DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

MATEMĀTIKAS KATEDRA

Vitolds Gedroics

VIENA ARGUMENTA FUNKCIJU INTEGRĀLRĒĶINI

2002

ANOTĀCIJA

Mācību līdzeklis ir turpinājums iepriekš izdotajam V. Gedroica mācību līdzeklim "Viena argumenta funkciju diferenciālrēķini". Mācību līdzeklī iekļautas 6 tēmas:

- nenoteiktais integrālis,
- noteiktais integrālis,
- integrālis ar mainīgu augšējo robežu,
- kvadrējamības kritēriji,
- noteiktā integrāļa lietojumi,
- neīstie integrāļi.

Mācību līdzeklī iekļauti gan teorētiska, gan praktiska rakstura uzdevumi. Katras tēmas beigās sniegti jautājumi zināšanu kontrolei un vingrinājumi vielas nostiprināšanai. Pierādījuma sākums un beigas apzīmēti atbilstoši ar simboliem ► un ◄.

1. nodaļa

NENOTEIKTAIS INTEGRĀLIS

1.1. Primitīvā funkcija un nenoteiktais integrālis

Diferenciālrēķinu pamatuzdevums ir dotajai funkcijai atrast atvasināto funkciju jeb atvasinājumu. Šis uzdevums ir atrisināms viennozīmīgi. Bieži nepieciešams atrisināt arī apgrieztu uzdevumu - pēc atvasinājuma atrast pašu funkciju. Izrādās, ka šis uzdevums nav atrisināms viennozīmīgi, bet ar precizitāti līdz konstantam saskaitāmajam.

Apskata divas funkcijas f un F, kas ir definētas intervālā L, pie tam funkcijai F šajā intervālā eksistē atvasinājums.

1.1. definīcija. Funkciju F sauc par **funkcijas f primitīvo funkciju intervālā** L, ja visiem $x \in L$ ir spēkā vienādība $F'(x) = f(x)$.

Piemēram, $F(x) = x^3$ ir funkcijas $f(x) = 3x^2$ primitīvā funkcija. Abas funkcijas definētas visu reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$ un visiem $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā vienādība

$$F'(x) = \left(x^3\right)' = 3x^2 = f(x).$$

Acīmredzot, arī funkcija $F(x) = x^3 + 5$ ir funkcijas $f(x) = 3x^2$ primitīvā funkcija. Vispār, dotās funkcijas primitīvā funkcija ir funkcija

$$F(x) = x^3 + C,$$

kur C ir patvaļīga konstante.

Dotās funkcijas primitīvo funkciju atrašana ir viens no integrālrēķinu pamatuzdevumiem.

Funkcijas f divas primitīvās funkcijas viena no otras var atšķirties tikai ar konstantu saskaitāmo (Pierādīt patstāvīgi).

1.2. definīcija. Funkcijas f primitīvās funkcijas vispārīgo veidu $F(x) + C$, kur F ir funkcijas f kāda primitīvā funkcija, bet C ir patvaļīga konstante, sauc par **funkcijas f nenoteikto integrāli** un apzīmē ar simbolu $\int f(x)dx$, t.i.,

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + C.}$$

Šajā formulā

f sauc par **zemintegrāļa funkciju**,

$f(x)dx$ - par **zemintegrāļa izteiksmi**,

x - par **integrēšanas mainīgo**,

C - par **integrēšanas konstanti**.

Simbols $\int$ ir integrēšanas darbības simbols (lasa:“*integrālis ef no iks de iks*”).

Piemēram, $\int 3x^2dx = x^3 + C$.

1.3. definīcija. Nenoteiktā integrāļa jeb visu primitīvo funkciju kopas atrašanu dotajai funkcijai sauc par šīs **funkcijas integrēšanu.**

1.2. Pamatintegrāļu tabula

No elementāro pamatfunkciju atvasinājumu tabulas un nenoteiktā integrāļa definīcijas izriet šāda pamatintegrāļu tabula.

$$1. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$3. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$

10. $\displaystyle\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$

11. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$

12. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Šo formulu pareizību var pārbaudīt tieši - atvasinot formulu labās puses; rezultātā ir jāiegūst atbilstošā zemintegrāļa funkcija.

1.3. Nenoteiktā integrāļa pamatīpašības

Izmantojot pamatintegrāļu tabulu, var integrēt tikai visvienkāršākās funkcijas.

Piemēram,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int x^{-\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = 3\sqrt[3]{x} + C.$$

Nenoteiktā integrāļa īpašības dod iespēju aprēķināt nenoteiktos integrāļus ievērojami plašākai funkciju klasei.

1. īpašība. *Nenoteiktā integrāļa atvasinājums ir vienāds ar zemintegrāļa funkciju, t.i.,*

$$\boxed{\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).}$$

▶ Šo īpašību pierāda, izmantojot nenoteiktā integrāļa definīciju un diferencēšanas likumus. Konkrēti:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \big(F(x)+C\big)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x). \blacktriangleleft$$

2. īpašība. *Nenoteiktā integrāļa diferenciālis ir vienāds ar zemintegrāļa izteiksmi, t.i.,*

$$\boxed{d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.}$$

3. īpašība. *Nenoteiktais integrālis no funkcijas F atvasinājuma ir vienāds ar šo funkciju (ar precizitāti līdz konstantam saskaitāmajam C), t.i.,*

$$\boxed{\int F'(x)dx = F(x) + C.}$$

4. īpašība. *Nenoteiktais integrālis no funkcijas F diferenciāļa ir vienāds ar šo funkciju (ar precizitāti līdz konstantam saskaitāmajam C), t.i.,*

$$\boxed{\int dF(x) = F(x) + C.}$$

1.1. piezīme. 2., 3. un 4. īpašību pierādīt patstāvīgi.

5. īpašība. *Konstantu reizinātāju $k \neq 0$ drīkst iznest ārpus nenoteiktā integrāļa zīmes, t.i.,*

$$\boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.}$$

▶ Apzīmē funkcijas f primitīvo funkciju ar F. Acīmredzami, kF ir funkcijas kf primitīvā funkcija. Saskaņā ar nenoteiktā integrāļa definīciju

$$\int kf(x)dx = kF(x) + C = k\left(F(x) + \frac{C}{k}\right) = k\int f(x)dx.$$

(Ja C - patvaļīga konstante, tad $\frac{C}{k}$ arī ir patvaļīga konstante.) ◀

6. īpašība. *Nenoteiktais integrālis no divu funkciju f un g summas ir vienāds ar šo funkciju nenoteikto integrāļu summu, t.i.,*

$$\boxed{\int \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.}$$

► Apzīmē funkciju f un g primitīvās funkcijas atbilstoši ar F un G.

Acīmredzami, funkcijas $(f+g)$ primitīvā funkcija ir funkcija $(F+G)$. Saskaņā ar nenoteiktā integrāļa definīciju

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \big(F(x)+C_1\big) + \big(G(x)+C_2\big) =$$
$$= \big(F(x)+G(x)\big) + (C_1+C_2) = \big(F(x)+G(x)\big) + C =$$
$$= \int \big(f(x)+g(x)\big)dx,$$

kur C_1, C_2, C ir patvaļīgas konstantes, pie tam $C = C_1 + C_2$. ◄

No 5. un 6. īpašības seko vēl viena nenoteiktā integrāļa īpašība.

7. īpašība. *Nenoteiktais integrālis no funkciju $f_1, \dots, f_n$ lineārās kombinācijas ir vienāds šo funkciju nenoteikto integrāļu lineāro kombināciju, t.i.,*

$$\int \big(k_1 f_1(x) + \dots + k_n f_n(x)\big)dx = k_1 \int f_1(x)dx + \dots + k_n \int f_n(x)dx,$$

kur vismaz viena no konstantēm $k_1, \dots, k_n$ nav nulle.

1.1. piemērs. Atrast

$$\int \left(2\sin x - 2^x + \sqrt{x}\,\right) dx.$$

$$\int \left(2\sin x - 2^x + \sqrt{x}\,\right) dx = 2\int \sin x dx - \int 2^x dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx =$$
$$= -2\cos x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -2\cos x - \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$$

1.2. piemērs. Atrast

$$\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - 4\right) dx.$$

$$\int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - 4\right) dx = 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} - 4\int dx = 3\,\mathrm{tg}\, x - 4x + C.$$

1.3. piemērs. Atrast

$$\int \frac{x\sqrt{x} + x^2 - 5}{x^2\sqrt{x}}\, dx.$$

$$\int \frac{x\sqrt{x}+x^2-5}{x^2\sqrt{x}}dx = \int \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{5}{x^2\sqrt{x}}\right)dx =$$
$$= \int \frac{dx}{x} + \int x^{-\frac{1}{2}}dx - 5\int x^{-\frac{5}{2}}dx =$$
$$= \ln|x| + \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - 5\frac{x^{-\frac{5}{2}+1}}{-\frac{5}{2}+1} + C = \ln|x| + 2\sqrt{x} + \frac{10}{3x\sqrt{x}} + C.$$

1.4. Integrēšanas pamatmetodes

Integrējamu funkciju klasi ievērojami paplašina integrēšanas pamatmetodes:

- parciālā integrēšana,
- integrēšana ar mainīgā aizvietošanu jeb substitūciju metode.

1.4.1. Parciālā integrēšana

Apskata divas intervālā L diferencējamas funkcijas u un v. Atrod šo funkciju reizinājuma diferenciāli:

$$d(uv) = udv + vdu.$$

No šīs vienādības iegūst, ka

$$udv = d(uv) - vdu.$$

Integrē šo vienādību un izmanto nenoteiktā integrāļa īpašības:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu,$$

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.}$$

Iegūto formulu sauc par **parciālās integrēšanas formulu** nenoteiktajā integrālī. (Integrēšanas konstanti neraksta, jo var uzskatīt, ka tā ietilpst otrajā saskaitāmajā).

Funkcija u un diferenciālis dv jāizvēlas tā, lai iegūtais integrālis būtu tabulārs vai vismaz vienkāršāks par doto. (Ja apzīmējumi nav izvēlēti pareizi, tad iegūst sarežģītāku integrāli, nekā dotais.)

Atrodod integrāļus, apzīmējumus un palīgaprēķinus parasti ieslēdz vertikālās svītrās.

1.4. piemērs. Atrast
$$\int xe^x dx.$$
$$\int xe^x dx = \left| \begin{array}{c} u = x,\ du = dx \\ dv = e^x dx,\ v = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

1.2. piezīme. Parciālās integrēšanas formulu dažreiz nākas pielietot atkārtoti.

1.5. piemērs. Atrast
$$\int (x^2 + x - 1)\cos x\, dx.$$
$$\int (x^2 + x - 1)\cos x\, dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2 + x - 1,\ du = (2x+1)dx \\ dv = \cos x dx,\ v = \sin x \end{array} \right| =$$
$$= (x^2+x-1)\sin x - \int (2x+1)\sin x dx = \left| \begin{array}{c} u = 2x+1,\ du = 2dx \\ dv = \sin x dx,\ v = -\cos x \end{array} \right| =$$
$$= (x^2 + x - 1)\sin x - \left((2x+1)(-\cos x) + \int (\cos x) 2dx \right) =$$
$$= (x^2 + x - 1)\sin x + (2x+1)\cos x - 2\sin x + C =$$
$$= (x^2 + x - 3)\sin x + (2x+1)\cos x + C.$$

1.3. piezīme. Atkārtoti pielietojot parciālās integrēšanas formulu, dažreiz nonāk pie izteiksmes, kas satur doto integrāli. No iegūtās vienādības izsaka doto integrāli.

1.6. piemērs. Atrast
$$\int e^x \sin x dx.$$
$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{array}{c} u = e^x,\ du = e^x dx \\ dv = \sin x dx,\ v = -\cos x \end{array} \right| =$$
$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = e^x,\ du = e^x dx \\ dv = \cos x dx,\ v = \sin x \end{array} \right| =$$
$$= -e^x \cos x + \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \right) =$$
$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Seko, ka

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}\left(-e^x \cos x + e^x \sin x\right) + C = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

Lai pārbaudītu iegūto rezultātu, atvasina šīs vienādības labo pusi.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C\right)' &= \\ &= \frac{1}{2}\big((e^x)'(\sin x - \cos x) + e^x(\sin x - \cos x)'\big) = \\ &= \frac{1}{2}\big(e^x(\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x)\big) = \\ &= \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x + \cos x + \sin x) = e^x \sin x.\end{aligned}$$

Integrālis atrasts pareizi.

1.4. piezīme. Parciālās integrēšanas formulu lieto, lai atrastu šādus integrāļus:

$$\begin{aligned}&\int P(x)e^{kx}dx, && \int P(x)\arcsin x dx,\\ &\int P(x)\sin kx dx, && \int P(x)\arccos x dx,\\ &\int P(x)\cos kx dx, && \int P(x)\operatorname{arctg} x dx,\\ &\int P(x)\ln x dx, && \int P(x)\operatorname{arcctg} x dx,\end{aligned}$$

kur $P(x)$ ir polinoms, bet k ir reāls skaitlis.

Pirmajos trijos piemēros apzīmē $u = P(x)$, bet pārējos - par u izvēlas funkciju, ar kuru reizināts polinoms.

1.4.2. Integrēšana ar mainīgā aizvietošanu

1.1. teorēma. *Ja $x = \varphi(t)$ ir stingri monotona un diferencējama intervālā L, pie tam $\varphi'(t) \neq 0$ šajā intervālā; attēlo intervālu L par kaut kādu intervālu L_1, kurā ir definēta funkcija $f(x)$ un $\phi(t)$ ir funkcijas $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ primitīvā funkcija intervālā L, tad $F(x) = \phi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ ir funkcijas $f(x)$ primitīvā funkcija intervālā L_1.*

▶ Tā kā φ ir stingri monotona funkcija intervālā L, tad tai eksistē apvērstā funkcija $\varphi^{-1}(x)$, kas ir definēta intervālā L_1. Saskaņā ar teorēmu par apvērstās funkcijas diferencēšanu funkcija $\varphi^{-1}(x)$ ir diferencējama, pie tam

$$\left(\varphi^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Atrod funkcijas $F(x) = \phi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$ atvasinājumu, diferencējot to kā saliktu funkciju.

$$F'(x) = \phi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t))\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f(\varphi(t)) = f(x).$$

Seko, ka $F(x)$ ir funkcijas $f(x)$ primitīvā funkcija. ◀

1.5. piezīme.

1. No teorēmas seko, ka

   $$\boxed{\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.}$$

   Šī vienādība izsaka mainīgā aizvietošanas nenoteiktajā integrālī būtību. Formulu lieto gan no kreisās puses uz labo pusi, t.i., mainīgo x aizstājot ar kāda cita mainīgā t funkciju $\varphi(t)$, gan otrādi, t.i., kādu funkciju apzīmējot ar jaunu mainīgo.
2. Nedrīkst aizmirst pēc integrēšanas atgriezties pie iepriekšējā integrēšanas mainīgā.

1.7. piemērs. Atrast

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2}.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \left| \begin{array}{c} \text{Apzīmē } \frac{x}{a} = t,\ x = at \\ dx = adt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

1.8. piemērs. Atrast

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \left| \begin{array}{c} \text{Apzīmē } \frac{x}{a}=t,\ x=at \\ dx = adt \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{a}\int \frac{a\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin\frac{x}{a} + C.$$

1.9. piemērs. Atrast

$$\int \operatorname{tg} x dx.$$

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \left| \begin{array}{c} \text{Apzīmē } \cos x = t, \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right| =$$

$$= -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

1.10. piemērs. Atrast

$$\int \operatorname{ctg} x dx.$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{c} \text{Apzīmē } \sin x = t, \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| =$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\sin x| + C.$$

1.11. piemērs. Atrast

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx.$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \left| \begin{array}{c} \text{Apzīmē } x = a\sin t, \text{ kur } -a \le x \le a \\ dx = a\cos t dt \\ t = \arcsin\frac{x}{a}, \text{kur } -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}a\cos t dt = a^2\int \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}\right) + C =$$
$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

1.12. piemērs. Atrast

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \left| \begin{array}{c} \text{Apzīmē } x = a\,\mathrm{tg}\,t,\ dx = \frac{a}{\cos^2 t}dt \\ x^2+a^2 = \frac{a^2}{\cos^2 t},\ t = \mathrm{arctg}\,\frac{x}{a},\ \text{kur } -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$
$$= \int \frac{\frac{a}{\cos^2 t}dt}{\frac{a^4}{\cos^4 t}} = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2a^3}\int (1+\cos 2t)dt =$$
$$= \frac{1}{2a^3}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + C = \frac{1}{2a^3}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2+x^2}\right) + C,$$

jo

$$\sin 2t = \frac{2\,\mathrm{tg}\,t}{1+\mathrm{tg}^2\,t} = \frac{2\cdot\frac{x}{a}}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{2xa}{a^2+x^2}.$$

1.6. piezīme. 1.7.-1.12. piemēros iegūtos integrāļus turpmāk izmanto kā tabulāros. Šos integrāļus pievieno pamatintegrāļu tabulai.

---

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + C,$
15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,$
16. $\displaystyle\int \mathrm{tg}\,x dx = -\ln|\cos x| + C,$
17. $\displaystyle\int \mathrm{ctg}\,x dx = \ln|\sin x| + C,$
18. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C,$
19. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\left(\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2+x^2}\right) + C.$

1.5. Racionālu funkciju integrēšana

Apskata šāda veida integrāļus: $\int R(x)dx$, kur R ir racionāla funkcija. Katru racionālu funkciju var izteikt kā divu polinomu attiecību, t.i.,

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

Ja daļa $\frac{P(x)}{Q(x)}$ nav īsta, t.i., skaitītāja pakāpe nav zemāka (vienāda vai lielāka) par saucēja pakāpi, tad šādu daļu var izteikt kā kaut kāda polinoma un īstas daļas summu.

Apskata īstu daļu $\frac{P(x)}{Q(x)}$. Pieņem, ka Q ir n-tās pakāpes polinoms. No algebras kursa zināms, ka katru n-tās pakāpes polinomu Q ar reāliem koeficientiem var izteikt šādi:

$$Q(x) = a_0(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_r)^{m_r}(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{n_s},$$

kur

$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ir šī polinoma reālās saknes,

$p_1, \ldots, p_s$, $q_1, \ldots, q_s$ - reāli skaitļi,

$m_1, \ldots, m_r$, $n_1, \ldots, n_s$ - naturāli skaitļi (atbilstošo sakņu kārtas),

pie tam $m_1 + \cdots + m_r + 2n_1 + \cdots + 2n_s = n$ un kvadrāttrinomiem $x^2 + p_1x + q_1, \ldots,\ x^2 + p_sx + q_s$ nav reālu sakņu.

Īstu daļu var izteikt šādi:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \frac{A_{12}}{(x-\alpha_1)^2} + \cdots + \frac{A_{1m_1}}{(x-\alpha_1)^{m_1}} + \cdots + \\ & + \frac{A_{r1}}{x-\alpha_r} + \frac{A_{r2}}{(x-\alpha_r)^2} + \cdots + \frac{A_{rm_r}}{(x-\alpha_r)^{m_r}} + \\ & + \frac{M_{11}x+N_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{M_{12}x+N_{12}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \cdots + \frac{M_{1n_1}x+N_{1n_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}} + \cdots + \\ & + \frac{M_{s1}x+N_{s1}}{x^2+p_sx+q_s} + \frac{M_{s2}x+N_{s2}}{(x^2+p_sx+q_s)^2} + \cdots + \frac{M_{sn_s}x+N_{sn_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{n_s}},\end{aligned}$$

kur

$A_{11}, \ldots, A_{1m_1}, \ldots, A_{r1}, \ldots, A_{rm_r}$,

$M_{11}, \ldots, M_{1n_1}, \ldots, M_{sn_s}$,

$N_{11}, \ldots, N_{1n_1}, \ldots, N_{s1}, \ldots, N_{sn_s}$

ir reāli skaitļi, kurus atrod ar **nenoteikto koeficientu metodi**. Parasti koeficientus apzīmē ar burtiem A, B, C utt.

Piemēram,

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} =$$
$$= \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Seko, ka

$$x^2+x+1 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1).$$

Pielīdzina polinomu koeficientus pie x vienādām pakāpēm un iegūst šādu vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} A+B=1, \\ -B+C=1, \\ A-C=1. \end{cases}$$

Šīs sistēmas atrisinājums ir

$$\begin{cases} A=\frac{3}{2}, \\ B=-\frac{1}{2}, \\ C=\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Tādējādi

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-x^2+x-1} = \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}.$$

Vienādojumu sistēmu var arī iegūt, ja vienādībā

$$x^2+x+1 = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

x vietā liek 3 patvaļīgas vērtības, piemēram, $x=1$, $x=0$, $x=-1$.

Apskata vēl vienu daļu.

$$\frac{2x+7}{x^3+2x^2-3x} = \frac{2x+7}{x(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+3}.$$

Seko, ka

$$2x+7 = A(x-1)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-1).$$

Argumenta vietā ievieto vērtības $x=0$, $x=1$, $x=-3$ un iegūst, ka $A=-\frac{7}{3}$, $B=\frac{9}{4}$, $C=\frac{1}{12}$.

Tādējādi
$$\frac{2x+7}{x^3+2x^2-3x} = \frac{-\frac{7}{3}}{x} + \frac{\frac{9}{4}}{x-1} + \frac{\frac{1}{12}}{x+3}.$$
Izteiksmes
$$\frac{A}{x-\alpha},\ \frac{A}{(x-\alpha)^n},\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q},\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n},$$
kur kvadrāttrinomam x^2+px+q nav reālu sakņu, sauc par **elemetārdaļām**.

Jebkurā intervālā, kas nesatur α,
$$\int \frac{A}{x-\alpha}\,dx = A\ln|x-\alpha| + C,$$

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^n}\,dx = A\int (x-\alpha)^{-n}dx = A\frac{(x-\alpha)^{-n+1}}{-n+1} + C = \\ = \frac{A}{(1-n)(x-\alpha)^{n-1}} + C.$$

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} + \\ + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)} = \\ = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

1.7. piezīme. Risinot uzdevumus, šo formulu nelieto, bet izmanto paņēmienu, ar kuru tā tiek iegūta.

1.13. piemērs. Atrast
$$\int \frac{x-2}{x^2+x+1}dx.$$

$$\int \frac{x-2}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-5}{x^2+x+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x+1} - \\ - \frac{5}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \\ = \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{5}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Integrāļa $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx$ atrašana ir diezgan sarežģīta. Virpirms apskata integrāli $\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^n}$ $(a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ n > 1)$.

$$\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{(z^2+a^2)-z^2}{(z^2+a^2)^n}dz = \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{n-1}} - \\ - \frac{1}{2a^2}\int z\frac{2zdz}{(z^2+a^2)^n}.$$

Integrāļa $\int z\frac{2zdz}{(z^2+a^2)^n}$ atrašanai pielieto parciālās integrēšanas formulu.

$$\int z\frac{2zdz}{(z^2+a^2)^n} = \left| \begin{array}{c} u = z,\ du = dz \\ dv = \frac{2zdz}{(z^2+a^2)^n},\ v = \frac{1}{(z^2+a^2)^{n-1}(1-n)} \end{array} \right| = \\ = \frac{z}{(1-n)(z^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{n-1}}.$$

Tātad

$$\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dz}{(z^2+a^a)^{n-1}} - \\ - \frac{1}{2a^2}\left(\frac{z}{(1-n)(z^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{1-n}\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{n-1}}\right) = \\ = \frac{z}{2(n-1)a^2(z^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{n-1}}.$$

Tika iegūta formula, kuru sauc par **rekurences formulu**. Šī formula integrāļa $\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^n}$ izskaitļošanu reducē uz integrāļa $\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{n-1}}$ izskaitļošanu.

Piemēram, pie $n = 2$ iegūst formulu:

$$\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^2} = \frac{z}{2a^2(z^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}\int \frac{dz}{z^2+a^2} = \\ = \frac{z}{2a^2(z^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} + C = \\ = \frac{z}{2a^2(z^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{z}{a} + C.$$

1.8. piezīme. Integrāļa $\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^{n-1}}$ izskaitļošanai savukārt var atkal pielietot rekurences formulu utt., kamēr nonāk pie tabulārā integrāļa.

Visbeidzot

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}dx+ \\ + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^n} = \\ = \frac{M}{2(1-n)(x^2+px+q)^{n-1}} + \frac{2N-Mp}{2}\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^n},$$

kur $z = x + \frac{p}{2}$ un $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$.

Integrāli $\int \frac{dz}{(z^2+a^2)^n}$ var atrast, izmantojot rekurences formulu.

1.14. piemērs. Atrast

$$\int \frac{x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx.$$

$$\frac{x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx = \frac{x+4}{(x-1)^2(x^2+1)} = \\ = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

$$x+4 = A(x^2+1) + B(x-1)(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

Ievieto $x = 1$, iegūst $A = \frac{5}{2}$. Pārējos koeficientus atrod, pielīdzinot koeficientus pie vienādām x pakāpēm. Iegūst, ka $B = -2$, $C = 2$, $D = -\frac{1}{2}$.

$$\frac{x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1} = \frac{\frac{5}{2}}{(x-1)^2} + \frac{-2}{x-1} + \frac{2x-\frac{1}{2}}{x^2+1}$$

un

$$\int \frac{x+4}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx = \frac{5}{2}\int \frac{dx}{(x-1)^2} - 2\int \frac{dx}{x-1}+ \\ + \int \frac{2x}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{-5}{2(x-1)} - 2\ln|x-1|+ \\ + \ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

1.15. piemērs. Atrast
$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}.$$

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$
$$1 = A(x+a) + B(x-a).$$

Argumenta vietā ievieto $x = a$ un $x = -a$. Iegūst, ka $A = \frac{1}{2a}$ un $B = -\frac{1}{2a}$.

