Daugavpils Universitāte

MATEMĀTIKAS KATEDRA

Vitolds Gedroics

IEVADS MATEMĀTISKAJĀ ANALĪZĒ

2003

ANOTĀCIJA

Mācību līdzeklī iekļautas četras tēmas: reālo skaitļu kopa, funkcija, robeža, funkcijas nepārtrauktība. Mācību līdzeklī iekļauti gan teorētiska, gan praktiska satura vingrinājumi. Katras tēmas beigās sniegti jautājumi zināšanu kontrolei un vingrinājumi vielas nostiprināšanai. Pierādījuma sākums un beigas apzīmēti atbilstoši ar simboliem ► un ◄.

1. nodaļa

REĀLO SKAITĻU KOPA

1.1. Reālo skaitļu kopa $\mathbb{R}$ un tās ģeometriskā interpretācija

Matemātiskās analīzes pamatu veido reālo[1] skaitļu kopa ar tajā definētām algebriskām darbībām un kārtības sakarībām. Visas šīs darbības un sakarības var novest uz saskaitīšanu, reizināšanu un sakarību "mazāks" ($<$). To īpašības var iegūt no neliela skaita pamatīpašībām, kuras tiek pieņemtas par aksiomām[2]. Matemātiskai analīzei raksturīga ir tikai viena no šīm aksiomām - nepārtrauktības aksioma. Pārējām aksiomām ir tīri algebrisks saturs un tās kopumā izsaka, ka $\mathbb{R}$ ir sakārtots lauks.

$\mathbb{R}$ **nepārtrauktības aksioma**[3]**.** Jebkurām divām netukšām reālo skaitļu kopas $\mathbb{R}$ apakškopām A un B, kurām kopa A atrodas pa kreisi no kopas B[4] ($A \leq B$), eksistē vismaz viens tāds skaitlis c, kas atdala šīs kopas[5] ($A \leq c \leq B$).

No šīs aksiomas izriet virkne svarīgu apgalvojumu, ar kuriem iepazīsimies turpmāk.

Reāli skaitļi kalpo, pirmkārt, lielumu mērīšanai, piemēram, garumu mērīšanai. Izvēloties mērogu (t.i., nogriezni, kura garumu uzskata vienādu ar vienu), katra nogriežņa garumu varēs raksturot ar pilnīgi noteiktu pozitīvu skaitli.

---

[1] [vidusl. lat. realis priekšmetisks, vielisks] - īstenībā esošs, patiess, īstens.

[2] [gr. axioma] - pamattēze, kas ir pamatā citu tēžu (teorēmu) pierādījumiem, attiecīgās zinātnes teorijas ietvaros aksiomu pieņem bez pierādījuma.

[4] Visiem $a \in A$ un visiem $b \in B : a \leq b$.

[5] Visiem $a \in A$ un visiem $b \in B : a \leq c \leq b$.

Ģeometrijā[6] pieņem arī pretējo apgalvojumu: katrs pozitīvs skaitlis izsaka kāda nogriežņa garumu. No šī apgalvojuma arī izriet reālo skaitļu ģeometriskā interpretācija: reālie skaitļi kā koordinātu taisnes[7] punkti. Tātad starp visu reālo skaitļu kopu $\mathbb{R}$ un koordinātu taisnes punktu kopu pastāv savstarpēji viennozīmīga atbilstība, t.i.,

1. katram skaitlim viennozīmīgi atbilst taisnes noteikts punkts;
2. dažādiem skaitļiem atbilst dažādi punkti;
3. taisnes katrs punkts atbilst kādam skaitlim.

Pateicoties tam, uz reālo skaitļu kopu $\mathbb{R}$ tiek pārnesta ģeometriskā terminoloģija, piemēram, $\mathbb{R}$ sauc par skaitļu taisni[8], bet $\mathbb{R}$ elementus - par punktiem.

1.2. Reālā skaitļa modulis

Kopa $\mathbb{R}$ ir lineāri sakārtota kopa, t.i., apgalvojumi $a \leq b$ vai $b \leq a$ ir spēkā jebkuriem skaitļiem a un b. Ar $\max(a;b)$ sapratīsim lielāko (bet ar $\min(a;b)$ - mazāko) no šiem skaitļiem. (Tajā gadījumā, kad šie skaitļi ir vienādi, ar $\max(a;b)$ vai $\min(a;b)$ sapratīsim to kopīgo vērtību).

Acīmredzami, $\max(a;b) < c$ tad un tikai tad, kad $a < c$ un $b < c$.

1.1. definīcija. [9] Par reālā **skaitļa** a **moduli**[10] (absolūto vērtību) nosauksim $\max(a;-a)$ un apzīmēsim $|a|$.

Seko, ka

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ja} \quad a > 0, \\ 0, & \text{ja} \quad a = 0, \\ -a, & \text{ja} \quad a < 0. \end{cases}$$

Tā kā $\max(a;-a) = |a|$, tad $a \leq |a|$ un $-a \leq |a|$. No tā seko, ka $-|a| \leq a \leq |a|$.

[6] [gr. geōmetria zemes mērīšana] - matemātikas nozare, kas pētī gan telpas formas, gan ķermeņu attiecības.

[7] Taisne ar izvēlētu uz tās mērogu OE.

[8] Jāievēro, ka koordinātu taišņu ir bezgalīgi daudz, bet skaitļu taisne ir viena - reālo skaitļu kopa.

[10] [lat. modulus mērs] - šo skaitli attēlojošā vektora garums.

1.2.1. Moduļa īpašības

1. $|a+b| \le |a|+|b|$.

   ▶ Tā kā $\pm a \le |a|$ un $\pm b \le |b|$, tad $\pm(a+b) \le |a|+|b|$. Tātad

   $$|a+b| \le |a|+|b|. ◀$$

   Piezīme. Ar matemātiskās indukcijas[11] metodi var pamatot, ka

   $$|a_1+a_2+\cdots+a_n| \le |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

2. $|-a| = |a|$.

   ▶ $|-a| = \max\bigl(-a; -(-a)\bigr) = \max(-a; a) = \max(a; -a) = |a|$. ◀

   Piezīme. Tātad $|a-b| = |b-a|$. Skaitli $|a-b|$ sauc par **attālumu starp skaitļiem a un b.**

3. $\bigl||a|-|b|\bigr| \le |a-b|$.

   ▶ Acīmredzami, $a=(a-b)+b$ un $b=(b-a)+a$. Saskaņā ar 1. īpašību $|a| \le |a-b|+|b|$ un $|b| \le |b-a|+|a|$. Seko, ka $|a|-|b| \le |a-b|$ un $|b|-|a| \le |b-a|$, t.i.,

   $$\begin{cases} |a|-|b| \le |a-b|, \\ -(|a|-|b|) \le |a-b|. \end{cases}$$

   Tātad

   $$\bigl||a|-|b|\bigr| \le |a-b|. ◀$$

4. $|a| < c$ tad un tikai tad, kad $-c < a < c$.

   ▶ Pirmkārt, $|a| < c$ nozīmē, ka $a < c$ un $-a < c$. Tātad

   $$\begin{cases} a < c, \\ a > -c \end{cases}$$

   jeb

   $$-c < a < c.$$

   Otrkārt, $-c < a < c$ nozīmē, ka $a < c$ un $-a < c$. Tātad $|a| < c$. ◀

[11] [lat. inductio uzvedināšana] - 1) loģisks slēdziens no atsevišķiem gadījumiem uz vispārīgu secinājumu; 2) mat. matemātiska pierādījuma paņēmiens, kas pamatots uz pāreju no kādam naturālam skaitlim n pareiza secinājuma uz secinājumu, kas pareizs skaitlim $n+1$.

Piezīme. Gadījumus $|a| \le c$, $|a| > c$, $|a| \ge c$ formulēt un pamatot patstāvīgi.

5. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

▶ Reizinājums $|a| \cdot |b| = \max(a; -a) \cdot \max(b; -b)$ būs vienāds ar ab vai $-ab$. Tā kā $|a| \cdot |b| \ge 0$, tad $|a| \cdot |b| = \max(ab; -ab) = |ab|$. ◀

Piezīme. Ar matemātiskās indukcijas metodi var pamatot, ka

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \ldots \cdot |a_n|.$$

6. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \ne 0)$.

▶ Acīmredzami, $a = \frac{a}{b} \cdot b$. Saskaņā ar 5. īpašību $|a| = \left|\frac{a}{b}\right| \cdot |b|$. Tātad

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}. \blacktriangleleft$$

Piezīme. Ar tiešo pārbaudi var pārliecināties, ka

$$\max(a; b) = \frac{a + b + |a - b|}{2},$$
$$\min(a; b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

1.3. Reālo skaitļu kopas $\mathbb{R}$ ierobežotas kopas

1.2. definīcija. Skaitli a nosauksim par **kopas $E \subset \mathbb{R}$ apakšējo robežu**, ja visiem $x \in E : a \le x$.

1.1. piezīme. Ja eksistē tāds $y \in E$, kuram $a > y$, tad a nav kopas E apakšējā robeža.

1.3. definīcija. Kopu $E \subset \mathbb{R}$ nosauksim par **ierobežotu no apakšas**, ja tai eksistē apakšējā robeža. (Pretējā gadījumā kopu nosauksim par neierobežotu no apakšas).

1.2. piezīme. Analoģiski var definēt kopas augšējo robežu un ierobežotu no augšas kopu.

Piemēram, visu naturālo[12] skaitļu kopa $\mathbb{N}$ ir ierobežota no apakšas, bet nav ierobežota no augšas. Visu veselo skaitļu kopa $\mathbb{Z}$ nav ierobežota ne no augšas, ne no apakšas.

[12] [lat.naturalis] - dabisks, tāds, kas nav mākslīgs.

1.3. piezīme. Tukšo kopu uzskatīsim par ierobežotu gan no augšas, gan no apakšas.

1.4. definīcija. Kopu $E \subset \mathbb{R}$ nosauksim par **ierobežotu**, ja tā ir ierobežota gan no augšas, gan no apakšas.

Piemēram, tukšā kopa ir ierobežota, bet visu veselo skaitļu kopa $\mathbb{Z}$, visu naturālo skaitļu kopa $\mathbb{N}$ nav ierobežotas kopas.

Viegli pamatot, ka kopa E ir ierobežota tad un tikai tad, kad ir ierobežota no augšas kopa, kas sastādīta no tās elementu moduļiem. (Pamatot to).

1.5. definīcija. Par kopas $E \subset \mathbb{R}$ **apakšējo slieksni** nosauksim vislielāko starp šīs kopas apakšējām robežām un apzīmēsim $\alpha = \inf E$ (lasa infīms[13]).

Analoğiski var definēt kopas augšējo slieksni $\beta = \sup E$ kā kopas E vismazāko augšējo robežu (lasa suprems[14]).

1.1. teorēma. [15] [**Par ierobežotas kopas augšējā sliekšņa eksistenci**]

Katrai netukšai un ierobežotai no augšas kopai $E \subset \mathbb{R}$ eksistē augšējais slieksnis.

▶ Tā kā kopa E ir ierobežota no augšas, tad tai eksistē augšējā robeža. Apzīmēsim ar F kopas E visu augšējo robežu kopu. Acīmredzot, $F \neq \emptyset$ un $E \leq F$. Saskaņā ar $\mathbb{R}$ nepārtrauktības Dedekinda aksiomu eksistē tāds skaitlis c, ka $E \leq c \leq F$. Tā kā $E \leq c$, tad c ir kopas E augšējā robeža, bet tā kā $c \leq F$, tad c ir vismazākā starp kopas E augšējām robežām. Seko, ka $c = \sup E$. ◀

Analoğiski var pierādīt, ka katrai netukšai un ierobežotai no apakšas kopai $E \subset \mathbb{R}$ eksistē apakšējais slieksnis. Tātad, ja kopa $E \subset \mathbb{R}$ ir ierobežota (ierobežota gan no apakšas, gan no augšas), tad tai eksistē gan apakšējais, gan augšējais slieksnis.

1.4. piezīme. Kopas sliekšņi var piederēt un var nepiederēt šai kopai.

[13] [lat. infimum] -viszemākais

[14] [lat. supremum] - visaugstākais

[15] [gr. theōrēma apskatu, apdomāju] apgalvojums, ko pierāda, balstoties vai nu uz aksiomām, vai uz iepriekš pierādītiem apgalvojumiem.

1.4. Intervāli kopā $\overline{\mathbb{R}}$

Vēlāk, runājot par funkcijas robežu, būs izdevīgi papildināt reālo skaitļu kopu $\mathbb{R}$ ar diviem simboliem $+\infty$ (plus bezgalība) un $-\infty$ (mīnus bezgalība), sasaistot tos ar reāliem skaitļiem ar šādām nevienādībām: $-\infty < x$ un $x < +\infty$ un savā starpā: $-\infty < +\infty$.

1.6. definīcija. Kopu $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ ar tajā definētajām kārtības sakarībām un algebriskām darbībām, kas definētas reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$, nosauksim par **paplašināto reālo skaitļu kopu** (**paplašināto skaitļu taisni**) un apzīmēsim $\overline{\mathbb{R}}$ (skat. [16]).

Acīmredzami, $\overline{\mathbb{R}}$ ir lineāri sakārtota kopa, t.i., visiem $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ izpildās viena un tikai viena no sakarībām $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$.

Matemātiskajā analīzē apskata ne tikai visu naturālo skaitļu kopu $\mathbb{N}$, bet arī tādas skaitliskas kopas kā intervālus, t.i., šādas kopas:

$[\alpha; \beta] = \{x \in \mathbb{R} | \alpha \leq x \leq \beta\}$ - slēgts intervāls;
$(\alpha; \beta) = \{x \in \mathbb{R} | \alpha < x < \beta\}$ - vaļējs intervāls;
$[\alpha; \beta) = \{x \in \mathbb{R} | \alpha \leq x < \beta\}$ - pusvaļējs intervāls;
$(\alpha; \beta] = \{x \in \mathbb{R} | \alpha < x \leq \beta\}$ - pusvaļējs intervāls;
$(\alpha; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > \alpha\}$ - bezgalīgs intervāls (skaitļu taisnes stars);
$[\alpha; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq \alpha\}$ - bezgalīgs intervāls (skaitļu taisnes stari);
$(-\infty; \beta) = \{x \in \mathbb{R} | x < \beta\}$ - bezgalīgs intervāls (skaitļu taisnes stars);
$(-\infty; \beta] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq \beta\}$ - bezgalīgs intervāls (skaitļu taisnes stars);
$(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$ - visu reālo skaitļu kopa (skaitļu taisne).

