint\limits_{E'} f(\rho \cos\varphi \sin\Theta, \rho \sin\varphi \sin\Theta, \rho \cos\Theta) \rho^2 \sin\Theta d\rho d\varphi d\Theta. \end{aligned}}$$

**4.4. piemērs.** Aprēķināt

$$\iiint\limits_E \frac{x^2 dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}},$$

ja $E$ ierobežo $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.

Ķermeni $E$ no apakšas ierobežo $xOy$ plakne, bet no augšas - sfēra $x^2 + y^2 + z^2 = 16$. Ķermeņa $E$ projekcija $D$ uz $xOy$ plakni ir riņķis $x^2 + y^2 \leq 16$ (4.9.zīm.).




**4.9. zīm.**

Izdevīgi ir pāriet uz sfēriskajām koordinātām. Tāpēc

$$x = \rho \cos\varphi \sin\Theta, \quad y = \rho \sin\varphi \sin\Theta, \quad z = \rho \cos\Theta,$$

kur $0 \leq \rho \leq 4$ (sfēras $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ vienādojums sfēriskajās koordinātās ir $\rho = 4$), $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2}$. Jakobi determinants

$$|J(\rho, \varphi, \Theta)| = \rho^2 \sin\Theta.$$

$$\iiint\limits_E \frac{x^2 dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}} = \iiint\limits_{E'} \frac{\rho^2 \cos^2\varphi \sin^2\Theta}{\rho^3} \rho^2 \sin\Theta d\rho d\varphi d\Theta =$$

$$= \iiint\limits_{E'} \rho \cos^2\varphi \sin^3\Theta d\rho d\varphi d\Theta = \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^4 \rho d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\Theta d\Theta =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^4 \rho d\rho \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \big(-(1-\cos^2\Theta)\big) d(\cos\Theta) =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int\limits_0^4 \rho d\rho \left( \frac{\cos^3\Theta}{3} - \cos\Theta \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \frac{\rho^2}{2} \Bigg|_0^4 =$$

$$= \frac{16}{3} \int\limits_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi = \frac{8}{3} \int\limits_0^{2\pi} (1+\cos 2\varphi) d\varphi = \frac{8}{3} \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \frac{16\pi}{3}.$$

## 4.3. Trīskāršā integrāļa lietojumi

Kā tika atzīmēts iepriekš, trīskāršo integrāli var lietot ķermeņa tilpuma aprēķināšanā, pie tam tilpums

$$V = \iiint_E dxdydz.$$

**4.5. piemērs.** Aprēķināt tilpumu ķermenim, kuru ierobežo elipsoīds

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Šoreiz izdevīgi pāriet uz **vispārinātām sfēriskajām** koordinātām

$$\begin{aligned} x &= a\rho\cos\varphi\sin\Theta, \\ y &= b\rho\sin\varphi\sin\Theta, \\ z &= c\rho\cos\Theta. \end{aligned}$$

Jakobi determinants

$$|J(\rho, \varphi, \Theta)| = abc\rho^2\sin\Theta.$$

Elipsoīda vienādojums šādās līklīniju koordinātās ir $\rho = 1$, pie tam $0 \le \rho \le 1$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \Theta \le \pi$ (Protams, varēja izmantot ķermeņa simetriskumu attiecībā pret visām koordinātu plaknēm un aprēķināt tilpumu tā $\frac{1}{8}$ daļai).

$$V = \iiint_E dxdydz = \iiint_{E'} abc\rho^2\sin\Theta d\rho d\varphi d\Theta =$$

$$= abc\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho \int_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta = \frac{4}{3}\pi abc.$$

**4.3. piezīme.** Ja $a = b = c = R$, tad no iegūtās izteiksmes izriet lodes tilpuma formula $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Trīskāršo integrāli vēl var lietot ķermeņa masas, masas centra, spēka momentu un inerces momentu aprēķināšanā.

Ķermeņa masa

$$\boxed{m = \iiint_E \delta(x, y, z)dxdydz,}$$

kur blīvuma funkcija $\delta(x, y, z)$ ir nepārtraukta kopā $E$.

Ķermeņa masas centra koordinātas izsaka formulas:

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \frac{\displaystyle\iiint\limits_E x\delta(x,y,z)dxdydz}{\displaystyle\iiint\limits_E \delta(x,y,z)dxdydz}, \\ y_c &= \frac{\displaystyle\iiint\limits_E y\delta(x,y,z)dxdydz}{\displaystyle\iiint\limits_E \delta(x,y,z)dxdydz}, \\ z_c &= \frac{\displaystyle\iiint\limits_E z\delta(x,y,z)dxdydz}{\displaystyle\iiint\limits_E \delta(x,y,z)dxdydz}. \end{aligned}}$$

Vērtības

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= \iiint\limits_E x\delta(x,y,z)dxdydz, \\ M_y &= \iiint\limits_E y\delta(x,y,z)dxdydz, \\ M_z &= \iiint\limits_E z\delta(x,y,z)dxdydz \end{aligned}}$$

sauc par ķermeņa **spēka momentiem** attiecībā pret koordinātu plaknēm $yOz$, $xOz$ un $xOy$ atbilstoši.

Ķermeņa **inerces momenti**:
- attiecībā pret koordinātu asīm

$$\boxed{\begin{aligned} \Im_x &= \iiint\limits_E (y^2+z^2)\delta(z,y,z)dxdydz, \\ \Im_y &= \iiint\limits_E (x^2+z^2)\delta(z,y,z)dxdydz, \\ \Im_z &= \iiint\limits_E (x^2+y^2)\delta(z,y,z)dxdydz; \end{aligned}}$$

- attiecībā pret koordinātu plaknēm

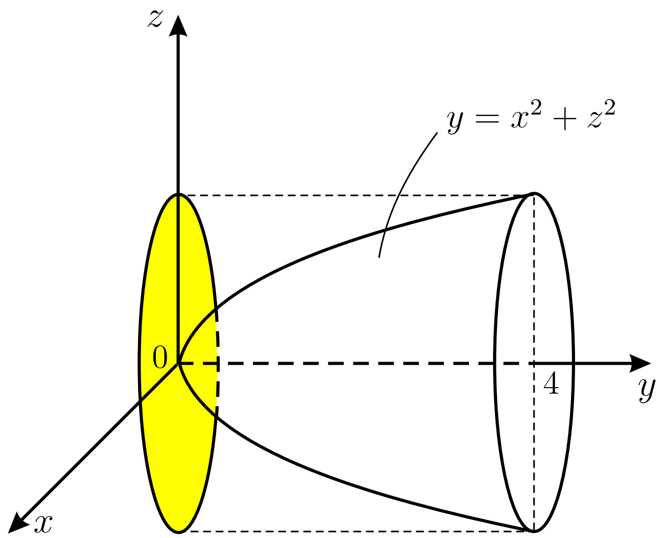
$$\boxed{\begin{aligned} \mathfrak{I}_{xy} &= \iiint\limits_E z^2\delta(z,y,z)dxdydz, \\ \mathfrak{I}_{yz} &= \iiint\limits_E x^2\delta(z,y,z)dxdydz, \\ \mathfrak{I}_{xz} &= \iiint\limits_E y^2\delta(z,y,z)dxdydz; \end{aligned}}$$

- attiecībā pret koordinātu sākumpunktu $O(0,0,0)$

$$\boxed{\mathfrak{I}_0 = \iiint\limits_E (x^2+y^2+z^2)\delta(z,y,z)dxdydz.}$$

**4.6. piemērs.** Aprēķināt homogēna ķermeņa, kuru ierobežo $y = x^2+z^2$, $y = 4$, masas centra koordinātas.

Ķermeni ierobežo rotācijas paraboloīds $y = x^2 + z^2$ un $xOz$ plaknei paralēlā plakne $y = 4$ (4.10.zīm.).




**4.10. zīm.**

Tā projekcija uz $xOz$ plakni ir riņķis $x^2 + z^2 =\leq 4$. Ķermeņa masa

$$m = \iiint\limits_E \delta dxdydz,$$

kur $\delta$ - const. Šoreiz izdevīgi ir pāriet uz cilindriskajām koordinātām $x = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$, $y = y$, pie tam $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$,

$\rho^2 \le y \le 4$. Tāpēc

$$m = \iiint\limits_{E'} \delta \rho d\rho d\varphi dy = \delta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_{\rho^2}^4 dy = \delta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho y \Big|_{\rho^2}^4 d\rho =$$

$$= \delta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 (4\rho - \rho^3) d\rho = \delta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(2\rho^2 - \frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \delta \int\limits_0^{2\pi} (8-4) d\varphi = 8\pi\delta.$$

Tā kā ķermenis ir homogēns un simetrisks pret $Oy$ asi, tad $x_c = 0$ un $z_c = 0$.