Tādējādi
$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{\frac{1}{2a}}{x-a} + \frac{-\frac{1}{2a}}{x+a}$$
un
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

Arī šo integrāli pievieno pamatintegrāļu tabulai.

$$20. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C.$$

1.16. piemērs. Atrast
$$\int \frac{2x^3 - 13x^2 + 29x - 20}{x^2 - 6x + 11}dx.$$

Daļa nav īsta, tāpēc vispirms skaitītāja polinomu dalot ar saucēja polinomu, atdala veselo daļu.

$$\begin{array}{rrrrr|l}
 & 2x^3 & -13x^2 & +29x & -20 & x^2 \quad -6x \quad +11 \\
- & & & & & \\
 & 2x^3 & -12x^2 & +22x & & 2x \quad -1 \\
\hline
 & & -x^2 & +7x & -20 & \\
- & & & & & \\
 & & -x^2 & +6x & -11 & \\
\hline
 & & & x & -9 &
\end{array}$$

Tādējādi

$$\frac{2x^3-13x^2+29x-20}{x^2-6x+11}=2x-1+\frac{x-9}{x^2-6x+11}$$

un

$$\int\frac{2x^3-13x^2+29x-20}{x^2-6x+11}dx=\int(2x-1)dx+\int\frac{(x-9)dx}{x^2-6x+11}=$$
$$=x^2-x+\frac{1}{2}\int\frac{2x-6}{x^2-6x+11}dx-6\int\frac{dx}{(x-3)^2+2}=$$
$$=x^2-x+\frac{1}{2}\ln(x^2-6x+11)-\frac{6}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{\sqrt{2}}+C.$$

1.6. Iracionālu funkciju integrēšana

Apskata tādas iracionālas funkcijas, kuras ar mainīgā aizvietošanu var reducēt uz racionālām funkcijām.

- **Integrālis** $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$.

R ir racionāla argumentu x un $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ funkcija, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$, n ir naturāls skaitlis.

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\left|\begin{array}{c}\text{Apzīmē } \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t,\\ \frac{ax+b}{cx+d}=t^n,\ x=\frac{b-dt^n}{ct^n-a}\\ dx=\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}dt\end{array}\right|=$$
$$=\int R\left(\frac{b-dt^n}{ct^n-a},\ t\right)\frac{n(ad-bc)t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}dt=\int R_1(t)dt,$$

kur R_1 ir argumenta t racionāla funkcija.

1.17. piemērs. Atrast

$$\int\frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}.$$

$$\int\frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}=\left|\begin{array}{c}\text{Apzīmē } \sqrt{1+x}=t\\ 1+x=t^2,\ x=t^2-1,\\ dx=2tdt\end{array}\right|=\int\frac{2tdt}{(2+t^2-1)t}=$$
$$=2\int\frac{dt}{1+t^2}=2\operatorname{arctg}t+C=2\operatorname{arctg}\sqrt{1+x}+C.$$

1.18. piemērs. Atrast

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}.$$

Zemintegrāļa funkcija ir racionāla attiecībā pret argumentu $\sqrt[6]{2x+1}$, tāpēc to apzīmē ar jaunu mainīgo t.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}} = \int \frac{dx}{\left(\sqrt[6]{2x+1}\right)^4-\left(\sqrt[6]{2x+1}\right)^3} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Apzīmē } \sqrt[6]{2x+1}=t \\ 2x+1=t^6,\ x=\frac{t^6-1}{2} \\ dx=3t^5dt \end{array} \right| = \int \frac{3t^5dt}{t^4-t^3} = 3\int \frac{t^2}{t-1}dt =$$

$$= 3\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1}dt = 3\int (t+1)dt + 3\int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= \frac{3}{2}(t+1)^2 + 3\ln|t-1| + C =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{2x+1}+1\right)^2 + 3\ln\left|\sqrt[6]{2x+1}-1\right| + C.$$

- **Integrālis** $\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

Arī šoreiz R ir racionāla savu argumentu funkcija. Šo integrāli, izdarot mainīgā aizvietošanu, var reducēt uz integrāli no racionālas funkcijas. Tam nolūkam lieto vienu no tā saucamajām **Eilera substitūcijām.** Substitūcijas izvēle atkarīga no skaitļiem a, b, c.

Eilera pirmā substitūcija.

Ja $a>0$, tad apzīmē $\sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x$.

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \left| \begin{array}{c} \text{Apzīmē } \sqrt{ax^2+bx+c}=t-\sqrt{a}x \\ ax^2+bx+c=t^2-2tx\sqrt{a}+ax^2 \\ x=\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}, \\ dx=\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt. \\ \text{Izsaka } \sqrt{ax^2+bx+c}= \\ =t-\sqrt{a}\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b}= \\ =\frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}. \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{t^2-c}{2\sqrt{a}t+b},\ \frac{\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t+b}\right)\frac{2(\sqrt{a}t^2+bt+c\sqrt{a})}{(2\sqrt{a}t+b)^2}dt = \int R_1(t)dt,$$

kur R_1 ir argumenta t racionāla funkcija.

Eilera otrā substitūcija.

Ja $c > 0$, tad apzīmē $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt - \sqrt{c}$.

Arī šoreiz integrālis tiek reducēts uz integrāli no racionālas funkcijas (Izdarīt to patstāvīgi).

Eilera trešā substitūcija.

Ja kvadrāttrinomam ax^2+bx+c ir reālas un dažādas saknes α un β, tad apzīmē $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$. Iegūst, ka $a(x-\beta) = t^2(x-\alpha)$. Tātad $x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}$, utt.

1.9. piezīme. Integrāļu $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$ izskaitļošanai teorētiski pietiek ar Eilera pirmo un Eilera trešo substitūciju (Pamatot to).

1.19. piemērs. Atrast

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \left| \begin{array}{c} \text{Lieto Eilera pirmo substitūciju.} \\ \text{Apzīmē } \sqrt{x^2+a} = t - x \\ x^2 + a = t^2 - 2xt + x^2, \ x = \frac{t^2-a}{2t} \\ dx = \frac{2(t^2+a)}{4t^2} dt = \frac{t^2+a}{2t^2} dt \\ \sqrt{x^2+a} = t - \frac{t^2-a}{2t} = \frac{t^2+a}{2t} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+a}{2t^2} dt}{\frac{t^2+a}{2t}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

Šo integrāli pievieno pamatintegrāļu tabulai.

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C.$$

1.20. piemērs. Atrast

$$\int \frac{x\,dx}{(\sqrt{6x-8-x^2})^3}.$$

Šoreiz lieto Eilera trešo substitūciju. Kvadrāttrinoma $6x - 8 - x^2$ saknes ir 2 un 4.

$$\int \frac{xdx}{(\sqrt{6x-8-x^2})^3} = \left| \begin{array}{c} \text{Apzīmē } \sqrt{6x-8-x^2} = t(x-2). \\ -(x-2)(x-4) = t^2(x-2)^2, \\ x = \frac{2(t^2+2)}{t^2+1},\ dx = \frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt. \\ \sqrt{6x-8-x^2} = t\left(\frac{2(t^2+2)}{t^2+1} - 2\right) = \frac{2t}{t^2+1}. \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{2(t^2+2)}{t^2+1} \cdot \frac{-4t}{(t^2+1)^2}dt}{\left(\frac{2t}{t^2+1}\right)^3} = -\int \frac{t^2+2}{t^2}dt = -\int dt - 2\int \frac{dt}{t^2} = -t + \frac{2}{t} + C,$$

kur

$$t = \frac{\sqrt{6x-8-x^2}}{x-2} = \frac{\sqrt{-(x-2)(x-4)}}{x-2} = \sqrt{\frac{4-x}{x-2}}.$$

- **Integrālis** $\int x^m(a+bx^n)^p dx$.

Izteiksmi $x^m(a+bx^n)^p dx$, kur a un b ir reāli skaitļi, bet m, n, p ir racionāli skaitļi, sauc par **binomiālo diferenciāli.**

Krievu matemātiķis Čebiševs pierādīja, ka integrāli $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ var izteikt ar elementārām funkcijām tikai trijos gadījumos.

1. gadījums. Ja p ir **vesels skaitlis**, tad apzīmē $x = t^s$, kur s ir daļu m un n kopsaucējs.

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \left| \begin{array}{c} x = t^s, \\ dx = st^{s-1}dt \end{array} \right| = \int t^{ms}(a+bt^{ns})^p st^{s-1}dt =$$

$$= \int R(t)dt,$$

kur R ir racionāla funkcija (ms un ns ir veseli skaitļi).

2. gadījums. Ja $\frac{m+1}{n}$ ir **vesels skaitlis**, tad apzīmē $a + bx^n = t^s$, kur s ir daļas p saucējs.

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \left| \begin{array}{c} a+bx^n = t^s,\ bnx^{n-1}dx = st^{s-1}dt \\ x^{n-1}dx = \frac{s}{bn}t^{s-1}dt, \\ x^n = \frac{t^s-a}{b} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{x^m}{x^{n-1}} x^{n-1}(a+bx^n)^p dx = \int x^{m-n+1}(a+bx^n)^p x^{n-1}dx =$$

$$= \int (x^n)^{\frac{m+1}{n}-1} (a+bx^n)^p x^{n-1}dx =$$

$$= \int \left(\frac{t^s-a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot t^{sp}\frac{s}{bn}t^{s-1}dt = \int R(t)dt,$$

kur R ir racionāla funkcija ($\frac{m+1}{n}-1$ un sp ir veseli skaitļi).

3. gadījums. Ja $\frac{m+1}{n}+p$ ir **vesels skaitlis**, tad apzīmē $ax^{-n}+b=t^s$, kur s ir daļas p saucējs (pamatot patstāvīgi).

1.10. piezīme. Katrā no šiem gadījumiem pēc atbilstošās racionālās funkcijas integrēšanas jāatgriežas pie iepriekšējā mainīgā x.

1.21. piemērs. Atrast

$$\int x^3\left(1+x^2\right)^{\frac{2}{3}}dx.$$

$$\int x^3\left(1+x^2\right)^{\frac{2}{3}}dx = \left| \begin{array}{c} m=3,\ n=2,\ a=b=1,\ p=\frac{2}{3}. \\ \frac{m+1}{n} = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ ir vesels skaitlis.} \\ \text{Apzīmē } 1+x^2=t^3,\ 2xdx = 3t^2dt, \\ xdx = \frac{3}{2}t^2dt,\ x^2 = t^3-1. \end{array} \right| =$$

$$= \int (t^3-1)(t^3)^{\frac{2}{3}}\frac{3}{2}t^2dt = \frac{3}{2}\int (t^7-t^4)dt = \frac{3}{2}\left(\frac{t^8}{8}-\frac{t^5}{5}\right)+C =$$

$$= \frac{3}{16}\sqrt[3]{(1+x^2)^8} - \frac{3}{10}\sqrt[3]{(1+x^2)^5}+C.$$

1.22. piemērs. Atrast

$$\int \frac{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}{x^6}dx.$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}{x^6}dx = \int x^{-6}(1+2x^3)^{\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} m=-6,\ n=3,\ p=\frac{2}{3},\ a=1,\ b=2. \\ \frac{m+1}{n}+p=\frac{-6+1}{3}+\frac{2}{3}=-1 \text{ ir vesels skaitlis.} \\ \text{Apzīmē } x^{-3}+2=t^3,\ -3x^{-4}dx=3t^2dt,\ x^{-4}dx=-t^2dt \end{array} \right| =$$

$$= \int x^{-6}(x^3)^{\frac{2}{3}}(x^{-3}+2)^{\frac{2}{3}}dx = \int (x^{-3}+2)^{\frac{2}{3}}x^{-4}dx =$$

$$= \int (t^3)^{\frac{2}{3}}(-t^2)dt = -\int t^4dt = -\frac{t^5}{5}+C = -\frac{1}{5}\sqrt[3]{(x^{-3}+2)^5}+C =$$

$$= -\frac{1}{5}\frac{\sqrt[3]{(1+2x^3)^5}}{x^5}+C.$$

1.7. Trigonometrisko funkciju integrēšana

Apskata integrāļus $\int R(\sin x, \cos x)dx$, kur R ir racionāla savu argumentu funkcija.

- **Universālā trigonometriskā substitūcija**

Integrāļus $\int R(\sin x, \cos x)dx$ ar substitūciju

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t \ \ (-\pi<x<\pi)$$

var reducēt uz integrāļiem no mainīgā t racionālām funkcijām.

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\ \ (-\pi<x<\pi). \\ \sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \\ = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \\ \cos x = \cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2} = \\ \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \\ x = 2\operatorname{arctg} t,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}. \end{array} \right| =$$

$$= \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt,$$

kur R_1 ir racionāla funkcija.

1.23. piemērs. Atrast
$$\int \frac{dx}{\sin x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \ \ (-\pi < x < \pi), \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} =$$
$$= \ln|t| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

1.24. piemērs. Atrast
$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t \ \ (-\pi < t < \pi) \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = 2\int \frac{dt}{1-t^2} =$$
$$= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

Šos divus integrāļus pievieno pamatintegrāļu tabulai.

---

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C,$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$

1.11. piezīme. Universālā trigonometriskā substitūcija bieži integrāļus $\int R(\sin x, \cos x)dx$ reducē uz samērā sarežģītu racionālu funkciju integrēšanu. Tāpēc apskata citus paņēmienus šādu integrāļu izskaitļošanai.

- Apskata gadījumus, kad $R(\sin x, \cos x)$ ir nepāra funkcija attiecībā pret $\sin x$ vai $\cos x$, t.i.,
$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$$
vai
$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$
vai kad šī funkcija ir pāra funkcija attiecībā pret $\sin x$ un $\cos x$, t.i.,
$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

Šādos gadījumos lieto substitūciju atbilstoši

$$\cos x = t, \quad \sin x = t, \quad \text{vai} \quad \operatorname{tg} x = t \quad (-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}).$$

Piemēram, ja $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, tad

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R_1(\sin^2 x, \cos x)\sin x dx =$$

$$= \int R_1(1-\cos^2 x, \cos x)\sin x dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t, \\ -\sin x dx = dt \\ \sin x dx = -dt. \end{array} \right| =$$

$$= \int R_1(1-t^2, t)dt = \int R_2(t)dt,$$

kur R_1, R_2 ir racionālas savu argumentu funkcijas. (Pārējos gadījumus apskatīt patstāvīgi).

1.12. piezīme. Funkciju $R(\sin x, \cos x)$ var izteikt kā šādu triju veidu funkciju summu, t.i.,

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{R(\sin x, \cos x) - R(\sin x, -\cos x)}{2} +$$

$$+ \frac{R(\sin x, -\cos x) - R(-\sin x, -\cos x)}{2} +$$

$$+ \frac{R(-\sin x, -\cos x) + R(\sin x, \cos x)}{2}.$$

1.25. piemērs. Atrast

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx.$$

Šoreiz

$$R(\sin x, \cos x) = \cos^2 x \sin^3 x$$

un

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x \cos x).$$

$$\int \cos^2 x \sin^3 x dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t, \ -\sin x dx = dt, \\ \sin x dx = -dt, \\ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - t^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \cos^2 x \sin^2 x \sin x dx = -\int t^2(1-t^2)dt = -\int (t^2 - t^4)dt =$$

$$= \frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

1.26. piemērs. Atrast
$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx.$$

Šoreiz
$$R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$$
un
$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t, \ \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt, \\ \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x = t^2 \end{array} \right| = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} =$$
$$= \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

1.13. piezīme. Integrējot trigonometriskās funkcijas, izmanto dažādas trigonometriskās formulas. Piemēram, reizinājumu pārveido trigonometrisko funkciju summā, pazemina pakāpi, utt.

1.27. piemērs. Atrast
$$\int \sin 3x \cos 5x dx.$$

$$\int \sin 3x \cos 5x dx = \left| \ \sin 3x \cos 5x = \tfrac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x) \ \right| =$$
$$= \frac{1}{2} \int (\sin 8x - \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{\cos 8x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} \right) + C =$$
$$= \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{16} \cos 8x + C.$$

1.28. piemērs. Atrast
$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx.$$

Tā kā $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$, tad $\sin^2 x \cos^2 x = \frac{1}{4} \sin^2 2x$.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \left| \sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x) \right| =$$
$$= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + C = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.$$

Jautājumi

1. Formulēt integrālrēķinu pamatuzdevumu. Vai šis uzdevums ir atrisināms viennozīmīgi?
2. Definēt funkcijas f primitīvo funkciju.
3. Definēt funkcijas f nenoteikto integrāli.
4. Definēt funkcijas integrēšanas darbību.
5. Uzrakstīt pamatintegrāļu tabulu.
6. Formulēt nenoteiktā integrāļa pamatīpašības.
7. Nosaukt integrēšanas pamatmetodes nenoteiktajā integrālī.
8. Uzrakstīt parciālās integrēšanas formulu.
9. Nosaukt funkcijas, kuras integrē parciāli.
10. Uzrakstīt integrēšanas ar mainīgā aizvietošanu formulu.
11. Definēt elementārdaļas.
12. Definēt īstu un neīstu daļu $\frac{P(x)}{Q(x)}$.
13. Uzrakstīt īstas daļas sadalījumu elementārdaļu summā.
14. Paskaidrot, kā praktiski veic īstas daļas sadalījumu elementārdaļu summā.
15. Paskaidrot, kā integrē neīstu daļu.
16. Paskaidrot, kā integrē katru no elementārdaļām.
17. Paskaidrot, kā integrāļa $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ izskaitļošanā izmanto rekurences formulu.
18. Kāda ir iracionālu funkciju integrēšanas būtība?
19. Paskaidrot, kā integrē funkciju $R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$.
20. Paskaidrot, kā integrē funkciju $R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$ atkarībā no kvadrāttrinoma koeficientiem.
21. Paskaidrot, kā integrē binomiālo diferenciāli $x^m(a+bx^n)^p dx$.

22. Paskaidrot, kā ar universālo trigonometrisko substitūciju integrē funkciju $R(\sin x, \cos x)$.

23. Kādi ir citi paņēmieni funkciju $R(\sin x, \cos x)$ integrēšanā.

Vingrinājumi

1. Nosaukt kādu funkciju un tās primitīvo funkciju.

2. Kādai konkrētai funkcijai nosaukt 2 dažādas primitīvās funkcijas.

3. Pierādīt, ka funkcijas f divas primitīvās funkcijas viena no otras var atšķirties tikai ar konstantu saskaitāmo.

4. Funkcijai $f(x) = \sin x$ atrast tādu primitīvo funkciju, kurai punktā $x = \frac{\pi}{2}$ vērtība ir 10.

5. Funkcijai $f(x) = e^x$ divas primitīvās funkcijas punktā $x = 1$ atšķiras par 2. Par cik atšķiras šīs primitīvās funkcijas punktā $x = 100$?

6. Kādai no funkcijas $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ primitīvajām funkcijām grafiks iet caur punktu $(1; 2\pi)$?

7. Vai katrai funkcijai eksistē primitīvā funkcija?[1]

8. Pamatot pamatintegrāļu tabulu.

9. Pierādīt nenoteiktā integrāļa 2., 3. un 4. īpašību.

10. Ir jāatrod integrālis $\int \sqrt{4 - x^2}dx$. Vai drīkst lietot šādas substitūcijas:

    (a) $x = \sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

    (b) $x = 2\sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

    (c) $x = 2\sin t, \quad -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

    (d) $x = 2\cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

    (e) $x = 2\cos t, \quad \pi \leq t \leq 2\pi$.

11. Kādās elementārdaļās var sadalīt daļas

    (a) $\frac{x+1}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$,

    (b) $\frac{x}{(x+1)(x^2-2x+1)^2}$,

[1]Apskatīt funkciju $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x > 0, \\ -2, & \text{ja} \quad x \leq 0. \end{cases}$

(c) $\frac{x+1}{x^2(x^2-x-6)}$?

12. Pamatot funkcijas $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ integrēšanu ar Eilera otro un Eilera trešo substitūciju.
13. Pamatot to, ka funkcijas $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ integrēšanai pietiek ar Eilera pirmo un Eilera trešo substitūciju.
14. Pamatot binomiālā diferenciāļa $x^m(a+bx^n)^p dx$ integrēšanu gadījumā, kad $\frac{m+1}{n}+p$ - vesels skaitlis.
15. Pamatot funkciju $R(\sin t, \cos t)$ integrēšanu ar substitūcijām $\sin x = t,\ \operatorname{tg} x = t$.

Uzdevumi

Atrast nenoteiktos integrāļus:

1. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx;$
2. $\displaystyle\int (x^4+1)x^3dx;$
3. $\displaystyle\int (3-x^2)^3dx;$
4. $\displaystyle\int (2^x+3^x)^2dx;$
5. $\displaystyle\int (2x-3)^{10}dx;$
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}};$
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)};$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+3x^2};$
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}};$
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x};$
11. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{1-x^2};$
12. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x dx;$
13. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{3x+2}dx;$
14. $\displaystyle\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx;$
15. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}};$
16. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x};$
17. $\displaystyle\int \frac{xdx}{4+x^2};$
18. $\displaystyle\int xe^{-x^2}dx;$
19. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}dx;$
20. $\displaystyle\int \sin^5 x\cos x dx;$
21. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx;$
22. $\displaystyle\int x^3(1-5x^2)^{10}dx;$

23. $\displaystyle\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}}$;

24. $\displaystyle\int \cos^5 x \sin x dx$;

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

26. $\displaystyle\int \sqrt{16-x^2}dx$;

27. $\displaystyle\int \operatorname{arctg} x dx$;

28. $\displaystyle\int x^2e^{-x}dx$;

29. $\displaystyle\int \ln x dx$;

30. $\displaystyle\int \sin(\ln x)dx$;

31. $\displaystyle\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$;

32. $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$;

33. $\displaystyle\int \left(\frac{x}{x^2-3x+2}\right)^2 dx$;

34. $\displaystyle\int \frac{x^2+5x+4}{x^4+5x^2+4}dx$;

35. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-4x+4)(x^2-4x+5)}$;

36. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$;

37. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(1+2\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}$;

38. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$;

39. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$;

40. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$;

41. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$;

42. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$;

43. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+5x-2}}$;

44. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}dx$;

45. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$;

46. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$;

47. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}}{\sqrt{x}}dx$;

48. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+1}dx$;

49. $\displaystyle\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}$;

50. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+2\cos x}$;

51. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}$;

52. $\displaystyle\int \cos^5 x dx$;

53. $\displaystyle\int \sin^6 x dx$;

54. $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^4 x dx$;

55. $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$;

56. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^5 x dx$;

57. $\int \sin^2 2x \cos 2x dx;$

58. $\int \cos 2x \cos 3x dx;$

59. $\int \sin 5x \cos x dx.$

2. nodaļa

NOTEIKTAIS INTEGRĀLIS

2.1. Noteiktā integrāļa jēdziens

Apskata intervālā $[a, b]$ definētu funkciju f. Sasmalcina šo intervālu ar starppunktu palīdzību:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b.$$

Apzīmē ar $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$, kur $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ un nosauc par **sasmalcinājuma soli**.

Katrā no intervāliem $[x_{k-1}, x_k]$ izvēlas pa patvaļīgam punktam ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$; izskaitļo funkcijas vērtību katrā no punktiem ξ_k un sastāda šādu summu:

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Šādu summu σ sauc par **funkcijas f integrālsummu intervālā $[a, b]$, kas atbilst konkrētam intervāla sasmalcinājumam un konkrētai starppunktu ξ_k izvēlei** (turpmāk: integrālsumma).

2.1. definīcija. Skaitli $\mathfrak{I}$ sauc par **integrālsummas σ robežu, kad sasmalcinājuma solis $\lambda \to 0$,** ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem sasmalcinājumiem ar soli $\lambda < \delta$ izpildās nevienādība

$$|\sigma - \mathfrak{I}| < \varepsilon.$$

2.2. definīcija. Ja integrālsummai σ eksistē galīga robeža $\mathfrak{I}$, kad $\lambda \to 0$, tad funkciju f sauc par **integrējamu intervālā $[a, b]$**.

Robežu $\Im = \lim\limits_{\lambda\to 0} = \sigma$ sauc par **funkcijas f noteikto integrāli intervālā [a, b]** un apzīmē ar simbolu $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Tādējādi noteiktā integrāļa definēšanas formula ir:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.}$$

Šajā formulā

x sauc par **integrēšanas mainīgo**,
f - par **zemintegrāļa funkciju**,
$f(x)dx$ - par **zemintegrāļa izteiksmi**,
a - par **integrēšanas apakšējo robežu**,
b - par **integrēšanas augšējo robežu**,
$[a, b]$ - par **integrēšanas intervālu**.

2.1. piezīme. No noteiktā integrāļa definīcijas izriet, ka noteiktais integrālis nav atkarīgs no integrēšanas mainīgā, t.i.,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt = \cdots = \int\limits_a^b f(u)du.$$

Apskata intervālā $[a, b]$ konstantu funkciju $f(x) = C$. Šādai funkcijai $f(\xi_k) = C$ neatkarīgi no starppunktu ξ_k izvēles. Integrālsumma

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} C\Delta x_k = C\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k = C(b-a) \ = const.$$

Acīmredzami, eksistē galīga robeža $\Im = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sigma = C(b-a)$. Seko, ka f ir integrējama funkcija intervālā $[a, b]$ un

$$\int\limits_a^b C dx = C(b-a).$$

2.2. piezīme. Acīmredzami, katra intervālā $[a, b]$ integrējama funkcija ir ierobežota šajā intervālā, jo pieņemot pretējo, t.i., ka funkcija nav ierobežota intervālā $[a, b]$, tā būs neierobežota vismaz vienā no intervāliem $[x_{k-1}, x_k]$. Starppunktu ξ_k varēs izvēlēties tā, lai integrālsumma σ būtu pēc patikas liela. Seko, ka galīga robeža no σ nevar eksistēt.

Tādējādi funkcijas ierobežotība intervālā $[a, b]$ ir tās **integrējamības** šajā intervālā **nepieciešamais nosacījums**.

2.3. piezīme. Ne katra intervālā $[a, b]$ ierobežota funkcija ir integrējama šajā intervālā. Citiem vārdiem, funkcijas ierobežotība ir tās integrējamības tikai nepieciešamais (nav pietiekamais) nosacījums.

Piemēram, Dirihlē funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } \ x \ - \text{intervāla } [a, b] \text{ iracionāls skaitlis}, \\ 1, & \text{ja } \ x \ - \text{intervāla } [a, b] \text{ racionāls skaitlis}, \end{cases}$$

ir ierobežota funkcija. Ja par starppunktiem ξ_k izvēlas racionālus skaitļus, tad integrālsumma

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = b - a \neq 0.$$

Ja par starppunktiem ξ_k izvēlas iracionālus skaitļus, tad $\sigma = 0$. Acīmredzami, robeža no σ, kad $\lambda \to 0$, neeksistē un Dirihlē funkcija nav integrējama funkcija.

2.1. teorēma. [**Noteiktā integrāļa vienīgums**].

Ja funkcijai f intervālā $[a, b]$ eksistē noteiktais integrālis, tad vienīgā veidā.