Visur $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$; $\alpha \leq \beta$.

Vispārīgi visus šos intervālus apzīmēsim $\langle \alpha; \beta \rangle$[17]. Skaitļus, kas atrodas starp α un β, nosauksim par intervāla $\langle \alpha; \beta \rangle$ iekšējiem punktiem, bet α, β - par tā galapunktiem. Ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tad $\beta - \alpha$ nosauksim par intervāla $\langle \alpha; \beta \rangle$ garumu.

[16] Līdzīgi kā iepriekš var definēt kopas $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ apakšējo robežu un apakšējo slieksni, augšējo robežu un augšējo slieksni. Tikai šoreiz tie var būt arī bezgalīgi.

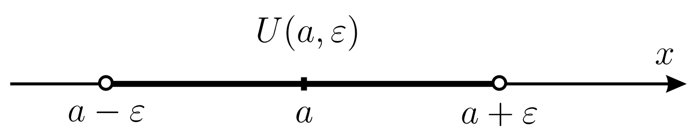
[17] Šoreiz $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$; $\alpha \leq \beta$.

1.5. Apkārtnes kopā $\overline{\mathbb{R}}$

1.7. definīcija. Par **skaitļa** a ($a \in \mathbb{R}$) ε - **apkārtni** (ε - pozitīvs skaitlis) nosauksim vaļēju intervālu $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ un apzīmēsim $U(a;\varepsilon)$. Skaitli ε nosauksim par apkārtnes rādiusu.

Seko, ka

$$U(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} |\ |x-a| < \varepsilon\}.$$



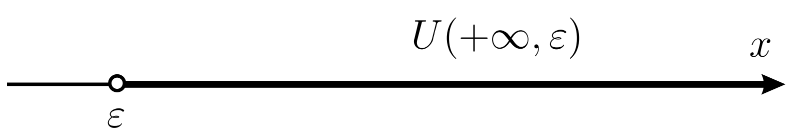
1.1. zīm.

1.8. definīcija. Par **simbola** $+\infty$ ε - **apkārtni** nosauksim bezgalīgu intervālu $(\varepsilon; +\infty)$ un apzīmēsim $U(+\infty;\varepsilon)$.

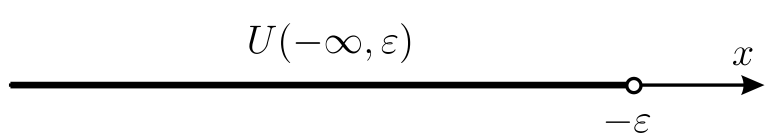
Analoģiski var definēt simbola $-\infty$ ε - apkārtni

$$U(-\infty;\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} |\ x < -\varepsilon\}.$$

Acīmredzami, ja $a \in \mathbb{R}$, tad $a \in U(a;\varepsilon)$.



1.2. zīm.



1.3. zīm.

1.9. definīcija. Punktus a un b nosauksim par **atdalāmiem ar apkārtnēm**, ja eksistē[18] tādas šo punktu apkārtnes, kas nešķeļas.

[18][fr. exister; lat. exsistere rasties, izcelties] - pastāvēt, būt.

Apkārtņu īpašības:

1. Divu (tātad jebkura galīga skaita) punkta a apkārtņu šķēlums ir šī punkta apkārtne.
2. Jebkuri divi dažādi $\overline{\mathbb{R}}$ punkti a un b ir atdalāmi ar apkārtnēm (pamatot patstāvīgi).

Jautājumi

1. Formulēt reālo skaitļu kopas nepārtrauktības Dedekinda aksiomu.
2. Kāda ir reālo skaitļu ģeometriskā interpretācija?
3. Definēt reālā skaitļa moduli.
4. Definēt kopas augšējo un apakšējo robežu; augšējo un apakšējo slieksni.
5. Definēt ierobežotu un neierobežotu kopu.
6. Formulēt teorēmu par sliekšņu eksistenci ierobežotai kopai.
7. Definēt paplašināto reālo skaitļu kopu $\overline{\mathbb{R}}$.
8. Nosaukt visus iespējamos intervālus kopā $\overline{\mathbb{R}}$.
9. Definēt kopas $\overline{\mathbb{R}}$ punktu ε - apkārtnes.
10. Formulēt apkārtņu svarīgākās īpašības.

Vingrinājumi

1. Nosaukt divu tādu kopu piemērus, lai viena kopa atrastos pa kreisi no otras kopas.
2. Nosaukt divu tādu kopu piemērus, lai tās atdalītu vismaz viens skaitlis; lai tās atdalītu viens skaitlis.
3. Konstruēt funkciju grafikus:
   (a) $y = \min(x; x^2)$;
   (b) $y = \max(x; x^2)$;
   (c) $y = \min(x; x^2) + \max(x; x^2)$;

(d) $y = |x^2 - 3x + 2|$;
(e) $y = |\sin x|$;
(f) $y = |x + 1| + |x - 1|$;
(g) $y = |x + 1| - |x - 1|$;

4. Atrisināt nevienādības:
   (a) $|x - 7| \leq 2$;
   (b) $|x + 5| > 2$;
   (c) $x^2 \geq \frac{1}{2}$;
   (d) $(x - 1)^2 < 9$.

5. Atrisināt vienādojumus:
   (a) $|x - 10| = 4$;
   (b) $|x - 1| + |x - 7| = 6$.

6. Nosaukt moduļa īpašības.

7. Pierādīt, ka triju reālu skaitļu summas modulis nepārsniedz šo skaitļu moduļu summu.

8. Pierādīt, ka triju reālu skaitļu reizinājuma modulis ir vienāds ar šo skaitļu moduļu reizinājumu.

9. Pamatot, ka $\max(a; b) = \frac{a+b+|a-b|}{2}$, bet $\min(a; b) = \frac{a+b-|a-b|}{2}$.

10. Nosaukt ierobežotas no augšas, ierobežotas no apakšas un ierobežotas kopas piemērus.

11. Pierādīt, ka kopa E ir ierobežota tad un tikai tad, kad ir ierobežota no augšas kopa, kas sastādīta no šīs kopas elementu moduļiem.

12. Konstruēt kopu, kurai apakšējais slieksnis tai pieder, bet augšējais slieksnis tai nepieder.

13. Dota šādu intervālu kopa $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \cdots \supset [a_n; b_n] \supset \cdots$. Pierādīt, ka visiem šiem intervāliem eksistē vismaz viens kopīgs punkts c.

14. Pierādīt apkārtņu īpašības (ka divu punkta a apkārtņu šķēlums ir šī punkta apkārtne; ka jebkuri divi dažādi $\overline{\mathbb{R}}$ punkti ir atdalāmi ar apkārtnēm).

2. nodaļa

FUNKCIJA

Funkcija[1] un tās vispārinājumi ir matemātiskās analīzes galvenie pētīšanas objekti. Matemātiskā analīze pēta tos ar robežpārejas metodes palīdzību. Līdz 17.g.s. mainīgo lielumu bija pavisam nedaudz: garums, leņķis, laukums, tilpums, svars, spiediens. Sākot ar 17. g.s. strauji pieauga šādu lielumu skaits. Mehānikā un fizikā tika ieviesti: ātrums, paātrinājums, spēks, blīvums, temperatūra u.c. Matemātikas vēsturē 17. g.s. uzskata par lūzuma gadsimtu. Renī Dekarts (fr. mat., 1596 - 1650) matemātikā ienesa mainīgā lieluma jēdzienu. Lai pētītu šos mainīgos lielumus, ir nepieciešams atdalīt tos no konkrētā satura. Dekarts nonāca pie mainīgā lieluma kā burta, kurš var pieņemt patvaļīgas skaitliskas vērtības.

Elementārajā matemātikā un fizikā tika izdalīti atkarību starp mainīgiem lielumiem vienkāršākie veidi: tiešā proporcionalitāte (piemēram, $l = 2\pi r$), vispārīgi runājot, lineārā atkarība (piemēram, $v = gt + v_0$); kvadrātiskā atkarība ($s = \pi r^2$, $s = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0$); apgrieztā proporcionalitāte ($V = \frac{c}{p}$); cita veida pakāpju atkarība ($V = h^3$); atkarība pēc trigonometriskiem, eksponentlikumiem utt. Vispirms mainīgie lielumi tika nodalīti no to konkrētā satura un tika pētītas konkrētas atkarības (piemēram, $y = kx$, $y = kx + b$, $y = ax^2$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = -\frac{a}{x}$, $y = ax^4$, $y = k \sin wx$, $y = a^x$ utt., kur x un y "abstrakti" mainīgie lielumi).

Attīstoties matemātiskai analīzei šādu konkrētu atkarību skaits strauji pieauga. Atkarību starp mainīgiem lielumiem izteikšanai tika radīti diferenciāl - un integrālrēķini, rindu teorija. Izrādījās, ka ar trigonometrisku rindu palīdzību var izteikt daudz vispārīgāka rakstura atkarības. 19. g.s. sākumā no konkrētā satura atdalot ne tikai mainīgos lielumus, bet arī

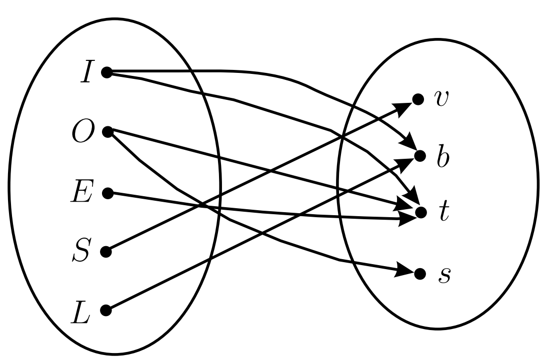
[1] [lat. functio izpilde, darbība] - atkarīgais mainīgais lielums.

atkarības starp tiem, nonāca pie reāla mainīgā reālas funkcijas jēdziena. Pirmie pie šāda veida funkcijām nonāca Lobačevskis[2] un Dirihlē[3]. 19. g.s. laikā funkcijas jēdziens tika vispārināts uz atkarībām starp patvaļīgas dabas mainīgiem lielumiem (ne obligāti skaitliskiem mainīgiem lielumiem). Šī gadsimta beigās radās funkcionālā analīze, kas kā mainīgos lielumus apskata pašas skaitliskas funkcijas. Bija jāizdara vēl viens solis - atteikties no pašu mainīgo konkrētā rakstura. To varēja izdarīt ar kopu teorijas palīdzību. Kopu teorijas idejas 20. g.s. tika ienestas visās matemātikas nodaļās. Pašlaik matemātikā ar mainīgo saprot kopas "vispārīgo elementu" (kopa var būt patvaļīga); bet ar funkciju saprot viennozīmīgu atbilstību.

2.1. Funkcijas jēdziens

Par **atbilstību** nosauksim sakārtotu pāru $(x; y)$ patvaļīgu kopu S. Pāru $(x; y)$, kas veido atbilstību S, pirmo elementu x kopu nosauksim par šīs **atbilstības definīcijas apgabalu** un apzīmēsim $D(S)$, bet otru elementu y kopu nosauksim par **atbilstības vērtību apgabalu** un apzīmēsim $E(S)$. Viens un tas pats x var būt par pirmo elementu dažādiem pāriem $(x; y) \in S$. Apskatīsim konkrētu piemēru. Pirmo kopu veido konkrētas klases meitenes: Ilga, Olga, Elga, Selga, Līga, bet otru kopu - sporta sekcijas: volejbols, basketbols, teniss, slēpošana. Izveidosim atbilstību S, piekārtojot katrai meitenei sekciju, kurā tā nodarbojas.

$$S = \big\{(I; b), (I; t), (O; t), (O; s), (E; t), (S; v), (L; b)\big\}.$$



2.1. zīm.

[2]Nikolajs Lobačevskis - krievu mat. (1792 - 1856).
[3]Ležens Dirihlē - franču mat. (1805 - 1859).

Atbilstību S nosauksim par **viennozīmīgu**, ja katram $x \in D(S)$ atbilst **viens** y, ka $(x; y) \in S$. Piemērā apskatītā atbilstība nav viennozīmīga. Tā būs viennozīmīga, ja katrai meitenei "ļaut" nodarboties tikai vienā sekcijā.

2.1. definīcija. Par **funkciju** (attēlojumu) nosauksim katru viennozīmīgu atbilstību[4].

Ja f - funkcija un $x \in D(f)$, tad vienīgo y, kuram $(x; y) \in f$, nosauksim par f vērtību punktā x vai par x attēlu attēlojumā f un apzīmēsim $f(x)$[5]. Pašu x šajā gadījumā nosauksim par pirmtēlu attēlojumā f.

Divas funkcijas f un g uzskatīsim par vienādām, ja tām ir vienādi definīcijas apgabali un katram $x \in D(f) = D(g) : f(x) = g(x)$.

Funkciju citreiz pierakstām $x \to f(x) \ \ (x \in D(f))$. Piemēram, $x \to x^2$ $(x \in \mathbb{R})$.

Mainīgo elementu x no funkcijas f definīcijas apgabala $D(f)$nosauksim par šīs funkcijas neatkarīgo mainīgo jeb argumentu un teiksim: "f - argumenta x funkcija".

2.2. definīcija. funkciju f nosauksim par injektīvu, ja tās vērtības dažādos definīcijas apgabala punktos ir dažādas, t.i.,

$$f(x'') = f(x') \Rightarrow x'' = x'.$$

2.3. definīcija. Funkciju f, kurai $D(f)$, $E(f) \subset \mathbb{R}$, nosauksim par **reālā mainīgā reālu funkciju**[6].

Turpmāk apskatīsim **tikai** šādas funkcijas.