Aprēķina

$$y_c = \frac{1}{m} \iiint\limits_E \delta y dx dy dz = \frac{1}{8\pi\delta} \delta \iiint\limits_E y dx dy dz =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \iiint\limits_{E'} y \rho d\rho d\varphi dy = \frac{1}{8\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_{\rho^2}^4 y dy =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho \frac{y^2}{2}\Big|_{\rho^2}^4 d\rho = \frac{1}{8\pi} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \left(8\rho - \frac{\rho^5}{2}\right) d\rho =$$

$$= \frac{1}{8\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(4\rho^2 - \frac{\rho^6}{12}\right)\Big|_0^2 d\varphi = \frac{1}{8\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left(16 - \frac{64}{12}\right) d\varphi = \frac{8}{3}.$$

Tādējādi ķermeņa masas centrs ir $C\left(0, \frac{8}{3}, 0\right)$.

# 5. nodaļa

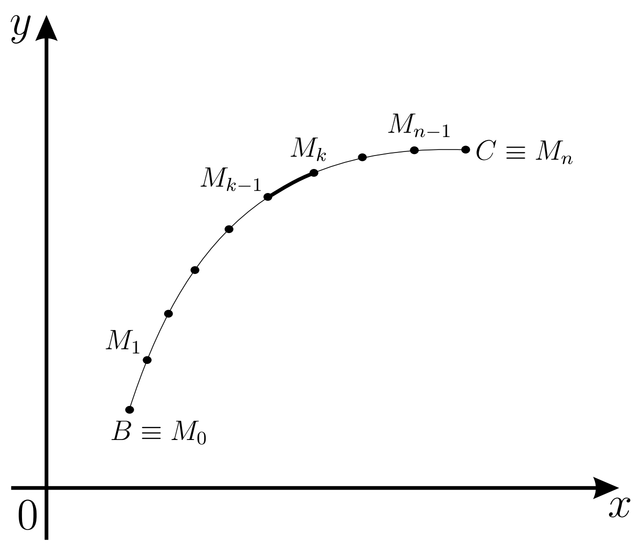
# LĪNIJINTEGRĀLIS

## 5.1. Uzdevums par spēku lauka darbu

Pieņem, ka $xOy$ plaknes katrā punktā darbojas spēka vektors

$$\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j}.$$

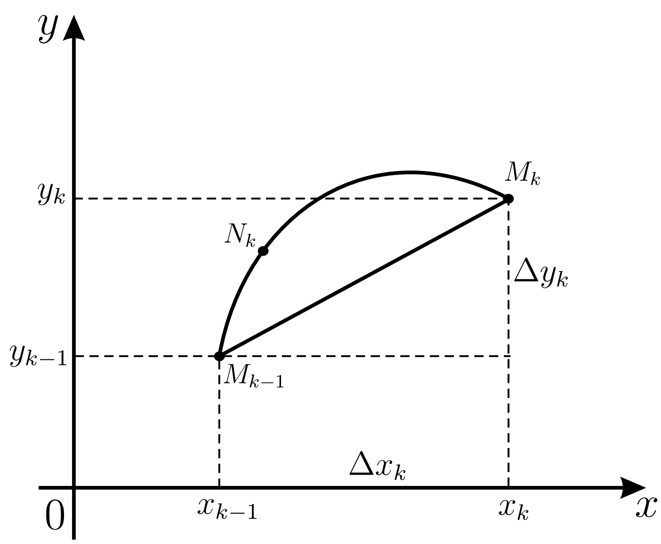
Šī spēku lauka ietekmē materiālais punkts pārvietojas pa iztaisnojamu līkni $BC$ (5.1. zīm.). Aprēķina spēku lauka paveikto darbu.




**5.1. zīm.**

Zināms, ka darbs, kuru veic nemainīgs spēks $\overrightarrow{F} = \{P, Q\}$, pārvietojot materiālo punktu vektora $\overrightarrow{s} = \{a, b\}$ virzienā, ir

$$A = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s} = Pa + Qb.$$




**5.2. zīm.**

Šoreiz spēks nav nemainīgs, bet ir atkarīgs no punkta stāvokļa plaknē, pie tam materiālais punkts pārvietojas pa līklīniju trajektoriju (līkni $BC$).

Līkni $BC$ sadala $n$ daļās ar punktiem $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, pie tam vienojas, ka $B \equiv M_0$, $C = M_n$. Uz katra $M_{k-1}M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ izvēlas pa patvaļīgam punktam $N_k(\xi_k, \eta_k)$ un uzskata, ka šajā posmā spēks ir nemainīgs un vienāds ar spēku punktā $N_k$, t.i.,

$$\overrightarrow{F}(\xi_k, \eta_k) = P(\xi_k, \eta_k)\overrightarrow{i} + Q(\xi_k, \eta_k)\overrightarrow{j}.$$

Pie tam uzskata, ka materiālais punkts pārvietojas nevis pa loku $M_{k-1}M_k$, bet pa taisnes nogriezni $M_{k-1}M_k$. Ja $M_{k-1}(x_{k-1}, y_{k-1}), M_k(x_k, y_k)$, tad

$$\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \Delta x_k \overrightarrow{i} + \Delta y_k \overrightarrow{j},$$

kur $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$ (5.2. zīm.). Spēku lauka paveiktais darbs posmā $M_{k-1}M_k$ aptuveni ir

$$\overrightarrow{F}(\xi_k, \eta_k) \cdot \overrightarrow{M_{k-1}M_k} = P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k,$$

bet uz visas līknes $BC$ -

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k.$$

Spēku lauka paveikto darbu, pārvietojot materiālo punktu pa $BC$, definē kā robežu no šīs summas, kad $\lambda \to 0$, kur $\lambda$ ir maksimālais no loku $M_{k-1}M_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ garumiem. Tādējādi

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k, \eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k, \eta_k)\Delta y_k.$$

## 5.2. Līnijintegrāļa definīcija un īpašības

Apskata iztaisnojamu līkni $L$, kuras punktos ir definētas funkcijas $P(x,y)$ un $Q(x,y)$. Līkni $L$ sasmalcina $n$ daļās $M_{k-1}M_k$ $(k=1,2,\ldots,n)$. Uz katra $M_{k-1}M_k$ izvēlas pa patvaļīgam punktam $N_k(\xi_k,\eta_k)$ un sastāda summu

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k,$$

kur $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$, pie tam $M_{k-1}(x_{k-1},y_{k-1})$, $M_k(x_k,y_k)$.

**5.1. definīcija.** Robežu no $\sigma$, kad sasmalcinājuma solis $\lambda \to 0$ (maksimālais no loku $M_{k-1}M_k$ garumiem), protams, ja šāda galīga robeža eksistē, nav atkarīga no $L$ sasmalcinājuma un starppunktu $N_k$ izvēles, sauc par **līnijintegrāli** un pieraksta

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Tādējādi

$$\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k.$$

**5.1. piezīme.**

1. Izrādās, ja $L$ ir iztaisnojams un funkcijas $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ir nepārtrauktas $L$ punktos, tad līnijintegrālis eksistē (eksistē galīga robeža no $\sigma$, kad $\lambda \to 0$).
2. Spēku lauks

   $$\overrightarrow{F}(x,y) = P(x,y)\overrightarrow{i} + Q(x,y)\overrightarrow{j},$$

   pārvietojot materiālo punktu pa līkni $L$, veic darbu

   $$A = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

No līnijintegrāļa definīcijas izriet šādas tā *īpašības*.

1. $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_L P(x,y)dx + \int\limits_L Q(x,y)dy.$

2. Ja $L = L_1 \cup L_2$ un $L_1 \cap L_2$ ir tukša vai vienelementīga kopa, tad

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$
$$= \int_{L_1} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{L_2} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

(līnijintegrāļa aditivitāte).

3. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$

4. Ja $L$ - $Ox$ asij paralēls nogrieznis, tad
$$\int_L Q(x,y)dy = 0.$$

5. Ja $L$ ir $Oy$ asij paralēls nogrieznis, tad
$$\int_L P(x,y)dx = 0.$$

## 5.3. Līnijintegrāļa aprēķināšana

Pieņem, ka līkne $L$ uzdota ar sistēmu

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

kur funkcijām $\varphi(t)$, $\psi(t)$ intervālā $[\alpha, \beta]$ eksistē nepārtraukti atvasinājumi ($L$ ir intervālā $[\alpha, \beta]$ gluda līkne). Līnijintegrālis

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

var tikt reducēts uz atbilstošu noteikto integrāli. Konkrēti

$$\boxed{\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \Big(P\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)\Big)dt.}$$

**5.2. piezīme.** Ja $L$ ir intervālā $[a,b]$ nepārtraukti diferencējamas funkcijas $f(x)$ grafiks, tad

$$\boxed{\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_a^b \Big(P\big(x, f(x)\big) + Q\big(x, f(x)\big) f'(x)\Big) dx.}$$

**5.1. piemērs.** Aprēķināt

$$\int\limits_L 2x^2 dx - xydy,$$

ja $L$ ir parabolas $y = x^2$, $0 \le x \le 1$ zars.

Līnijintegrāļa izteiksmē $y$ aizstāj ar $x^2$, bet $dy$ aizstāj ar $2xdx$. Iegūst noteikto integrāli. Tādējādi

$$\int\limits_L 2x^2 dx - xydy = \int\limits_0^1 (2x^2 - xx^2 2x)dx = \int\limits_0^1 (2x^2 - 2x^4)dx =$$

$$= \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

**5.2. piemērs.** Aprēķināt $\int\limits_L xdy - ydx$, kur $L$ - riņķa līnijas $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ loks.

Līnijintegrāļa izteiksmē aizstāj $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $dx = -2\sin t dt$, $dy = 2\cos t dt$. Iegūst

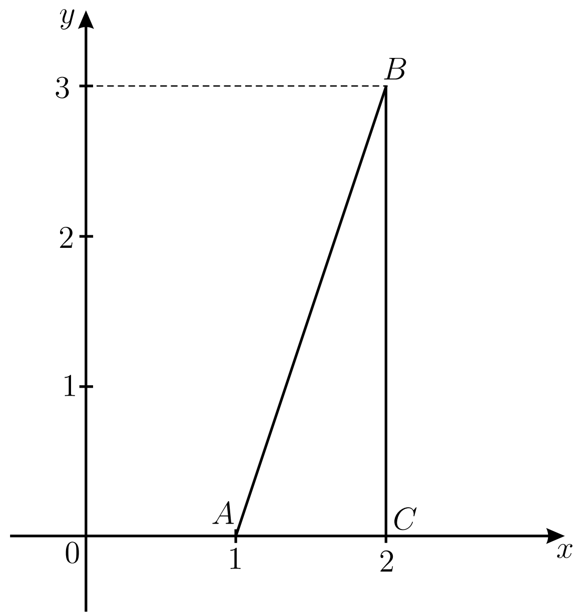
$$\int\limits_L xdy - ydx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \big(2\cos t 2\cos t - 2\sin t(-2\sin t)\big) = 4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 2\pi.$$

**5.3. piemērs.** Spēku lauks $\overrightarrow{F}(x,y) = xy\overrightarrow{i} + (x-y)\overrightarrow{j}$ materiālo punktu pārvieto no punkta $A(1,0)$ uz punktu $B(2,3)$

a) pa taisnes nogriezni $AB$;

b) pa lauztu līniju $ACB$, kur $C(2,0)$.

Aprēķināt spēku lauka paveikto darbu. (5.3. zīm.)




**5.3. zīm.**

a) $AB$ vienādojums ir $y = 3x - 3$, $1 \leq x \leq 2$.

$$A_1 = \int\limits_{AB} xydx + (x-y)dy = \int\limits_1^2 \big(x(3x-3) + (x - 3x + 3)3\big)dx =$$

$$= \int\limits_1^2 (3x^2 - 9x + 9)dx = \left(x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 9x\right)\Bigg|_1^2 = 2,5.$$

b)

$$A_2 = \int\limits_{AB} xydx + (x-y)dy =$$

$$= \int\limits_{AC} xydx + (x-y)dy + \int\limits_{CB} xydx + (x-y)dy.$$

$AC$ vienādojums: $y = 0$, kur $1 \leq x \leq 2$.

$CB$ vienādojums: $x = 2$, kur $0 \leq y \leq 3$.

Tāpēc

$$\int\limits_{AC} xydx + (x-y)dy = 0,$$

$$\int\limits_{CB} xydx + (x-y)dy = \int\limits_0^3 (2-y)dy = \left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^3 = 1,5.$$

Tādējādi

$$A_2 = 0 + 1,5 = 1,5.$$

## 5.4. Grīna formula

Līnijintegrāļa izskaitļošanu var reducēt uz atbilstoša noteiktā integrāļa izskaitļošanu. Ja līnijintegrālis tiek apskatīts pa *noslēgtu* līkni $L$ (līknes sākuma punkts sakrīt ar tās beigu punktu), tad šādu līnijintegrāli bieži vien var reducēt uz atbilstošu divkāršo integrāli.

**5.1. teorēma.** *Ja $P(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ir nepārtrauktas funkcijas kopā*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \le x \le b, \;\; f(x) \le y \le g(x) \right\},$$

*pie tam $f(x)$, $g(x)$ ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas intervālā $[a,b]$, tad*

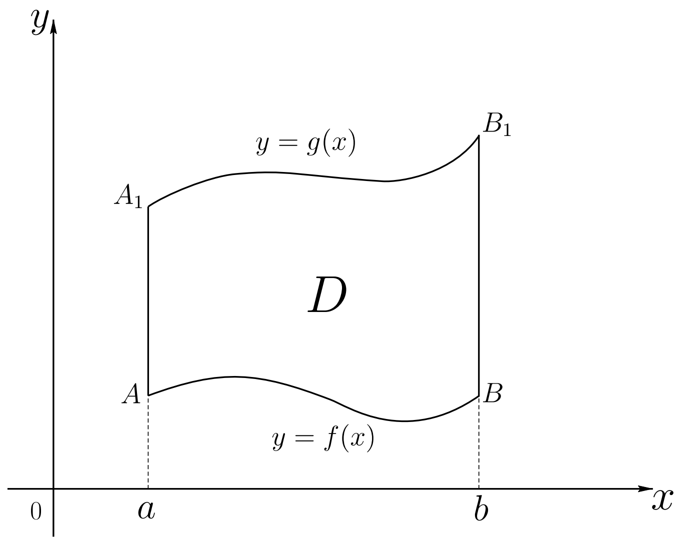
$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int\limits_L P(x,y)dx,$$

*kur $L$ ir kopas $D$ robeža.*

▶ Kopā $D$ (5.4. zīm.) divkāršo integrāli izsaka ar atkārtoto integrāli, t.i.,

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \int\limits_a^b dx P(x,y)\Bigg|_{f(x)}^{g(x)} =$$

$$= \int\limits_a^b P\big(x, g(x)\big) - P\big(x, f(x)\big) dx = \int\limits_a^b P\big(x, g(x)\big) dx - \int\limits_a^b P\big(x, f(x)\big) dx.$$




**5.4. zīm.**

Katru no šiem noteiktajiem integrāļiem var izteikt ar atbilstošiem līnijintegrāļiem. Tāpēc

$$\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int\limits_{A_1B_1} P(x,y)dx - \int\limits_{AB} P(x,y)dx =$$

$$= -\int\limits_{AB} P(x,y)dx - \int\limits_{B_1A_1} P(x,y)dx - \int\limits_{BB_1} P(x,y)dx - \int\limits_{A_1A} P(x,y)dx =$$

$$= -\int\limits_{L} P(x,y)dx.$$

(Līnijintegrāļi pa $BB_1$ un $A_1A$ ir nulles). ◄

**5.3. piezīme.**

1. Apskatot līnijintegrāli pa $D$ robežu, virzienu uz $L$ izvēlas pozitīvu, t.i., lai, pārvietojoties pa $L$ šajā virzienā, kopa $D$ atrastos pa kreisi.
2. Pierakstot līnijintegrāli pa noslēgtu līkni $L$, raksta

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

pie tam bieži vien norāda arī virzienu uz $L$. Tādējādi

$$\boxed{\iint\limits_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\oint\limits_L P(x,y)dx.}$$

**5.2. teorēma.** *Ja $Q(x,y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ir nepārtrauktas funkcijas kopā*

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, c \leq y \leq d, \ \varphi(y) \leq x \leq \psi(y) \right\},$$

*pie tam $\varphi(y)$, $\psi(y)$ ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas intervālā $[c,d]$, tad*

$$\boxed{\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint\limits_L Q(x,y)dy,}$$

*kur $L$ ir kopas $D$ robeža.*

(Teorēmu pierāda analogi iepriekšējai teorēmai).