▶ Pieņem pretējo, t.i., ka funkcijas f integrālsummai intervālā $[a, b]$ eksistē divas dažādas galīgas robežas $\mathfrak{I}_1 \neq \mathfrak{I}_2$. Izvēlas

$$\varepsilon = \frac{|\mathfrak{I}_1 - \mathfrak{I}_2|}{3} > 0.$$

Tā kā $\mathfrak{I}_1$ ir integrālsummas robeža, tad šādam ε eksistē $\delta_1 > 0$, ka visiem $\lambda < \delta_1$ izpildās nevienādība

$$|\sigma_1 - \mathfrak{I}_1| < \varepsilon.$$

Analogi - priekš $\mathfrak{I}_2$: eksistē $\delta_2 > 0$, ka visiem $\lambda < \delta_2$ izpildās nevienādība

$$|\sigma_2 - \mathfrak{I}_2| < \varepsilon.$$

Apzīmē ar $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ un sasmalcinājumam ar soli $\lambda < \delta_0$ atbilstošo integrālsummu apzīmē ar σ_0. Intervāla $[a, b]$ sasmalcinājumam ar soli $\lambda < \delta_0$ izpildās vienlaicīgi nevienādības

$$|\sigma_0 - \mathfrak{I}_1| < \varepsilon \quad \text{un} \quad |\sigma_0 - \mathfrak{I}_2| < \varepsilon.$$

Apskata

$$|\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2| = \big|(\mathfrak{J}_1 - \sigma_0) + (\sigma_0 - \mathfrak{J}_2)\big| \leq |\mathfrak{J}_1 - \sigma_0| + |\sigma_0 - \mathfrak{J}_2| < \varepsilon + \varepsilon = \\ = 2\varepsilon = \frac{2|\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2|}{3}.$$

Tātad

$$|\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2| \leq \frac{2}{3}|\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2|.$$

Seko, ka $1 \leq \frac{2}{3}$. Pretruna. ◄

2.2. Darbū summas un to īpašības

Apskata intervālā $[a;b]$ ierobežotu funkciju f. Sasmalcina šo intervālu ar soli λ. Tā kā funkcija ir ierobežota intervālā $[a;b]$, tad tā būs ierobežota katrā no intervāliem $[x_{k-1};x_k]$.

Eksistē galīgi $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$ un $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Izveido šādas summas:

$$s = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \cdots + m_n\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$$

un

$$S = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \cdots + M_n\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k.$$

2.3. definīcija. Par **apakšējo (vai augšējo) Darbū**[1] **summu** sauc

$$s = \sum_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k \quad \text{(vai} \quad S = \sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k).$$

2.4. piezīme. Atšķirībā no integrālsummas, kas atkarīga gan no intervāla $[a;b]$ sasmalcinājuma, gan no starppunktu izvēles, Darbū summas ir atkarīgas tikai no intervāla sasmalcinājuma.

1. īpašība. *Intervāla $[a;b]$ jebkuram sasmalcinājumam izpildās nevienādība $s \leq \sigma \leq S$.*

(Pierādīt patstāvīgi).

[1] G. Darbū (1842-1917) - franču matemātiķis.

2. īpašība. *Intervāla $[a;b]$ jebkuram fiksētam sasmalcinājumam un jebkuram $\varepsilon > 0$ starppunktus ξ_k var izvēlēties tā, lai izpildās nevienādība $S - \sigma < \varepsilon$ (analogi $\sigma - s < \varepsilon$).*

▶ Tā kā $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$, tad saskaņā ar funkcijas augšējā sliekšņa definīciju eksistē tāds $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, ka izpildās nevienādība

$$f(\xi_k) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \text{jeb} \quad M_k - f(\xi_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Nevienādības abas puses reizina ar Δx_k:

$$M_k \Delta x_k - f(\xi_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Sasummē visas šādas nevienādības un iegūst, ka

$$S - \sigma < \varepsilon.$$

Analogi var parādīt, ka starppunktus var izvēlēties tā, lai izpildās nevienādība

$$\sigma - s < \varepsilon. ◀$$

3. īpašība. *Ja intervāla $[a;b]$ sasmalcinājumam pievieno jaunus dalījuma punktus, tad augšējā Darbū summa nevar palielināties, bet apakšējā Darbū summa nevar samazināties.*

▶ Intervāla $[a;b]$ sasmalcinājumam

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_n = b$$

pievieno vienu dalījuma punktu $x' \in (x_{k-1}; x_k)$ (k - fiksēts).

Apzīmē ar

$$M_k = \sup_{[x_{k-1};x_k]} f(x), \quad M_k' = \sup_{[x_{k-1};x']} f(x), \quad M_k'' = \sup_{[x';x_k]} f(x),$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} \quad \Delta x_k' = x' - x_{k-1}, \quad \Delta x_k'' = x_k - x'.$$

Acīmredzami, $\Delta x_k = \Delta x_k' + \Delta x_k''$, $M_k' \le M_k$, $M_k'' \le M_k$.

Apskata sākotnējā sasmalcinājuma un iegūtā sasmalcinājuma augšējo Darbū summu starpību

$$\begin{aligned} S - S' &= M_k\Delta x_k - (M_k'\Delta x_k' + M_k''\Delta x_k'') = \\ &= M_k(\Delta x_k' + \Delta x_k'') - M_k'\Delta x_k' - M_k''\Delta x_k'' = \\ &= (M_k - M_k')\Delta x_k' + (M_k - M_k'')\Delta x_k'' \ge 0. \end{aligned}$$

Tātad $S \ge S'$.

Analogi pierāda, ka $s \le s'$. ◀

4. īpašība. *Intervāla $[a;b]$ jebkuriem diviem sasmalcinājumiem viena sasmalcinājuma apakšējā Darbū summa nepārsniedz otra sasmalcinājuma augšējo Darbū summu, t.i.,*

$$s' \leq S'' \quad (analogi\ s'' \leq S').$$

(Pierādīt patstāvīgi).

5. īpašība. *Apakšējo Darbū summu kopai $\{s\}$ eksistē galīgs augšējais slieksnis $\underline{\mathfrak{I}} = \sup\{s\}$, bet augšējo Darbū summu kopai $\{S\}$ eksistē galīgs apakšējais slieksnis $\overline{\mathfrak{I}} = \inf\{S\}$.*

(Pierādīt patstāvīgi).

6. īpašība. *Intervālā $[a;b]$ jebkuram sasmalcinājumam izpildās nevienādība*

$$s \leq \underline{\mathfrak{I}} \leq \overline{\mathfrak{I}} \leq S.$$

► Tā kā $\underline{\mathfrak{I}} = \sup\{s\}$, tad

$$s \leq \underline{\mathfrak{I}}. \tag{2.1}$$

Analogi

$$\overline{\mathfrak{I}} \leq S. \tag{2.2}$$

Atliek pierādīt, ka $\underline{\mathfrak{I}} \leq \overline{\mathfrak{I}}$.

Pieņem pretējo, t.i., ka $\underline{\mathfrak{I}} > \overline{\mathfrak{I}}$. Izvēlas $\varepsilon = \frac{\underline{\mathfrak{I}} - \overline{\mathfrak{I}}}{2} > 0$. Tā kā $\underline{\mathfrak{I}} = \sup\{s\}$, tad eksistē tāda Darbū apakšējā summa s', ka $s' > \underline{\mathfrak{I}} - \frac{\varepsilon}{2}$. Analogi eksistē tāda S'', ka $S'' < \overline{\mathfrak{I}} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Apskata

$$s' - S'' > \left(\underline{\mathfrak{I}} - \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\overline{\mathfrak{I}} + \frac{\varepsilon}{2}\right) = (\underline{\mathfrak{I}} - \overline{\mathfrak{I}}) - \varepsilon = 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon > 0.$$

Tātad $s' - S'' > 0$. Šī nevienādība ir pretrunā ar Darbū summu 4. īpašību. Tādējādi $\underline{\mathfrak{I}} \leq \overline{\mathfrak{I}}$. Apvienojot šo nevienādību ar nevienādībām (2.1) un (2.2) iegūst, ka $s \leq \underline{\mathfrak{I}} \leq \overline{\mathfrak{I}} \leq S$. ◄

2.3. Funkciju integrējamības nepieciešamais un pietiekamais nosacījums

2.2. teorēma. *Intervālā $[a;b]$ definēta un ierobežota funkcija ir integrējama šajā intervālā tad un tikai tad, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $[a;b]$ sasmalcinājumiem ar soli $\lambda < \delta$ izpildās nevienādība $S - s < \varepsilon$.*

▶ *Nepieciešamība.* Tā kā funkcija f - integrējama intervālā $[a;b]$, tad eksistē galīga robeža

$$\mathfrak{I} = \lim_{\lambda\to 0} \sigma = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Pamatojoties uz šādas robežas definīciju, jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $[a;b]$ sasmalcinājumiem ar soli $\lambda < \delta$ izpildās nevienādība

$$|\sigma - \mathfrak{I}| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.3}$$

Fiksē vienu tādu intervāla $[a;b]$ sasmalcinājumu, kuram izpildās nevienādība (2.3). Šim intervāla $[a;b]$ sasmalcinājumam atbilstošās Darbū summas apzīmē ar s un S. Pēc Darbū summu 2. īpašības starppunktus var izvēlēties tā, lai izpildās nevienādības

$$S - \sigma' < \frac{\varepsilon}{4} \tag{2.4}$$

un

$$\sigma'' - s < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.5}$$

Nevienādība (2.3) izpildās arī integrālsummām σ' un σ''.

Apskata

$$\begin{aligned} S - s = (S-\sigma') + (\sigma' - \mathfrak{I}) + (\mathfrak{I} - \sigma'') + (\sigma'' - s) \le \\ \le (S-\sigma') + |\sigma' - \mathfrak{I}| + |\mathfrak{I} - \sigma''| + (\sigma'' - s) < \\ < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Tādējādi

$$S - s < \varepsilon. \tag{2.6}$$

Pietiekamība. Pēc dotā jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem intervāla $[a;b]$ sasmalcinājumiem ar soli $\lambda < \delta$ izpildās nevienādība (2.6).

Pēc Darbū summu 6. īpašības

$$s \le \underline{\mathfrak{I}} \le \overline{\mathfrak{I}} \le S. \tag{2.7}$$

Apskata $\overline{\mathfrak{I}} - \underline{\mathfrak{I}} \le S - s < \varepsilon$.

Tātad nenegatīvā konstante $\overline{\mathfrak{I}} - \underline{\mathfrak{I}}$ ir pēc patikas maza. Seko, ka šī konstante ir nulle jeb $\overline{\mathfrak{I}} = \underline{\mathfrak{I}} = \mathfrak{I}$. Tāpēc nevienādība (2.7) izskatās šādi:

$$s \le \mathfrak{I} \le S. \tag{2.8}$$

Pēc Darbū summu 1. īpašības

$$s \leq \sigma \leq S. \tag{2.9}$$

No nevienādības (2.8) atņemot nevienādību (2.9), iegūst nevienādību

$$s - S \leq \mathfrak{I} - \sigma \leq S - s$$

jeb

$$-(S - s) \leq \mathfrak{I} - \sigma \leq (S - s). \tag{2.10}$$

Nevienādība (2.10) ir ekvivalenta nevienādībai

$$|\mathfrak{I} - \sigma| \leq S - s.$$

Tā kā $S - s < \varepsilon$, tad $|\mathfrak{I} - \sigma| < \varepsilon$. Seko, ka $\mathfrak{I} = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$. Tātad funkcija f ir integrējama intervālā $[a; b]$. ◄

2.5. piezīme. No 2.2. teorēmas izriet, ka vienādība $\underline{\mathfrak{I}} = \overline{\mathfrak{I}}$ ir funkcijas integrējamības intervālā $[a; b]$ nepieciešamais un pietiekamais nosacījums.

2.4. Integrējamu funkciju klases

2.3. teorēma. [**Funkcijas integrējamības pietiekamais nosacījums**].
Ja funkcija f ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a; b]$, tad tā ir integrējama šajā intervālā.

► Tā kā funkcija f ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a; b]$, tad, pirmkārt, tā ir ierobežota šajā intervālā un, otrkārt, saskaņā ar Kantora teorēmu tā ir vienmērīgi nepārtraukta šajā intervālā. Saskaņā ar intervālā vienmērīgi nepārtrauktas funkcijas definīciju jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $x', x'' \in [a; b]$, kuriem $|x'' - x'| < \delta$, izpildās nevienādība

$$\left|f(x'') - f(x')\right| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Ja izveido intervāla $[a; b]$ sasmalcinājumu ar soli $\lambda < \delta$, tad visiem $x'_k, x''_k \in [x_{k-1}; x_k]$ izpildās nevienādība

$$\left|f\left(x''_k\right) - f\left(x'_k\right)\right| < \frac{\varepsilon}{b - a} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Tā kā funkcija f ir nepārtraukta intervālā $[a;b]$, tad tā ir nepārtraukta katrā no intervāliem $[x_{k-1};x_k]$ $\quad (k=1,2,\ldots,n)$.

Saskaņā ar Veierštrāsa otro teorēmu tā sasniedz katrā no šiem intervāliem savu vismazāko un vislielāko vērtību. Tas nozīmē, ka intervāla $[a;b]$ sasmalcinājumiem ar soli $\lambda < \delta$ izpildās nevienādība

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

kur

$$m_k = \inf_{[x_{k-1};x_k]} f(x) = \min_{[x_{k-1};x_k]} f(x), \quad M_k = \sup_{[x_{k-1};x_k]} f(x) = \max_{[x_{k-1};x_k]} f(x),$$

$(k=1,2,\ldots,n)$.

Apskata

$$S - s = \sum_{k-1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \sum_{k-1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k =$$
$$= \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k-1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Saskaņā ar 2.2. teorēmu funkcija f ir integrējama intervālā $[a;b]$. ◀

2.4. teorēma. [Funkcijas integrējamības pietiekamais nosacījums]

Ja funkcija f ir ierobežota un monotona intervālā $[a;b]$, tad tā ir integrējama šajā intervālā.

▶ Noteiktības dēļ pieņemsim, ka f ir intervālā $[a;b]$ nedilstoša funkcija. Šoreiz

$$m_k = f\left(x_{k-1}\right), \quad M_k = f\left(x_k\right).$$

Jebkuram $\varepsilon > 0$ izvēlas $\delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} > 0$, ka visiem sasmalcinājumiem ar soli $\lambda < \delta$ izpildās nevienādība

$$\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}.$$

Tāpēc

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) =$$
$$= \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\big(f(b)-f(a)\big) = \varepsilon.$$

Saskaņa ar 2.2. teorēmu f ir intervālā $[a;b]$ integrējama funkcija. ◀

2.5. Noteiktā integrāļa īpašības

Lemma. *Ja funkcija f ir definēta kopā E un visiem $x', x'' \in E$ izpildās nevienādība*

$$\left|f(x') - f(x'')\right| \leq C$$

(C - konstante), tad arī $M - m \leq C$, kur

$$M = \sup_E f(x), \quad m = \inf_E f(x).$$

► Noteiktības dēļ pieņemsim, ka $f(x') \geq f(x'')$. Saskaņā ar doto visiem $x', x'' \in E$ izpildās nevienādība $|f(x') - f(x'')| < C$. Seko, ka

$$f(x') - f(x'') \leq C \quad \text{jeb} \quad f(x') \leq f(x'') + C.$$

Fiksētam x'' šī nevienādība norāda, ka eksistē galīgs

$$\sup_{x' \in E} f(x') \leq f(x'') + C \quad \text{jeb} \quad M \leq f(x'') + C.$$

No šīs nevienādības seko, ka visiem $x'' \in E$ izpildās $f(x'') \geq M - C$. Analogi eksistē galīgs

$$\inf_{x' \in E} f(x'') \geq M - C \quad \text{jeb} \quad m \geq M - C.$$

Tādējādi

$$M - m \leq C. \;◄$$

1. īpašība. *Ja f ir integrējama funkcija intervālā $[a;b]$, tad arī $|f|$ ir integrējama funkcija šajā intervālā.*

► Apskata intervāla $[a;b]$ patvaļīgu sasmalcinājumu. Šim sasmalcinājumam un funkcijai f atbilstošās Darbū summas apzīmē ar s un S. Ar s' un S' apzīmē funkcijai $|f|$ atbilstošās Darbū summas (sasmalcinājums iepriekšējais). Saskaņā ar moduļa īpašību visiem $x', x'' \in [x_{k-1}; x_k]$ izpildās nevienādība

$$\Big|\left|f(x')\right| - \left|f(x'')\right|\Big| \leq \left|f(x') - f(x'')\right|.$$

Tā kā

$$\left|f(x') - f(x'')\right| \leq M_k - m_k,$$

kur $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$, $\quad M_k = \sup\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$, tad

$$\Big|\left|f(x')\right| - \left|f(x'')\right|\Big| \leq M_k - m_k.$$

Saskaņā ar lemmu (šoreiz funkcija ir $|f|$, bet $C = M_k - m_k$)

$$M'_k - m'_k \leq M_k - m_k,$$

kur $M'_k = \sup\limits_{[x_{k-1};x_k]} \big|f(x)\big|$, $\quad m'_k = \inf\limits_{[x_{k-1};x_k]} \big|f(x)\big|$. Tāpēc $S' - s' \leq S - s$.

Tā kā funkcija f ir integrējama intervālā $[a, b]$, tad pielietojot 2.2. teorēmu, viegli saskatīt, ka šajā intervālā ir integrējama arī funkcija $|f|$. ◀

2.6. piezīme. *1. īpašībai apgrieztais apgalvojums nav spēkā.*

Piemēram, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja } x \text{ – intervāla } [a;b] \text{ racionāls skaitlis,} \\ -1, & \text{ja } x \text{ – intervāla } [a;b] \text{ iracionāls skaitlis,} \end{cases}$$

nav integrējama intervālā $[a;b]$.[2] Šīs funkcijas modulis $|f(x)| = 1$ ir integrējama funkcija (kā konstante) šajā intervālā.

2. īpašība. *Ja f ir integrējama funkcija intervālā $[a;b]$, tad tā ir integrējama arī intervālā $[c;d] \subset [a;b]$.*

(Pierādīt patstāvīgi).[3]

3. īpašība. *Ja f un g ir integrējamas funkcijas intervālā $[a;b]$, tad arī $(f+g)$ ir integrējama funkcija šajā intervālā, pie tam*

$$\int\limits_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$$

▶ Tā kā f ir integrējama funkcija intervālā $[a;b]$, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta_1 > 0$, ka intervāla $[a;b]$ visiem sasmalcinājumiem ar soli $\lambda < \delta_1$ izpildās nevienādība

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \mathfrak{I}_1\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \left(\mathfrak{I}_1 = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\right).$$

Analogi - iepriekš izvēlētajam $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta_2 > 0$, ka intervāla $[a;b]$ visiem sasmalcinājumiem ar soli $\lambda < \delta_2$ izpildās nevienādība

$$\left|\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k - \mathfrak{I}_2\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \left(\mathfrak{I}_2 = \int\limits_a^b g(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k\right).$$

[2] Pierāda līdzīgi kā Dirihlē funkcijai.

[3] Izveidot intervāla $[a;b]$ sasmalcinājumu, kuram par dalījuma punktiem ir c un d. Pielietot 2.2. teorēmu.

Apskata

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\bigl(f(\xi_k)+g(\xi_k)\bigr)\Delta x_k-(\mathfrak{I}_1-\mathfrak{I}_2)\right|\leq$$

$$\leq\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-\mathfrak{I}_1\right|+\left|\sum_{k=1}^{n}g(\xi_k)\Delta x_k-\mathfrak{I}_2\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Nevienādība

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\bigl(f(\xi_k)+g(\xi_k)\bigr)\Delta x_k-(\mathfrak{I}_1-\mathfrak{I}_2)\right|<\varepsilon$$

norāda, ka $(f+g)$ ir integrējama funkcija intervālā $[a;b]$, pie tam

$$\int\limits_a^b\bigl(f(x)+g(x)\bigr)dx=\mathfrak{I}_1+\mathfrak{I}_2$$

jeb

$$\int\limits_a^b\bigl(f(x)+g(x)\bigr)dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b g(x)dx. \blacktriangleleft$$

2.7. piezīme. Ar matemātiskās indukcijas metodi šo īpašību var vispārināt uz jebkuru galīga skaita integrējamu funkciju summu.

4. īpašība. *Ja f ir integrējama funkcija intervālā $[a;b]$ un C ir patvaļīga konstante, tad $C\cdot f$ ir integrējama funkcija šajā intervālā, pie tam*

$$\int\limits_a^b Cf(x)dx=C\int\limits_a^b f(x)dx.$$

$\blacktriangleright$ Apskatīsim divus iespējamos gadījumus.

1. Ja $C=0$, tad $Cf(x)=0$ un Cf ir integrējama funkcija (kā konstante). Vienādība acīmredzami izpildās.

2. Pieņemsim, ka $C\neq 0$. Tā kā f ir integrējama funkcija intervālā $[a;b]$, tad jebkuram $\varepsilon>0$ eksistē tāds $\delta>0$, ka intervāla $[a;b]$ visiem sasmalcinājumiem ar soli $\lambda<\delta$ izpildās nevienādība

$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k-\mathfrak{I}\right|<\frac{\varepsilon}{|C|},$$

kur $\mathfrak{I} = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Apskata

$$\left|\sum_{k=1}^{n} Cf(\xi_k)\Delta x_k - C\mathfrak{I}\right| = |C|\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - \mathfrak{I}\right| < |C|\frac{\varepsilon}{|C|} = \varepsilon.$$

Nevienādība

$$\left|\sum_{k=1}^{n} Cf(\xi_k)\Delta x_k - C\mathfrak{I}\right| < \varepsilon$$

norāda, ka (Cf) ir integrējama funkcija intervālā $[a;b]$, pie tam

$$\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx. \blacktriangleleft$$

2.8. piezīme. No 3. un 4. īpašības izriet noteiktā integrāļa **linearitātes īpašība**, t.i., ja $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ir intervālā $[a;b]$ integrējamas funkcijas un $C_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, tad arī $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k f_k$ ir integrējama funkcija šajā intervālā, pie tam

$$\int\limits_a^b \sum_{k=1}^{n} C_k f_k(x)dx = \sum_{k=1}^{n} C_k \int\limits_a^b f_k(x)dx.$$

5. īpašība. *Ja f ir integrējama funkcija intervālā $[a;b]$ un visiem $x \in [a;b]$ izpildās nevienādība $f(x) \geq 0$, tad arī*

$$\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0.$$

$\blacktriangleright$ Pieņem pretējo, t.i., ka $\mathfrak{I} = \int\limits_a^b f(x)dx < 0$. Saskaņā ar noteiktā integrāļa definīciju jebkuram $\varepsilon = \frac{|\mathfrak{I}|}{2} > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka intervāla $[a;b]$ visiem sasmalcinājumiem ar soli $\lambda < \delta$ izpildās nevienādība

$$\mathfrak{I} - \varepsilon < \sigma < \mathfrak{I} + \varepsilon.$$

Ja $\varepsilon = \frac{|\mathfrak{I}|}{2} > 0$, tad gan $\mathfrak{I} - \varepsilon < 0$, gan $\mathfrak{I} + \varepsilon < 0$ ($\mathfrak{I} < 0$).

Tā kā visi $\Delta x_k > 0$, tad integrālsummā $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ ne visi locekļi ir nenegatīvi, t.i., ne visi $f(\xi_k)$ ir nenegatīvi. Rodas pretruna ar doto, ka visiem $x \in [a;b]$ $f(x) \geq 0$. ◀

6. īpašība. [Noteiktā integrāļa monotonitātes īpašība]

Ja f, g ir integrējamas funkcijas intervālā $[a;b]$ un visiem $x \in [a;b]$ izpildās nevienādība $f(x) \leq g(x)$, tad arī

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx.$$

▶ Apskata funkciju $\varphi(x) = g(x) - f(x)$. Funkcija φ ir integrējama kā divu integrējamu funkciju starpība un saskaņā ar 5. īpašību

$$\int\limits_a^b \varphi(x)dx = \int\limits_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx \geq 0,$$

jo visiem $x \in [a;b]$ $\varphi(x) \geq 0$.

Saskaņā ar noteiktā integrāļa linearitātes īpašību

$$\int\limits_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int\limits_a^b g(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Seko, ka

$$\int\limits_a^b g(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$$

jeb

$$\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx. \quad ◀$$

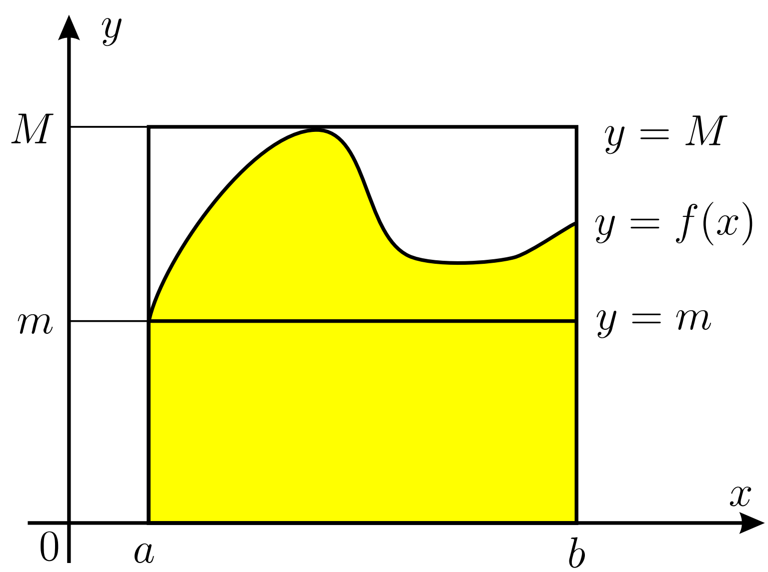
7. īpašība. [Noteiktā integrāļa novērtējums]

Ja f ir integrējama funkcija intervālā $[a;b]$ un visiem $x \in [a;b]$ izpildās nevienādība $m \leq f(x) \leq M$ $(m, M \in \mathbb{R})$, tad

$$m(b-a) \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

(Pierādīt patstāvīgi[4]).

2.9. piezīme. Nenegatīvas un nepārtrauktas funkcijas gadījumā 7. īpašībai var sniegt šādu ģeometrisku interpretāciju: *līklīnijas trapeces laukums*[5] *ir ieslēgts starp divu šādu taisnstūru laukumiem* (2.1. zīm.). Abiem taisnstūriem un līklīnijas trapecei ir kopīgs pamats. Pirmā taisnstūra augstums ir $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$, bet otrā taisnstūra augstums ir $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$.



2.1. zīm.

8. īpašība. *Ja f ir integrējama funkcija intervālā $[a;b]$, tad*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

► Saskaņā ar 1. īpašību $|f|$ ir integrējama funkcija intervālā $[a;b]$. Visiem $x \in [a;b]$ izpildās nevienādība

$$-\big|f(x)\big| \leq f(x) \leq \big|f(x)\big|.$$

[4]Izmantot noteiktā integrāļa monotonitātes īpašību un formulu $\int\limits_a^b C dx = C(b-a)$.