Visbiežāk tās izsaka ar kaut kādu formulu. Ja funkcija ir uzdota ar formulu[7] un tās definīcijas apgabals nav norādīts, tad uzskatīsim, ka funkcijas definīcijas apgabalu veido visas tās neatkarīgā mainīgā (argumenta) vērtības, ar kurām šai formulai ir jēga. Piemēram, funkcijai, kas uzdota ar formulu $f(x) = \frac{1}{x-2}$, definīcijas apgabals sastāv no visiem reāliem skaitļiem, izņemot skaitli 2.

Iedomāsimies reālo skaitļu kopu, kas ir ņemta divos eksemplāros. 2.2. zīm. šie abi eksemplāri ir attēloti kā divas paralēlas taisnes.

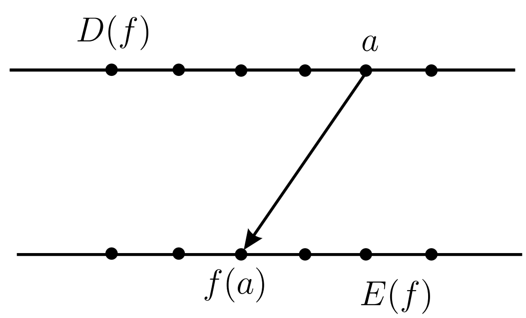
[4]Visbiežāk apzīmēsim ar f.

[5]Tā bieži apzīmē arī pašu funkciju un saka: "funkcija $f(x)$". Šoreiz ar x saprot patvaļīgo kopas $D(f)$ elementu.

[6]Šoreiz x un y ir reālie skaitļi.

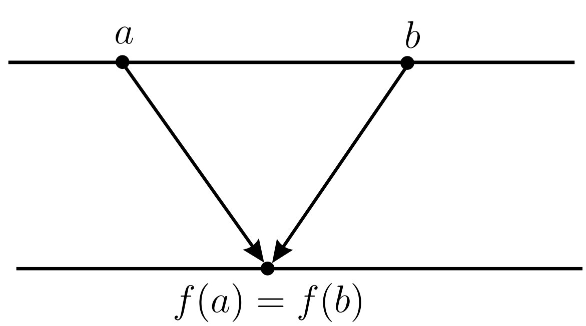
[7][lat. formula forma, noteikta kārtula] - lielumu kopums, kuri izteikti ar skaitļiem un burtiem un savienoti ar matemātiskām zīmēm.

Pieņemsim, ka funkcijas f definīcijas apgabals $D(f)$ atrodas uz pirmā eksemplāra, bet funkcijas vērtību apgabals $E(f)$ - uz otrā eksemplāra. Ģeometriskā interpretācijā katrs kopas $D(f)$ punkts x, kas atrodas uz pirmās (augšējās) taisnes, attēlojas par kādu punktu $y = f(x)$, kas atrodas uz otras (apakšējās) taisnes. Pirmtēlu un tam atbilstošo attēlu savienosim ar bultiņu, vēršot to no pirmtēla uz attēlu (2.2. zīm.).



2.2. zīm.

Pilnīgi realizēt šo konstrukciju ne vienmēr ir iespējams, jo argumenta vērtību kopa, vispārīgi runājot, ir bezgalīga. Tomēr, ņemot kādu galīgu skaitu pirmtēlu un tiem atbilstošos attēlus, daudzos gadījumos ir iespējams iegūt shēmu, kura pietiekami labi dod priekšstatu par attēlošanas patieso ainu. Saskaņā ar funkcijas jēdziena definīciju katrai argumenta vērtībai $x = a$ atbilst $f(a)$ - tā vienīgais attēls. Ja funkcija nav injektīva, tad var izrādīties, ka divām dažādām argumenta vērtībām a un b ir spēkā vienādība $f(a) = f(b)$ un skaitlim $f(a)$ ir vismaz divi pirmtēli a un b (2.3. zīm.).



2.3. zīm.

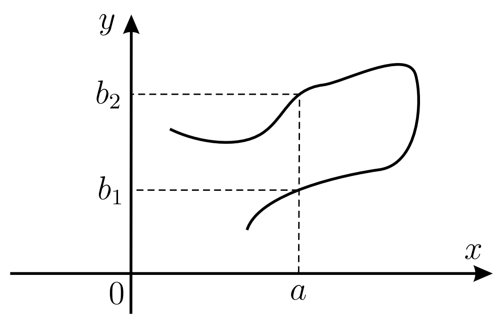
2.4. definīcija. Par funkcijas f grafiku[8] nosauksim šādu kopu

$$G_f = \{(x;y) \big| \ x \in D(f),\ y = f(x)\}.$$

[8][gr. graphikos uz rakstīšanu, zīmēšanu attiecīgs].

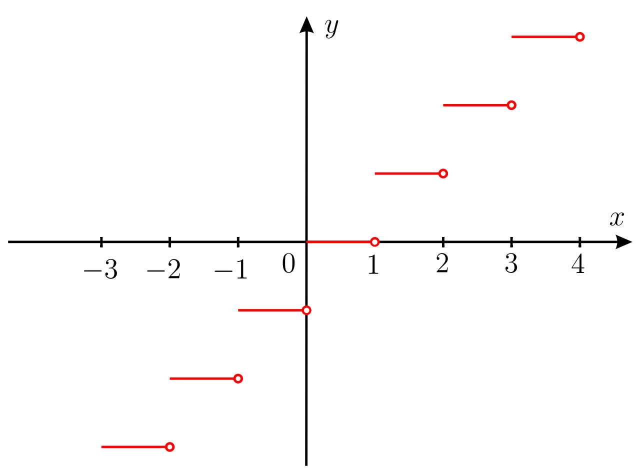
Parasti šo kopu attēlo koordinātu plaknē. Koordinātu plaknes apakškopa ir kādas funkcijas grafiks tikai tad, ja tai ar katru y asij paralēlu taisni ir ne vairāk kā viens kopīgs punkts. Piemēram, 2.4. zīmējumā redzamā kopa nav funkcijas grafiks, jo tā satur divus punktus ar vienu un to pašu abscisu a, bet dažādām ordinātēm b_1 un b_2. Ja šo kopu uzskatītu par kādas funkcijas grafiku, tad vērtībai $x = a$ atbilstu divas dažādas vērtības b_1 un b_2, bet tas ir pretrunā ar funkcijas definīciju.

Funkciju bieži uzdod ar tās grafiku. Vēl viens no paņēmieniem, kā var uzdot funkciju, ir vārdos izteiktais paņēmiens.



2.4. zīm.

Piemēram, $f(x) = [x]$ - skaitļa x veselā daļa[9], $f(x) = \{x\}$ - skaitļa x daļveida daļa[10]. Šo funkciju grafiki attēloti 2.5. un 2.6. zīmējumā.

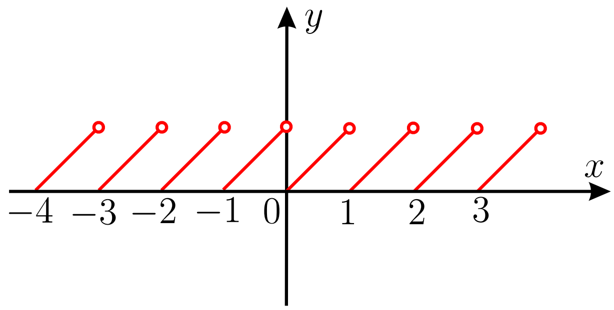


2.5. zīm.

Par funkcijas definīcijas apgabalu var būt jebkura skaitļu kopa. Speciālā gadījumā, ja par funkcijas definīcijas apgabalu ir vaļējs intervāls (slēgts intervāls), tad teiksim, ka funkcija ir definēta vaļējā intervālā (slēgtā intervālā). Runājot par funkcijas vērtību apgabalu, jāpiezīmē, ka šī kopa var

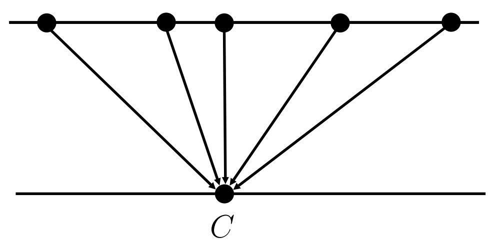
[9] Lielākais veselais skaitlis, kas nepārsniedz x.

[10] $\{x\} = x - [x]$.



2.6. zīm.

sastāvēt no viena paša skaitļa C. Šajā gadījumā katrai argumenta vērtībai atbilst viens un tas pats skaitlis C, t.i., jebkurai argumenta vērtībai x ir spēkā vienādība $f(x) = C$ (2.7. zīm.).



2.7. zīm.

2.5. definīcija. Funkciju, kurai vērtība katrai argumenta vērtībai ir viens un tas pats skaitlis, nosauksim par **pastāvīgu** jeb **konstantu funkciju**.

Ja funkcija f ir konstanta, tad rakstīsim $f(x) = \text{const}$. Piemēram, $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$ ir konstanta funkcija. Konstantas funkcijas grafiks ir taisne, kas paralēla abscisu asij (vai arī šīs taisnes daļa).

Bieži vien dotā funkcija jāapskata nevis visā definīcijas apgabalā, bet tikai kādā tā daļā. Tā, piemēram, trigonometriskās funkcijas $\sin x$ un $\cos x$, kas ir definētas visu reālo skaitļu kopā, nākas apskatīt atbilstoši intervālos $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ un $[0; \pi]$. Apskatīsim funkciju f ar definīcijas apgabalu $D(f)$ un izvēlēsimies tā apakškopu $E \subset D(f)$.

2.6. definīcija. Par **funkcijas f sašaurinājumu uz kopu** $E \subset D(f)$ nosauksim tādu funkciju $f|_E$, kurai definīcijas apgabals ir kopa E, bet tās vērtības šīs kopas punktos ir vienādas ar $f(x)$, t.i., $D(f|_E) = E$; visiem $x \in E$; $f|_E(x) = f(x)$.

2.2. Darbības ar funkcijām. Salikta funkcija

Ar reāliem skaitļiem ir definētas četras algebriskas darbības. Rodas iespēja šīs darbības definēt arī ar funkcijām[11].

2.7. definīcija. Par divu **funkciju** f un g **summu** (apzīmēsim $f+g$) nosauksim funkciju, kurai:

1. $D(f+g) = D(f) \cap D(g)$;
2. visiem x no funkcijas $f+g$ definīcijas apgabala

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x).$$

Līdzīgā veidā var definēt divu funkciju starpību un reizinājumu.

2.8. definīcija. Par divu **funkciju** f un g **dalījumu** (apzīmēsim $\frac{f}{g}$) nosauksim funkciju, kurai:

1. $D\left(\frac{f}{g}\right) = D(f) \cap \{x \in D(g) |\ g(x) \neq 0\}$;
2. visiem x no funkcijas $\frac{f}{g}$ definīcijas apgabala

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

2.9. definīcija. Par funkcijas f moduli (apzīmēsim $|f|$) nosauksim funkciju, kurai:

1. $D(|f|) = D(f)$;
2. visiem x no šo funkciju definīcijas apgabala

$$|f|(x) = |f(x)|.$$

Funkcijas argumentu aizstājot ar jauna argumenta funkciju, iegūst tā saucamo saliktu funkciju[12].

Piemēram, $\lg \sin x$, a^{2x} ir saliktas funkcijas. Ar saliktas funkcijas definīcijas apgabalu sapratīsim to pēdējā argumenta vērtības, kurām iegūtai izteiksmei ir jēga. Apskatīsim divas funkcijas $g(y)$ un $f(x)$. Pirmās funkcijas argumenta y vietā rakstot $f(x)$, iegūsim saliktu funkciju $g\big(f(x)\big)$.

[11] Šoreiz ir domātas skaitliskas funkcijas, t.i., tādas funkcijas, kurām vērtības ir skaitļi.

[12] Šādu operāciju var izdarīt arī vairākas reizes.

Šo saliktu funkciju vēl nosauksim par funkciju f un g kompozīciju un apzīmēsim $g \circ f$. Tātad

$$D(g \circ f) = \{x \in D(f) |\ f(x) \in D(g)\}.$$

Tas nozīmē, ka saliktas funkcijas $g\big(f(x)\big)$ definīcijas apgabals ir visu to funkcijas f definīcijas apgabala punktu x kopa, kuriem atbilstošās vērtības $f(x)$ pieder funkcijas g definīcijas apgabalam. Viegli var saskatīt, ka divu funkciju kompozīcija nav komutatīva, t.i., $g \circ f \neq f \circ g$.

2.10. definīcija. Par **virkni** nosauksim funkciju[13], kuras definīcijas apgabals ir visu naturālo skaitļu kopa.

Šīs funkcijas vērtību punktā n apzīmēsim ar f_n, bet pašu virkni ar (f_n).

Pie **fiksēta** n f_n nosauksim par **virknes** n -to **locekli**, bet pie **patvaļīga** n - **virknes vispārīgo locekli**.

Virkņu apzīmēšanai visbiežāk izmantosim latīņu alfabēta pirmos burtus (a_n), (b_n), (c_n) utt.

Virknes uzdod galvenokārt ar diviem paņēmieniem:

1. ar n -tā locekļa formulu;

2. ar rekurences paņēmienu, kurā norāda pirmos k virknes locekļus un formulu, saskaņā ar kuru var atrast šīs virknes katru nākamo locekli. Piemēram, $a_n = n$ izsaka naturālo skaitļu kopu. Rekurences formula

   $$a_1 = 1, a_2 = 1 \text{ un } a_{n+2} = a_n + a_{n+1}\ (n \geq 1)$$

   izsaka virkni

   $$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, \ldots.$$

Skolā tiek apskatītas tādas skaitļu virknes kā aritmētiskā un ģeometriskā progresija[14].

Atgādinu, ka skaitļu virkni, kuras katrs loceklis, sākot no otrā, vienāds ar iepriekšējā locekļa un viena un tā paša skaitļa d summu, sauc par **aritmētisko progresiju**. Skaitli d sauc par aritmētiskās progresijas **diferenci**. Aritmētisko progresiju, kuras pirmais loceklis ir a_1 un diference d, var definēt ar a_1 un rekurences formulu $a_{n+1} = a_n + d$ $(n \geq 1)$.

[13] Skaitliskas funkcijas gadījumā virkni nosauksim par skaitļu virkni.

[14] [lat. progressio kustība uz priekšu; attīstība].