**5.3. teorēma.** *Ja $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ir nepārtrauktas funkcijas kopā $D$, kura apmierina abu iepriekšējo teorēmu nosacījumus (vai to var sadalīt galīga skaita šādās kopās), tad*

$$\boxed{\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.}$$

(Teorēmu pierāda, saskaitot iepriekšējo teorēmu formulas).

Tika iegūta formula, kura līnijintegrāļa izskaitļošanu reducē uz atbilstoša divkāršā integrāļa izskaitļošanu. Šo formulu sauc par Grīna[1] formulu.

**5.4. piemērs.** Aprēķināt līnijintegrāli

$$\oint\limits_L \left( xy - x + \frac{1}{2}y^2 - y \right) dx + \left( xy + \frac{1}{2}x^2 - y \right) dy,$$

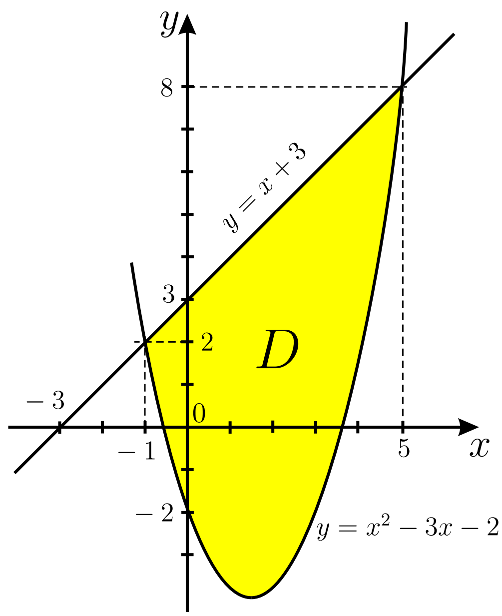
ja $L$ ir paraboliskā segmenta $y = x^2 - 3x - 2$, $y = x + 3$ (5.5. zīm.) kontūrs.

Tā kā

$$P(x,y) = xy - x + \frac{1}{2}y^2 - y, \ \ Q(x,y) = xy + \frac{1}{2}x^2 - y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x + y - 1, \ \ \frac{\partial Q}{\partial x} = y + x,$$

[1] Dž. Grīns (1793-1841) - angļu matemātiķis.




**5.5. zīm.**

tad

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

Saskaņā ar Grīna formulu

$$\oint\limits_L \left(xy - x + \frac{1}{2}y^2 - y\right)dx + \left(xy + \frac{1}{2}x^2 - y\right)dy = \iint\limits_D dxdy =$$

$$= \int\limits_{-1}^{5} dx \int\limits_{x^2-3x-2}^{x+3} dy = \int\limits_{-1}^{5} dxy\Big|_{x^2-3x-2}^{x+3} = \int\limits_{-1}^{5} (-x^2+4x+5)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 5x\right)\Bigg|_{-1}^{5} = 36.$$

## 5.5. Līnijintegrāļa neatkarība no integrēšanas līnijas formas

Aprēķinot līnijintegrāli, tiek izmantots integrēšanas līnijas vienādojums. Tāpēc var teikt, ka vispārīgi līnijintegrāļa vērtība ir atkarīga no integrēšanas līnijas formas. Tomēr ir gadījumi, kad integrēšanas līnijas izvēle neietekmē līnijintegrāļa vērtību.

**5.5. piemērs.** Aprēķināt

$$\int\limits_{AB} (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy,$$

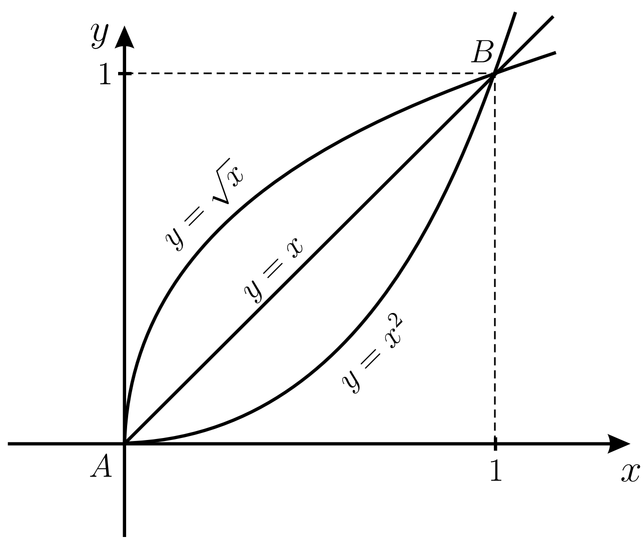
kur $A(0,0)$, $B(1,1)$ un šos punktus savieno

a) taisnes nogrieznis;

b) parabolas $y = x^2$ zars;

c) parabolas $y = \sqrt{x}$ zars.

(5.6. zīm.)




**5.6. zīm.**

a)

$$\int\limits_{AB} (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy = \left| \begin{matrix} y = x, \ \ 0 \le x \le 1, \\ dy = dx, \end{matrix} \right| =$$

$$= \int\limits_0^1 (2x - 3x^2 + 1 + 2 - 6x^2)dx = \int\limits_0^1 (-9x^2 + 2x + 3)dx =$$

$$= (-3x^3 + x^2 + 3x)\Big|_0^1 = 1.$$

b)

$$\int\limits_{AB}(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy=\left|\begin{matrix} y=x^2, \quad 0\le x\le 1, \\ dy=2xdx, \end{matrix}\right|=$$

$$=\int\limits_0^1\big(2x-3x^4+1+(2-6x^3)2x\big)dx=\int\limits_0^1(2x-3x^4+1+4x-12x^4)dx=$$

$$=\int\limits_0^1(-15x^4+6x+1)dx=(-3x^5+3x^2+x)\Big|_0^1=1.$$

c)

$$\int\limits_{AB}(2x-3y^2+1)dx+(2-6xy)dy=\left|\begin{matrix} y=\sqrt{x}, \quad 0\le x\le 1, \\ dy=\frac{dx}{2\sqrt{x}}, \end{matrix}\right|=$$

$$=\int\limits_0^1\left(2x-3x+1+(2-6x\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(-x+1+\frac{1}{\sqrt{x}}-3x\right)dx=(-2x^2+x+2\sqrt{x})\Big|_0^1=1.$$

Līnijintegrāļa vērtība neatkarīgi no integrēšanas līnijas formas ir 1.

**5.6. piemērs.** Aprēķināt

$$\int\limits_{AB}(2x-3y^2+1)dx+(2-5xy)dy,$$

kur $A(0,0)$, $B(1,1)$ un šos punktus savieno

a) taisnes nogrieznis;

b) parabolas $y=x^2$ zars;

c) parabolas $y=\sqrt{x}$ zars.

a)

$$\int\limits_{AB} (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 5xy)dy = \left| \begin{matrix} y = x, \quad 0 \le x \le 1, \\ dy = dx. \end{matrix} \right| =$$

$$\int\limits_0^1 (2x - 3x^2 + 1 + 2 - 5x^2)dx = \int\limits_0^1 (-8x^2 + 2x + 3)dx =$$

$$= \left( -\frac{8}{3}x^3 + x^2 + 3x \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

b)

$$\int\limits_{AB} (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 5xy)dy = \left| \begin{matrix} y = x^2, \quad 0 \le x \le 1, \\ dy = 2xdx. \end{matrix} \right| =$$

$$\int\limits_0^1 \big(2x - 3x^4 + 1 + (2 - 5x^3)2x\big)dx = \int\limits_0^1 (-13x^4 + 6x + 1)dx =$$

$$= \left( -\frac{13}{5}x^5 + 3x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{5}.$$

c)

$$\int\limits_{AB} (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 5xy)dy = \left| \begin{matrix} y = \sqrt{x}, \quad 0 \le x \le 1, \\ dy = \frac{dx}{2\sqrt{x}}. \end{matrix} \right| =$$

$$\int\limits_0^1 \big(2x - 3x + 1 + (2 - 5x\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\big)dx = \int\limits_0^1 \left( -\frac{7}{2}x + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$= \left( -\frac{7}{4}x^2 + x + 2\sqrt{x} \right) \Big|_0^1 = \frac{5}{4}.$$

Šoreiz līnijintegrāļa vērtība ir atkarīga no integrēšanas līnijas formas. Šoreiz

$$P(x,y) = 2x - 3y^2 + 1, \quad Q(x,y) = 2 - 5xy,$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = -6y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -5y.$$

Tātad

$$\frac{\partial P}{\partial y} \ne \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Iepriekšējā piemērā
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -6y.$$

Apgabalā $D \subset \mathbb{R}^2$ apskata gludu (vai gabaliem gludu) līniju $L$.