[5]Līklīnijas trapeces kvadrējamība tiks pamatota nedaudz vēlāk. Tiks pierādīts, ka līklīnijas trapeces laukums ir vienāds ar noteikto integrāli $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Saskaņā ar noteiktā integrāļa monotonitātes īpašību

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

jeb

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx. \blacktriangleleft$$

9. īpašība. [Noteiktā integrāļa aditivitātes īpašība]

Ja f ir integrējama funkcija intervālā $[a;b] = [a;c] \cup [c;b]$, tad f ir integrējama katrā no intervāliem $[a;c]$, $[c;b]$ un

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$\blacktriangleright$ Saskaņā ar 2. īpašību f ir integrējama funkcija katrā no intervāliem $[a;c]$ un $[c;b]$. Apzīmē ar $\mathfrak{I} = \int_a^b f(x)dx$, $\mathfrak{I}_1 = \int_a^c f(x)dx$, $\mathfrak{I}_2 = \int_c^b f(x)dx$. Atliek pierādīt, ka $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2$.

Izveido intervāla $[a;b]$ tādu sasmalcinājumu, lai par vienu tā sadalījuma punktu būtu c.

Šim sasmalcinājumam atbilstošo integrālsummu σ sadala summās σ_1 un σ_2, kur σ_1 - funkcijas f integrālsumma intervālā $[a;c]$, bet σ_2 - funkcijas f integrālsumma intervālā $[c;b]$.

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2.$$

Šajā vienādībā pāriet pie robežas, kad sasmalcinājuma solis $\lambda \to 0$.

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sigma_1 + \lim_{\lambda\to 0}\sigma_2 \quad \text{jeb} \quad \mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1 + \mathfrak{I}_2. \blacktriangleleft$$

10. īpašība. [Teorēma par noteiktā integrāļa vidējo vērtību]

Ja f, g - nepārtrauktas funkcijas intervālā $[a;b]$, pie tam funkcija g šajā intervālā saglabā zīmi, tad eksistē tāds $x_0 \in [a;b]$, ka

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0)\int_a^b g(x)dx.$$

▶ Abi integrāļi eksistē, jo g un fg - nepārtrauktas funkcijas intervālā $[a;b]$ (funkcija fg - nepārtraukta intervālā $[a;b]$ kā divu nepārtrauktu funkciju reizinājums).

Pieņem, ka visiem $x \in [a;b]$ $g(x) \geq 0$.

Apzīmē ar $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$, $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$. Saskaņā ar Veierštrāsa otro teorēmu eksistē tādi $x_1, x_2 \in [a;b]$, ka $m = f(x_1)$, $M = f(x_2)$.
Visiem $x \in [a;b]$ izpildās nevienādība

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Reizina šo nevienādību ar $g(x) \geq 0$

$$f(x_1)g(x) \leq f(x)g(x) \leq f(x_2)g(x).$$

Saskaņā ar noteiktā integrāļa monotonitātes īpašību un 4. īpašību

$$f(x_1)\int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq f(x_2)\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Tā kā $g(x) \geq 0$, tad ir iespējami divi gadījumi:

1. $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$.

   No nevienādības seko, ka $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$, tāpēc par x_0 der jebkurš intervāla $[a;b]$ punkts.

2. $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$.

   Izdala nevienādību ar $\int\limits_a^b g(x)dx$.

$$f(x_1) \leq \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx} \leq f(x_2).$$

   No šīs nevienādības seko, ka

$$\frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx}$$

ir viena no funkcijas f starpvērtībām. Saskaņā ar Bolcano-Veierštrāsa teorēmu par nepārtrauktas funkcijas starpvērtībām eksistē tāds $x_0 \in [a;b]$, ka

$$f(x_0) = \frac{\int\limits_a^b f(x)g(x)dx}{\int\limits_a^b g(x)dx},$$

jeb

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0)\int\limits_a^b g(x)dx. \blacktriangleleft$$

Sekas. *Ja f ir nepārtraukta funkcija intervālā $[a;b]$, tad eksistē tāds $x_0 \in [a;b]$, ka $\int\limits_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a)$.*

$\blacktriangleright$ Apskata funkciju $g(x) = 1$. Saskaņā ar teorēmu par noteiktā integrāļa vidējo vērtību

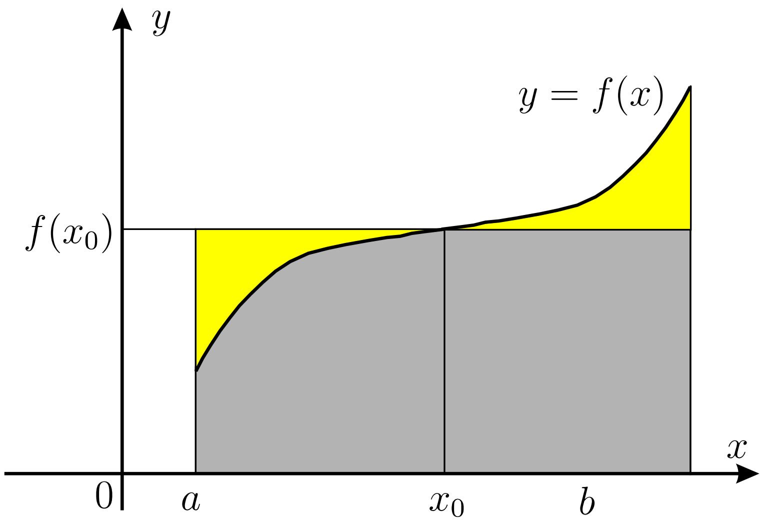
$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(x_0)\int\limits_a^b dx \quad \text{jeb} \quad \int\limits_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a). \blacktriangleleft$$

2.10. piezīme.

1. Nenegatīvas un nepārtrauktas funkcijas gadījumā šīm sekām var sniegt šādu ģeometrisku interpretāciju: *eksistē tāds taisnstūris, kura laukums ir vienāds ar līklīnijas trapeces laukumu* (2.2. zīm.). Taisnstūrim un līklīnijas trapecei ir kopīgs pamats, bet taisnstūra augstums ir $f(x_0)$.
2. Nosacījums, lai funkcija g saglabā zīmi, ir būtisks. Piemēram, ja izvēlas divas intervālā $[0;2\pi]$ nepārtrauktas funkcijas $f(x) = g(x) = \sin x$, tad, izskaitļojot integrāļus[6]

$$\int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)dx \quad \text{un} \quad \int\limits_0^{2\pi} g(x)dx,$$

[6]Šos integrāļus viegli viegli varēs izskaitļot vēlāk, izmantojot Ņūtona-Leibnica formulu.



2.2. zīm.

iegūst, ka

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = \pi \quad \text{un} \quad \int_0^{2\pi} g(x)dx = 0.$$

Šajā gadījumā nav tādas vērtības $x_0 \in [0; 2\pi]$, kurai izpildītos vienādība

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = f(x_0)\int_0^{2\pi} g(x)dx.$$

2.6. Noteiktā integrāļa vispārinājums

Definējot noteikto integrāli $\int_a^b f(x)dx$ uzskatīja, ka $a < b$. Taču noteikto integrāli var vispārināt arī attiecībā uz tādiem gadījumiem, kad $a = b$ vai $a > b$.

Uzskata, ka

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{un} \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad (a > b).$$

Turpmāk, rakstot $\int_a^b f(x)dx$, uzskata, ka $a < b$ vai $a = b$, vai $a > b$.

Šādam integrālim $\int\limits_a^b f(x)dx \quad (a, b \in \mathbb{R})$ acīmredzami ir spēkā noteiktā integrāļa 1. - 4. īpašības, bet 5. - 7. īpašības nav spēkā. 8. īpašības nevienādība iegūst šādu izskatu

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \left|\int\limits_a^b |f(x)|dx\right|.$$

Piemēram, ja $a > b$, tad

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| = \left|-\int\limits_b^a f(x)dx\right| = \left|\int\limits_b^a f(x)dx\right| \leq \int\limits_b^a \big|f(x)\big|dx =$$

$$= \left|-\int\limits_b^a \big|f(x)\big|dx\right| = \left|\int\limits_a^b \big|f(x)\big|dx\right|.$$

9. īpašība var tikt formulēta šādi:

Ja funkcija f - integrējama uz lielākā no intervāliem ar galapunktiem a, b, c, tad tā ir integrējama arī katrā no pārējiem diviem intervāliem, pie tam

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Piemēram, ja $a < b < c$, tad saskaņā ar noteiktā integrāļa aditivitāti

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx$$

jeb

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_c^b f(x)dx$$

jeb

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Analogi var pamatot visus pārējos iespējamos gadījumus. 10. īpašība un tās sekas arī ir spēkā.

Jautājumi

1. Definēt funkcijas $f(x)$ integrālsummu intervālā $[a;b]$.
2. No kā ir atkarīga integrālsumma, kas sastādīta funkcijai $f(x)$ intervālā $[a;b]$?
3. Definēt integrālsummas robežu, kad sasmalcinājuma solis $\lambda \to 0$.
4. Definēt intervālā $[a;b]$ integrējamu funkciju un šīs funkcijas noteikto integrāli.
5. Vai noteiktais integrālis ir atkarīgs no tā, ar kādu burtu ir apzīmēts integrēšanas mainīgais? Atbildi pamatot.
6. Kāds ir funkcijas integrējamības nepieciešamais nosacījums?
7. Vai katra intervālā $[a;b]$ ierobežota funkcija ir integrējama šajā intervālā? Atbildi pamatot.
8. Vai intervālā $[a;b]$ integrējamai funkcijai var eksistēt divas dažādas noteiktā integrāļa vērtības?
9. Definēt funkcijas $f(x)$ Darbū summas intervālā $[a;b]$.
10. No kā ir atkarīgas Darbū summas, kas sastādītas funkcijai $f(x)$ intervālā $[a;b]$?
11. Formulēt Darbū summu īpašības.
12. Formulēt funkciju integrējamības nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu.
13. Formulēt funkciju integrējamības pietiekamos nosacījumus.
14. Formulēt īpašību par integrāli no funkcijas moduļa.
15. Ir zināms, ka funkcijas modulis ir intervālā $[a;b]$ integrējama funkcija. Vai ir integrējama šajā intervālā pati funkcija? Atbildi pamatot.
16. Formulēt noteiktā integrāļa linearitātes īpašību.
17. Formulēt īpašību par noteiktā integrāļa zīmi no nenegatīvas funkcijas.
18. Formulēt noteiktā integrāļa monotonitātes īpašību.
19. Formulēt īpašību par noteiktā integrāļa novērtējumu.

20. Formulēt īpašību par noteiktā integrāļa moduli.
21. Formulēt noteiktā integrāļa aditivitātes īpašību.
22. Formulēt īpašību par noteiktā integrāļa vidējo vērtību.
23. Definēt noteikto integrāli $\int\limits_a^b f(x)dx$, kad $a = b$ vai $a > b$.
24. Formulēt noteiktā integrāļa $\int\limits_a^b f(x)dx$ 5., 6., 7. un 8. īpašību, kad $a > b$.

Vingrinājumi

1. Funkcijai $f(x) = 2$ sastādīt integrālsummu intervālā $[0; 6]$ un izskaitļot noteikto integrāli no šīs funkcijas.
2. Noskaidrot, vai

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ja } x \text{ ir intervāla } [0; 2] \text{ racionāls skaitlis,} \\ 1, & \text{ja } x \text{ ir intervāla } [0; 2] \text{ iracionāls skaitlis} \end{cases}$$

   ir integrējama funkcija intervālā $[0; 2]$. Atbildi pamatot.
3. Dotajām funkcijām intervālā $[0; 10]$ sastādīt Darbū summas (veidojot intervāla sasmalcinājumu, par starppunktiem izvēlēties naturālos skaitļus). Sniegt ģeometrisko interpretāciju.
   (a) $f(x) = x$,
   (b) $f(x) = x^2$,
   (c) $f(x) = 2$,
   (d) $f(x) = 10 - x$.
4. Pamatot Darbū summu 1., 4. un 5. īpašību.
5. Pamatot Darbū summu 2. īpašību apakšējai Darbū summai.
6. Pamatot Darbū summu 3. īpašību apakšējām Darbū summām.
7. Sniegt ģeometrisko interpretāciju noteiktā integrāļa 6., 7., 9. un 10. īpašībai.
8. Pierādīt noteiktā integrāļa 2. un 7. īpašību.

9. Pamatot, ka

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx,$$

kur $c < a < b$.

10. Neizskaitļojot integrāļus, noteikt to zīmi:

(a) $\int\limits_{-3}^{0} x^3 dx$,

(b) $\int\limits_0^{\pi} x \sin x dx$.

11. Neizskaitļojot integrāļus, noteikt, kuram no tiem ir lielāka vērtība:

(a) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}dx$ vai $\int\limits_0^1 x dx$,

(b) $\int\limits_0^1 x^2 \sin^2 x dx$ vai $\int\limits_0^1 x \sin^2 x dx$,

(c) $\int\limits_1^2 e^{x^2} dx$ vai $\int\limits_1^2 e^x dx$.

12. Aprēķināt šādu funkciju vidējo vērtību[7] norādītajā intervālā:

(a) $f(x) = x, \quad [0; 1]$,

(b) $f(x) = 1 + x, \quad [1; 10]$,

(c) $f(x) = x^2, \quad [0; a]$.

Uzdevumi

1. Izmantojot noteiktā integrāļa definīciju, izskaitļot dotos noteiktos integrāļus:

(a) $\int\limits_0^1 x dx$,

(b) $\int\limits_0^1 x^2 dx$,

[7] Vērtība $f(x_0)$, kas ir vienāda ar $\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)dx$.

(c) $\int\limits_0^1 e^x dx$.

Piezīme. Intervālu $[0;1]$ sadalīt n vienādās daļās un par starppunktiem ξ_k izvēlēties vienu no intervālu $[x_{k-1};x_k]$ galapunktiem, (b) gadījumā izmantot, ka $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Funkcijai $f(x) = 1 + x$ sastādīt Darbū summas un integrālsummu intervālā $[1;10]$. Intervālu $[1;10]$ sadalīt n vienādās daļās un par starppunktiem ξ_k izvēlēties intervālu $[x_{k-1};x_k]$ viduspunktus. Atrast robežu no katras Darbū summas un no integrālsummas, kad $n \to \infty$.

3. Aprēķināt figūras, kuru ierobežo parabola $y = x^2$, abscisu ass un taisne $x = a$ $(a > 0)$, laukumu.

3. nodaļa

INTEGRĀLIS AR MAINĪGU AUGŠĒJO ROBEŽU

3.1. Integrāļa ar mainīgu augšējo robežu īpašības

Ja f ir intervālā $[a;b]$ integrējama funkcija, tad saskaņā ar noteiktā integrāļa 2. īpašību tā ir integrējama katrā no intervāliem $[a;x]$ ($x \in [a;b]$), pie tam šāda integrāļa vērtība ir atkarīga no x.

Tādējādi integrālis ar mainīgu augšējo robežu ir šīs augšējās robežas funkcija, t.i.,

$$\boxed{\int_a^x f(t)dt = \Phi(x), \quad x \in [a;b].}$$

1. īpašība. [Integrāļa ar mainīgu augšējo robežu nepārtrauktība]

Ja f ir intervālā $[a;b]$ integrējama funkcija, tad Φ ir nepārtraukta šajā intervālā funkcija.

► Izvēlas patvaļīgu $x \in [a;b]$ un patvaļīgu Δx, bet tādu, lai $x + \Delta x \in [a;b]$, un apskata

$$\Delta\Phi(x) = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

$$\left|\Delta\Phi(x)\right| = \left|\int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt\right| \leq M|\Delta x|,$$

kur $M = \sup\limits_{[a;b]} |f(x)|$. (Tāda galīga vērtība eksistē, jo f ir ierobežota kā integrējama funkcija).

Jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta = \frac{\varepsilon}{M} > 0$, ka visiem Δx, kuriem $|\Delta x| < \delta$, izpildās nevienādība

$$|\Delta\Phi(x)| < M\delta = M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Tādējādi Φ ir nepārtraukta funkcija intervālā $[a;b]$. ◀

Sekas. *Ja φ ir nepārtraukta, bet f ir integrējama intervālā $[a;b]$ funkcija, tad saskaņā ar teorēmu par saliktas funkcijas nepārtrauktību*

$$\psi(x) = \int\limits_{a}^{\varphi(x)} f(t)dt$$

nepārtraukta šajā intervālā funkcija.

(Pierādīt patstāvīgi.)

2. īpašība. [Integrāļa ar mainīgu augšējo robežu diferencēšana]

Ja f ir nepārtraukta intervālā $[a;b]$ funkcija, tad Φ ir diferencējama šajā intervālā funkcija, pie tam

$$\Phi'(x) = f(x) \quad jeb \quad \left(\int\limits_{a}^{x} f(t)dt\right)' = f(x).$$

(Integrāļa ar mainīgu augšējo robežu atvasinājums ir vienāds ar zemintegrāļa funkciju, kas izskaitļota augšējās robežas punktā.)

▶ Tāpat kā iepriekš, izvēlas patvaļīgu $x \in [a;b]$ un Δx tādu, lai $x + \Delta x \in [a;b]$.

Apskata

$$\Delta\Phi(x) = \int\limits_{a}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_{a}^{x} f(t)dt = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = f(x + \Theta\Delta x)\Delta x,$$

kur $0 \leq \Theta \leq 1$.

(Tika pielietota teorēma par noteiktā integrāļa vidējo vērtību.)

Apskata attiecību

$$\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = f(x + \Theta\Delta x).$$

Tā kā f ir nepārtraukta funkcija, tad eksistē robeža šīs vienādības labajai pusei, kad $\Delta x \to 0$ un tā ir vienāda ar $f(x)$. Tāpēc eksistē arī robeža šīs vienādības kreisajai pusei, kad $\Delta x \to 0$, pie tam

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x} = f(x).$$

Tādējādi eksistē $\Phi'(x) = f(x)$. ◀

Sekas. *Ja φ ir diferencējama, bet f ir nepārtraukta intervālā $[a;b]$ funkcija, tad saskaņā ar teorēmu par saliktas funkcijas diferencēšanu*

$$\psi(x) = \int_a^{\varphi(x)} f(t)dt$$

ir diferencējama šajā intervālā funkcija, pie tam

$$\psi'(x) = \left(\int_a^{\varphi(x)} f(t)dt \right)' = f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x).$$

(Pierādīt patstāvīgi.)

3.1. piezīme. Teorēma par noteiktā integrāļa atvasināšanu pēc mainīgās augšējās integrēšanas robežas ir viena no matemātiskās analīzes pamatteorēmām. Šī teorēma izsaka, ka $\int_a^x f(t)dt$ ir viena no intervālā $[a;b]$ nepārtrauktas funkcijas primitīvajām funkcijām. Tādējādi jebkurai intervālā $[a;b]$ nepārtrauktai funkcijai eksistē primitīvā funkcija un viena no tām ir $\int_a^x f(t)dt$.

3.2. Sakarība starp noteikto un nenoteikto integrāli

3.1. teorēma. *Ja f ir nepārtraukta intervālā $[a;b]$ funkcija un F ir viena no f primitīvajām funkcijām šajā intervālā, tad ir spēkā sakarība*

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),}$$

kuru sauc par ***Ņūtona-Leibnica*** *formulu.*

(Noteiktais integrālis ir vienāds ar zemintegrāļa funkcijas primitīvās funkcijas pieaugumu intervālā $[a;b]$.)

► $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ ir viena no funkcijas f primitīvajām funkcijām intervālā $[a;b]$. Apzīmē ar $F(x)$ kādu patvaļīgu funkcijas f primitīvo funkciju šajā intervālā.

Tā kā vienas funkcijas divas primitīvās funkcijas var atšķirties tikai par konstanti, tad

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

Ievieto $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C \quad \text{jeb} \quad 0 = F(a) + C.$$

Tādējādi

$$C = -F(a) \quad \text{un} \quad \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Ievieto tagad $x = b$.

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \blacktriangleleft$$

3.2. piezīme.

1. Ņūtona-Leibnica formulas labo pusi mēdz apzīmēt ar simbolu $F(x)\Big|_a^b$ (lasa: *funkcija $F(x)$ robežās no a līdz b*).

   Ņemot vērā šo apgalvojumu, Ņūtona-Leibnica formulu var pierakstīt šādi:
   $$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

2. Ņūtona-Leibnica formula izsaka sakarību starp noteikto un nenoteikto integrāli, un pēc tās var aprēķināt noteiktā integrāļa vērtību, ja tikai ir zināma kāda no dotās funkcijas primitīvajām funkcijām.

   (Noteiktais integrālis ir skaitlis, pie tam tas nav atkarīgs no tā, kāda no zemintegrāļa funkcijas primitīvajām funkcijām ir izmantota integrāļa aprēķināšanai).

3.1. piemērs. Aprēķināt
$$\int\limits_0^1 x^2 dx.$$

$$\mathfrak{I} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

3.3. Integrēšanas pamatmetodes noteiktajā integrālī

3.3.1. Parciālās integrēšanas formula

3.1. definīcija. Funkciju f sauc par **nepārtraukti diferencējamu** intervālā $\mathfrak{I}$, ja tai eksistē šajā intervālā nepārtraukts atvasinājums.

3.2. teorēma. **[Parciālā integrēšana noteiktajā integrālī]**

Ja u, v ir nepārtraukti diferencējamas funkcijas intervālā $[a; b]$, tad

$$\boxed{\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\ \Big|_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx}$$

jeb

$$\boxed{\int\limits_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vdu.}$$

▶ Visi integrāļi eksistē, jo zemintegrāļu funkcijas ir nepārtrauktas.

Apskata

$$\int\limits_a^b uv'dx + \int\limits_a^b u'vdx = \int\limits_a^b (uv' + u'v)dx.$$

Tā kā $uv' + u'v = (uv)'$, tad

$$\int\limits_a^b uv'dx + \int\limits_a^b u'vdx = \int\limits_a^b (uv')dx = uv\,\Big|_a^b.$$

Tādējādi

$$\int\limits_a^b uv'dx = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b u'vdx. \blacktriangleleft$$

3.2. piemērs. Aprēķināt

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx.$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx = \left| \begin{array}{cc} u = x, & du = dx \\ dv = \sin x dx, & v = -\cos x \end{array} \right| =$$

$$= -x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

3.3.2. Integrēšana ar mainīgā aizvietošanu

3.3. teorēma. [Integrēšana ar mainīgā aizvietošanu noteiktajā integrālī]

Ja funkcija $\varphi(t)$ ir nepārtraukti diferencējama intervālā ar galapunktiem α, β un attēlo šo intervālu par intervālu ar galapunktiem

$a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, kurā ir definēta nepārtraukta funkcija $f(x)$, tad ir spēkā formula:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.}$$

3.3. piezīme. Šajos integrāļos apakšējā integrēšanas robeža var būt arī lielāka par augšējo integrēšanas robežu.

► Apskata divas palīgfunkcijas

$$\Phi(t)=\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)dx \quad \text{un} \quad \psi(t)=\int\limits_\alpha^t f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt,$$

kur t pieder intervālam ar galapunktiem α, β.

Acīmredzami

$$\Phi'(t)=\psi'(t)=f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t),$$

tāpēc

$$\Phi(t)=\psi(t)+C$$

jeb

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)dx=\int\limits_\alpha^t f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt+C.$$

Ievieto $t=\alpha$ un iegūst, ka $C=0$. Tātad

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)dx=\int\limits_\alpha^t f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Ievieto $t=\beta$.

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Tā kā $\varphi(\alpha)=a$ un $\varphi(\beta)=b$, tad

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta \big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt. \quad ◄$$

3.4. piezīme. Izdarot mainīgā aizvietošanu noteiktajā integrālī un mainot integrēšanas robežas, nav jāatgriežas pie sākotnējā mainīgā.

3.3. piemērs. Aprēķināt

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx = \left| \begin{array}{c} \text{Apzīmē } x = a\sin t,\ dx = a\cos t dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t, \\ \text{ja } x = 0,\ \text{tad } t = 0, \\ \text{ja } x = a,\ \text{tad } t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t a\cos t dt = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

3.4. Integrāļi no pāra vai nepāra funkcijas

Apskata intervālā $[-a; a]$ (simetriska attiecībā pret nulli kopa) integrējamu funkciju f.

1. Pieņem, ka f ir pāra funkcija, t.i., visiem $x \in [-a; a]$ izpildās sakarība $f(-x) = f(x)$.

   Apskata

$$\int\limits_{-a}^a f(x)dx = \int\limits_{-a}^0 f(x)dx + \int\limits_0^a f(x)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Pirmajā integrālī lieto substitūciju } x = -t. \\ dx = -dt, \quad f(x) = f(-t) = f(t). \\ \text{Ja } x = -a,\ \text{tad } t = a. \\ \text{Ja } x = 0,\ \text{tad } t = 0. \end{array} \right| = \int\limits_a^0 f(t)(-dt) +$$

$$+ \int\limits_0^a f(x)dx = \int\limits_0^a f(t)dt + \int\limits_0^a f(x)dx = 2\int\limits_0^a f(x)dx.$$

Tādējādi pāra funkcijai f ir spēkā vienādība

$$\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.}$$

2. Pieņem, ka f ir nepāra funkcija, t.i., visiem $x \in [-a; a]$ izpildās sakarība $f(-x) = -f(x)$.

   Apskata

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \text{Pirmajā integrālī lieto substitūciju } \ x = -t. \\ dx = -dt, \ \ f(x) = f(-t) = -f(t). \\ \text{Ja } x = -a, \text{ tad } t = a. \\ \text{Ja } x = 0, \text{ tad } t = 0. \end{array} \right| = \int\limits_{a}^{0} \big(-f(t)\big)(-dt) +$$

$$+ \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = -\int\limits_{0}^{a} f(t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = 0.$$

   Tādējādi nepāra funkcijai f ir spēkā vienādība

$$\boxed{\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0.}$$

3.5. Logaritmiskās funkcijas definēšana ar integrāli

Visbiežāk logaritmisko funkciju definē kā apvērsto funkciju eksponentfunkcijai. Taču logaritmisko funkciju var definēt arī kā integrāli ar mainīgu augšējo integrēšanas robežu, t.i.,

$$\boxed{\ln x = \int\limits_{1}^{x} \frac{dt}{t} \ \ (x > 0).}$$

Atliek parādīt, ka no šīs definīcijas un integrāļa īpašībām seko visas logaritmiskās funkcijas īpašības.