Skaitļu virkni, kuras pirmais loceklis nav vienāds ar nulli, bet katrs loceklis, sākot no otrā, ir vienāds ar iepriekšējā locekļa un no nulles atšķirīga skaitļa q reizinājumu, sauc par **ğeometrisko progresiju**. Skaitli q sauc par ğeometriskās progresijas **kvocientu**. Ģeometrisko progresiju, kuras pirmais loceklis ir b_1 un kvocients ir q, var definēt ar $b_1 \neq 0$ un rekurences formulu $b_{n+1} = b_n q$ $(n \geq 1)$.

Virknes locekļi ir ne tikai tās vērtību kopas elementi, bet elementi, kuriem ir piekārtoti numuri. Elementi var būt vienādi, bet to numuri dažādi. Tādus elementus uzskatām par virknes dažādiem locekļiem. Virknes vērtību kopa var sastāvēt pat no viena elementa. Piemēram,

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 1, \ldots, a_n = 1, \ldots.$$

2.11. definīcija. Virkni nosauksim par **stacionāru**, ja tās visu locekļu vērtības, sākot no kādas noteiktas vietas, sakrīt.

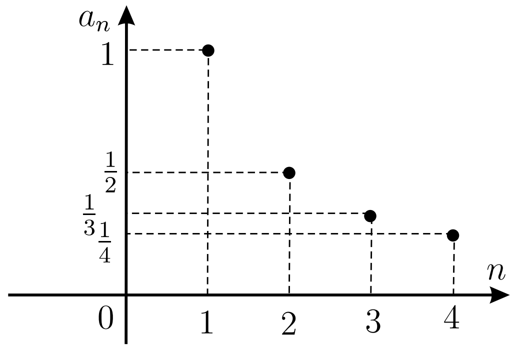
Virknē (a_n) izsvītrosim tās locekļus tā, lai pāri paliktu bezgalīgi daudz locekļu un šos pāri palikušos locekļus sanumurēsim no jauna. Iegūsim jaunu virkni, kuru nosauksim par dotās virknes (a_n) **apakšvirkni** un apzīmēsim (a_{n_k}). Elementu a_{n_k} var iegūt no a_n, ja n vietā ievieto n_k. Tāpēc apakšvirkni var uzskatīt kā saliktu funkciju (divu funkciju kompozīciju). Var runāt par virknes (kā funkcijas) grafiku un to attēlot koordinātu plaknē.

Šoreiz koordinātu plaknē iegūsim izolētus punktus. Virknei var sniegt interpretāciju uz koordinātu taisnes, t.i., virknes locekļus attēlot kā taisnes punktus.

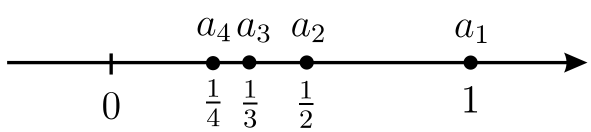
Piemēram, apskatīsim virkni

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, \ldots, a_n = \frac{1}{n}, \ldots.$$

Interpretēsim to koordinātu plaknē (2.8. zīm.) un uz koordinātu taisnes (2.9. zīm.).



2.8. zīm.



2.9. zīm.

2.3. Reālā mainīgā reālu funkciju klasifikācija

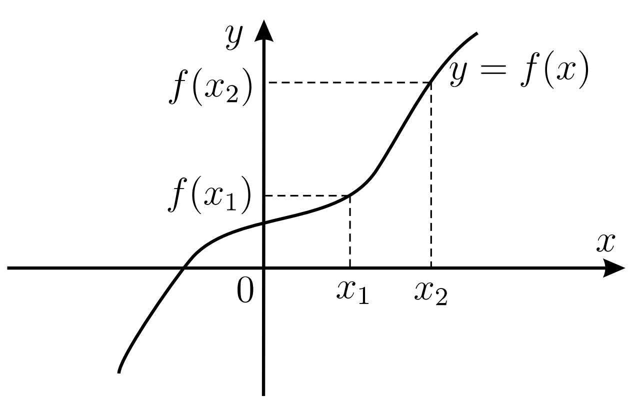
2.3.1. Monotonas funkcijas

2.12. definīcija. Funkciju f[15] nosauksim par **augošu kopā** $E \subset D(f)$, ja visiem x_1 un x_2 no E un kuriem $x_1 < x_2$ izpildās:

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{(2.10. zīm.).}$$

Līdzīgā veidā definē dilstošu, nedilstošu un neaugošu kopā E funkciju.

Par kopu E var būt šīs funkcijas definīcijas apgabals; šoreiz funkciju sauc vienkārši, piemēram, par augošu.

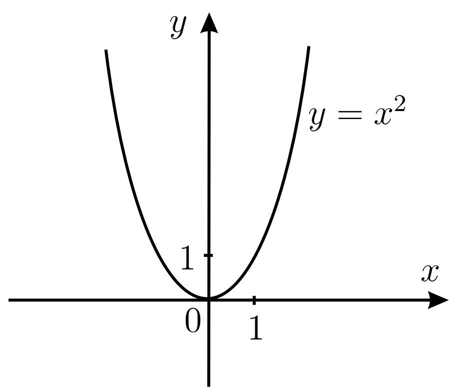


2.10. zīm.

[15]Šeit un turpmāk sapratīsim reālā mainīgā reālu funkciju.

Visas šādas funkcijas (augošas, dilstošas, nedilstošas, neaugošas) nosauksim par **monotonām**[16] **funkcijām**, bet augošas vai dilstošas par **stingri monotonām**.

Viegli saskatīt, ka, piemēram, nedilstošai funkcijai un, kas nav augoša, ir tā saucamie pastāvīguma intervāli, t.i., intervāli, kuros funkcija ir konstanta. Piemēram, funkcija $f(x) = x^2$ ir augoša intervālā $[0, +\infty)$ un dilstoša intervālā $(-\infty, 0]$. Visā definīcijas apgabalā šī funkcija nav pat monotona. (2.11. zīm.).



2.11. zīm.

2.3.2. Ierobežotas funkcijas

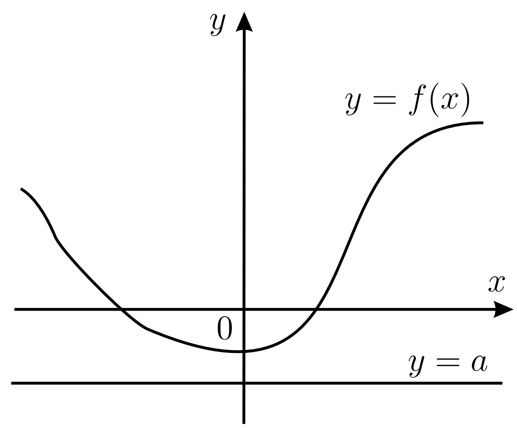
2.13. definīcija. Funkciju f nosauksim par **ierobežotu no augšas**, ja ir ierobežota no augšas tās vērtību kopa $E(f)$.

Analoģiski var definēt ierobežotu no apakšas funkciju. Atceroties ierobežotas, piemēram, no apakšas kopas definīciju, varam teikt, ka f - ierobežota no apakšas funkcija tad un tikai tad, kad eksistē tāds skaitlis a, ka visiem $x \in D(f) : f(x) \geq a$. Ģeometriski tas nozīmē, ka eksistē tāda taisne $y = a$, ka funkcijas grafiks atrodas virs šīs taisnes.

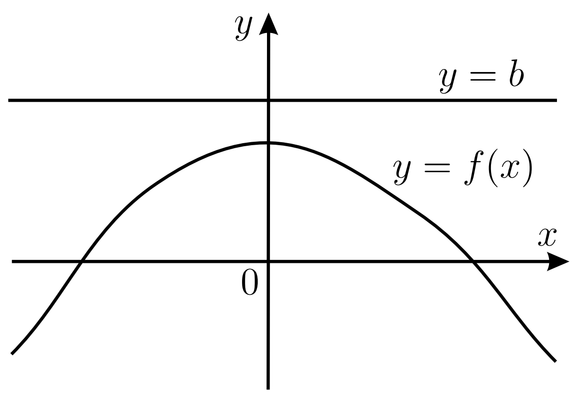
2.12. - 2.14. zīm. attēloti atbilstoši ierobežotas no apakšas, ierobežotas no augšas un ierobežotas funkcijas grafiki.

Piemēram, $f(x) = \sin x$ ir ierobežota funkcija, jo visiem $x \in \mathbb{R}$: $|\sin x| \leq 1$. Ģeometriski tas nozīmē, ka funkcijas grafiks atrodas joslā starp taisnēm $y = -1$ un $y = 1$.

[16][gr. monos viens, viens vienīgs, vienīgais + ton(i)s vienmuļīgs, garlaicīgs] - tāds, kas mainās vienā virzienā.



2.12. zīm.



2.13. zīm.

2.14. definīcija. Funkciju f nosauksim par **ierobežotu**, piemēram, **no apakšas kopā** $E \subset D(f)$, ja funkcijas f sašaurinājums uz kopu E ir ierobežota no apakšas funkcija.

2.3.3. Pāra un nepāra funkcijas

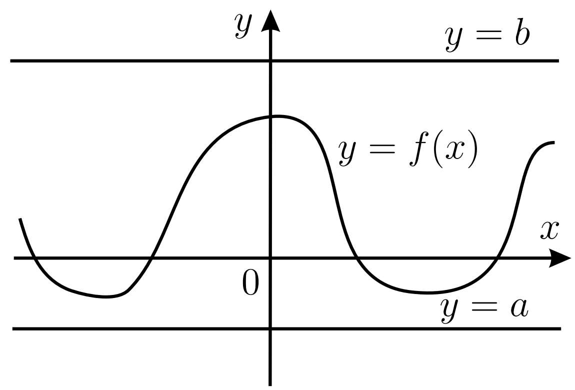
Apskatīsim funkcijas, kuru definīcijas apgabali ir simetriski attiecībā pret koordinātu sākuma punktu, t.i., tādas funkcijas, kuru definīcijas apgabali reizē ar skaitli x satur arī skaitli $(-x)$.

2.15. definīcija. Funkciju f nosauksim par **pāra funkciju**, ja katram x no šīs funkcijas definīcijas apgabala ir pareiza vienādība

$$f(-x) = f(x).$$

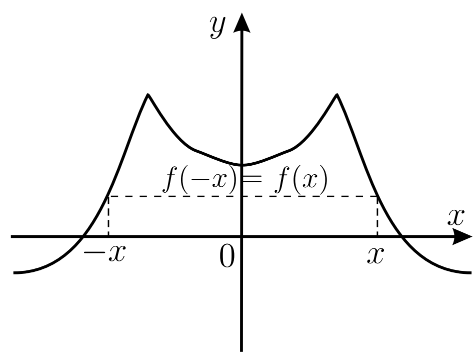
2.16. definīcija. Funkciju f nosauksim par **nepāra funkciju**, ja katram x no šīs funkcijas definīcijas apgabala ir pareiza vienādība

$$f(-x) = -f(x).$$

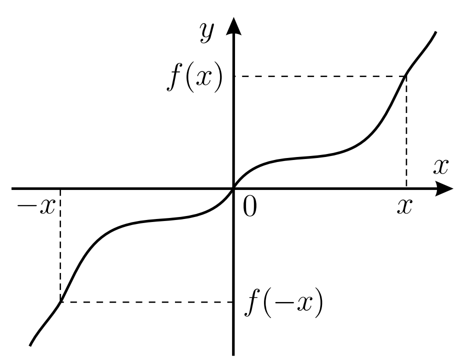


2.14. zīm.

No šīm definīcijām izriet, ka pāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret ordinātu asi (2.15. zīm.), bet nepāra funkcijas grafiks ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākuma punktu (2.16. zīm.).



2.15. zīm.



2.16. zīm.

2.3.4. Periodiskas funkcijas

Apskatīsim funkcijas, kuru definīcijas apgabali reizē ar katru punktu x satur arī visus punktus $x + nT$, kur T no nulles atšķirīgs reāls skaitlis, bet

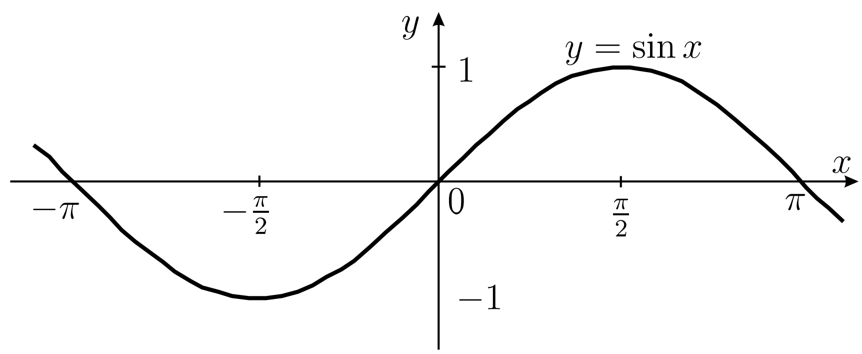
n - vesels skaitlis.

2.17. definīcija. Funkciju f nosauksim par **periodisku funkciju**[17] ar periodu $T \neq 0$, ja katram x no funkcijas definīcijas apgabala ir pareiza vienādība:

$$f(x+T) = f(x).$$

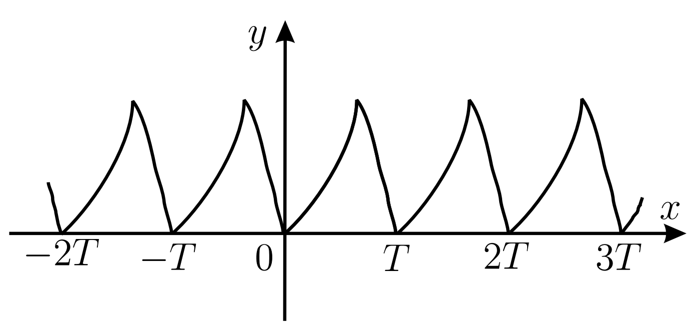
Skaitli $T \neq 0$ nosauksim par **funkcijas periodu**. Par šīs funkcijas periodiem būs arī skaitļi nT, kur n - no nulles atšķirīgs vesels skaitlis. Vismazāko pozitīvo starp šiem skaitļiem nosauksim par **mazāko pozitīvo periodu**[18].