**5.4. teorēma.** *Ja $P(x,y)$, $Q(x,y)$ ir apgabalā $D$ nepārtrauktas funkcijas, tad ir ekvivalenti šādi trīs apgalvojumi:*

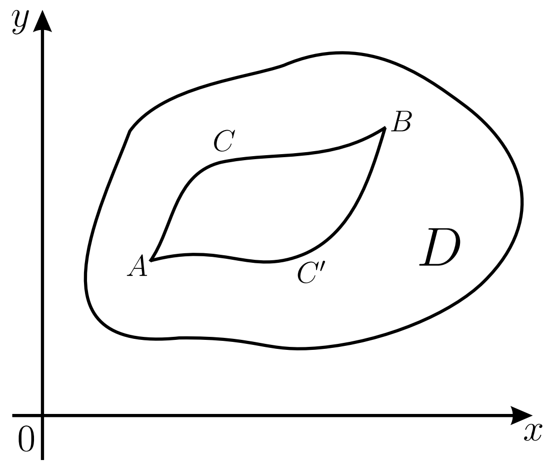
1. *Līnijintegrālis pa jebkuru noslēgtu līniju $L \subset D$ir nulle, t.i.,*
$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0;$$
2. *Jebkuriem diviem punktiem $A, B \in D$ līnijintegrālis*
$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
*nav atkarīgs no līnijas $AB \subset D$ formas;*
3. Apgabalā $D$ *eksistē diferencējama funkcija $u(x,y)$, kuras diferenciālis ir vienāds ar $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, t.i.,*
$$du = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$
*Pie tam*
$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = u(B) - u(A),$$
*kur $AB \subset D$.*

► Šo apgalvojumu ekvivalenci izdevīgi pierādīt pēc šādas shēmas $\boxed{1. \to 2. \to 3. \to 1.}$

Vispirms pierāda, ka no pirmā apgalvojuma seko otrais apgalvojums. $\boxed{1. \to 2.}$

Izvēlas patvaļīgus $A, B \in D$ un divas patvaļīgas līnijas $ACB, AC'B \subset D$ (5.7. zīm.).

Izveido noslēgtu līniju $L = (ACB) \cup (BC'A)$. Pēc dotā
$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$




**5.7. zīm.**

Tas nozīmē, ka

$$\int\limits_{ACB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{BC'A} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

jeb

$$\int\limits_{ACB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int\limits_{AC'B} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.$$

Tātad

$$\int\limits_{ACB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AC'B} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Tādējādi līnijintegrālis nav atkarīgs no līnijas $AB \subset D$ formas.

Tagad pierāda $\boxed{2. \to 3.}$

Apgabalā $D$ izvēlas kādu fiksētu punktu $M_0$ un apskata šī apgabala patvaļīgu līniju $M_0M$. Saskaņā ar otro apgalvojumu līnijintegrālis

$$\int\limits_{M_0M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

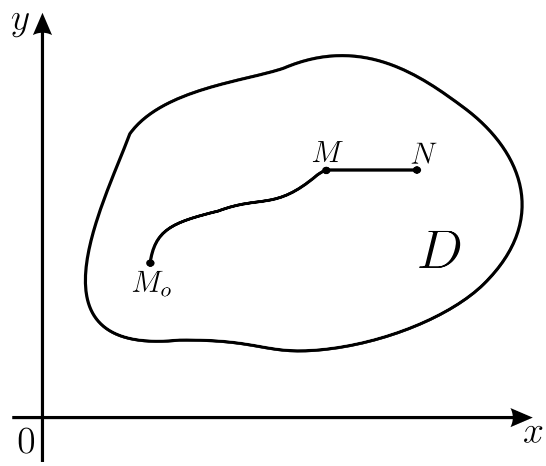
nav atkarīgs no līnijas $M_0M$ formas.

Šis līnijintegrālis ir atkarīgs tikai no punkta $M$. Tātad līnijintegrāli var uzskatīt par punkta $M$ funkciju, t.i.,

$$u(M) = \int\limits_{M_0M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Šī funkcija ir definēta apgabalā $D$. Atliek parādīt, ka eksistē parciālie atvasinājumi $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ un tie atbilstoši ir vienādi ar $P, Q$.

Fiksē punktu $M(x, y)$ un izvēlas patvaļīgu $\Delta x \neq 0$, bet tādu, lai nogrieznis $MN$, kur $N(x+\Delta x, y)$, piederētu $D$ (5.8. zīm.).




**5.8. zīm.**

Tā kā apgabals ir vaļēja kopa, tad tādu $\Delta x$ (tātad arī punktu $N$) var izvēlēties. Apskata

$$\Delta_x u = u(N) - u(M) = u(x+\Delta x, y) - u(x, y) =$$

$$= \int\limits_{M_0MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy - \int\limits_{M_0M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int\limits_{MN} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \left| \begin{array}{c} \text{Līnijintegrāli reducē uz} \\ \text{noteikto integrāli, ievērojot, ka} \\ y = \text{const}, \quad dy = 0. \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_x^{x+\Delta x} P(x,y)dx = P(x+\Theta\Delta x, y)\Delta x,$$

kur $0 < \Theta < 1$. (Tika pielietota teorēma par noteiktā integrāļa vidējo vērtību).

Izveido attiecību

$$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} = P(x+\Theta\Delta x, y).$$

Tā kā funkcija $P(x, y)$ ir nepārtraukta apgabalā $D$, tad šai attiecībai eksistē galīga robeža, kad $\Delta x \to 0$, un tā ir vienāda ar $P(x, y)$. Tas nozīmē, ka funkcijai $u(x, y)$ eksistē parciālais atvasinājums pēc mainīgā $x$ un tas ir vienāds ar $P(x, y)$. Tātad eksistē

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x + \Theta \Delta x, y) = P(x, y).$$

Analogi pierāda, ka eksistē $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$. Tā kā funkcijas $P(x, y)$, $Q(x, y)$ ir nepārtrauktas apgabalā $D$ un $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, tad $u(x, y)$ ir diferencējama funkcija apgabalā $D$, pie tam

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Atliek pierādīt formulu līnijintegrāļa izteikšanai ar funkciju $u(x, y)$.

Apgabalā $D$ apskata līniju $AB$, kuras parametriskais vienādojums

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

$\alpha \leq t \leq \beta$, pie tam funkcijām $\varphi(t)$, $\psi(t)$ intervalā $[\alpha, \beta]$ eksistē nepārtraukti atvasinājumi ($AB$ ir gluda līnija), punktam $A$ atbilst vērtība $t = \alpha$, bet punktam $B$ - vērtība $t = \beta$.

Apskata

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Big( P\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\varphi'(t) + Q\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\psi'(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} u'_t\big(\varphi(t), \psi(t)\big)dt =$$

$$= u\big(\varphi(t), \psi(t)\big)\Bigg|_{\alpha}^{\beta} = u\big(\varphi(\beta), \psi(\beta)\big) - u\big(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)\big) = u(B) - u(A).$$

Tādējādi

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(B) - u(A).$$

Visbeidzot pierāda $\boxed{3. \to 1.}$

Apskata noslēgtu līniju $AB$ ($A \equiv B$).

Tā kā

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(B) - u(A)$$

un $A \equiv B$, tad

$$u(B) - u(A) = 0.$$

Tādējādi

$$\oint\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \blacktriangleleft$$

**5.4. piezīme.** Līnijintegrāli

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

kurš nav atkarīgs no integrēšanas līnijas formas, pieraksta

$$\int\limits_{A}^{B} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

jeb

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy,$$

kur $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$.

Ja $D$ papildus vēl ir vienkārtsakarīgs apgabals, tad var formulēt vēl vienu (jau ceturto) ekvivalento apgalvojumu.