1. Definīcijas apgabals (norādīts definīcijā) ir intervāls $(0, +\infty)$.

2. $\ln x$ ir nepārtraukta funkcija kā integrālis ar mainīgu augšējo robežu no nepārtrauktas (integrējamas) funkcijas $\frac{1}{x}$ $(x > 0)$.

3. Atrod
$$(\ln x)' = \left(\int\limits_1^x \frac{dt}{t}\right)' = \frac{1}{x}.$$
Visiem $x > 0$ $(\ln x)' > 0$, tas nozīmē, ka $\ln x$ ir augoša funkcija.

4. Atrod
$$(\ln x)'' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$
tātad $\ln x$ ir izliekta funkcija.

5. Atrod
$$\ln 1 = \int\limits_1^1 \frac{dt}{t} = 0.$$

6. Apskata
$$\ln\frac{x_1}{x_2} = \int\limits_1^{\frac{x_1}{x_2}} \frac{dt}{t} = \left| \begin{array}{c} \text{Apzīmē } t = \frac{\tau}{x_2}. \\ dt = \frac{1}{x_2} d\tau. \\ \text{Ja } t = 1, \text{ tad } \tau = x_2. \\ \text{Ja } t = \frac{x_1}{x_2}, \text{ tad } \tau = x_1. \end{array} \right| =$$
$$= \int\limits_{x_2}^{x_1} \frac{\frac{d\tau}{x_2}}{\frac{\tau}{x_2}} = \int\limits_{x_2}^{x_1} \frac{d\tau}{\tau} = \int\limits_{x_2}^{1} \frac{d\tau}{\tau} + \int\limits_{1}^{x_1} \frac{d\tau}{\tau} = \int\limits_{1}^{x_1} \frac{d\tau}{\tau} - \int\limits_{1}^{x_2} \frac{d\tau}{\tau} =$$
$$= \ln x_1 - \ln x_2.$$
Tātad
$$\ln\frac{x_1}{x_2} = \ln x_1 - \ln x_2.$$
Atrod
$$\ln\frac{1}{x} = \ln 1 - \ln x = 0 - \ln x = -\ln x.$$
Tātad
$$\ln\frac{1}{x} = -\ln x.$$

Atrod

$$\ln(x_1x_2) = \ln\left(\frac{x_1}{\frac{1}{x_2}}\right) = \ln x_1 - \ln\frac{1}{x_2} = \ln x_1 - (-\ln x_2) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

Tātad

$$\ln(x_1x_2) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

7. Parāda, ka $\ln x^\alpha = \alpha \ln x \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.

   (a) Ja $\alpha = n$ ($n \in \mathbb{N}$), tad

   $$\ln \underbrace{(xx\cdots x)}_{n\ -\text{reizes}} = \underbrace{\ln x + \ln x + \cdots + \ln x}_{n\ -\text{reizes}} = n \ln x.$$

   (b) Ja $\alpha = -n$ ($n \in \mathbb{N}$), tad

   $$\ln x^{-n} = \ln\frac{1}{x^n} = -\ln x^n = -n\ln x.$$

   (c) Ja $\alpha = 0$, tad

   $$\ln x^0 = \ln 1 = 0 = 0 \cdot \ln x.$$

   Tātad jebkuram veselam skaitlim α ($\alpha \in \mathbb{Z}$) ir spēkā vienādība

   $$\ln x^\alpha = \alpha \ln x.$$

   (d) Ja α ir racionāls skaitlis ($\alpha \in \mathbb{Q}$), tad

   $$\alpha = \frac{m}{n} \quad (m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}).$$

   Apskata vispirms

   $$\ln x = \ln\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = n \ln \sqrt[n]{x}.$$

   Tātad

   $$\ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\ln x.$$

   Apskata

   $$\ln x^r = \ln x^{\frac{m}{n}} = \ln\left(\sqrt[n]{x}\right)^m = m \ln \sqrt[n]{x} = m\frac{1}{n}\ln x = \frac{m}{n}\ln x = r \ln x.$$

(e) Ja α ir iracionāls skaitlis ($\alpha \in \mathfrak{I}$), tad saskaņā ar pozitīva skaitļa x pakāpes ar iracionālu kāpinātāju definīciju

$$x^\alpha = \lim_{r \to \alpha} x^r,$$

kur $r \in \mathbb{Q}$.

Tātad

$$\ln x^\alpha = \ln \left(\lim_{r \to \alpha} x^r \right) = \lim_{r \to \alpha} \ln x^r = \lim_{r \to \alpha} (r \ln x) = \alpha \ln x.$$

(Tika izmantota logaritmiskās funkcijas nepārtrauktība). Tādējādi jebkuram $\alpha \in \mathbb{R}$ ir spēkā vienādība

$$\ln x^\alpha = \alpha \ln x.$$

(f) Tā kā $\ln 1 = 0$ un $\ln x$ ir augoša funkcija, tad $\ln 2 > 0$.

Ja $x > 2^n$, tad $\ln x > \ln 2^n = n \ln 2$. Seko, ka $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

Tā kā $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$, tad

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln \frac{1}{x} = -\infty.$$

Tātad $\ln x$ pieņem jebkuras negatīvas un jebkuras pozitīvas vērtības. Tādējādi $\ln x$ vērtību apgabals ir intervāls $(-\infty, +\infty)$.

Saskaņā ar Bolcano-Košī teorēmu par nepārtrauktas funkcijas starpvērtībām eksistē tāda vērtība, kuru apzīmē ar e, ka $\ln e = 1$ (pie tam tāda vērtība ir vienīgā, jo $\ln x$ ir augoša funkcija).

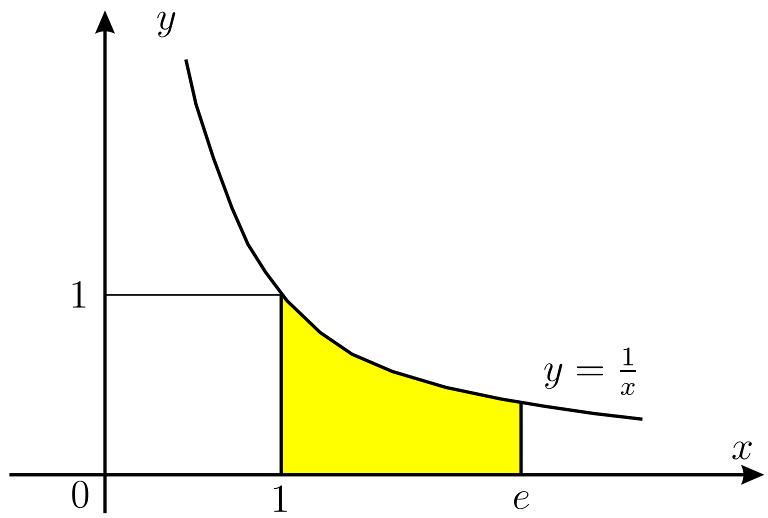
Tā kā

$$\ln e = \int_1^e \frac{dt}{t},$$

tad

$$\int_1^e \frac{dt}{t} = 1.$$

No ģeometriskā viedokļa tas nozīmē, ka atbilstošai līklīnijas trapecei, kuru no augšas ierobežo hiperbolas $y = \frac{1}{x}$ zars, laukums ir 1 (3.1. zīm.).



3.1. zīm.

(g) Apskata

$$\ln e^x = x \ln e = x \cdot 1 = x.$$

Tas nozīmē, ka ar integrāli definētā logaritmiskā funkcija ir eksponentfunkcijai apvērstā funkcija.

Piezīme. Logaritmisko funkciju ar patvaļīgu bāzi a definē šādi:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

No šīs definīcijas un funkcijas $\ln x$ īpašībām izriet funkcijas $\log_a x$ atbilstošās īpašības.

(Iegūt un pamatot šīs īpašības patstāvīgi).

Jautājumi

1. Sniegt ģeometrisko interpretāciju integrālim ar mainīgu augšējo robežu.
2. Formulēt integrāļa ar mainīgu augšējo robežu īpašības.
3. Uzrakstīt Ņūtona-Leibnica formulu.
4. Formulēt parciālās integrēšanas formulu noteiktajā integrālī.
5. Paskaidrot substitūciju metodes pielietošanu noteiktajā integrālī.
6. Ar ko atšķiras substitūciju metode noteiktajā integrālī no substitūciju metodes nenoteiktajā integrālī?

7. Paskaidrot, kā izskaitļo noteiktos integrāļus no pāra vai nepāra funkcijas intervālā $[-a; a]$.

8. Ar integrāli definēt logaritmisko funkciju.

Vingrinājumi

1. Pierādīt 1. un 2. īpašības sekas.

2. Pamatot primitīvās funkcijas eksistenci katrai intervālā $[a; b]$ nepārtrauktai funkcijai.

3. Formulēt un pierādīt teorēmas par integrāļa ar mainīgu apakšējo robežu nepārtrauktību un diferencēšanu.

4. Atvasināt šādas funkcijas:

   (a) $F(x) = \int\limits_x^0 \sqrt{1+t^4}dt$;

   (b) $F(x) = \int\limits_x^{x^2} e^{-t^2}dt$.

5. Aprēķināt šādus noteiktos integrāļus:

   (a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$;

   (b) $\int\limits_0^1 xe^x dx$;

   (c) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$.

6. Sniegt ģeometrisko interpretāciju integrālim no pāra vai nepāra funkcijas intervālā $[-a; a]$.

7. Formulēt un pamatot funkcijas $\log_a x$ svarīgākās īpašības.

Uzdevumi

1. Izmantojot Ņūtona-Leibnica formulu, aprēķināt šādus noteiktos integrāļus:

   (a) $\displaystyle\int\limits_0^8 \left(\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\right) dx;$

   (b) $\displaystyle\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2} dy;$

   (c) $\displaystyle\int\limits_2^6 \sqrt{x-2}dx;$

   (d) $\displaystyle\int\limits_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}};$

   (e) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1};$

   (f) $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{z^3}{z^8+1} dz;$

   (g) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$

   (h) $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi;$

   (i) $\displaystyle\int\limits_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x};$

   (j) $\displaystyle\int\limits_1^e \ln x dx.$

2. Izmantojot noteiktos integrāļus, aprēķināt šādas robežas:

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right),$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right).$

4. nodaļa

KVADRĒJAMĪBAS KRITĒRIJI

4.1. Plaknes figūras laukums

4.1. definīcija. Par **plaknes figūru** F sauc katru ierobežotu[1] plaknes punktu kopu.

Apskata plaknes figūrā F (4.1. zīm.) visu iespējamo ievilktu plaknes daudzstūru P $(P \subset F)$ kopu $\{P\}$ un visu iespējamo apvilktu plaknes daudzstūru Q $(Q \supset F)$ kopu $\{Q\}$. Plaknes daudzstūra P laukumu[2] apzīmē ar mP, bet plaknes daudzstūra Q laukumu - atbilstoši ar mQ.

Skaitļu kopa $\{mP\}$ nav tukša[3] un ir ierobežota no augšas ar jebkura apvilkta plaknes daudzstūra Q laukumu mQ.

Eksistē galīgs $\sup\limits_{P \subset F}\{mP\}$, kuru apzīmē $m_* = m_*F$ un sauc par plaknes figūras F **iekšējo laukumu**.

Tādējādi

$$m_* = m_*F = \sup_{P \subset F}\{mP\}.$$

[1] Eksistē tāds riņķis, kas satur kopu F.

[2] No ģeometrijas kursa ir zināms, ka katram plaknes daudzstūrim atbilst nenegatīvs skaitlis, kuru sauc par šī daudzstūra laukumu. Plaknes daudzstūra laukumam piemīt šādas īpašības:

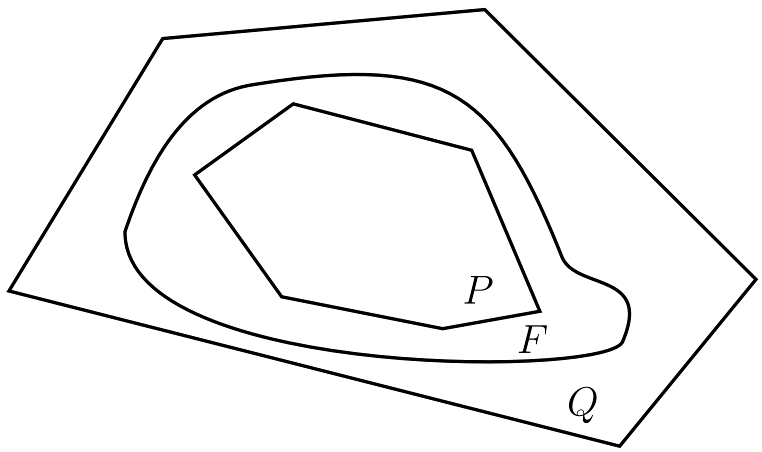
- **aditivitāte**, t.i., ja P_1, P_2 - plaknes daudzstūri, kuriem nav kopīgu iekšējo punktu, tad $m(P_1 \cup P_2) = mP_1 + mP_2$,
- **monotonitāte**, t.i., ja $P_1 \subset P_2$, tad $mP_1 \leq mP_2$,
- **invariance**, t.i., ja plaknes daudzstūri P_1 un P_2 ir vienādi, tad $mP_1 = mP_2$.

[3] Ja kopa $\{mP\}$ ir tukša, t.i., plaknes figūrā F nevar ievilkt nevienu plaknes daudzstūri P, tad uzskata, ka $m_* = m_*F = 0$.

Plaknes figūras F **ārējo laukumu** definē

$$m^* = m^*F = \inf_{Q \supset F}\{mQ\}.$$

(Patstāvīgi pamatot ārējā laukuma eksistenci.)
Tā kā $mP \leq mQ$, tad $m_*F \leq m^*F$.



4.1. zīm.

4.2. definīcija. Plaknes figūru F sauc par **kvadrējamu**, ja tās iekšējais laukums sakrīt ar ārējo laukumu, t.i., $m_*F = m^*F$, pie tam šo kopīgo skaitli sauc par **figūras F laukumu** un apzīmē mF.

4.2. Plaknes figūras kvadrējamības kritēriji

4.1. teorēma. [Kvadrējamības 1. kritērijs]

Plaknes figūra F kvadrējama tad un tikai tad, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds ievilkts plaknes daudzstūris P un tāds apvilkts plaknes daudzstūris Q $(P \subset F \subset Q)$, ka

$$mQ - mP < \varepsilon.$$

▶ *Nepieciešamība.*

Tā kā F - kvadrējama figūra, tad $m_*F = m^*F$. Saskaņā ar kopas $\{mP\}$ augšējā sliekšņa m_*F definīciju jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds plaknes daudzstūris P $(P \subset F)$, ka

$$mP > m_*F - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.1}$$

Analogi eksistē tāds Q ($F \subset Q$), ka

$$mQ < m^*F + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2}$$

No nevienādības (4.2) atņem (4.1) un iegūst

$$mQ - mP < \varepsilon.$$

Pietiekamība.

Šoreiz jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tādi plaknes daudzstūri P un Q ($P \subset F \subset Q$), ka $mQ - mP < \varepsilon$.

No F iekšējā laukuma un ārējā laukuma definīcijas seko, ka

$$mP \leq m_*F \leq m^*F \leq mQ.$$

Tāpēc

$$0 \leq m^*F - m_*F \leq mQ - mP.$$

Tā kā $mQ - mP < \varepsilon$, tad $0 \leq m^*F - m_*F < \varepsilon$. Nenegatīvā konstante $m^*F - m_*F$ var kļūt pēc patikas maza tikai tad, kad tā ir nulle.

Tādējādi $m^*F = m_*F$. Plaknes figūra F - kvadrējama. ◀

4.2. teorēma. [Kvadrējamības 2. kritērijs]

Plaknes figūra F kvadrējama tad un tikai tad, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda ievilkta kvadrējama plaknes figūra P un tāda apvilkta kvadrējama plaknes figūra Q ($P \subset F \subset Q$), ka

$$mQ - mP < \varepsilon.$$

▶ *Nepieciešamība.*

Saskaņā ar kvadrējamības 1. kritēriju (skat. 4.1. teorēmu) par tādām kvadrējamām plaknes figūrām var izvēlēties plaknes daudzstūrus.

Pietiekamība.

Šoreiz jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tādas kvadrējamas plaknes figūras P un Q ($P \subset F \subset Q$), ka

$$mQ - mP < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tā kā Q - kvadrējama plaknes figūra, tad eksistē tāds plaknes daudzstūris $\overline{Q}$ ($\overline{Q} \supset Q$), ka

$$m\overline{Q} - mQ < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Analogi eksistē tāds plaknes daudzstūris $\overline{P}$ ($\overline{P} \subset P$), ka

$$mP - m\overline{P} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Plaknes daudzstūriem $\overline{P}$, $\overline{Q}$ ($\overline{P} \subset F \subset \overline{Q}$) izpildās

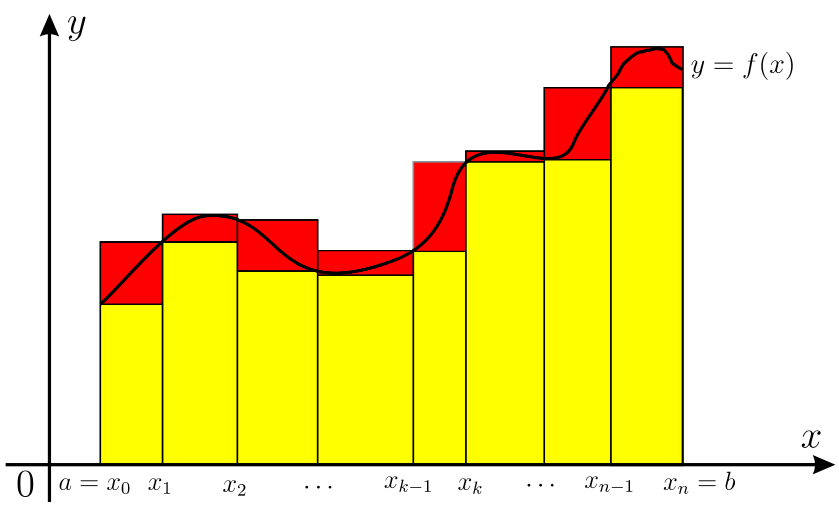
$$m\overline{Q} - m\overline{P} = (m\overline{Q} - mQ) + (mQ - mP) + (mP - m\overline{P}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Plaknes figūra F ir kvadrējama saskaņā ar kvadrējamības 1. kritēriju (skat. 4.1. teorēmu). ◀

4.3. Kvadrējamu figūru piemēri

4.3.1. Līklīnijas trapeces kvadrējamība un tās laukums

Apskata plaknes figūru F, kuru no augšas ierobežo intervālā $[a;b]$ nepārtrauktas un nenegatīvas funkcijas $f(x)$ grafiks, no apakšas Ox ass nogrieznis $[a;b]$ un no sāniem taisnes $x = a$, $x = b$. Kā zināms, tādu plaknes figūru sauc par **līklīnijas trapeci** (4.2. zīm.).



4.2. zīm.

Izveido intervāla $[a;b]$ sasmalcinājumu

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

ar sasmalcinājuma soli $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$.

Apzīmē ar

$$m_k = \inf_{[x_{k-1};x_k]} f(x) = \min_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$$

un

$$M_k = \sup_{[x_{k-1};x_k]} f(x) = \max_{[x_{k-1};x_k]} f(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Izveido plaknes daudzstūri P, kas sastāv no tādiem taisnstūriem, kuriem par pamatiem kalpo Ox nogriežņi $[x_{k-1}; x_k]$, bet par augstumiem atbilstoši m_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Acīmredzami $P \subset F$ (4.2. zīm.). Analogi izveido ap F apvilktu plaknes daudzstūri Q (šoreiz par taisnstūru augstumiem izvēlas M_k). Aprēķina P un Q laukumus:

$$mP = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k, \quad mQ = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k.$$

Saskaņā ar Darbū summu definīcijām šoreiz $s = mP$ un $S = mQ$.

Tā kā f - intervālā $[a; b]$ nepārtraukta funkcija, tad tā ir integrējama šajā intervālā un saskaņā ar integrējamības kritēriju jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta_\varepsilon > 0$, ka visiem intervāla $[a; b]$ sasmalcinājumiem ar soli $\lambda < \delta$ izpildās nevienādība $S - s < \varepsilon$. Tādējādi eksistē tādi plaknes daudzstūri P un Q $(P \subset F \subset Q)$, ka $mQ - mP < \varepsilon$. Saskaņā ar kvadrējamības 1. kritēriju (skat. 4.1. teorēmu) F - kvadrējama figūra.

Apzīmē ar $\Im = \int\limits_a^b f(x)dx$. Zināms, ka $s \le \Im \le S$. Šoreiz $mP \le \Im \le mQ$, arī līklīnijas trapeces laukumiem izpildās nevienādība $mP \le mF \le mQ$. Divas konstantes mF un $\Im$ ir iekļautas starp mP un mQ, kuri var kļūt pēc patikas tuvi.

Seko, ka $mF = \Im$ jeb

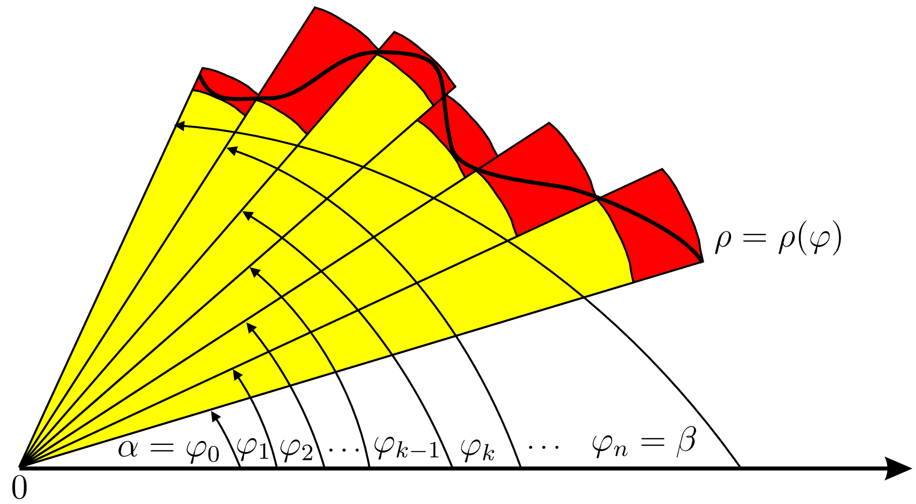
$$\boxed{mF = \int\limits_a^b f(x)dx.}$$

Tādējādi ir pierādīta līklīnijas trapeces kvadrējamība un iegūta tās laukuma aprēķināšanas formula ar noteiktā integrāļa palīdzību.

4.3.2. Līklīnijas sektora kvadrējamība un tās laukums

Polārajā koordinātu sistēmā apskata plaknes figūru F, kuru ierobežo divi stari $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ un intervālā nepārtrauktas un nenegatīvas funkcijas $\rho = \rho(\varphi)$ grafiks (4.3. zīm.).

Šādu plaknes figūru sauc par **līklīnijas sektoru**.



4.3. zīm.

Lai pierādītu līklīnijas sektora kvadrējamību un aprēķinātu tā laukumu, rīkojas šādi:

- izveido intervāla $[\alpha; \beta]$ sasmalcinājumu

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \cdots < \varphi_{k-1} < \varphi_k < \cdots\cdots < \varphi_n = \beta;$$

- apzīmē ar

$$m_k = \inf_{[\varphi_{k-1};\varphi_k]} \rho(\varphi) = \min_{[\varphi_{k-1};\varphi_k]} \rho(\varphi),$$
$$M_k = \sup_{[\varphi_{k-1};\varphi_k]} \rho(\varphi) = \max_{[\varphi_{k-1};\varphi_k]} \rho(\varphi),$$

$(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Līklīnijas sektorā F ievelk kvadrējamu plaknes figūru P, kas sastāv no tādiem riņķa sektoriem, kuriem centra leņķi ir $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ un rādiusi atbilstoši m_k.

Analogi ap F apvelk kvadrējamu plaknes figūru Q (šoreiz riņķa sektoru rādiusi ir M_k).

Aprēķina P un Q laukumus:

$$mP = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k^2 \Delta\varphi_k, \quad mQ = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} M_k^2 \Delta\varphi_k.$$

Skaitļus mP un mQ var uzskatīt par funkcijas $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ Darbū summām, kas atbilst izveidotajam intervāla $[\alpha; \beta]$ sasmalcinājumam. Tādējādi
$s = mP$ un $S = mQ$.

Tā kā funkcija $\frac{1}{2}\rho^2(\varphi)$ nepārtraukta intervālā $[\alpha;\beta]$, tad tā ir integrējama šajā intervālā un saskaņā ar integrējamības kritēriju jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta_\varepsilon > 0$, ka visiem intervāla $[\alpha;\beta]$ sasmalcinājumiem ar soli $\lambda < \delta$ izpildās nevienādība $S - s < \varepsilon$. Tādējādi eksistē tādas kvadrējamas plaknes figūras P un Q ($P \subset F \subset Q$), ka $mQ - mP < \varepsilon$. Saskaņā ar kvadrējamības 2. kritēriju (skat. 4.2. teorēmu) F ir kvadrējama figūra.

Apzīmē integrāli $\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi$ ar $\mathfrak{I}$ un līklīnijas sektora laukumu ar mF. Tā kā divas konstantes $\mathfrak{I}$ un mF ir iekļautas starp mP un mQ, kuri var kļūt pēc patikas tuvi, tad $mF = \mathfrak{I}$ jeb

$$\boxed{mF = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.}$$

4.4. Plaknes figūras laukuma īpašības

4.3. teorēma. [Laukuma aditivitāte]

Ja F_1, F_2 ir kvadrējamas plaknes figūras, kurām nav kopīgu iekšējo punktu un $F = F_1 \cup F_2$, tad F ir kvadrējama figūra, pie tam

$$mF = mF_1 + mF_2.$$

► Tā kā F_1 un F_2 ir kvadrējamas plaknes figūras, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tādi plaknes daudzstūri P_1, Q_1 un P_2, Q_2 ($P_1 \subset F_1 \subset Q_1$; $P_2 \subset F_2 \subset Q_2$), ka

$$mQ_1 - mP_1 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad mQ_2 - mP_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Apskata plaknes daudzstūrus $P = P_1 \cup P_2$, $Q = Q_1 \cup Q_2$. Acīmredzami, $P \subset F \subset Q$.