Piemēram, funkcija $\sin x$ ir periodiska ar periodu $T = 2\pi$ (2.17. zīm.).



2.17. zīm.

Viegli saskatīt, ka ir pareizs šāds vispārīgs apgalvojums: lai konstruētu periodiskas (ar periodu T) funkcijas grafiku, pietiek konstruēt šīs funkcijas grafiku intervālā $[0; T]$ un pēc tam iegūto līkni pārnest paralēli Ox asij pa labi un pa kreisi par attālumu nT, kur n - jebkurš naturāls skaitlis (2.18. zīm.).



2.18. zīm.

[17][gr. periodos apkārtceļš, riņķojums].

[18]Turpmāk ar šādu skaitli sapratīsim T un nosauksim vienkārši par periodu.

2.4. Apvērsta funkcija

Pētot dažas funkcijas, bieži nākas risināt šādu uzdevumu: aprēķināt funkcijas f vērtību pēc dotās argumenta vērtības x_0. Daudzkārt ir jārisina arī apgrieztais uzdevums: atrast argumenta vērtības, ar kurām funkcija f iegūst norādīto vērtību y_0.

Apskatīsim divus piemērus.

1. $f(x) = 2x + 1$. Lai atrastu argumenta x vērtību, ar kuru $f(x) = y_0$, ir jāatrisina vienādojums $f(x) = y_0$, t.i., $2x + 1 = y_0$. Atrisinot šo vienādojumu, noskaidrosim, ka ar jebkuru y_0 tam ir vienīgais atrisinājums
$$x = \frac{y_0 - 1}{2}.$$
2. $f(x) = x^2$. Šoreiz vienādojumam $f(x) = y_0$ $(y_0 > 0)$ ir divi atrisinājumi: $x_1 = \sqrt{y_0}$ un $x_2 = -\sqrt{y_0}$.

2.18. definīcija. Funkciju f, kas iegūst katru savu vērtību tikai vienā definīcijas apgabala punktā, nosauksim par **apvēršamu funkciju**.

Tādējādi $f(x) = 2x + 1$ ir apvēršama funkcija, bet $f(x) = x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ nav apvēršama funkcija.

No apvēršamas funkcijas definīcijas var izdarīt šādu secinājumu: ja funkcija f ir apvēršama un skaitlis a pieder tās vērtību apgabalam $E(f)$, tad vienādojumam $f(x) = a$ ir viens un tikai viens atrisinājums.

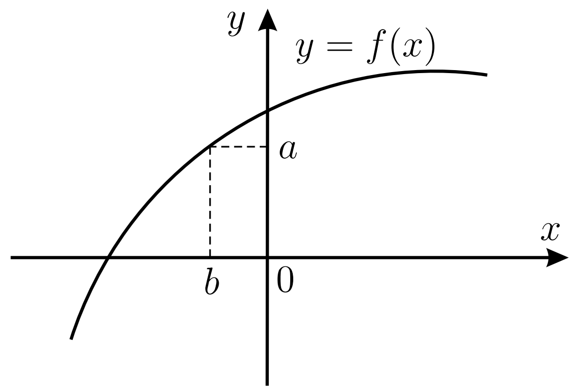
Pieņemsim, ka f ir apvēršama funkcija. Jebkuram skaitlim $y_0 \in E(f)$ eksistē tikai viena vērtība $x_0 \in D(f)$, ka $f(x_0) = y_0$. Izveidojot atbilstību starp katru y_0 un x_0, iegūsim jaunu funkciju g, kuras definīcijas apgabals ir $E(f)$ un vērtību apgabals ir $D(f)$. Piemēram, apvēršamais funkcijai $f(x) = 2x + 1$ jaunās funkcijas g vērtību brīvi izraudzītajā punktā y_0 var izteikt ar formulu
$$g(y_0) = \frac{y_0 - 1}{2}.$$
Izmantojot funkcijas g argumentam parasto apzīmējumu x, rakstīsim
$$g(x) = \frac{x - 1}{2}.$$

2.19. definīcija. Funkciju g, kas apvēršamās funkcijas f vērtību apgabala katrā punktā x iegūst tādu vērtību y, ka $f(y) = x$, nosauksim par funkcijas f **apvērsto** (inverso) **funkciju**[19].

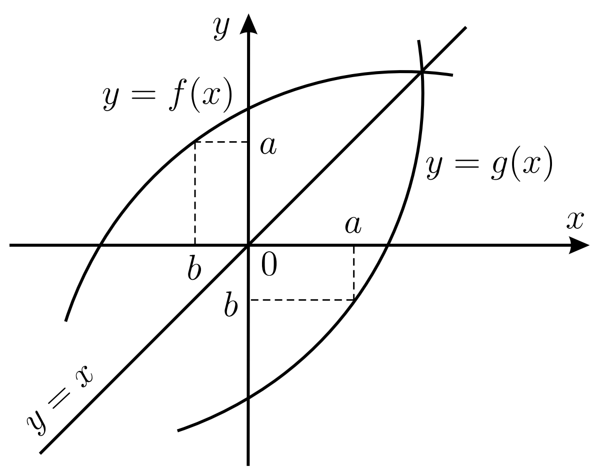
[19]Bieži funkcijas f apvērsto funkciju apzīmē f^{-1}.

Tātad **apvērsto funkciju g var definēt tikai apvēršamai funkcijai f**, pie tam $D(g) = E(f)$ un $E(g) = D(f)$. **Funkcijas f apvērstā funkcija g ir vienīgā**.

No funkcijas f grafika var noteikt tās apvērstās funkcijas g vērtību brīvi izraudzītajā punktā a. Šajā gadījumā punkts ar koordinātu a jāizvēlas nevis kā parasti uz abscisu ass, bet gan uz ordinātu ass (2.19. zīm.).



2.19. zīm.



2.20. zīm.

No apvērstās funkcijas definīcijas izriet, ka $g(a)$ ir vienāda ar b.

Tādējādi izvēloties citādu koordinātu sistēmu, kurā arguments tiek atlikts uz ordinātu ass, bet funkcijas vērtība uz abscisu ass, var uzskatīt, ka funkcijai f apvērstās funkcijas g grafiks sakrīt ar funkcijas f grafiku parastajā koordinātu sistēmā. Lai attēlotu funkcijas g grafiku parastajā koordinātu sistēmā, jākonstruē funkcijai f grafikam simetrisks grafiks attiecībā pret taisni $y = x$ (2.20. zīm.), jo pret šo taisni ir simetriski punkti $(a; b)$ un $(b; a)$. Tātad **funkcijas f apvērstās funkcijas g grafiks ir simetrisks funkcijas f grafikam attiecībā pret taisni $y = x$.**

2.1. teorēma. [**Par apvērstu funkciju monotonai funkcijai**].

Ja funkcija f aug (vai dilst) intervālā I, tad šī funkcija ir apvēršama. Funkcijas f apvērstā funkcija g, kas definēta kopā $f(I)$, arī ir augoša (vai dilstoša).

▶ Apskatīsim tikai gadījumu, kad f ir intervālā I augoša funkcija. Vispirms pierādīsim, ka šī funkcija ir apvēršama, t.i., kādu arī neizvēlētos skaitli a no funkcijas f vērtībām, ko tā iegūst, ja x pieder intervālam I, šajā intervālā vienādojumam $f(x) = a$ ir vienīgais atrisinājums $x = b$. Pieņemsim, ka intervālā I ir vēl viens tāds skaitlis $c \neq b$, ka $f(c) = a = f(b)$. Tādā gadījumā $c < b$ vai $c > b$. Funkcija f intervālā I ir augoša, tāpēc $f(c) < f(b)$ vai $f(c) > f(b)$, kas ir pretrunā ar vienādību $f(c) = f(b)$. Tāpēc pieņēmums ir nepareizs un intervālā I skaitlis b ir vienādojuma $f(x) = a$ vienīgā sakne. Tātad f ir apvēršama funkcija. Atliek pierādīt, ka funkcijas f apvērstā funkcija g aug kopā $f(I)$. Pieņemsim, ka x_1 un x_2 ir brīvi izraudzītas vērtības no kopas $f(I)$, turklāt $x_1 < x_2$ un $y_1 = g(x_1)$, $y_2 = g(x_2)$. Pieņemsim, ka $y_1 \geq y_2$. Pēc apvērstās funkcijas definīcijas $x_1 = f(y_1)$ un $x_2 = f(y_2)$. Ievērojot, ka f ir augoša funkcija un pēc pieņēmuma $y_1 \geq y_2$, iegūsim, ka $f(y_1) \geq f(y_2)$, t.i., $x_1 \geq x_2$, kas ir pretrunā ar pieņēmumu $x_1 < x_2$. Tāpēc atliek secināt, ka $y_1 < y_2$, t.i., $g(x_1) < g(x_2)$. Funkcija g aug kopā $f(I)$. ◀

Jautājumi

1. Definēt atbilstību. Definēt atbilstības definīcijas un vērtību apgabalu.
2. Kādu atbilstību sauc par viennozīmīgu?
3. Definēt funkciju. Definēt attēlu un pirmtēlu.
4. Definēt injektīvu funkciju.
5. Definēt reālā mainīgā reālu funkciju.
6. Definēt funkcijas grafiku.
7. Ko nozīmē uzdot funkciju? Nosaukt funkcijas uzdošanas paņēmienus.
8. Definēt konstantu funkciju.
9. Definēt funkcijas sašaurinājumu uz kopu.
10. Definēt divu funkciju summu, reizinājumu, dalījumu.

11. Definēt saliktu funkciju (funkciju kompozīciju).
12. Definēt virkni. Definēt virknes apakšvirkni.
13. Kas ir virknes vispārīgais loceklis?
14. Kā pieraksta virkni un kā var uzdot virkni?
15. Definēt stacionāru virkni.
16. Definēt augošu, dilstošu, neaugošu un nedilstošu virkni.
17. Definēt ierobežotu no augšas, ierobežotu no apakšas, ierobežotu funkciju.
18. Definēt pāra, nepāra funkciju.
19. Kāda īpašība piemīt pāra, nepāra funkcijas grafikam?
20. Definēt periodisku funkciju un tās periodu.
21. Definēt apvēršamu funkciju.
22. Definēt funkcijas apvērsto funkciju.
23. Kā koordinātu sistēmā izvietoti tiešās un apvērstās funkcijas grafiki?
24. Formulēt teorēmu par apvērsto funkciju monotonai funkcijai.
25. Kāds sakars pastāv starp tiešās un apvērstās funkcijas definīcijas un vērtību apgabaliem?

Vingrinājumi

1. Nosaukt atbilstības un viennozīmīgas atbilstības piemērus.
2. Izveidot brīvi izraudzītas funkcijas sašaurinājumu uz kopu.
3. Izveidot saliktas funkcijas piemēru un parādīt, ka divu funkciju kompozīcija nav komutatīva.
4. Izveidot bezgalīgi dilstošās ģeometriskās progresijas piemēru un aprēķināt tās summu.
5. Nosaukt stacionāru virkņu piemērus.

6. Attēlot koordinātu plaknē un uz koordinātu taisnes virknes $a_n = n$ un $a_n = \frac{1}{n^2}$.

7. Uzrakstīt kaut kādu virkni un izveidot divas tās apakšvirknes.

8. Nosaukt augošas un dilstošas funkcijas piemērus.

9. Nosaukt kādu funkciju, kas nav monotona.

10. Pierādīt, ka katra intervālā stingri monotona funkcija ir injektīva funkcija šajā intervālā. Vai ir spēkā apgrieztais apgalvojums?

11. Pierādīt:

    (a) ja funkcija f aug, tad $(-f)$ dilst;

    (b) ka divu augošu funkciju summa ir augoša funkcija;

    (c) ka divu augošu funkciju reizinājums ir augoša funkcija;

    (d) ka divu augošu funkciju kompozīcija ir augoša funkcija;

    (e) ka divu dilstošu funkciju kompozīcija ir augoša funkcija;

    (f) ka augošas un dilstošas funkciju kompozīcija ir dilstoša funkcija.

12. Nosaukt ierobežotas no apakšas, ierobežotas no augšas, ierobežotas funkciju piemērus.

13. Nosaukt neierobežotas funkcijas piemērus.

14. Pierādīt, ka funkcija f ierobežota tad un tikai tad, kad funkcija $|f|$ ierobežota no augšas[20].

15. Pierādīt, ka:

    (a) divu pāra funkciju summa ir pāra funkcija;

    (b) divu nepāra funkciju reizinājums ir pāra funkcija;

    (c) pāra un nepāra funkcijas dalījums ir nepāra funkcija.

16. Pierādīt, ka katru funkciju, kurai definīcijas apgabals ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākuma punktu, var izteikt kā pāra un nepāra funkcijas summu.

17. Nosaukt kādu funkciju, kas nav nedz pāra, nedz nepāra funkcija.

18. Nosaukt periodiskas, neperiodiskas funkcijas piemērus.

[20] Eksistē tāds $c \in \mathbb{R}$, ka visiem $x \in D(f)$ izpildās nevienādība $|f(x)| \leq c$.

19. Pierādīt, ka intervālā dilstoša funkcija ir apvēršama un ka tās apvērstā funkcija arī ir dilstoša funkcija atbilstošajā intervālā.

20. Noskaidrot, kuras no šādām funkcijām ir apvēršamas un kuras nē. Atbildi pamatot!

    (a) $f(x) = 5x - 3$;

    (b) $f(x) = x^2$;

    (c) $f(x) = x^3$.

3. nodaļa

ROBEŽA

Robeža ir viens no centrālajiem matemātiskās analīzes jēdzieniem; ar tās palīdzību definē funkcijas atvasinājumu un integrāli. Tādējādi robežas jēdziens ir diferenciālrēķinu un integrālrēķinu pamatā. Bez tam to tieši izmanto arī vairākās tehnisko un dabas zinātņu nozarēs. Robežas jēdziena definēšanā un robežu teorijas izklāstā ir dažādas pieejas. Šajā izdevumā lietosim skaitļu virknes un funkcijas robežas definīcijas, ar kurām skolēni daļēji iepazīstas jau algebras elementu kursā. Skolas matemātikas kursā parasti tiek apskatīti tikai divi robežas gadījumi: skaitļu virknes un funkcijas galīga robeža, kad arguments tiecas uz skaitli. Matemātiskās analīzes kursā robežas jēdzienu apskatīsim daudz plašāk. Apskatīsim funkcijas galīgas un bezgalīgas robežas vispārīgo definīciju neatkarīgi no tā, vai arguments tiecas uz skaitli, vai kādu no bezgalībām. Vispirms iepazīsimies ar skaitļu virknes robežas vispārīgo definīciju.