**5.2. definīcija.** Apgabalu $D \subset \mathbb{R}^2$ sauc par **vienkārtsakarīgu**, ja jebkura noslēgta šī apgabala līnija $L$, ierobežo $D$ apakškopu.

Vienkārtsakarīgu apgabalu var iedomāties kā apgabalu bez "caurumiem". Piemēram, riņķa līnija, elipse ierobežo vienkārtsakarīgus apgabalus, bet divas konventriskas riņķa līnijas ierobežo apgabalu, kurš nav vienkārtsakarīgs apgabals.

**5.5. teorēma.** *Ja $P(x,y)$, $Q(x,y)$ un to parciālie atvasinājumi $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ vienkārtsakarīgā apgabalā $D$ ir nepārtrauktas funkcijas, tad minētajiem 3 apgalvojumiem ekvivalents vēl viens apgalvojums:*

*4) apgabalā $D$ izpildās nosacījums*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

▶ Šoreiz pierādīšanas shēma ir $\boxed{1. \to 2. \to 3. \to 4. \to 1.}$

Protams, sekojot šai shēmai, vajag pierādīt, ka no trešā apgalvojuma seko ceturtais, bet no ceturtā - pirmais apgalvojums.

$\boxed{3. \to 4.}$ Tātad apgabalā $D$ eksistē tāda diferencējama funkcija $u(x, y)$, ka $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$. Tas nozīmē, ka $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$. Tā kā eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, tad eksistē

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Jauktie parciālie atvasinājumi $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ ir vienādi apgabalā $D$. Tādējādi apgabalā $D$ ir vienādi arī parciālie atvasinājumi $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, t.i.,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$\boxed{4. \to 1.}$ Šoreiz dots, ka apgabalā $D$ izpildās vienādība $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

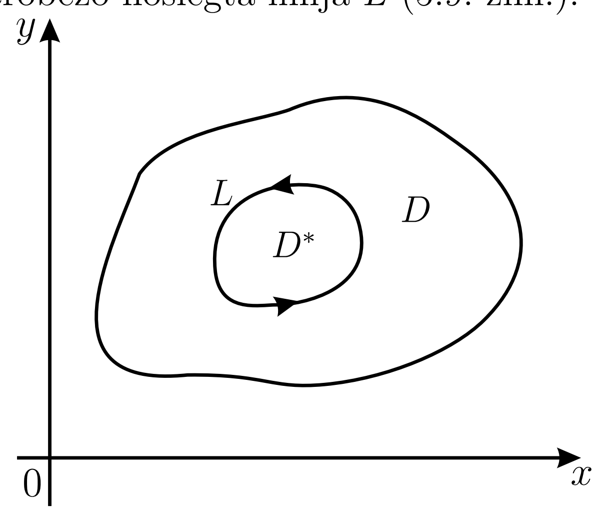
Apgabalā $D$ izvēlas noslēgtu līniju $L$ un līnijintegrālim

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

pielieto Grīna formulu. Iegūst, ka

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{D^*} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0,$$

kur $D^* \subset D$ un $D^*$ ierobežo noslēgtā līnija $L$ (5.9. zīm.). ◀



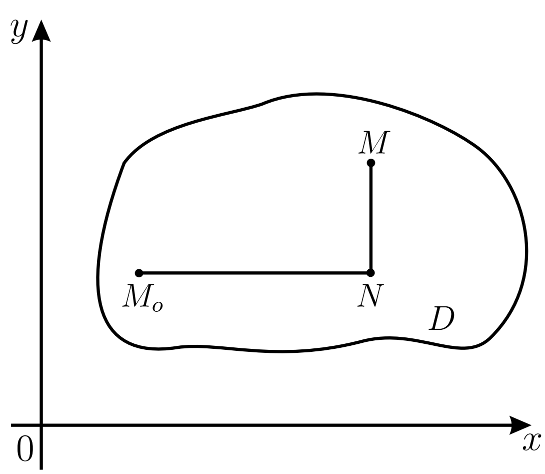

**5.9. zīm.**

**5.5. piezīme.**

1. Funkciju $u(x,y)$, kuras diferenciālis ir
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
sauc par **diferenciālās formas**
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
**primitīvo** funkciju. Viegli pamanīt, ka vienas diferenciālās formas divas primitīvās funkcijas var atšķirties tikai par konstantu saskaitāmo.

2. Diferenciālās formas
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$
visas primitīvās funkcijas var izteikt ar līnijintegrāli, t.i.,
$$u(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C,$$
kur $M_0(x_0,y_0)$ apgabala $D$ fiksētais punkta, $M(x,y)$ ir apgabala $D$ patvaļīgais punkts, bet konstante $C = u(x_0,y_0)$.

Punktu $M_0$ savieno ar $M$ ar lauztu līniju, kuras nogriežņi paralēli koordinātu asīm.



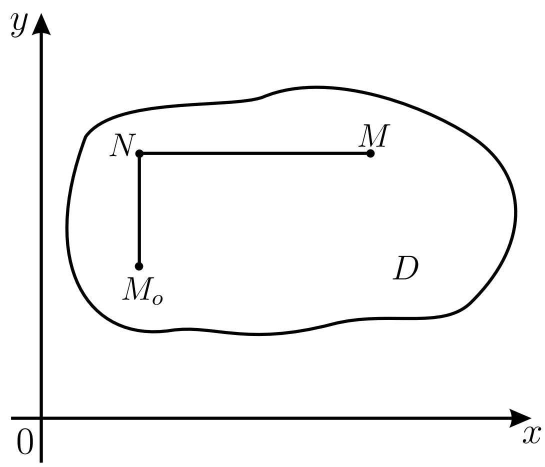

**5.10. zīm.**

Apskata 5.10. zīm. attēloto gadījumu.

$$u(x,y) = \int\limits_{M_0}^{M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C =$$

$$= \int\limits_{M_0}^{N} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int\limits_{N}^{M} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + C =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Uz nogriežņa } M_0N: \\ y = y_0, \quad dy = 0. \\ \text{Uz nogriežņa } NM: \\ x = const, \quad dx = 0 \end{array} \right| = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C.$$




**5.11. zīm.**

Analogi 5.11. zīm. attēlotajā situācijā iegūst, ka

$$u(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)dx + C.$$

**5.7. piemērs.** Atrast funkciju $u(x,y)$, ja tās diferenciālis ir

$$(x^2+y^2)dx + 2xydy.$$

Šoreiz $P(x,y) = x^2+y^2$, $Q(x,y) = 2xy$ un to parciālie atvasinājumi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2y$$

sakrīt un ir nepārtrauktas funkcijas visā $xOy$ plaknē. Funkciju $u(x,y)$ atrod, piemēram, pēc formulas

$$u(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C.$$

Šoreiz izvēlas $x_0 = y_0 = 0$. Tāpēc

$$u(x,y) = \int\limits_{0}^{x} x^2 dx + \int\limits_{0}^{y} 2xydy + C = \frac{x^3}{3} + xy^2 + C.$$

**5.8. piemērs.** Atrast funkciju $u(x,y)$, ja tās diferenciālis ir

$$\left(3x^2y + \frac{1}{y}\right)dx + \left(x^3 - \frac{x}{y^2}\right)dy.$$

Dotajai diferenciālajai formai

$$P(x,y) = 3x^2y + \frac{1}{y}, \quad Q(x,y) = x^3 - \frac{x}{y^2}.$$

Atrod

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - \frac{1}{y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 - \frac{1}{y^2}.$$

Funkcijas $P(x,y)$, $Q(x,y)$ un to parciālie atvasinājumi $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ - nepārtrauktas funkcijas visā $xOy$ plaknē, izņemot $Ox$ asi $(y = o)$, pie tam

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Tas nozīmē, ka līnijintegrālis

$$\int\limits_L \left(3x^2y + \frac{1}{y}\right)dx + \left(x^3 - \frac{x}{y^2}\right)dy$$

nav atkarīgs no integrēšanas līnijas formas. Svarīgi ir, lai integrēšanas sākuma punkts $A(x_0, y_0)$, integrēšanas beigu punkts $B(x,y)$ un pati līnija $AB$ piederētu kopai, kurā $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ir nepārtrauktas funkcijas, t.i., augšējai (vai apakšējai) pusplaknei.