Plaknes daudzstūriem P_1 un P_2 nav kopīgu iekšējo punktu, tāpēc

$$mP = mP_1 + mP_2.$$

Plaknes daudzstūriem Q_1 un Q_2 var būt arī kopīgi iekšējie punkti, tāpēc

$$mQ \leq mQ_1 + mQ_2.$$

Apskata

$$mQ - mP \leq (mQ_1 + mQ_2) - (mP_1 + mP_2) = \\ = (mQ_1 - mP_1) + (mQ_2 - mP_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Saskaņā ar kvadrējamības 1. kritēriju (skat. 4.1. teorēmu) F ir kvadrējama figūra, pie tam $mP \leq mF \leq mQ$.

Tādējādi

$$mP_1 + mP_2 \leq mF \leq mQ_1 + mQ_2. \tag{4.3}$$

No sakarībām $P_1 \subset F_1 \subset Q_1$; $P_2 \subset F_2 \subset Q_2$ seko, ka

$$mP_1 \leq mF_1 \leq mQ_1; \quad mP_2 \leq mF_2 \leq mQ_2.$$

Saskaitot šīs nevienādības iegūst, ka

$$mP_1 + mP_2 \leq mF_1 + mF_2 \leq mQ_1 + mQ_2. \tag{4.4}$$

No nevienādībām (4.3) un (4.4) seko, ka divas konstantes mF un $(mF_1 + mF_2)$ ir iekļautas starp lielumiem $(mP_1 + mP_2)$ un $(mQ_1 + mQ_2)$, kuri var kļūt pēc patikas tuvi, tāpēc

$$mF = mF_1 + mF_2. \quad \blacktriangleleft$$

4.1. piezīme.

1. No plaknes daudzstūra laukuma invariances (vai monotonitātes) un plaknes figūras laukuma definīcijas izriet plaknes figūras laukuma invariance (vai monotonitāte).
2. Divu plaknes kvadrējamu figūru starpība $F_1 \setminus F_2$ un šķēlums $F_1 \cap F_2$ ir kvadrējamas figūras.
3. Ar matemātiskās indukcijas metodi laukuma aditivitātes īpašību var vispārināt attiecībā uz jebkura *galīga skaita* kvadrējamu figūru, kurām nav kopīgu iekšējo punktu, apvienojumu.
4. Analogi var definēt kubējamu telpas ķermeni F, tā tilpumu mF, formulēt un pierādīt kubējamības kritērijus un tilpuma īpašības.

Jautājumi

1. Definēt plaknes figūru.

2. Definēt plaknes figūras iekšējo un ārējo laukumu.

3. Definēt kvadrējamu plaknes figūru un tās laukumu.

4. Formulēt plaknes figūras kvadrējamības kritērijus.

5. Definēt līklīnijas trapeci un uzrakstīt formulu tās laukuma aprēķināšanai.

6. Definēt līklīnijas sektoru un uzrakstīt formulu tā laukuma aprēķināšanai.

7. Formulēt plaknes figūras laukuma īpašības.

Vingrinājumi

1. Definēt telpas ķermeni.

2. Definēt telpas ķermeņa iekšējo un ārējo tilpumu.

3. Definēt kubējamu telpas ķermeni un tā tilpumu.

4. Formulēt un pierādīt telpas ķermeņa kubējamības 1. kritēriju (skat. 4.1. teorēmu).

5. Formulēt un pierādīt telpas ķermeņa kubējamības 2. kritēriju (skat. 4.2. teorēmu).

6. Pamatot taisna cilindra kubējamību un iegūt tā tilpuma aprēķināšanas formulu.

7. Formulēt telpas ķermeņa tilpuma īpašības un pierādīt tilpuma aditivitāti.

Uzdevumi

1. Aprēķināt laukumu figūrai, kuru ierobežo šādas līnijas:

   (a) $y = x^2 + 1$, $x = -1$, $x = 2$ un abscisu ass;

   (b) $x + 2y - 8 = 0$, $y = 1$, $y = 3$ un ordinātu ass;

   (c) Bernulli lemniskāta $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$;

   (d) kardioīda $\rho = 2a(1 + \cos\varphi)$.

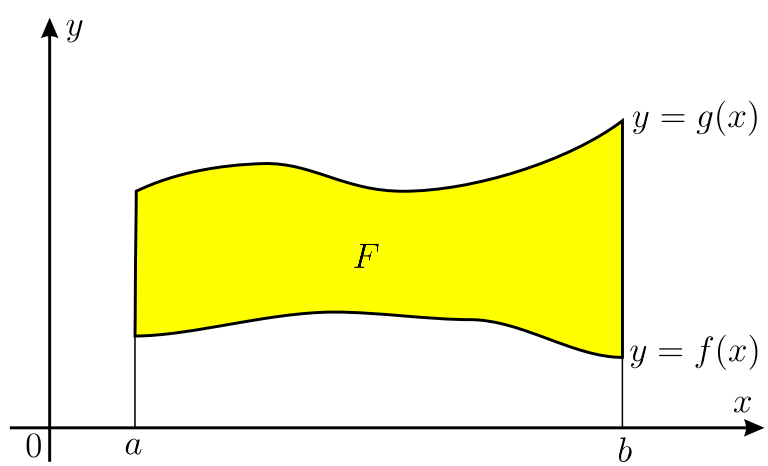
5. nodaļa

NOTEIKTĀ INTEGRĀĻA LIETOJUMI

5.1. Laukuma aprēķināšana ar noteikto integrāli

Laukumu izskaitļošana ir viens no pamatuzdevumiem, kas noveda pie noteiktā integrāļa jēdziena.

1. Apskata plaknes figūru F, kuru no augšas ierobežo intervālā $[a; b]$ nepārtrauktas funkcijas $g(x)$ grafiks, no apakšas - šajā intervālā nepārtrauktas funkcijas $f(x)$ grafiks, pie tam visiem $x \in [a; b]$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$, bet no sāniem - taisnes $x = a$ un $x = b$ (5.1. zīm.).



5.1. zīm.

Figūra F - kvadrējama kā divu kvadrējamu figūru (līklīnijas trapeču

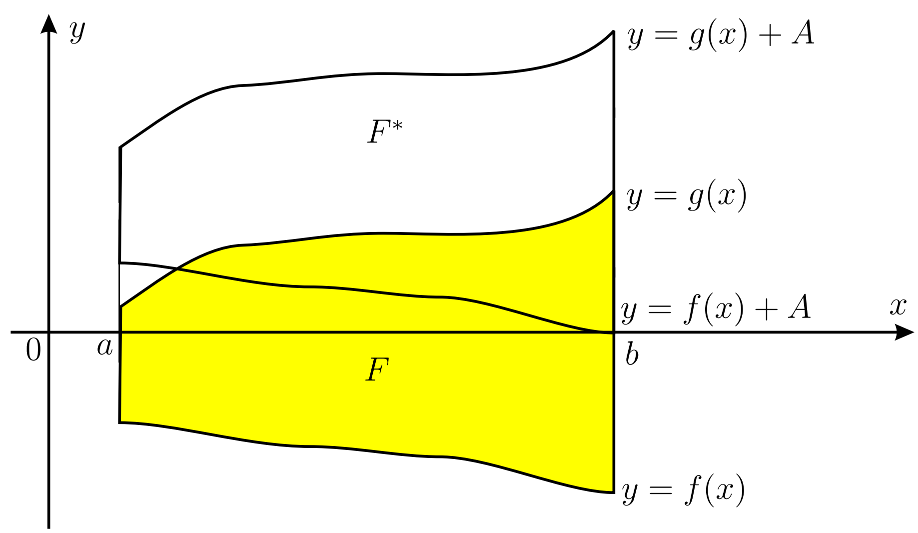
F_1 un F_2) starpība, pie tam

$$mF = mF_1 - mF_2 = \int\limits_a^b g(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx.$$

Tādējādi

$$\boxed{S = \int\limits_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx.} \qquad (5.1)$$

2. Apskata plaknes figūru F, kuru no augšas ierobežo intervālā $[a;b]$ nepārtrauktas funkcijas $g(x)$ grafiks, no apakšas - šajā intervālā nepārtrauktas funkcijas $f(x)$ grafiks, pie tam visiem $x \in [a;b]$ $f(x) \leq g(x)$, bet no sāniem - taisnes $x = a$ un $x = b$ (5.2. zīm.).



5.2. zīm.

Atšķirībā no 1. gadījuma šoreiz funkcijas $f(x)$ un $g(x)$ intervālā $[a;b]$ var pieņemt arī negatīvas vērtības.

Apzīmē ar $-A = \inf\limits_{[a;b]} f(x) = \min\limits_{[a;b]} f(x)$ $(A > 0)$.

Apskata plaknes figūru F^*, kuru no apakšas ierobežo funkcijas $f(x)+A$ grafiks, no augšas - funkcijas $g(x) + A$ grafiks, bet no sāniem - taisnes $x = a$ un $x = b$ (5.2. zīm.).

Figūras F^* un F ir vienādas, tāpēc $mF^* = mF$. Figūras F^* laukumu var izskaitļot pēc formulas (5.1), jo funkcijas $f(x) + A$, $g(x) + A$ intervālā $[a;b]$ ir nenegatīvas.

$$mF^* = \int_a^b \Big(\big(g(x)+A\big) - \big(f(x)+A\big)\Big)dx = \int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)dx,$$

tādējādi

$$mF = \int_a^b \big(g(x)-f(x)\big)dx.$$

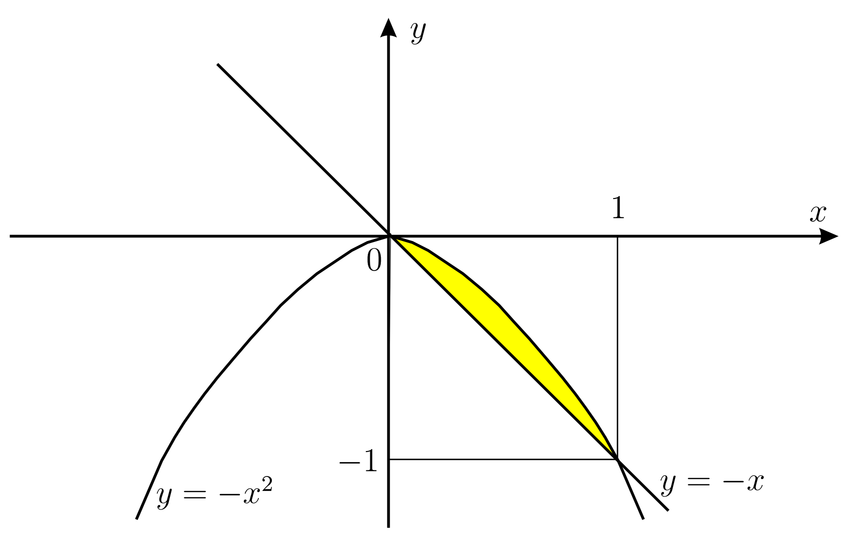
5.1. piezīme.

(a) Formula (5.1) ir spēkā arī tajos gadījumos, kad visa figūra F vai arī šīs figūras daļa atrodas zem abscisu ass.

(b) Bieži doto plaknes figūru F vajag sadalīt galīga skaita tādās figūrās, kuru laukumus var aprēķināt pēc formulas (5.1). Dotās figūras laukums būs vienāds ar tās daļu laukumu summu.

5.1. piemērs. Aprēķināt laukumu figūrai, kuru ierobežo parabola $y=-x^2$ un taisne $x+y=0$.

Koordinātu sistēmā konstruē parabolu $y=-x^2$ un taisni $y=-x$, iegūst plaknes figūru F (5.3. zīm.). Figūru no augšas ierobežo parabola



5.3. zīm.

$y = -x^2$, bet no apakšas - taisne $y = -x$.

$$S = \int_0^1 \big(-x^2 - (-x)\big)dx = \int_0^1 (-x^2 + x)dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

3. Apskata līklīnijas trapeci, kuru no augšas ierobežo parametriskā veidā uzdota līkne ar vienādojumiem

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

pie tam x maiņai no a līdz b $(a < b)$ atbilst t maiņa no α līdz β.

Funkcija $\varphi(t)$ - stingri monotona un nepārtraukti diferencējama, bet $\psi(t)$ - nepārtraukta atbilstošajā intervālā. Kā zināms, minētā sistēma parametriskā veidā uzdod intervālā $[a; b]$ nepārtrauktu funkciju $f(x)$.

Līklīnijas trapeces laukumu var aprēķināt pēc formulas (5.1):

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Formulā (5.1) izpilda mainīgā aizvietošanu $x = \varphi(t)$ un iegūst:

$$S = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Tādējādi

$$\boxed{S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt.} \tag{5.2}$$

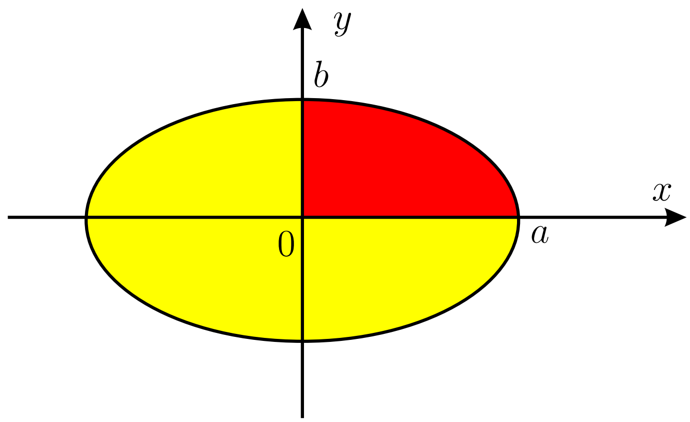
5.2. piemērs. Aprēķināt laukumu figūrai, kuru ierobežo elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Elipses parametriskais vienādojums ir

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Pēc formulas (5.2) izskaitļo figūras tās daļas, kas atrodas 1. kvadrantā, laukumu (5.4. zīm.).



5.4. zīm.

Argumenta x maiņai no 0 līdz a atbilst parametra t maiņa no $\frac{\pi}{2}$ līdz 0.

$$S = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t(-a\sin t)dt = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t dt =$$

$$= -2ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos 2t)dt = -2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} =$$

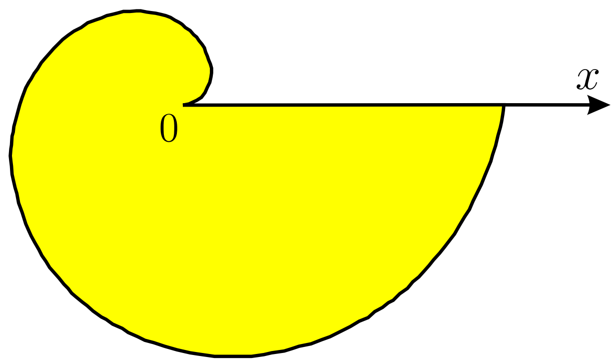
$$= -2ab\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) = \pi ab.$$

5.3. piemērs. Aprēķināt laukumu figūrai, kuru ierobežo Arhimeda spirāles $\rho = a\varphi$ $(0 \le \varphi < +\infty)$ viena vītne un polārā ass.

Lai aprakstītu Arhimeda spirāles vienu vītni, parametrs φ mainās no 0 līdz 2π (5.5. zīm.).

Laukuma aprēķināšanai lieto līklīnijas sektora laukuma aprēķināšanas formulu

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

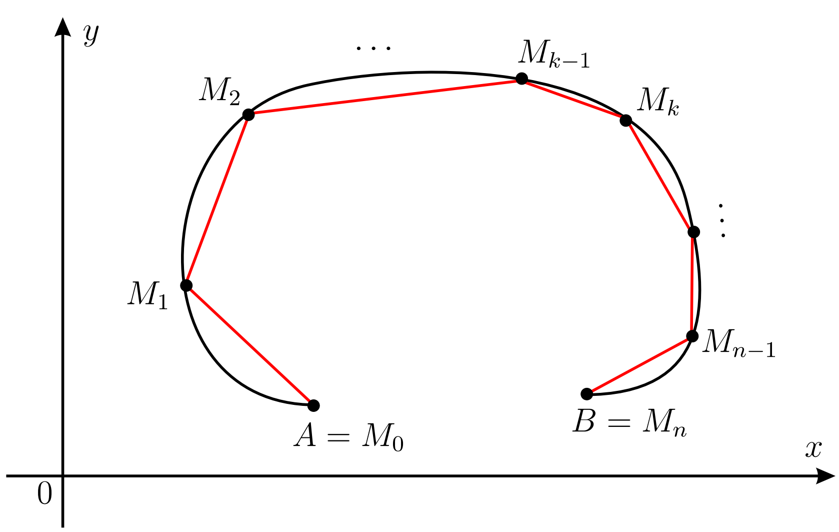


5.5. zīm.

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}(a\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\varphi^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi^3 a^2.$$

5.2. Rektificējama (iztaisnojama) līkne un tās garums

Plaknē apskata līkni AB (A - līknes sākuma, bet B - beigu punkts). Sadala šo līkni ar punktiem $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$ (5.6. zīm.). Savienojot blakus esošos punktus ar taisnes nogriežņiem, iegūst līknē AB ievilktu lauztu līniju, kas sastāv no nogriežņiem $M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$, kur M_0 sakrīt ar punktu A, bet M_n sakrīt ar punktu B.



5.6. zīm.

Aprēķina šīs ievilktās lauztās līnijas perimetru

$$P = \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}M_k. \tag{5.3}$$

Apzīmē ar $\lambda = \max\limits_{1\leq k\leq n} M_{k-1}M_k$.

5.1. definīcija. Ja summai (5.3) eksistē galīga robeža s, kad $\lambda \to 0$, t.i., jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem līknes AB sasmalcinājumiem ar soli $\lambda < \delta$ izpildās nevienādība $|P - s| < \varepsilon$, tad līkni AB sauc par **rektificējamu (iztaisnojamu)**, pie tam robežu s sauc par **līknes garumu**.

Tādējādi

$$\boxed{s = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}M_k.}$$

5.3. Līknes garuma aprēķināšana ar noteikto integrāli

1. Jāaprēķina garums līknei AB, kas ir intervālā $[a;b]$ nepārtraukti diferencējamas funkcijas $f(x)$ grafiks.

   Ja izveido līknes AB sasmalcinājumu, tad iegūst arī intervāla $[a;b]$ sasmalcinājumu

   $$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b,$$

   kur x_k ir punkta M_k abscisa (5.7. zīm.).

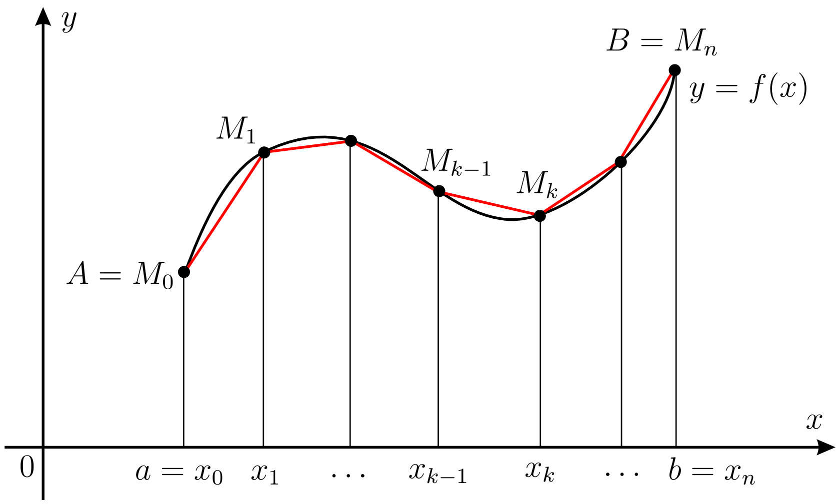
   Punkta M_k ordināta $y_k = f(x_k)$. Tādējādi $M_{k-1}\big(x_{k-1}, f(x_{k-1})\big)$, $M_k\big(x_k, f(x_k)\big)$ un

   $$M_{k-1}M_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)^2} =$$
   $$= \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + \big(f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1})\big)^2} = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k,$$

   kur $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

   Starpība $f(x_k) - f(x_{k-1})$ tika pārveidota pēc Lagranža formulas. Ievilktās lauztās līnijas perimetrs

   $$P = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$$



5.7. zīm.

ir intervālā $[a; b]$ nepārtrauktas funkcijas $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ integrālsumma. Šī funkcija ir integrējama kā nepārtraukta funkcija, tāpēc integrālsummai eksistē galīga robeža, kad $\lambda \to 0$ (ja $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} M_{k-1}M_k \to 0$, tad arī $\lambda^* = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k \to 0$ un otrādi).

Robeža ir vienāda ar šādu noteikto integrāli:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Tādējādi līkne AB ir rektificējama un tās garums

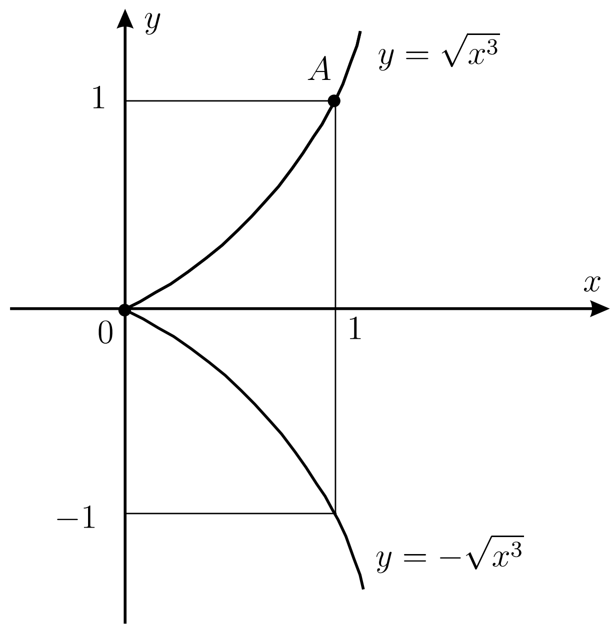
$$\boxed{s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.} \tag{5.4}$$

5.4. piemērs. Aprēķināt puskubiskās parabolas $y^2 = x^3$ loka garumu starp punktiem $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ (5.8. zīm.).

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\left(\sqrt{x^3}\right)'\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx =$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{4 + 9x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} (4+9x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{27}(13\sqrt{13} - 8).$$



5.8. zīm.

2. Jāaprēķina garums parametriskā veidā uzdotas līknes lokam ar vienādojumiem
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta.$$

Funkcijas $\varphi(t)$ intervālā $[\alpha;\beta]$ ir stingri monotona un nepārtraukti diferencējama, bet $\psi(t)$ ir nepārtraukti diferencējama. Ja parametrs t mainās no α līdz β, tad x mainās no a līdz b.

Vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta$$

parametriskā veidā uzdod intervālā $[a;b]$ nepārtraukti diferencējamu funkciju $f(x)$. Atbilstošās līknes garumu var aprēķināt pēc formulas

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Šajā formulā izpilda mainīgā aizvietošanu.

$$x = \varphi(t), \quad \text{pie tam} \quad f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad dx = \varphi'(t)dt.$$

Iegūst

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + \left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2} \varphi'(t)dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.$$

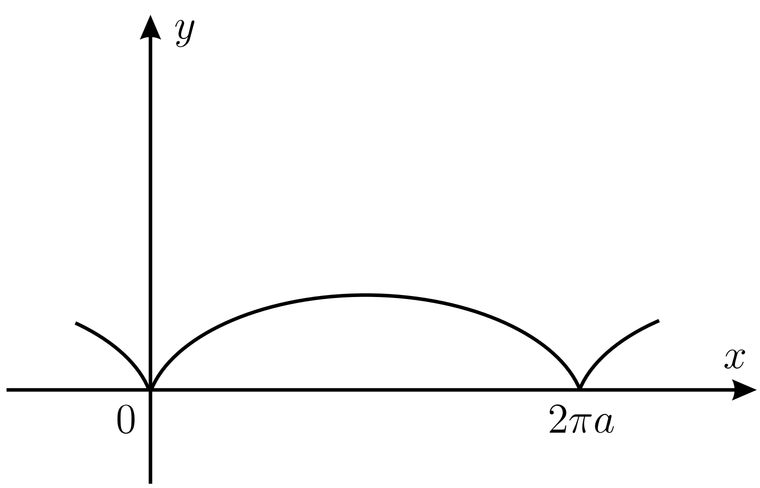
Tādējādi

$$\boxed{s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt.} \tag{5.5}$$

5.5. piemērs. Aprēķināt cikloīdas

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

vienas arkas garumu (5.9. zīm.).



5.9. zīm.

Vienu arku iegūst, parametru t izmainot no 0 līdz 2π.

Tā kā $x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a \sin t$, tad

$$s = \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt = a \int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt =$$

$$= 2a \int\limits_{0}^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = -4a \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8a.$$

5.2. piezīme. Formula (5.5) ir spēkā arī tādai parametriskā veidā uzdotai līknei

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

kas nav kaut kādas funkcijas grafiks. Svarīgi, lai tikai funkcijas $\varphi(t)$, $\psi(t)$ būtu nepārtraukti diferencējamas minētajā intervālā.

3. Jāaprēķina garums līknei, kas uzdota polārajās koordinātās ar vienādojumu $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, pie tam funkcija $\rho(\varphi)$ nepārtraukti diferencējama dotajā intervālā.

Parametrizē šo līkni

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \qquad \alpha \le \varphi \le \beta.$$

Atrod

$$x' = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi,$$
$$y' = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi,$$

$$x'^2 + y'^2 = \big(\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi\big)^2 + \\ + \big(\rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi\big)^2 = \rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi).$$

Pielieto formulu (5.5) un iegūst, ka

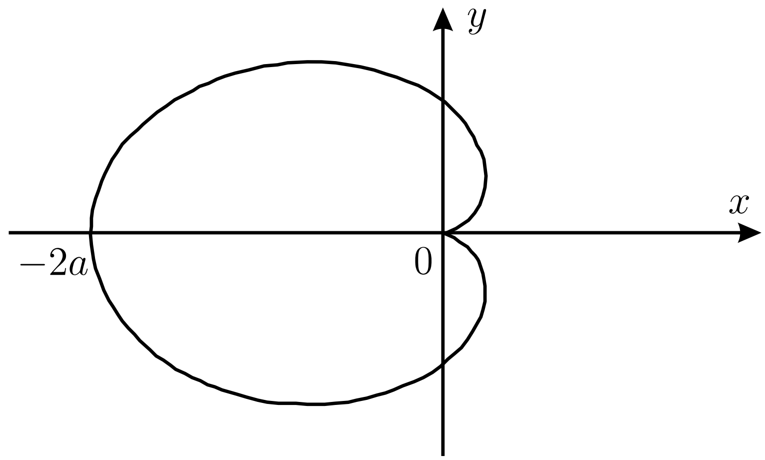
$$\boxed{s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi.} \qquad (5.6)$$

5.6. piemērs. Aprēķināt kardioīdas $\rho = a(1-\cos\varphi)$ garumu (skat. 5.10. zīm.).