3.1. Skaitļu virknes robeža

3.1.1. Konverğenta skaitļu virkne

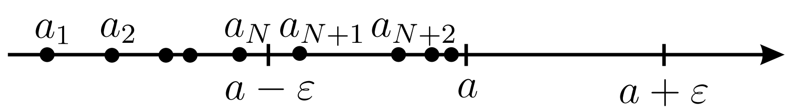
3.1. definīcija. Skaitli a nosauksim par **virknes** (a_n) **robežu**, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds naturāls skaitlis N (atkarīgs no ε), ka visiem $n > N$ izpildās nevienādība

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Tādos gadījumos teiksim, ka virkne (a_n) **konverģē**[1] uz a un rakstīsim $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (skat.[2]) vai $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. Nevienādība $|a_n - a| < \varepsilon$ ir līdzvērtīga nevienādībām $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Tas nozīmē, ka visiem $n > N$ a_n pieder punkta a ε - apkārtnei, t.i.,

$$a_n \in U(a;\varepsilon) = (a-\varepsilon; a+\varepsilon).$$

Ārpus šīs apkārtnes atrodas tikai galīgs skaits virknes locekļu (3.1. zīm.). Šis numurs N ir atkarīgs no apkārtnes rādiusa ε.



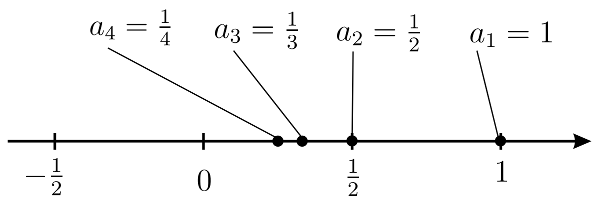
3.1. zīm.

Apskatīsim dažus piemērus.

1. $a_n = \frac{1}{n}$. Virkne konverģē un tās robeža $a = 0$, jo visiem $n > \frac{1}{\varepsilon}$ izpildīsies nevienādība

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Tāpēc par N var paņemt skaitļa $\frac{1}{\varepsilon}$ veselo daļu $\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$. Tagad visiem $n > N$, kur $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, izpildīsies nevienādība $|a_n - a| < \varepsilon$. Tātad $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, t.i., $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ja izvēlēsimies, piemēram, $\varepsilon = \frac{1}{2}$, tad $N = 2$ un, sākot ar a_3, visi šīs virknes locekļi atradīsies intervāla $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ iekšienē (3.2. zīm.).



3.2. zīm.

2. $a_n = 1 + \frac{1+(-1)^n}{n+2}$. Virkne konverģē un tās robeža $a = 1$, jo paņemot $n > \frac{2}{\varepsilon} - 2$, izpildīsies nevienādība

$$|a_n - a| = \frac{1+(-1)^n}{n+2} < \frac{2}{n+2} < \varepsilon.$$

---

[1] [fr. converger saiet vienā punktā; lat. convergere tiekties].

[2] Simbols lim ir latīņu valodas vārda limes (robeža) jeb tādas pašas nozīmes franču valodas vārda limits saīsinājums.

Tāpēc visiem

$$n > N = \max\left(\left[\frac{2}{\varepsilon} - 2\right]; 1\right)$$

izpildīsies nevienādība $|a_n - a| < \varepsilon$. Tātad $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, t.i.,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1+(-1)^n}{n+2}\right) = 1.$$

3. $a_n = (-1)^n$. Ja pieņemtu, ka virkne konverģē un skaitlis a ir tās robeža, tad, piemēram, skaitlim $\varepsilon = \frac{1}{2}$ varēs sameklēt tādu N, ka visiem n un m lielākiem par N vienlaicīgi izpildīsies nevienādības

$$|a_n - a| < \frac{1}{2}, \quad |a_m - a| < \frac{1}{2}.$$

Tad

$$|a_n - a_m| \le |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Ieguvām pretunu, jo starpība $|a_n - a_m|$ ir 0 vai 2, bet mēs esam ieguvuši, ka $|a_n - a_m| < 1$. Tātad $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neeksistē, un tāpēc virkne nav konverģenta. Turpmāk šādas virknes nosauksim par **diverģentām**[3] **virknēm**.

3.1. teorēma. *Konverģenta virkne ir ierobežota.*

▶ Apskatīsim konverģentu virkni (a_n). Tad eksistē skaitlis a, kur $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Saskaņā ar virknes robežas definīciju jebkuram $\varepsilon > 0$, piemēram, $\varepsilon = 1$ eksistē tāds naturāls skaitlis N, ka visiem $n > N$ izpildīsies nevienādība

$$|a_n - a| < 1,$$

t.i.,

$$a - 1 < a_n < a + 1.$$

Virkne ir ierobežota, jo visiem $n > N$ izpildās nevienādība $|a_n| \le A$, kur

$$A = \max\left(|a_1|; \ldots; |a_N|; |a-1|; |a+1|\right). \blacktriangleleft$$

Acīmredzami, ka šai teorēmai apgrieztā teorēma nav spēkā. Piemēram, $a_n = (-1)^n$ ir ierobežota, bet nav konverģenta (tātad ir diverģenta) virkne.

[3] [lat. divergens (divergentis) dažādos virzienos ejošs].

3.1.2. Bernulli nevienādība

3.2. teorēma. *Visiem naturāliem skaitļiem n un visiem $x \geq -1$ izpildās Bernulli*[4] *nevienādība*

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1 + nx.}$$

► Pierādīsim šo nevienādību, izmantojot matemātiskās indukcijas metodi.

Acīmredzami, pie $n = 1$ sakarība izpildās, pie tam iegūsim vienādību $1 + x = 1 + x$.

Pieņemsim, ka minētā sakarība ir spēkā pie $n = k$, t.i., visiem $x \geq -1$ izpildās nevienādība

$$(1+x)^k \geq 1 + kx.$$

Pareizināsim šīs nevienādības abas puses ar $1 + x \geq 0$:

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.$$

Iegūtā nevienādība

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$$

nozīmē, ka teorēmā minētā sakarība ir spēkā pie $n = k + 1$. Saskaņā ar matemātiskās indukcijas metodi Bernulli nevienādība ir pierādīta. ◄

Acīmredzami, tikai tajos gadījumos, kad $n = 1$ vai $x = 0$, iegūsim vienādību.

Izmantojot Bernulli nevienādību, pierādīsim, ka $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ \ (a > 0)$.

1. Izvēlēsimies $a > 1$ un naturālu skaitli $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$, kur ε ir jebkurš pozitīvs skaitlis. No Bernulli nevienādības un nevienādības $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$ iegūsim, ka

   $$(1+\varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon > a.$$

   No kurienes

   $$0 < \sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon.$$

   Tātad

   $$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon.$$

   Tas nozīmē, ka

   $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

[4] Jēkabs Bernulli - šveiciešu matemātiķis (1654-1705).

2. Izvēlēsimies $0 < a < 1$ un apzīmēsim $a = \frac{1}{a_1}$, kur $a_1 > 1$. Tad

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| = \left|\frac{1}{\sqrt[n]{a_1}} - 1\right| = \left|\frac{\sqrt[n]{a_1} - 1}{\sqrt[n]{a_1}}\right| < |\sqrt[n]{a_1} - 1|$$

(jo $\sqrt[n]{a_1} > 1$). Saskaņā ar 1. gadījumu pietiekoši lieliem n izpildīsies nevienādība

$$|\sqrt[n]{a_1} - 1| < \varepsilon.$$

Tāpēc arī

$$\left|\sqrt[n]{a} - 1\right| < \varepsilon.$$

Tas nozīmē, ka

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

3. Izvēlēsimies $a = 1$. Šoreiz $\sqrt[n]{a} = 1$ un

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = 0 < \varepsilon.$$

Tas nozīmē, ka

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

3.1.3. Skaitļu virkņu bezgalīgas robežas

3.2. definīcija. Simbolu $+\infty$ nosauksim par **virknes** (a_n) **robežu**, ja jebkuram pozitīvam skaitlim M eksistē tāds naturāls skaitlis N, ka visiem $n > N$ izpildās nevienādība $a_n > M$. Pierakstīsim $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ un teiksim, ka virkne diverģē, pie tam uz $+\infty$.

Nevienādība $a_n > M$ nozīmē, ka visiem $n > N$

$$a_n \in (M; +\infty) = U(+\infty; M).$$

Šīs apkārtnes ārpusē atradīsies galīgs skaits virknes locekļu. Acīmredzami, šāda virkne nav ierobežota no augšas. Apgrieztais apgalvojums nav spēkā.

3.3. definīcija. Simbolu $-\infty$ nosauksim par **virknes** (a_n) **robežu**, ja jebkuram pozitīvam skaitlim M eksistē tāds naturāls skaitlis N, ka visiem $n > N$ izpildās nevienādība $a_n < -M$. Pierakstīsim $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ un teiksim, ka virkne diverģē, pie tam uz $-\infty$.

Nevienādība $a_n < -M$ nozīmē, ka visiem $n > N$

$$a_n \in (-\infty; -M) = U(-\infty; M).$$

Šī virkne nav ierobežota no apakšas.

Iepriekš apskatītās virkņu robežu definīcijas var apvienot vienā - virknes robežas vispārīgajā definīcijā. Tam nolūkam izmantosim apkārtnes jēdzienu.

3.4. definīcija. (Virknes robežas vispārīgā definīcija).

Punktu A (skat.[5]) nosauksim par **virknes** (a_n) **robežu**, ja šī punkta jebkurai apkārtnei $U(A)$ eksistē tāds naturāls skaitlis N, ka visiem $n > N$ izpildās sakarība $a_n \in U(A)$.

3.2. Reālā mainīgā reālās funkcijas robeža

Apskatīsim funkciju f, definētu punkta a apkārtnē, izņemot varbūt šo punktu.

3.5. definīcija. Par **punkta** a **pārdurtu apkārtni** nosauksim šī punkta apkārtni bez punkta a un apzīmēsim ar $\overset{\circ}{U}(a)$.

3.6. definīcija. (Funkcijas robežas vispārīgā definīcija).

Punktu A nosauksim par **funkcijas** f **robežu punktā** a, ja punkta A jebkurai apkārtnei $U(A)$ eksistē punkta a tāda pārdurta apkārtne $\overset{\circ}{U}(a)$, ka visiem $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ izpildās sakarība $f(x) \in U(A)$ (3.3. zīm.). Pierakstīsim

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \text{vai} \quad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} A.$$

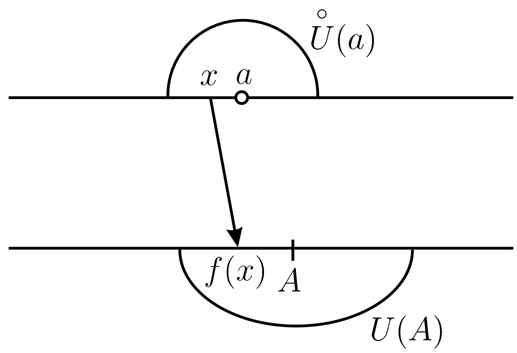
Nosacījums, ka $x \neq a$, ir būtisks. Pretējā gadījumā funkcijai

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{ja} \quad x = 0, \end{cases}$$

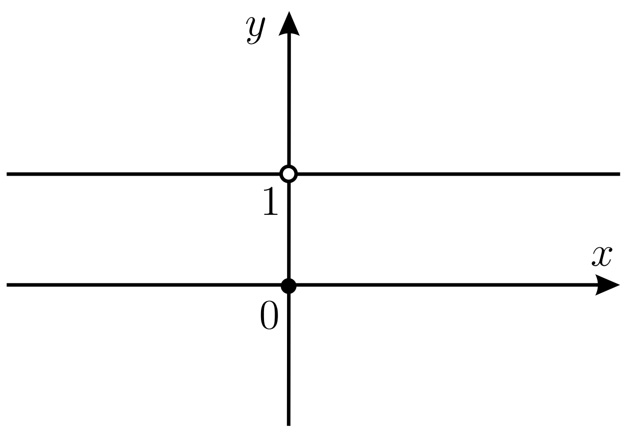
punktā $x = 0$ neeksistētu robeža. Tagad $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$. (3.4. zīm.)

Apskatīsim funkcijas robežas vispārīgās definīcijas atsevišķus gadījumus.

[5] A var būt gan skaitlis, gan viens no simboliem $-\infty$, $+\infty$.



3.3. zīm.



3.4. zīm.

1. $a, A \in \mathbb{R}$.

   Šoreiz par punkta apkārtni būs vaļējs intervāls ar centru šajā punktā un atbilstošu rādiusu. Apkārtnes varēs uzdot ar apkārtņu rādiusu ε un δ palīdzību.

   Skaitli A nosauksim par funkcijas f robežu punktā a (a - skaitlis), ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$ (atkarīgs no ε), ka visiem x, kuriem $0 < |x - a| < \delta$, izpildās nevienādība

   $$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

   No ģeometriskā viedokļa tas nozīmē, lai cik šaura arī nebūtu horizontālā josla starp taisnēm $y = A - \varepsilon$ un $y = A + \varepsilon$, funkcijas grafiks (izņemot varbūt punktu $\big(a; f(a)\big)$) visiem $x \in (a - \delta; a + \delta)$ atrodas šajā joslā (3.5. zīm.).

2. $a = +\infty, \quad A \in \mathbb{R}$.

   Šoreiz punkta $a = +\infty$ apkārtni varēs uzdot ar apkārtnes rādiusa

$N > 0$ palīdzību. Par punkta $a = +\infty$ N-apkārtni būs vaļējs intervāls $(N; +\infty)$.