Atrodot funkciju $u(x, y)$, par integrēšanas sākuma punktu vairs nevar ņemt punktu $O(0, 0)$. Šoreiz izvēlas $A(0, 1)$.

$$u(x,y) = \int_0^x P(x,1)dx + \int_1^y Q(x,y)dy + C.$$

Konkrēti

$$u(x,y) = \int_0^x (3x^2+1)dx + \int_1^y \left(x^3 - \frac{x}{y^2}\right) dy + C =$$
$$= x^3 + x + x^3(y-1) + \frac{x}{y} - x + C = x^3 y + \frac{x}{y} + C.$$

**5.9. piemērs.** Aprēķināt

$$\int_{AB} \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy,$$

ja $A(0, 1)$, $B(1, 2)$.

$$P(x,y) = \frac{2x}{y^3}, \quad Q(x,y) = \frac{1}{y^2} - \frac{3x^2}{y^4}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-6x}{y^4}.$$

Visas šīs funkcijas ir nepārtrauktas augšējā pusplaknē (arī apakšējā pusplaknē), kurā atrodas punkti $A$ un $B$. Tā kā $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, tad līnijintegrālis nav atkarīgs no integrēšanas līnijas formas. Svarīgi, lai $AB$ atrastos augšējā pusplaknē. Līnijintegrāli var aprēķināt, atrodot funkciju $u(x, y)$.

Viegli saskatīt, ka viena no primitīvām funkcijām ir

$$u(x,y) = \frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}.$$

Līnijintegrālis

$$\int_{AB} \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy = \int_{(0,1)}^{(1,2)} \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2-3x^2}{y^4}dy =$$
$$= u(x,y)\Big|_{(0,1)}^{(1,2)} = \left(\frac{x^2}{y^3} - \frac{1}{y}\right)\Big|_{(0,1)}^{(1,2)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{8}.$$

**5.10. piemērs.** Aprēķināt

$$\oint_L \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2},$$

ja $L$ riņķa līnija $x^2+y^2=9$.

$$P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}, \quad Q(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tātad $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Apgalvot, ka līnijintegrālis ir nulle, vēl nav pamata, jo funkcijas $P(x,y)$, $Q(x,y)$ un to parciālie atvasinājumi $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ir nepārtrauktas funkcijas kopā, kura nesatur punktu $O(0,0)$. Minētais punkts atrodas riņķa līnijas $x^2+y^2=9$ iekšpusē.

Līnijintegrāli aprēķina, parametrizējot riņķa līniju. Riņķa līnijas

$$x^2+y^2=9$$

parametriskais vienādojums ir $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Atrod $dx = -3\sin t dt$, $dy = 3\cos t dt$,

$$x^2+y^2 = (3\cos t)^2 + (3\sin t)^2 = 9.$$

$$\int_L \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\big(2\sin t(-3\sin t) - 3\cos t 3\cos t\big)}{9} dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi.$$

## 5.6. Līnijintegrāļa lietojumi figūru laukumu aprēķināšanā

Izmantojot Grīna formulu, ar līnijintegrāļiem var aprēķināt figūru laukumus.

Pieņem, ka $D$ - kvadrējams apgabals, kuru ierobežo līnija $L$. Kā zināms tā laukums

$$m_2 D = \iint_D dxdy.$$

Ja izvēlas

$$P(x,y) = -\frac{y}{2}, \;\; Q(x,y) = \frac{x}{2},$$

tad

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{2}, \;\; \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} \text{ un } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1.$$

Tāpēc līnijintegrālis

$$\oint\limits_L \left(-\frac{y}{2}\right) dx + \frac{x}{2} dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \iint\limits_D dxdy.$$

Tādējādi

$$\boxed{m_2 D = \frac{1}{2} \oint\limits_L xdy - ydx.}$$

**5.6. piezīme.** Acīmredzami laukumu izsaka arī šādi līnijintegrāļi:

$$\oint\limits_L xdy, \;\; -\oint\limits_L ydx.$$

**5.1. uzdevums.** Aprēķināt elipses ierobežotās figūras laukumu.

Elipses

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

parametriskais vienādojums ir

$$x = a\cos t, \;\; y = b \sin t, \;\; 0 \le t \le 2\pi.$$

Atrod

$$dx = -a \sin t dt, \;\; dy = b \cos t dt.$$

Tāpēc

$$m_2 D = \frac{1}{2} \oint\limits_L xdy - ydx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} \big(a \cos t b \cos t - b \sin t(-a \sin t)\big) dt =$$

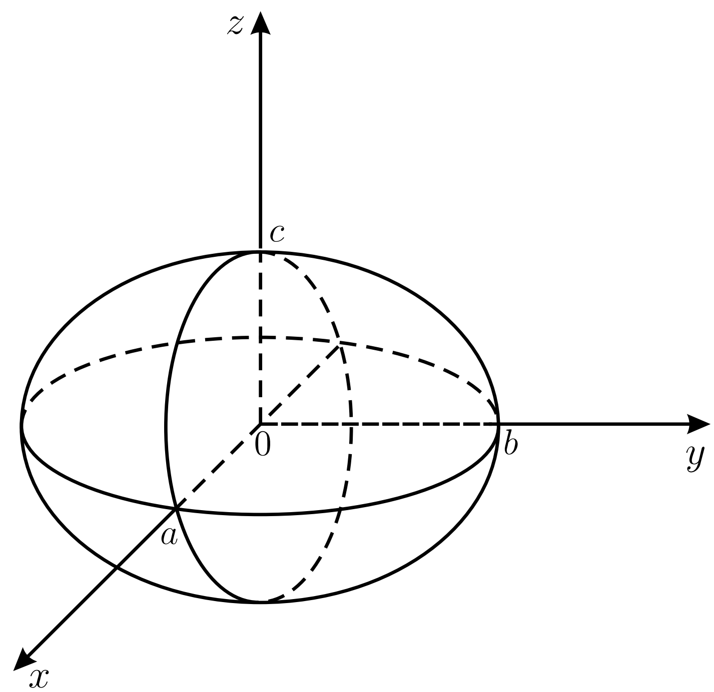
$$= \frac{ab}{2} \int\limits_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

# 6. nodaļa

# PIELIKUMS

Elipsoīds

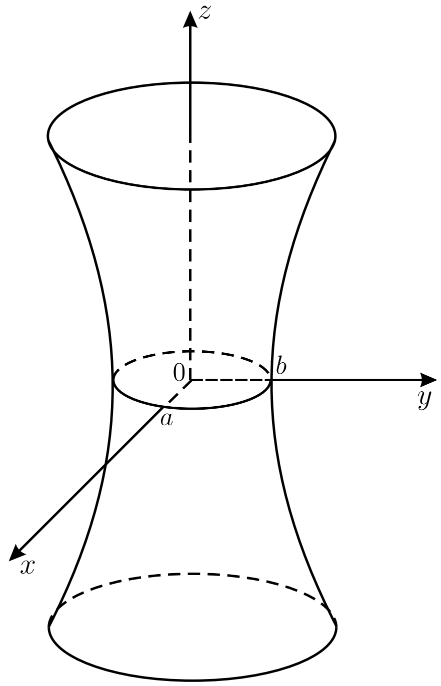
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.}$$




**6.1. zīm.**

Viendobuma hiperboloīds

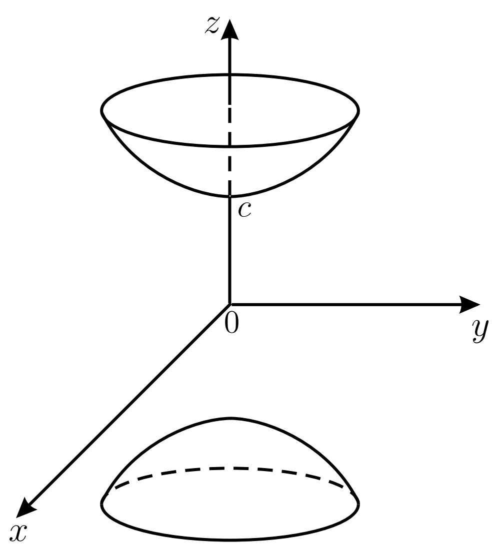
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.}$$