Atrod $\rho' = a\sin\varphi$,

$$\rho^2+\rho'^2 = a^2(1-\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi = a^2(2-2\cos\varphi) = 2a^2(1-\cos\varphi).$$

$$s = 2\int\limits_0^{\pi} \sqrt{2a^2(1-\cos\varphi)}\, d\varphi = 2a\cdot 2\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a.$$



5.10. zīm.

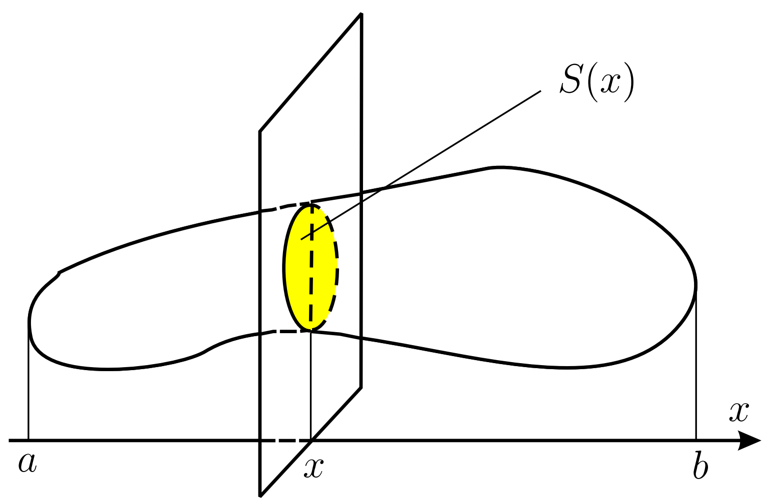
5.4. Ķermeņa tilpuma aprēķināšana ar noteikto integrāli

1. Apskata ķermeni, kuram zināms šķērsgriezuma ar jebkuru abscisu asij perpendikulāru plakni laukums $S(x)$ (5.11. zīm.). Funkcija $S(x)$ pie tam intervālā $[a; b]$ ir nepārtraukta.

   Izveido intervāla $[a; b]$ sasmalcinājumu

   $$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b.$$

   Caur katru punktu x_k konstruē plakni perpendikulāri abscisu asij.



5.11. zīm.

   Pieņem, ka ķermeņa daļa starp plaknēm $x = x_{k-1}$, $x = x_k$ ir taisns cilindrs, kura pamatā ir figūra ar laukumu $S(\xi_k)$, kur $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ un kura augstums ir $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Šīs ķermeņa daļas tilpums aptuveni būs vienāds ar $S(\xi_k)\Delta x_k$, bet visa ķermeņa tilpums būs vienāds ar $\sum\limits_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k$.

Lai precīzi raksturotu dotā ķermeņa tilpumu V, tad apskata šādas summas robežu, kad $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k \to 0$.

Šāda robeža eksistē, jo $S(x)$ intervālā $[a;b]$ ir nepārtraukta funkcija. Pie tam šāda robeža vienāda ar atbilstošu noteikto integrāli

$$\lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b S(x)dx.$$

(Izteiksme $\sum\limits_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k$) ir integrālsumma funkcijai $S(x)$ intervālā $[a;b]$.

Tādējādi

$$\boxed{V = \int\limits_a^b S(x)dx.} \tag{5.7}$$

5.3. piezīme. No formulas (5.7) izriet jau 17. gadsimtā pazīstamais Kavaljeri[1] princips: *ja divi ķermeņi, kas novietoti starp divām paralēlajām plaknēm, šķēlumā ar jebkuru citu tām paralēlu plakni dod vienlielas figūras (vienādi laukumi), tad šie ķermeņi ir vienlieli (tiem ir vienādi tilpumi)* (5.12. zīm.).

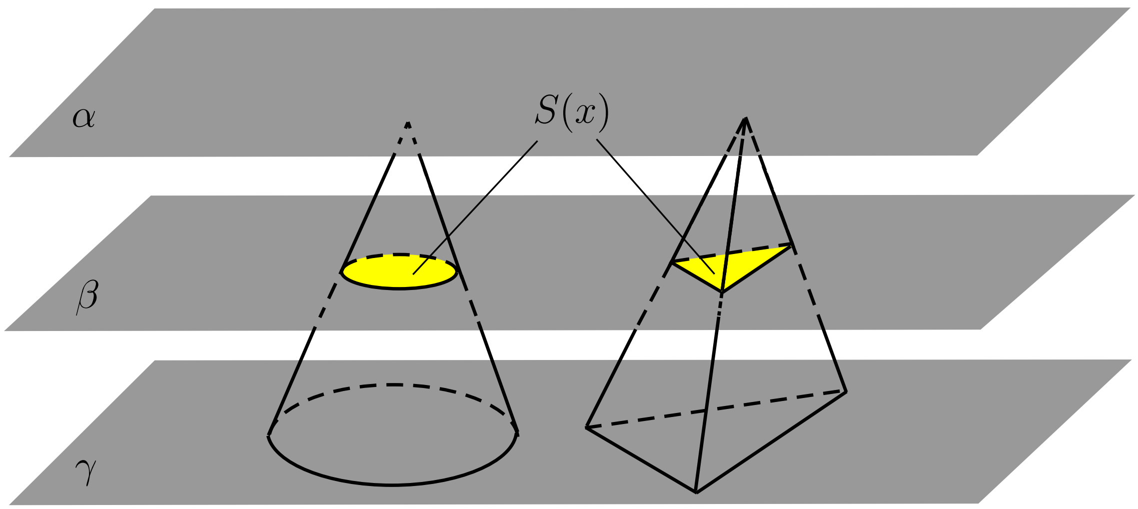
2. Apskata ķermeni, kas rodas, līklīnijas trapecei rotējot ap abscisu asi (5.13. zīm.).

   Šādu ķermeni, kuru sauc par **rotācijas ķermeni**, šķeļot ar jebkuru abscisu asij perpendikulāru plakni, iegūst riņķi, kura rādiuss ir $f(x)$. Tāpēc iegūtā šķērsgriezuma laukums $S(x) = \pi f^2(x)$.

   Tādējādi

$$V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx. \tag{5.8}$$

[1]B. Kavaljeri (1591-1647) - itāļu matemātiķis.



5.12. zīm.

5.5. Materiālas līnijas masas, statisko momentu un masas centra aprēķināšana ar noteikto integrāli

5.2. definīcija. Par **materiālu līniju** sauc ğeometrisku līniju, kuras jebkuram lokam ir noteikta masa.

Apskata materiālu līniju AB, kas no ğeometriskā viedokļa ir intervālā $[a;b]$ nepārtraukti diferencējamas funkcijas $f(x)$ grafiks (5.14. zīm.). Materiālās līnijas lineāro blīvumu raksturo intervālā $[a;b]$ nepārtraukta funkcija $\mu(x)$.

Izveido loka AB sasmalcinājumu ar punktu

$$M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}, M_k, \ldots, M_n$$

palīdzību (tiek iegūts arī intervāla $[a;b]$ sasmalcinājums

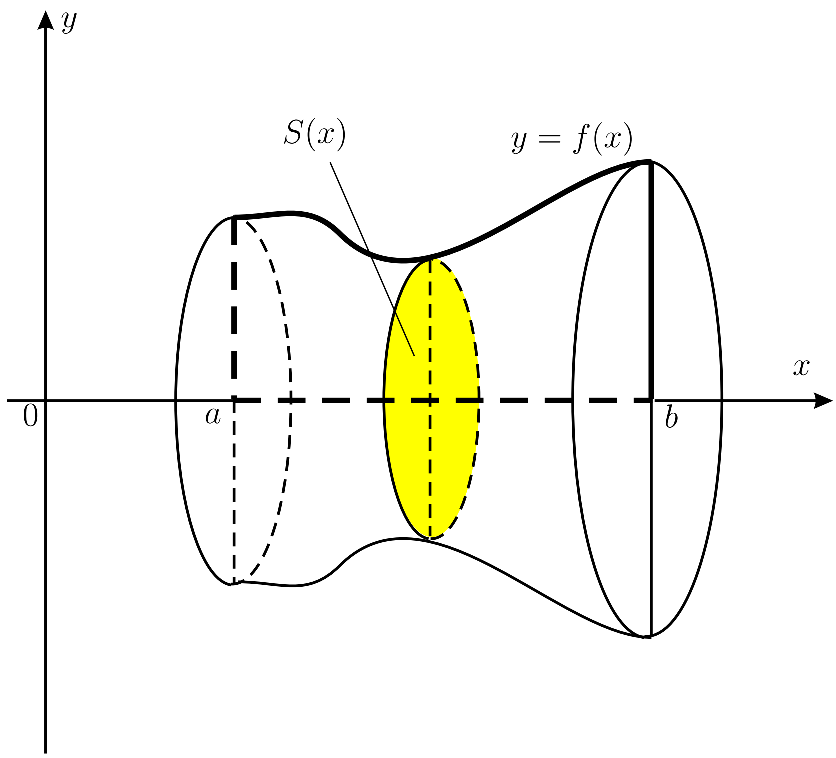
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b).$$

Katru no elementārlokiem $M_{k-1}M_k$ aizstāj ar atbilstošu taisnes nogriezni, kura garums (tika aprēķināts jau iepriekš) ir

$$M_{k-1}M_k = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k,$$

kur $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Pieņem, ka katrā loka elementārdaļā lineārais blīvums ir konstants un vienāds ar $\mu(\xi_k)$.



5.13. zīm.

Elementārloka $M_{k-1}M_k$ masa aptuveni ir vienāda ar

$$\mu(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k,$$

bet visas līknes AB masa aptuveni ir vienāda ar

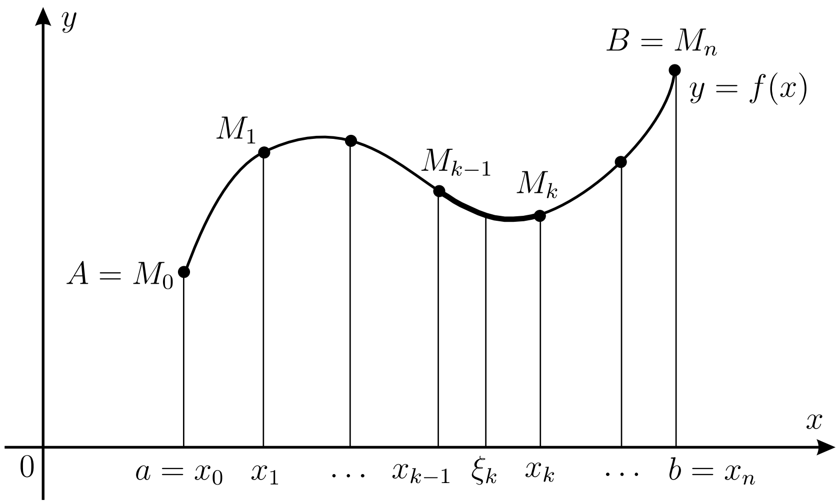
$$\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k.$$

Par līknes AB masu nosauc šīs summas robežu. Šāda summa ir intervālā $[a;b]$ nepārtrauktas funkcijas $\mu(x)\sqrt{1+f'^2(x)}$ integrālsumma, tāpēc eksistē galīga robeža no šīs summas, kad sasmalcinājuma solis tiecas uz nulli, pie tam šī robeža ir vienāda ar noteikto integrāli

$$\int\limits_a^b \mu(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Tādējādi

$$\boxed{m=\int\limits_a^b \mu(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.} \tag{5.9}$$



5.14. zīm.

5.4. piezīme. Ja materiālā līnija ir homogēna, tad lineārais blīvums $\mu(x) = \mu = const$ un $m = \mu \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx = \mu s$, kur s ir līnijas AB garums.

5.3. definīcija. Par **materiāla punkta**[2] **statisko momentu** M **pret kādu asi** sauc šī punkta masas m reizinājumu ar punkta attālumu d līdz asij, kas ņemts ar plusa zīmi, ja materiālais punkts atrodas vienā pusē no ass, un ar mīnusa zīmi, - ja tas atrodas otrā pusē no ass. Tādējādi ar precizitāti līdz zīmei $\boxed{M = md}$.

5.4. definīcija. Par **materiālo punktu sistēmas statisko momentu pret asi** sauc atsevišķo sistēmas punktu statisko momentu summu.

Koordinātu sistēmā apskata materiālu punktu sistēmu

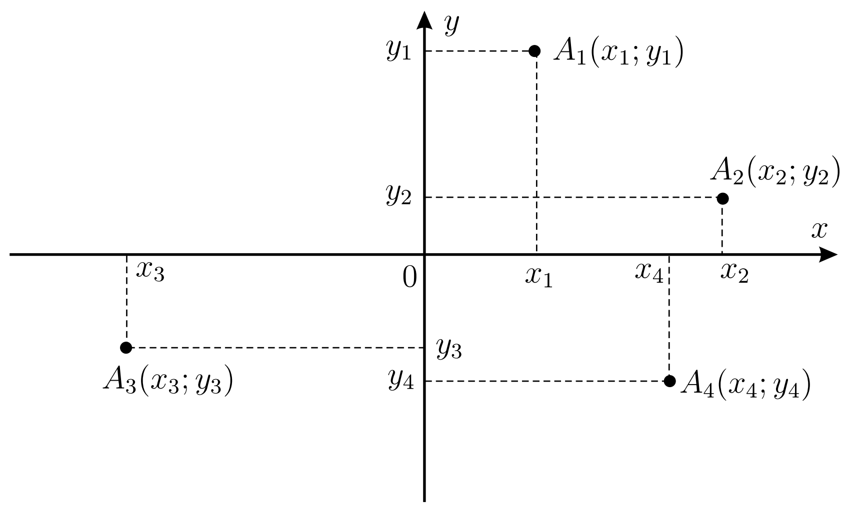
$$A_1(x_1; y_1), A_2(x_2; y_2), \ldots, A_n(x_n; y_n) \quad \text{(5.15. zīm.)}.$$

Šo punktu masas apzīmē atbilstoši ar $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Šo materiālo punktu sistēmas statiskie momenti pret koordinātu asīm ir

$$\boxed{M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k,} \quad \boxed{M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k,} \quad \boxed{m = \sum_{k=1}^{n} m_k.}$$

Apskata materiālas līknes loku AB un sadala to elementārdaļās (5.16. zīm.).

[2]Ģeometrisks punkts, kurā ir koncentrēta zināma masa.



5.15. zīm.

Elementārloka $M_{k-1}M_k$ masa aptuveni ir vienāda ar

$$\mu(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k,$$

kur $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.

Uzskata, ka šī elementārloka masa ir koncentrēta punktā $P_k\big(\xi_k; f(\xi_k)\big)$. Šādu materiālo punktu sistēmas statiskie momenti pret koordinātu asīm atbilstoši ir

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\mu(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$$

un

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k\mu(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k.$$

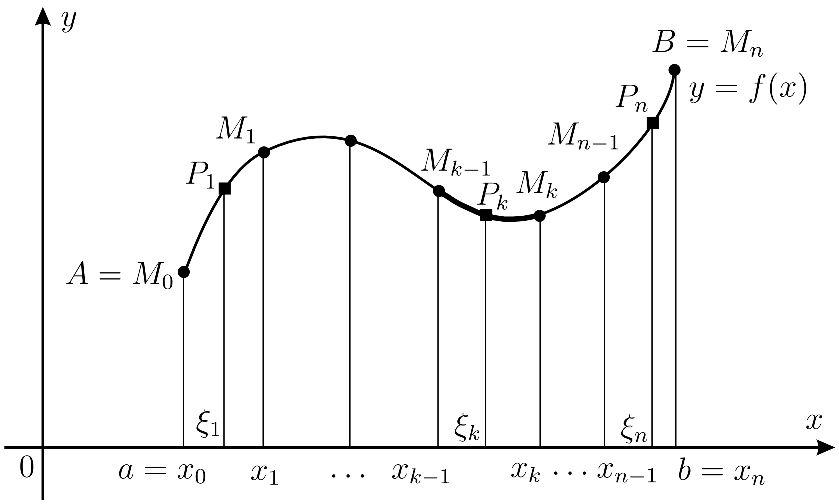
Materiālās līknes loka AB statiskie momenti attiecībā pret koordinatu asīm ir aptuveni vienādi ar šīm summām. Par līknes loka AB statiskiem momentiem pret koordinātu asīm nosauc šo summu robežas, t.i.,

$$M_x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\mu(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k = \int_a^b f(x)\mu(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

$$M_y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\mu(\xi_k)\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k = \int_a^b x\mu(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx,$$

kur $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k$.

(Pamatot robežu eksistenci).



5.16. zīm.

Tādējādi

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= \int\limits_a^b f(x)\mu(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx, \\ M_y &= \int\limits_a^b x\mu(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx. \end{aligned}} \tag{5.10}$$

5.5. definīcija. Par dotās **materiālo punktu sistēmas masas centru** $C(x_c, y_c)$ sauc tādu punktu, kurā koncentrējot visas šīs sistēmas masu m, tā statiskie momenti pret koordinātu asīm ir vienādi ar sistēmas statiskiem momentiem pret šīm asīm.

Tādējādi $my_c = M_x$ un $mx_c = M_y$ jeb

$$\boxed{x_c = \frac{M_y}{m},} \quad \boxed{y_c = \frac{M_x}{m}.}$$

Materiālo punktu sistēmai

$$\boxed{x_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k x_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k},} \quad \boxed{y_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k y_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k},}$$

bet materiālās līknes lokam AB

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \frac{\int_a^b x\mu(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx}, \\ y_c &= \frac{\int_a^b f(x)\mu(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx}{\int_a^b \mu(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx}. \end{aligned}} \tag{5.11}$$

5.5. piezīme. Ja materiāla līkne ir homogēna (μ - const), tad

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \frac{1}{s}\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}dx, \\ y_c &= \frac{1}{s}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx, \end{aligned}} \tag{5.12}$$

kur $s = \int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$ ir līknes loka AB garums.

5.7. piemērs. Aprēķināt masas centru homogēnas riņķa līnijas $x^2+y^2=a^2$ lokam pirmajā kvadrantā.

Tā kā loks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sistēmas pirmā kvadranta bisektrisi, tad masas centrs $C(x_c, y_c)$ atrodas uz šīs bisektrises, tāpēc $x_c = y_c$.

Pēc formulas (5.12)

$$y_c = \frac{1}{s}\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx.$$

Atrod

$$\begin{gathered} y = f(x) = \sqrt{a^2-x^2}, \\ y' = f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \\ 1+f'^2(x) = 1+\frac{x^2}{a^2-x^2} = \frac{a^2}{a^2-x^2}, \\ \sqrt{1+f'^2(x)} = \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}, \\ f(x)\sqrt{1+f'^2(x)} = \sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} = a. \end{gathered}$$

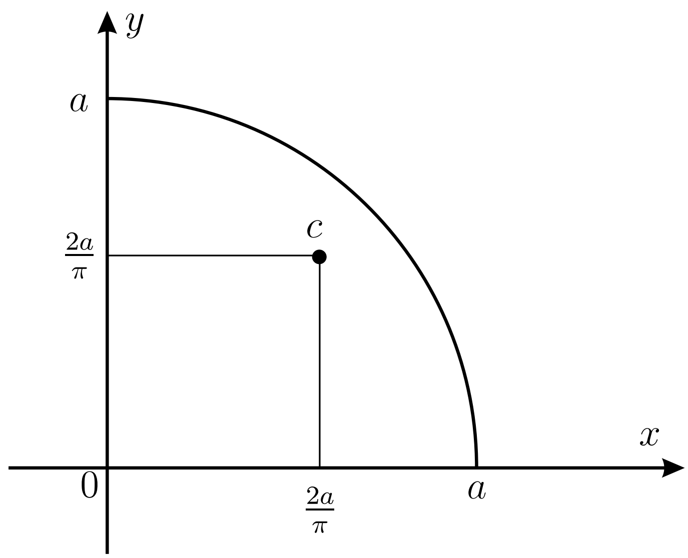
Tāpēc

$$y_c = \frac{1}{s}\int_0^a a dx = \frac{1}{s}a\int_0^a dx = \frac{1}{s}a^2,$$

kur $s = \frac{1}{4}2\pi a = \frac{\pi a}{2}$.

Tādējādi

$$x_c = y_c = \frac{2}{\pi a}a^2 = \frac{2a}{\pi} \quad \text{un} \quad C\left(\frac{2a}{\pi}, \frac{2a}{\pi}\right) \text{ (5.17. zīm.).}$$



5.17. zīm.

5.6. Homogēnas plaknes figūras statisko momentu un masas centra aprēķināšana ar noteikto integrāli

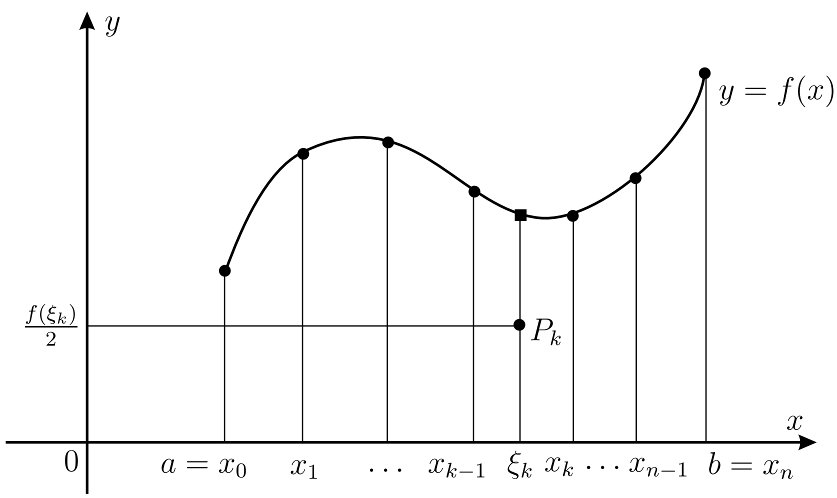
Apskata līklīnijas trapeci kā materiālu figūru ar konstantu blīvumu μ, kas izsaka laukuma vienas vienības masu.

Izveido intervāla $[a;b]$ sasmalcinājumu

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b$$

ar sasmalcinājuma soli $\lambda = \max\limits_{1\leq k\leq n} \Delta x_k$.

Līklīnijas trapece tiek sadalīta elementārjoslās (5.18. zīm.).



5.18. zīm.

Izvēlas patvaļīgu $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Katras elementārjoslas laukums aptuveni vienāds ar $f(\xi_k)\Delta x_k$, bet masa ir $\mu f(\xi_k)\Delta x_k$. Uzskata, ka elementārjoslas masa ir koncentrēta punktā $P_k\left(\xi_k; \frac{1}{2}f(\xi_k)\right)$. Šādas punktu sistēmas statiskie momenti pret koordinātu asīm atbilstoši ir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} f(\xi_k)\mu f(\xi_k)\Delta x_k = \frac{1}{2}\mu \sum_{k=1}^{n} f^2(\xi_k)\Delta x_k,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \mu f(\xi_k)\Delta x_k = \mu \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Šīs summas aptuveni izsaka līklīnijas trapeces statiskos momentus pret koordinātu asīm.

Līklīnijas trapeces statiskie momenti pret koordinātu asīm ir vienādi

$$M_x = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{2}\mu \sum_{k=1}^{n} f^2(\xi_k)\Delta x_k = \frac{1}{2}\mu \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f^2(\xi_k)\Delta x_k = \frac{1}{2}\mu \int_a^b f^2(x)dx$$

un

$$M_y = \lim_{\lambda\to 0} \mu \sum_{k=1}^{n} \xi_k f(\xi_k)\Delta x_k = \mu \int_a^b x f(x)dx.$$

(Pamatot šādu robežu eksistenci.)

Tādējādi

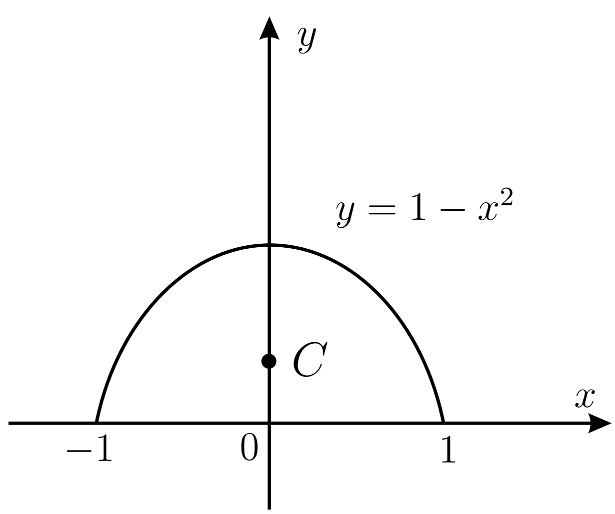
$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= \tfrac{1}{2}\mu \int_a^b f^2(x)dx, \\ M_y &= \mu \int_a^b x f(x)dx. \end{aligned}} \tag{5.13}$$

Līklīnijas trapeces masa $m = \mu S$, kur $S = \int_a^b f(x)dx$ - līklīnijas trapeces laukums.

Masas centra koordinātas

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \tfrac{M_y}{m} = \tfrac{1}{S} \int_a^b x f(x)dx, \\ y_c &= \tfrac{M_x}{m} = \tfrac{1}{2S} \int_a^b f^2(x)dx. \end{aligned}} \tag{5.14}$$

5.8. piemērs. Aprēķināt masas centru homogēnai figūrai, kuru ierobežo parabola $y = 1 - x^2$ un abscisu (5.19. zīm.).



5.19. zīm.

Tā kā figūra ir simetriska attiecībā pret ordinātu asi, tad $x_c = 0$.