Skaitli A nosauksim par funkcijas f robežu punktā $a = +\infty$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $N > 0$, ka visiem x, kuriem $x > N$, izpildās nevienādība

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

No ģeometriskā viedokļa tas nozīmē, lai cik šaura arī nebūtu horizontālā josla starp taisnēm $y = A - \varepsilon$ un $y = A + \varepsilon$, funkcijas grafiks visiem $x > N$ atrodas šajā joslā (3.6. zīm.).

3. $a = -\infty$, $A \in \mathbb{R}$.

   Skaitli A nosauksim par funkcijas f robežu punktā $a = -\infty$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $N > 0$, ka visiem x, kuriem $x < -N$, izpildās nevienādība

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (3.7.\ \text{zīm.}).$$

4. $a \in \mathbb{R}$, $A = +\infty$ (3.8. zīm.).

5. $a \in \mathbb{R}$, $A = -\infty$ (3.9. zīm.).

6. $a = +\infty$, $A = +\infty$ (3.10. zīm.).

7. $a = +\infty$, $A = -\infty$ (3.11. zīm.).

8. $a = -\infty$, $A = +\infty$ (3.12. zīm.).

9. $a = -\infty$, $A = -\infty$.

   Simbolu $-\infty$ nosauksim par funkcijas f robežu punktā $a = -\infty$, ja jebkuram $M > 0$ eksistē tāds $N > 0$, ka visiem x, kuriem $x < -N$, izpildās nevienādība $f(x) < -M$.

   No ģeometriskā viedokļa tas nozīmē: lai cik liels arī nebūtu skaitlis M visiem $x < -N$ funkcijas grafiks a rodas zem taisnes $y = -M$ (3.13. zīm.).

10. $a \in \mathbb{R}$, $A = \infty$ (bez zīmes[6]) (3.14. zīm.).

[6] Simbolu ∞ (bezgalība bez zīmes) atšķirībā no iepriekš apskatītajiem simboliem $-\infty$ un $+\infty$ saista ar reāliem skaitļiem tikai tā apkārtnes. Ar simbola ∞ ε - apkārtni sapratīsim šādu kopu $U(\infty; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} |\, |x| > \varepsilon$, t.i., simbolu $-\infty$ un $+\infty$ ε - apkārtņu apvienojumu.

11. $a = +\infty$, $A = \infty$.

    Simbolu ∞ nosauksim par funkcijas f robežu punktā $a = +\infty$, ja jebkuram $M > 0$ eksistē tāds $N > 0$, ka visiem $x > N$ izpildās nevienādība $|f(x)| > M$, t.i., $f(x) > M$ vai $f(x) < -M$.

    Piemēram, funkcijai

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{ja} \quad x \ - \text{racionāls skaitlis}, \\ -e^x, & \text{ja} \quad x \ - \text{iracionāls skaitlis}, \end{cases}$$

    $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$.

    No ģeometriskā viedokļa tas nozīmē, lai cik liels arī nebūtu skaitlis M, visiem $x > N$ funkcijas grafiks atrodas virs taisnes $y = M$ vai zem taisnes $y = -M$ (3.15. zīm.).

12. $a = -\infty$, $A = \infty$ 3.16. zīm.

13. $a = \infty$, $A \in \mathbb{R}$.

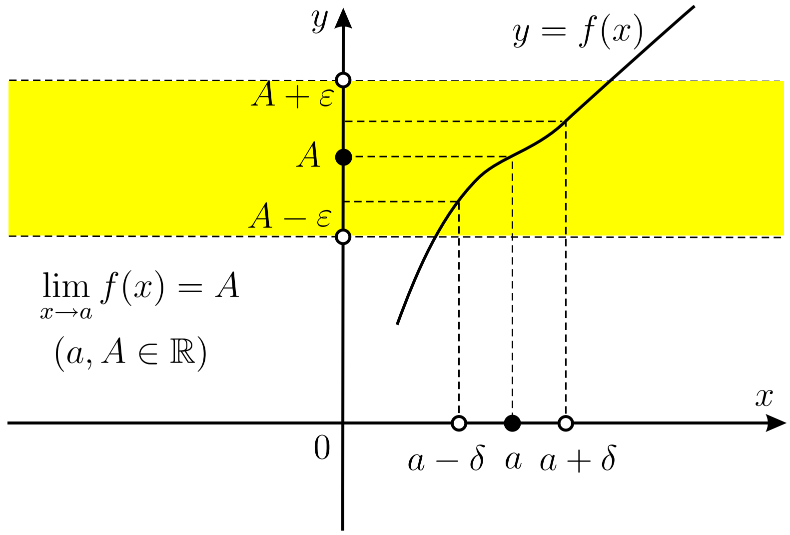
    Skaitli A nosauksim par funkcijas f robežu punktā $a = \infty$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $N > 0$, ka visiem x, kuriem $|x| > N$, izpildās nevienādība $|f(x) - A| < \varepsilon$.

    No ģeometriskā viedokļa tas nozīmē, lai cik šaura arī nebūtu horizontālā josla starp taisnēm $y = A - \varepsilon$, $y = A + \varepsilon$, funkcijas grafiks visiem $x > N$ vai $x < -N$ atradīsies šajā joslā (3.17. zīm.).

14. $a = \infty$, $A = +\infty$ (3.18. zīm.).

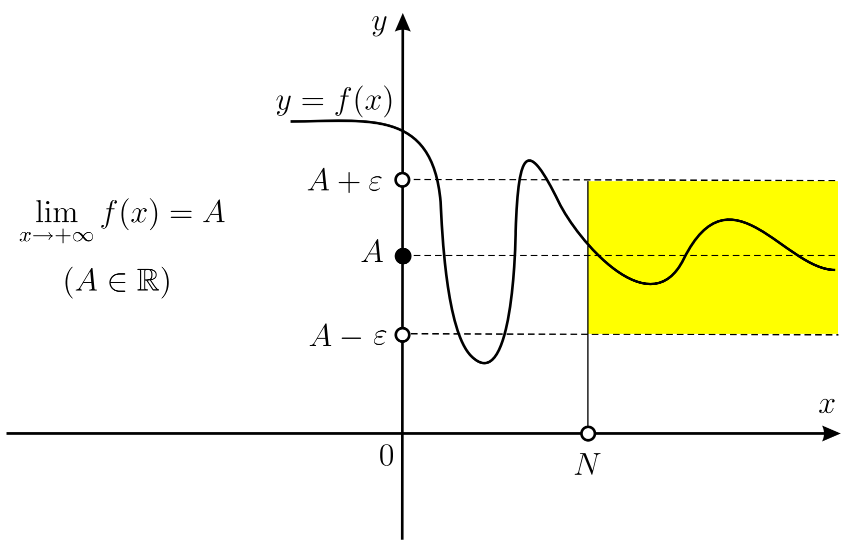
15. $a = \infty$, $A = -\infty$ (3.19. zīm.).

16. $a = \infty$, $A = \infty$ (3.20. zīm.).



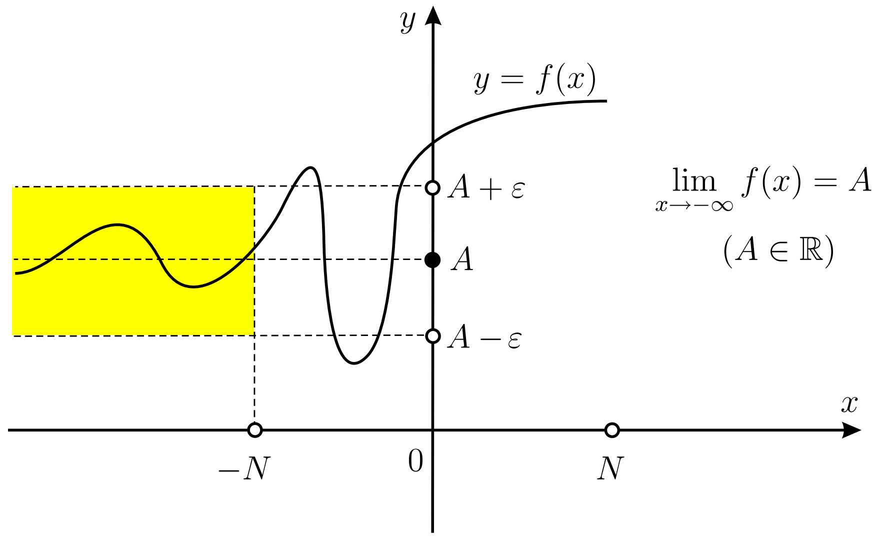
y
$y = f(x)$
$A+\varepsilon$
A
$A-\varepsilon$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$
$(a, A \in \mathbb{R})$
x
0
$a-\delta$
a
$a+\delta$

3.5. zīm.



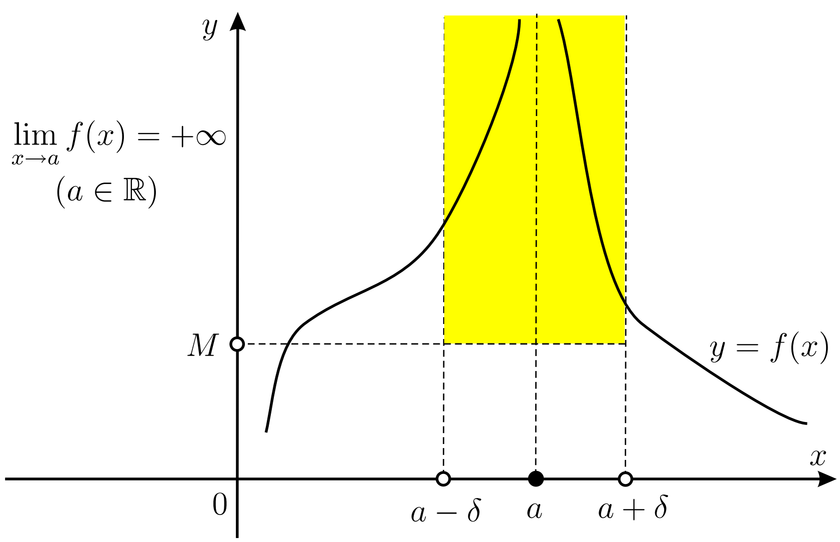
y
$y = f(x)$
$A+\varepsilon$
$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$
A
$(A \in \mathbb{R})$
$A-\varepsilon$
x
0
N

3.6. zīm.



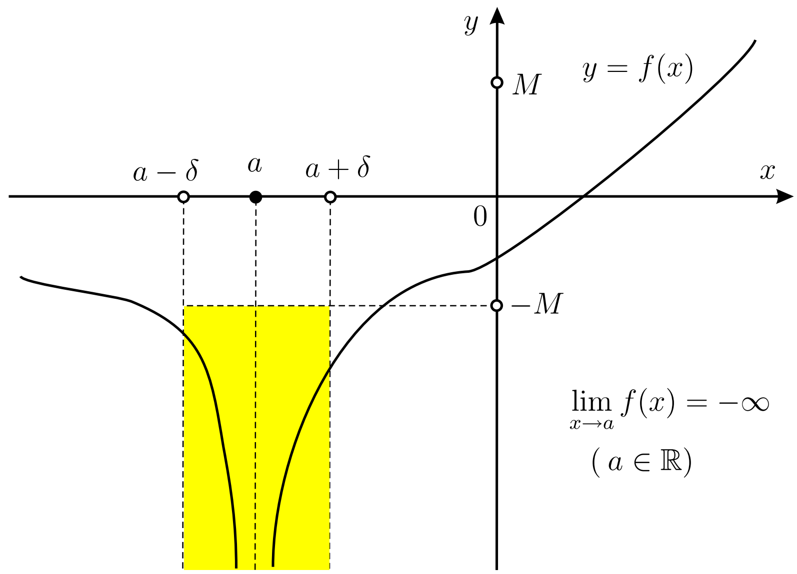
y
$y = f(x)$
$A+\varepsilon$
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$
$(A \in \mathbb{R})$
A
$A-\varepsilon$
x
$-N$
0
N

3.7. zīm.

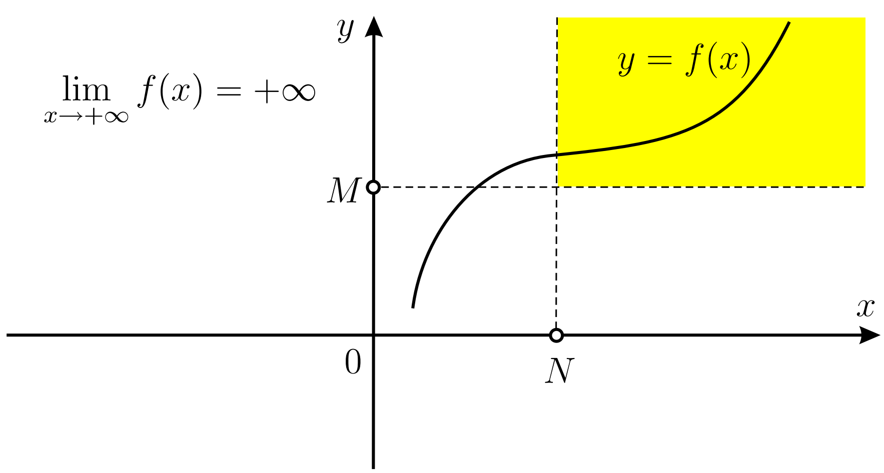


y
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$
$(a \in \mathbb{R})$
M
$y = f(x)$
x
0
$a-\delta$
a
$a+\delta$

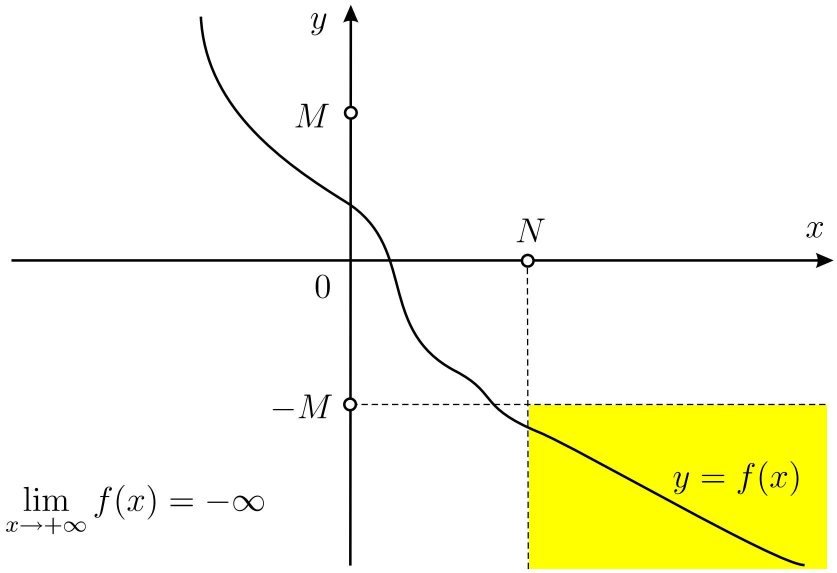
3.8. zīm.