**6.2. zīm.**

Divdobumu hiperboloīds

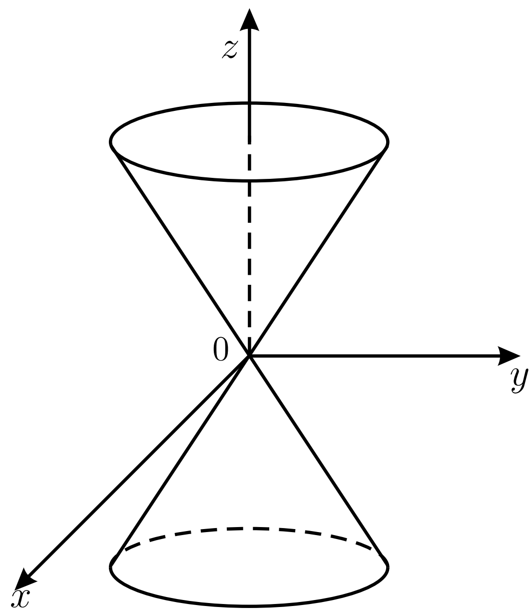
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.}$$




**6.3. zīm.**

Konuss

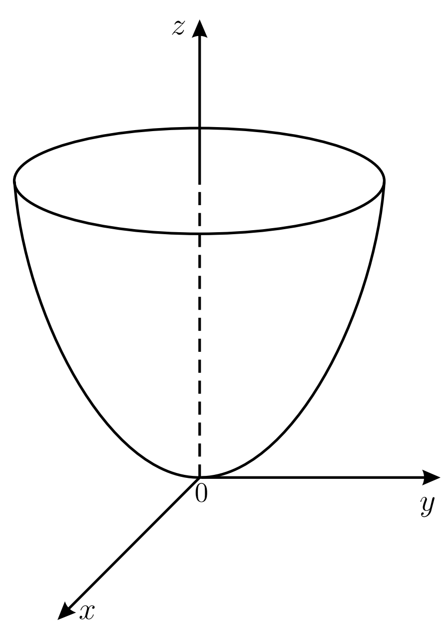
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.}$$




**6.4. zīm.**

Eliptiskais paraboloīds

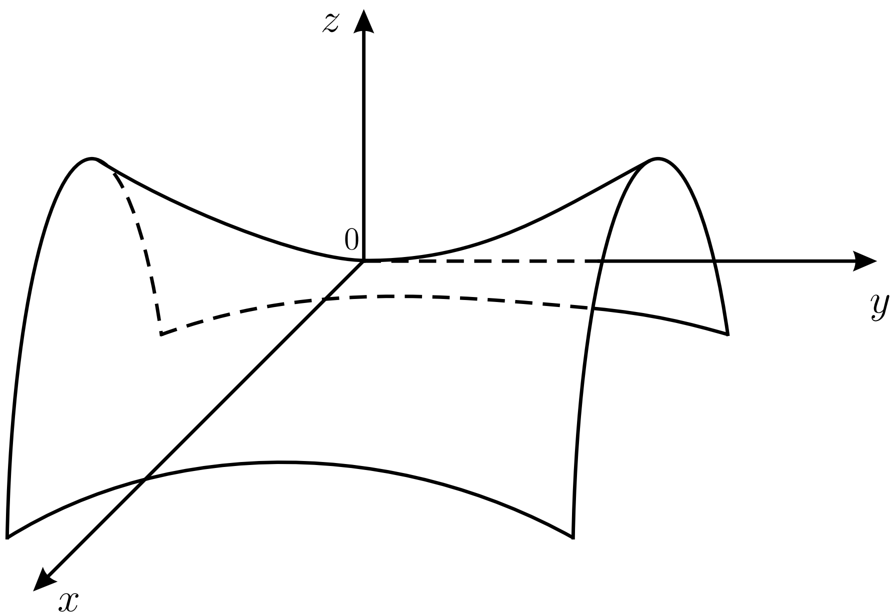
$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}.$$




**6.5. zīm.**

Hiperboliskais paraboloīds

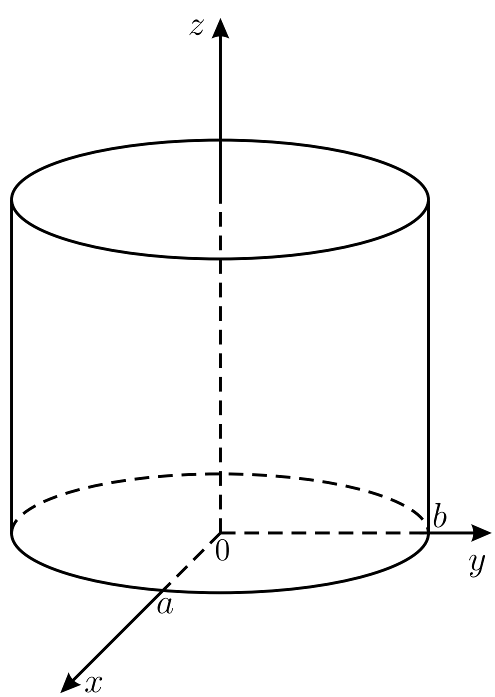
$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$




**6.6. zīm.**

Eliptiskais cilindrs

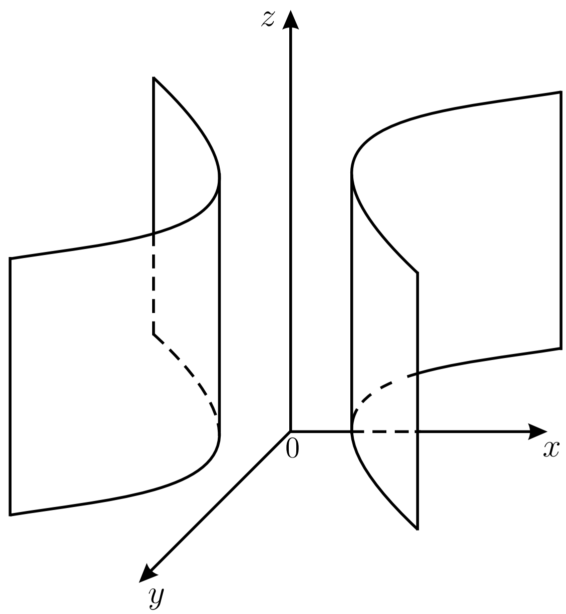
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$




**6.7. zīm.**

Hiperboliskais cilindrs

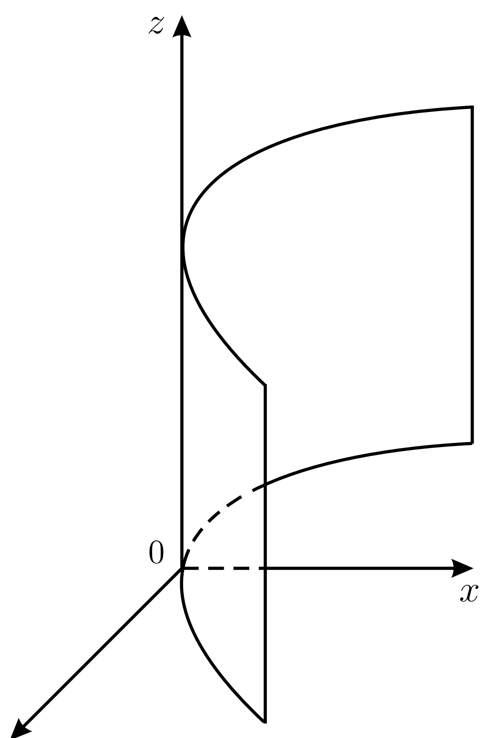
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$




**6.8. zīm.**

Paraboliskais cilindrs

$$y^2 = 2px.$$




**6.9. zīm.**

# LITERATŪRA


[1] Dz. Bože, L. Biezā, B. Siliņa, A. Strence. Uzdevumu krājums augstākajā matemātikā. - R.: Zvaigzne ABC, 1996. - 328 lpp.

[2] E. Kronbergs, P. Rivža, Dz. Bože. Augstākā matemātika. 2. daļa. - R.: Zvaigzne, 1988. - 528 lpp.

[3] K. Šteiners. Vairākargumentu funkciju integrālrēķini. - R.: LVU, 1989. - 134 lpp.

[4] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 1985. - 384 с.

[5] Задачник по курсу математического анализа. Под редакцией Н.Я. Виленкина Ч.2. - М.: Просвещение, 1971. - 336 с.

[6] Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н.. Сборник задач по математическому анализу. - М.: Просвещение, 1973. - 256 с.

[7] Мордкович А.Г., Солодовников А.С. Математический анализ. - М.: Высшая школа, 1990. - 416 с.

[8] Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике, ч.3. - Минск: Вышэйшая школа, 1991. - 288 с.

[9] Уваренков Н.М., Маллер М.З. Курс математического анализа. Т.II. - М.: Просвещение, 1976. - 479 с.

# SATURS