Atrod

$$y_c = \frac{1}{2S} \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^2 dx = \frac{1}{2S} \int_{-1}^{1} (1 - 2x^2 + x^4)dx = \frac{8}{15S},$$

kur

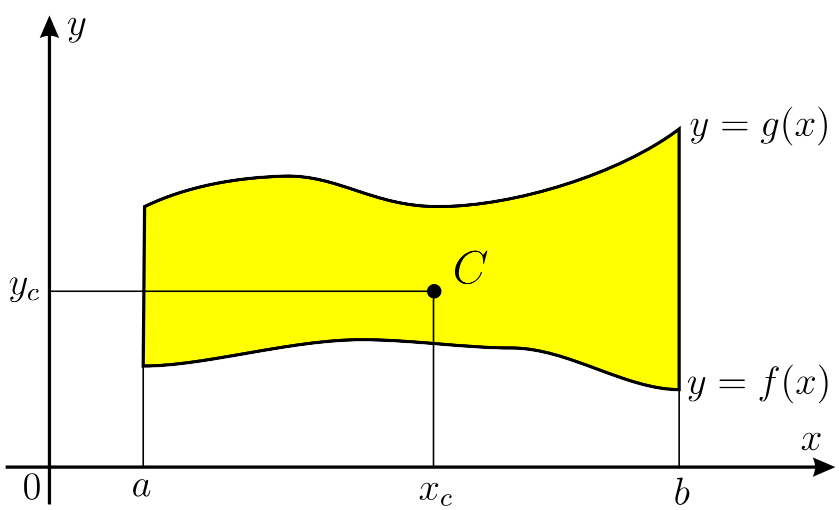
$$S = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) dx = \frac{4}{3}.$$

Tādējādi

$$y_c = \frac{8}{15} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \quad C\left(0; \frac{2}{5}\right).$$

5.6. piezīme. Ja homogēnu plaknes figūru no augšas ierobežo līnija $y = g(x)$, no apakšas $y = f(x)$, bet no sāniem taisnes $x = a$ un $x = b$ (5.20. zīm.), tad figūras masas centra koordinātas atrod pēc formulām

$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \tfrac{1}{S} \int_a^b x\big(g(x) - f(x)\big) dx, \\ y_c &= \tfrac{1}{2S} \int_a^b x\big(g^2(x) - f^2(x)\big) dx. \end{aligned}} \tag{5.15}$$



5.20. zīm.

Jautājumi

1. Paskaidrot, kā ar noteikto integrāli aprēķina plaknes figūras laukumu.
2. Definēt rektificējamu līkni un tās garumu.
3. Paskaidrot, kā ar noteikto integrāli aprēķina gludas līknes garumu.
4. Uzrakstīt formulu ķermeņa tilpuma aprēķināšanai pēc tā šķērsgriezuma laukuma.

5. Formulēt Kavaljēri principu.

6. Uzrakstīt formulu rotācijas ķermeņa tilpuma aprēķināšanai.

7. Uzrakstīt formulu materiālās līknes masas aprēķināšanai.

8. Definēt materiāla punkta un materiālu punktu sistēmas statisko momentu pret asi.

9. Uzrakstīt formulas materiālas līknes statisko momentu attiecībā pret koordinātu asīm aprēķināšanai.

10. Definēt materiālu punktu sistēmas masas centru.

11. Uzrakstīt formulas materiālas līknes masas centra aprēķināšanai.

12. Uzrakstīt formulu homogēnas materiālas figūras statisko momentu attiecībā pret koordinātu asīm aprēķināšanai.

13. Uzrakstīt formulas homogēnas materiālas figūras masas centra aprēķināšanai.

Vingrinājumi

1. Izmantojot ķermeņa tilpuma aprēķināšanas formulu pēc tā šķērsgriezuma laukuma, iegūt formulu piramīdas, konusa un lodes tilpuma aprēķināšanai.

2. Iegūt formulu ķermeņa, kas rodas, līklīnijas trapecei rotējot ap ordinātu asi, tilpuma aprēķināšanai.

3. Iegūt formulu virsmas, kas rodas intervālā $[a; b]$ nepārtraukti diferencējamas funkcijas $f(x)$ grafikam rotējot ap abscisu asi, laukuma aprēķināšanai.

4. Pamatot materiālas līknes, kas ir intervālā $[a; b]$ nepārtraukti diferencējamas funkcijas grafiks, statisko momentu attiecībā pret koordinātu asīm eksistenci.

5. Pamatot homogēnas materiālas figūras statisko momentu attiecībā pret koordinātu asīm eksistenci.

Uzdevumi

1. Aprēķināt laukumu figūrai, kuru ierobežo šādas līknes:
   (a) $y = -4x, \quad x = -3, \quad x = -1, \quad y = 0;$
   (b) $y = x^2, \quad y = 9;$
   (c) $y = \frac{1}{x}, \quad x = -6, \quad x = -2, \quad y = 0;$
   (d) $y = -x^2 - 2x + 3, \quad x = 2, \quad x = 0, \quad y = 0;$
   (e) $y = x^2 + 4x, \quad x - y + 4 = 0;$
   (f) cikloīdas $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ viena arka un abscisu ass;
   (g) astroīda $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t;$
   (h) kardioīda $\rho = 2a(1 + \cos\varphi);$
   (i) trīslapu roze $\rho = a\sin 3\varphi$.
2. Aprēķināt šādu līkņu garumus:
   (a) ķēdes līnijai $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ starp punktiem $x = 0$ un $x = 2$;
   (b) $y = \ln\sin x$ starp punktiem $x = -\frac{\pi}{3}$ un $x = \frac{\pi}{2}$;
   (c) astroīdai $x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t;$
   (d) līknei $\rho = 5\sin\varphi$.
3. Aprēķināt tilpumu ķermenim, kas rodas, rotējot ap abscisu asi līklīnijas trapecei, kuru ierobežo šādas līknes:
   (a) $y = \frac{4}{x}, \quad x = 4, \quad x = 12, \quad y = 0;$
   (b) $y = \frac{x}{2}, \quad x = 4, \quad x = 6, \quad y = 0.$
4. Aprēķināt masas centru astroīdas $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ lokam, kas atrodas 1. kvadrantā.
5. Aprēķināt masas centru ķēdes līnijas $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ lokam starp punktiem $x = -a, \quad x = a$.
6. Aprēķināt masas centru homogēnam trijstūrim, kuru ierobežo taisnes $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$.
7. Aprēķināt masas centru homogēnai figūrai, kuru ierobežo līknes $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}$.

6. nodaļa

NEĪSTIE INTEGRĀĻI

6.1. Neīstā integrāļa jēdziens

Iepriekšējās tēmās tika apskatīti integrāļi $\int\limits_a^b f(x)dx$ pa *galīgu* integrēšanas *intervālu* $[a;b]$ no šajā intervālā *ierobežotas funkcijas* $f(x)$. Šādus noteiktos integrāļus mēdz saukt arī par **īstajiem integrāļiem**. Noteiktais integrālis zaudē jēgu, ja integrēšanas intervāls ir bezgalīgs vai zemintegrāļa funkcija integrēšanas intervālā nav ierobežota. Dažreiz noteiktā integrāļa jēdzienu var vispārināt arī uz šiem gadījumiem. Iegūtos integrāļus sauc par **neīstajiem integrāļiem**. Šādus integrāļus nevar definēt pēc analoģijas ar īstajiem integrāļiem, sastādot integrālsummas un pārejot pie robežas.

Izšķir triju veidu neīstos integrāļus.

6.1. definīcija. Par **pirmā veida neīstajiem integrāļiem** sauc tādus integrāļus, kuriem vismaz viena no integrēšanas robežām ir bezgalīga, bet zemintegrāļa funkcija ir ierobežota integrēšanas intervālā.

6.2. definīcija. Par **otrā veida neīstajiem integrāļiem** sauc tādus integrāļus, kuriem zemintegrāļa funkcija nav ierobežota integrēšanas intervālā $[a;b]$.

6.3. definīcija. Par **trešā veida neīstajiem integrāļiem** sauc tādus integrāļus, kuriem vismaz viena no integrēšanas robežām ir bezgalīga un zemintegrāļa funkcija nav ierobežota integrēšanas intervālā.

6.2. Pirmā veida neīstie integrāļi

Apskata bezgalīgā intervālā $[a;+\infty)$ nepārtrauktu funkciju $f(x)$. Jebkurā galīgā intervālā šī funkcija ir integrējama un tāpēc eksistē $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Pirmā veida neīsto integrāli $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ definē šādi:

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.}$$

Ja eksistē galīga robeža, tad saka, ka **neīstais integrālis konverģē** un šo robežu nosauc par **neīstā integrāļa vērtību**. Pretējā gadījumā saka, ka **neīstais integrālis diverģē**.

6.1. piemērs. Izpētīt uz konverģenci šādus neīstos integrāļus:

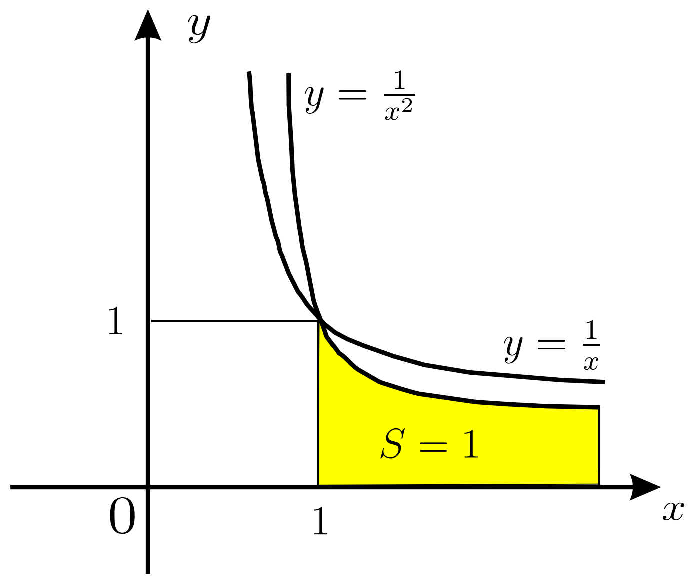
1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$,
2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.

1. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln|x|\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$

   Neīstais integrālis diverģē.
2. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1.$

   Neīstais integrālis konverģē un tā skaitliskā vērtība ir 1.

Ģeometriski neīstā integrāļa $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ vērtību var interpretēt kā bezgalīgas līklīnijas trapeces laukumu. Neīstajam integrālim $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ šādu ģeometrisko interpretāciju sniegt nevar. Tas ir izskaidrojams ar to, ka līnija $y = \frac{1}{x^2}$ ļoti strauji tuvojas abscisu asij, kad $x \to +\infty$, bet otra līnija $y = \frac{1}{x}$ tuvojas tai daudz lēnāk, kaut gan abscisu ass ir asimptota arī šai līnijai (6.1. zīm.).



6.1. zīm.

Neīsto integrāli ar bezgalīgu apakšējo integrēšanas robežu definē līdzīgi:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.}$$

Neīsto integrāli, kuram abas integrēšanas robežas ir bezgalīgas, definē šādi:

$$\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx.}$$

6.1. piezīme.

1. Šāda neīstā integrāļa raksturs un konverğences gadījumā arī skaitliskā vērtība nav atkarīga no c izvēles (var izvēlēties $c = 0$).
2. Integrāli $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ sauc par konverğentu tad un tikai tad, kad konverğē abi neīstie integrāļi

$$\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx \quad \text{un} \quad \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Neīsto integrāļu pētīšana nesagādā grūtības, ja zemintegrāļa funkcijai $f(x)$ var atrast primitīvo funkciju $F(x)$. Turpretī, ja zemintegrāļa funkcijai primitīvo funkciju atrast neizdodas, tad neīstos integrāļus pēta uz konverģenci, izmantojot salīdzināšanas teorēmu.

6.1. teorēma. [Salīdzināšanas teorēma]

Ja f, g ir intervālā $[a; +\infty]$ nepārtrauktas funkcijas un visām argumenta vērtībām no šī intervāla ir spēkā nevienādība
$0 \le f(x) \le g(x)$, *tad*

1. *ja* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *konverģē, tad konverģē arī* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$;
2. *ja* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverģē, tad diverģē arī* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

▶ 1. Tā kā neīstais integrālis $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ konverģē, tad eksistē galīga robeža $\mathfrak{I} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b g(x)dx$.

Visiem $b > a$ ir spēkā nevienādība

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx \le \mathfrak{I}.$$

Tas nozīmē, ka $\int\limits_a^b f(x)dx$ ir integrēšanas augšējās robežas b augoša un ierobežota no augšas funkcija. Tāpēc eksistē galīga robeža $\lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx$, kas nepārsniedz $\mathfrak{I}$, t.i.,

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx \le \mathfrak{I}.$$

Tas nozīmē, ka neīstais integrālis $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ konverģē.

2. Tā kā neīstais integrālis $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ diverģē un $\int\limits_a^b f(x)dx$ ir integrēšanas augšējās robežas b nenegatīva un augoša funkcija, tad

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx = +\infty.$$

Tā kā jebkuram $b > a$ ir spēkā nevienādība

$$\int\limits_a^b g(x)dx \geq \int\limits_a^b f(x)dx,$$

tad arī

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b g(x)dx = +\infty,$$

t.i., neīstais integrālis $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ diverğē. ◀

6.2. piezīme.

1. Ja f, g intervālā $[a; +\infty)$ nepārtrauktas funkcijas un visām argumenta vērtībām no šī intervāla $f(x) \leq g(x) \leq 0$, tad no integrāļa $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ konverğences izriet $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ konverğence un no $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ diverğences izriet $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ diverğence.
2. Neīstos integrāļus bieži salīdzina ar šādu neīsto integrāli $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}\, dx$.

   Viegli pamatot, ka šāds integrālis konverğē, ja $k > 1$, un diverğē, ja $k \leq 1$ (Pamatot patstāvīgi).

6.2. teorēma. *Ja integrālis* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *konverğē, tad konverğē arī integrālis* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$.

▶ Apskata divas palīgfunkcijas

$$f_1(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \quad \text{un} \quad f_2(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}.$$

Abas šīs funkcijas intervālā $[a; +\infty)$ ir nenegatīvas, pie tam

$$f_1(x) \leq |f(x)|, \quad f_2(x) \leq |f(x)|.$$

Saskaņā ar salīdzināšanas teorēmu neīstie integrāļi

$$\int\limits_a^{+\infty} f_1(x)dx \quad \text{un} \quad \int\limits_a^{+\infty} f_2(x)dx$$

konverğē. Tātad konverğē arī neīstais integrālis

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx,$$

jo $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ un

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^{+\infty} f_1(x)dx - \int_a^{+\infty} f_2(x)dx. \blacktriangleleft$$

6.4. definīcija. Neīsto integrāli $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sauc par **absolūti konverğentu**, ja konverğē integrālis $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

6.5. definīcija. Konverğentu neīsto integrāli $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ sauc par **nosacīti (neabsolūti) konverğentu**, ja diverğē integrālis $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

6.2. piemērs. Izpētīt uz konverğenci šādus neīstos integrāļus

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+\ln x)}$,
2. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{2\sqrt{x}-1}\, dx$,
3. $\int_1^{+\infty} \frac{1-5\cos x}{x^2}\, dx$.

1. Visiem $x \geq 1$ izpildās nevienādības

$$0 < \frac{1}{x^2(1+\ln x)} \leq \frac{1}{x^2},$$

pie tam neīstais integrālis $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ konverğē. Saskaņā ar salīdzināšanas teorēmu konverğē integrālis

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+\ln x)}.$$

2. Visiem $x \geq 1$ izpildās nevienādības
$$\frac{x}{2\sqrt{x}-1} > \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\sqrt{x} > 0,$$
pie tam neīstais integrālis $\int\limits_1^{+\infty} \sqrt{x}dx$ diverğē. Saskaņā ar salīdzināšanas teorēmu diverğē integrālis
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{2\sqrt{x}-1}.$$

3. Šoreiz zemintegrāļa funkcija intervālā $[1; +\infty)$ pieņem gan pozitīvas, gan negatīvas vērtības.

   Visiem $x \geq 1$ izpildās nevienādība
$$\left|\frac{1-5\cos x}{x^2}\right| \leq \frac{6}{x^2},$$
   pie tam neīstais integrālis $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ konverğē. Tāpēc konverğē integrālis
$$\int\limits_1^{+\infty} \left|\frac{1-5\cos x}{x^2}\right| dx.$$
   Tādējādi integrālis
$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{1-5\cos x}{x^2}dx$$
   konverğē absolūti.

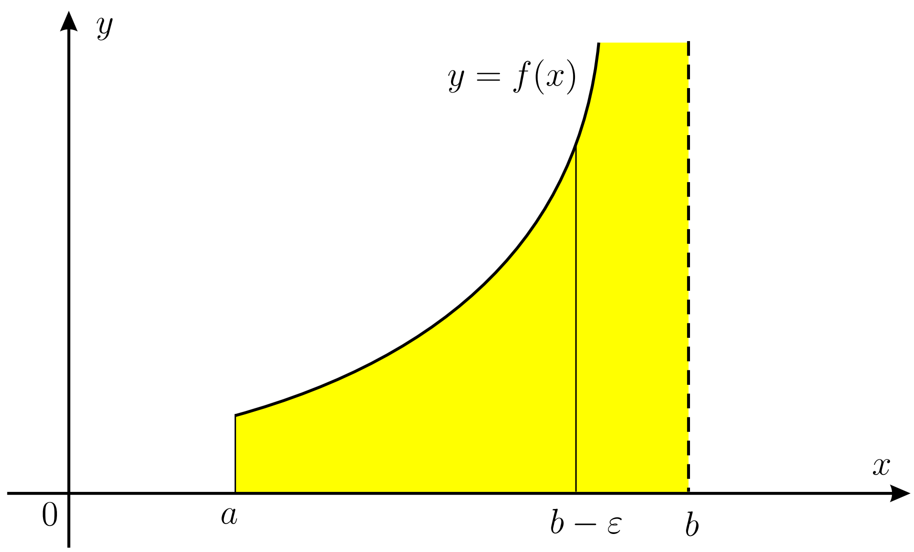
6.3. Otrā veida neīstie integrāļi

Apskata integrāļus no intervālā $[a; b]$ neierobežotām funkcijām. Tādus integrāļus $\int\limits_a^b f(x)dx$ sauc par **otrā veida neīstajiem integrāļiem**.

Apskata intervālā $[a; b)$ nepārtrauktu funkciju, kas ir neierobežota punkta b apkārtnē (6.2. zīm.).

Jebkuram $\varepsilon > 0$ ir definēts noteiktais integrālis $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Otrā veida neīsto integrāli definē kā robežu no šī noteiktā integrāļa, kad $\varepsilon \to 0$, t.i.,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.}$$



6.2. zīm.

Ja eksistē galīga robeža, tad saka, ka **neīstais integrālis konverģē**, šo robežu nosauc par neīstā integrāļa vērtību. Pretējā gadījumā saka, ka **neīstais integrālis diverģē**.

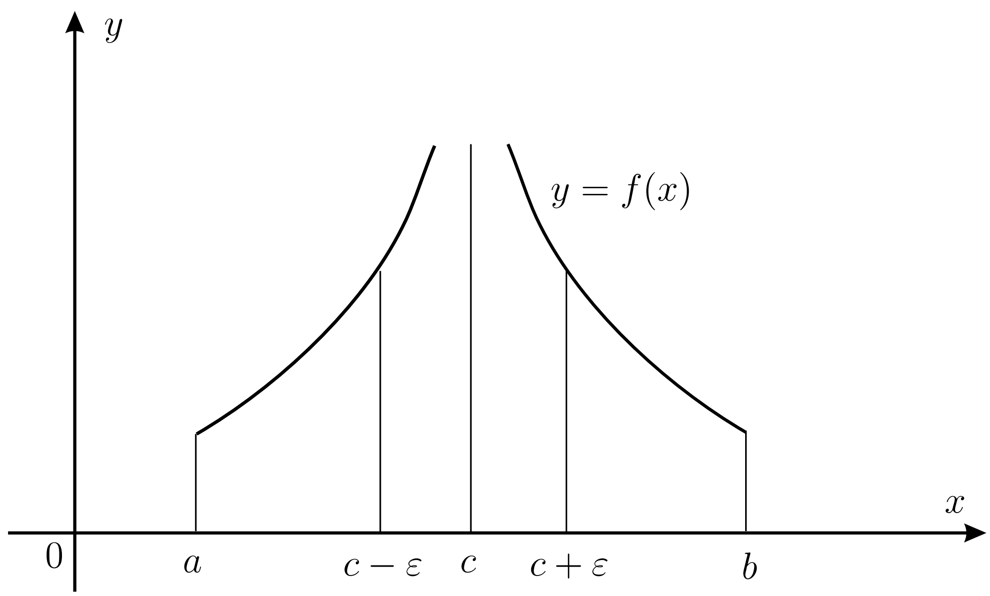
Ja $f(x) \geq 0$, tad šādu neīsto integrāli $\int\limits_a^b f(x)dx$ var interpretēt ģeometriski kā bezgalīgi augstas līklīnijas trapeces laukumu (6.2. zīm.).

Analogi apzīmē un definē neīsto integrāli, kad zemintegrāļa funkcija nav ierobežota punkta a apkārtnē, proti,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.}$$

Ja zemintegrāļa funkcija ir neierobežota integrēšanas intervāla $[a;b]$ iekšējā punktā c, tad šādu neīsto integrāli definē kā divu iepriekš apskatīto integrāļu summu (6.3. zīm.), t.i.,

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.}$$



6.3. zīm.

Pie tam integrāli $\int\limits_a^b f(x)dx$ sauc par **konverğentu**, ja konverğē abi labās puses integrāļi.

6.3. piezīme. Otrā veida neīstajiem integrāļiem ir spēkā salīdzināšanas teorēmas, kas ir analogas atbilstošajām teorēmām par pirmā veida neīstajiem integrāļiem.

6.3. piemērs. Izpētīt uz konverğenci šādus neīstos integrāļus

1. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}};$ 2. $\displaystyle\int\limits_1^2 \frac{dx}{1-x};$

3. $\displaystyle\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2};$ 4. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{(1-x)^2}.$

1. Funkcija $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ir neierobežota punkta $x = 1$ apkārtnē, tāpēc

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \Big(-2\sqrt{1-x}\Big)\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0}(-2\sqrt{\varepsilon} + 2) = 2.$$

Otrā veida neīstais integrālis konverğē un tā skaitliskā vērtība ir 2.

2. Funkcija $f(x) = \frac{1}{1-x}$ ir neierobežota punkta $x = 1$ apkārtnē, tāpēc

$$\int_1^2 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon \to 0}\big(-\ln|1-x|\,\big)\Big|_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}(-\ln 1 + \ln \varepsilon) = -\infty.$$

Neīstais integrālis diverğē.

3. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2}$ nav ierobežota punkta $x = 0$ apkārtnē, tāpēc

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Apskata atsevišķi katru labās puses integrāli.

$$\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{-1}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = +\infty.$$

Analogi

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) = +\infty.$$

Abi neīstie integrāļi diverğē, diverğē arī dotais neīstais integrālis (lai noskaidrotu tā diverğenci, ir pietiekami noskaidrot tikai viena labās puses integrāļa diverğenci.)

Piezīme. Ja neievērotu, ka ir dots neīstais integrālis, t.i., ka zemintegrāļa funkcija ir neierobežota integrēšanas intervāla iekšējā punktā $x = 0$, un aprēķinus veiktu pēc Ņūtona-Leibnica formulas:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{1} = -2,$$

tad, protams, pieļautu rupju kļūdu.

4. Funkcija $f(x) = \frac{e^x}{(1-x)^2}$ ir neierobežota punkta $x = 1$ apkārtnē. Intervālā $[0; 1-\varepsilon]$ funkcija ir nepārtraukta, tātad tai eksistē primitīvā funkcija, bet šo primitīvo funkciju nevar izteikt caur galīga skaita elementārajām funkcijām. Lai izpētītu šo integrāli uz konverğenci, pielieto salīdzināšanas teorēmu. Visiem $0 \leq x < 1$ ir spēkā nevienādība

$$\frac{e^x}{(1-x)^2} \geq \frac{1}{(1-x)^2} > 0.$$

Pie tam neīstais integrālis $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$ diverğē. Tādējādi diverğē arī dotais neīstais integrālis.

Jautājumi

1. Definēt neīstos integrāļus.
2. Definēt konverğentu 1. veida neīsto integrāli.
3. Formulēt salīdzināšanas teorēmas 1. veida neīstajam integrālim.
4. Definēt absolūti konverğentu 1. veida neīsto integrāli.
5. Definēt nosacīti konverğentu 1. veida neīsto integrāli.
6. Definēt konverğentu 2. veida neīsto integrāli.
7. Formulēt salīdzināšanas teorēmas 2. veida neīstajam integrālim.

Vingrinājumi

1. Sniegt ğeometrisko interpretāciju konverğentam 1. veida neīstajam integrālim.

2. Noskaidrot, pie kādām k vērtībām neīstais integrālis $\int\limits_1^{+\infty} x^k dx$ konverģē, pie kādām k vērtībām diverģē.
3. Sniegt ģeometrisko interpretāciju konverģentam 2. veida neīstajam integrālim.
4. Noskaidrot, pie kādām k vērtībām neīstais integrālis $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^k}$ $(a < b)$ konverģē un pie kādām k vērtībām tas diverģē.

Uzdevumi

1. Izmantojot definīciju, izpētīt uz konverģenci šādus neīstos integrāļus

   (a) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3};$ (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx;$

   (c) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1};$ (d) $\displaystyle\int\limits_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}};$

   (e) $\displaystyle\int\limits_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$

2. Izmantojot salīdzināšanas teorēmas, izpētīt uz konverģenci šādus neīstos integrāļus

   (a) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+4}$ (b) $\displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[4]{x}}$

   (c) $\displaystyle\int\limits_0^5 \frac{dx}{\sqrt{x}+6x^4}$ (d) $\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{2^x dx}{(x-3)^4}$

LITERATŪRA

[1] M. Grebenča, S. Novoselovs. Matemātiskās analīzes kurss. 1. daļa - R.: LVI, 1952.

[2] E. Kronbergs, P. Rivža, Dz. Bože. Augstākā matemātika. 1. daļa. - R.: Zvaigzne, 1988.

[3] Algebra un analīzes elementi 10. - 12. klasei. Mācību līdzeklis A. Kolmogorova redakcijā. - R.: Zvaigzne, 1990.

[4] Бохан К.А., Егорова И.А., Лащенов К.В. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Просвещение, 1972.

[5] Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. - М.: Высшая школа, 1984.

[6] Виленкин Н.Я., Мордкович А.Г., Куницкая Е.С. Математический анализ. Интегральное исчисление. - М.: Просвещение, 1988.

[7] Задачник по курсу математического анализа. Под редакцией Н.Я. Виленкина. Ч.1. - М.: Просвещение, 1971.

[8] Дворецкий Б.Д. Математический анализ. Интегральное исчисление функций одной переменной. - Даугавпилс: ДПИ, 1990.

[9] Старцев В.А. Геометрические приложения определенного интеграла. - Даугавпилс: ДПИ, 1991.

[10] Старцев В.А. Физические приложения определенного интеграла. - Даугавпилс: ДПИ, 1991.

[11] Уваренков Н.М., Маллер М.З. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Просвещение, 1956.

[12] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.1. - М.: Наука, 1968.

SATURS