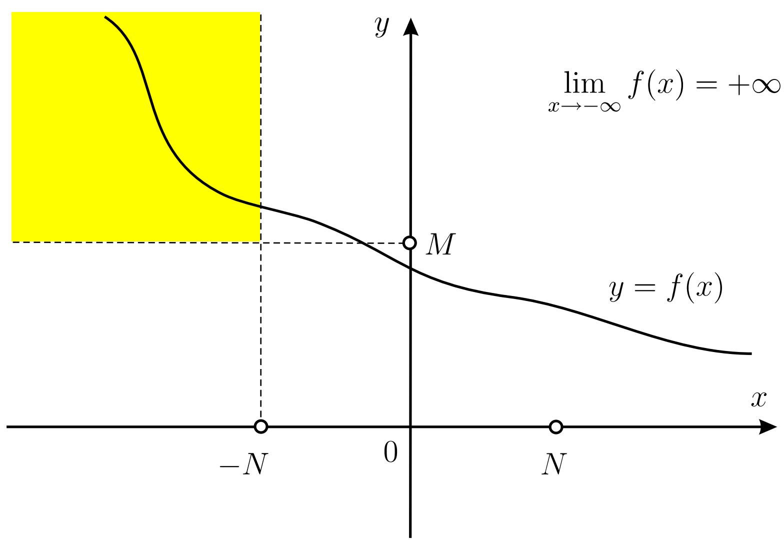
3.9. zīm.



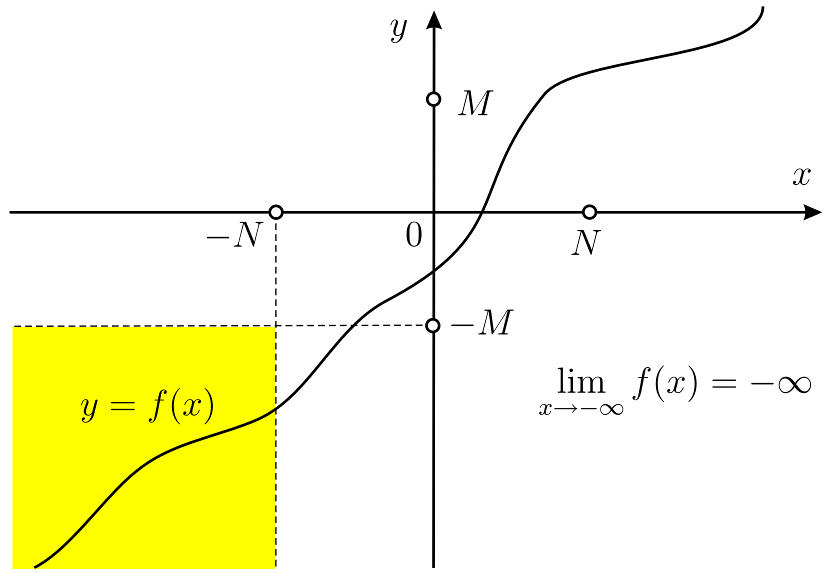
3.10. zīm.



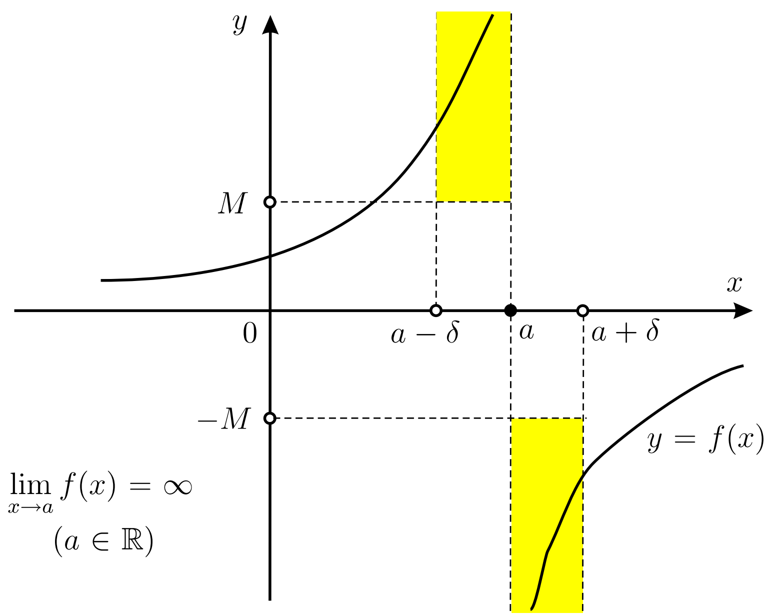
3.11. zīm.



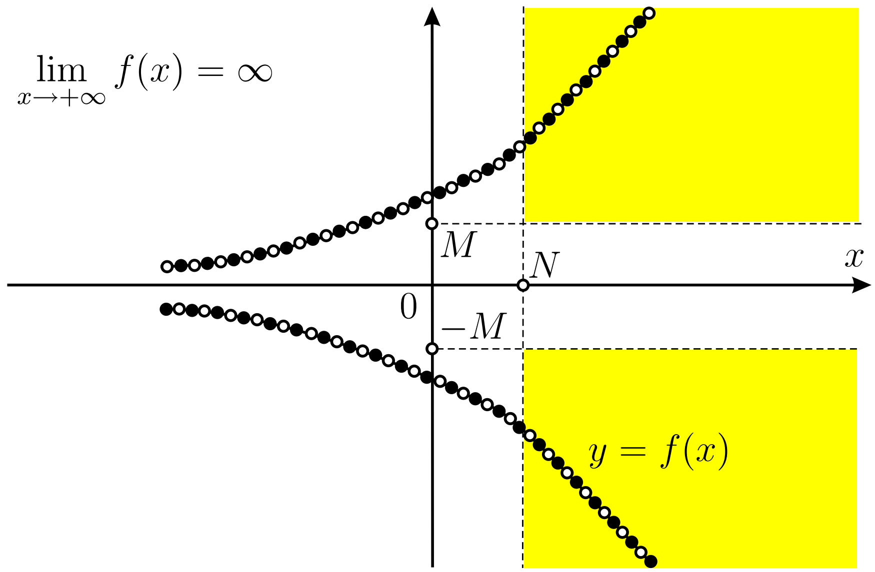
3.12. zīm.



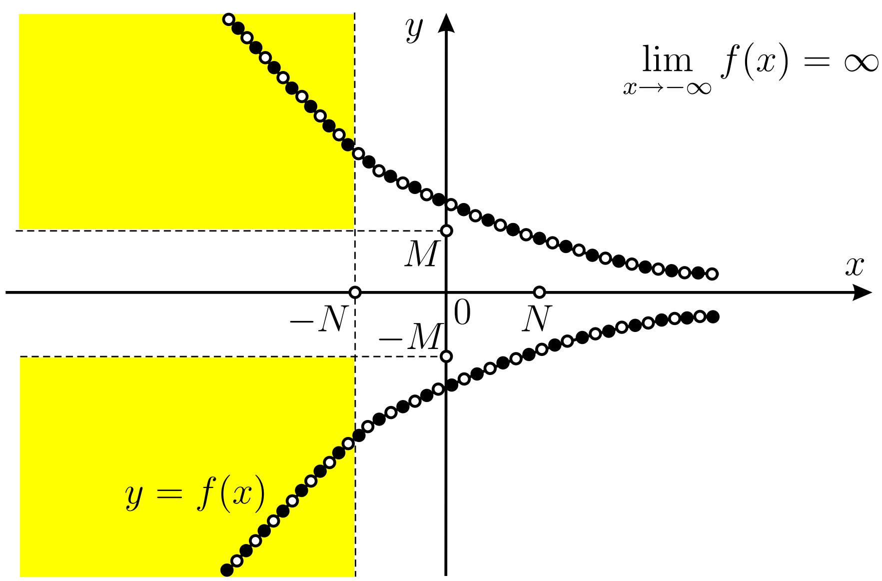
3.13. zīm.



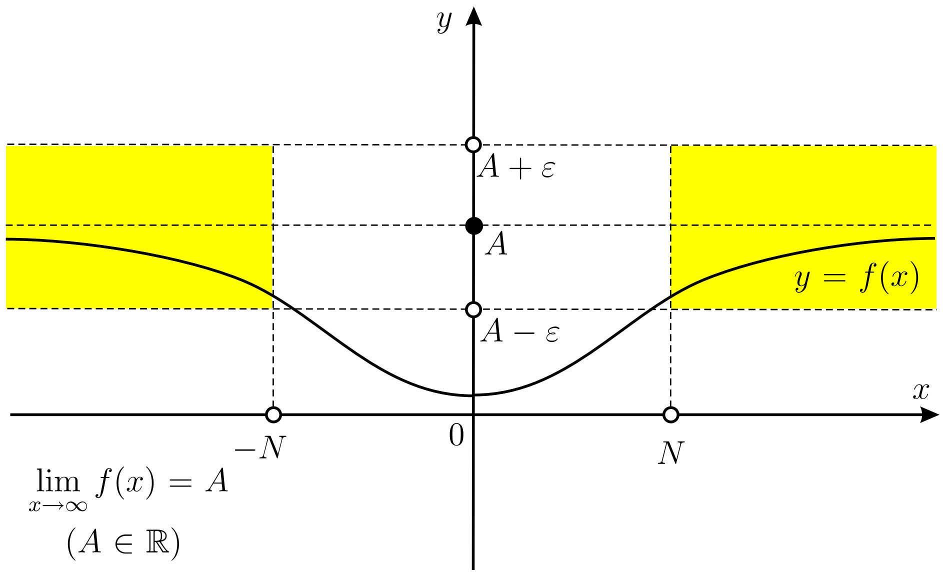
3.14. zīm.



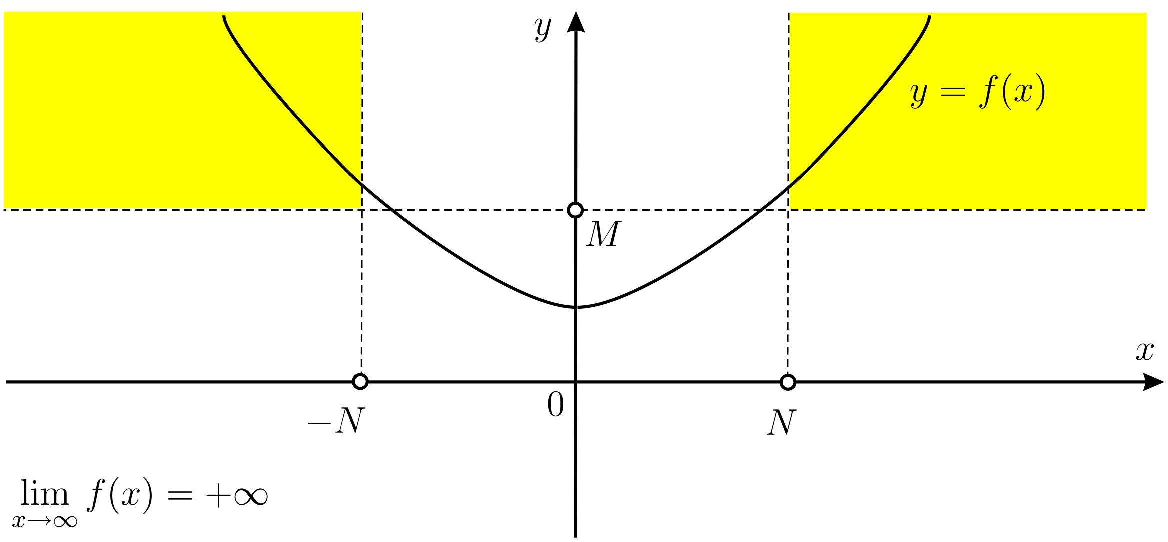
3.15. zīm.



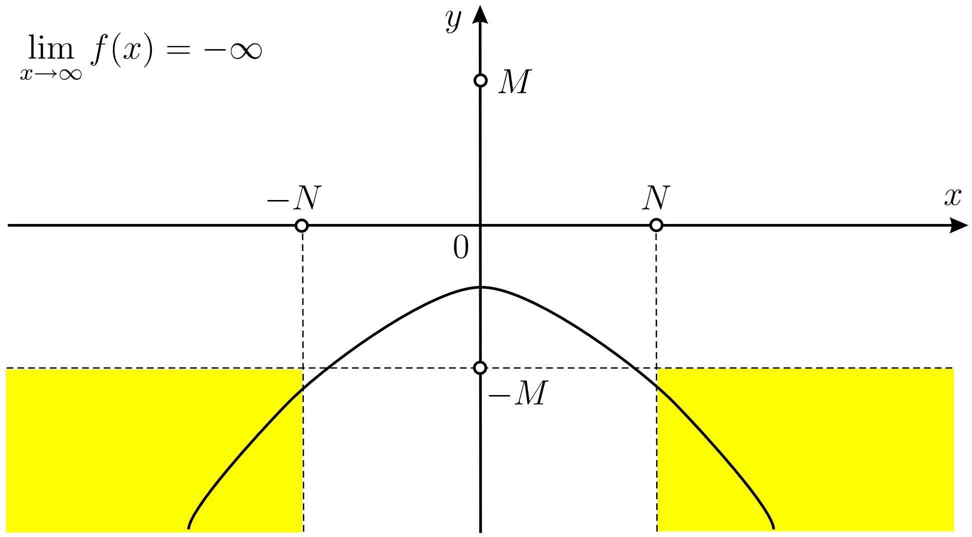
3.16. zīm.



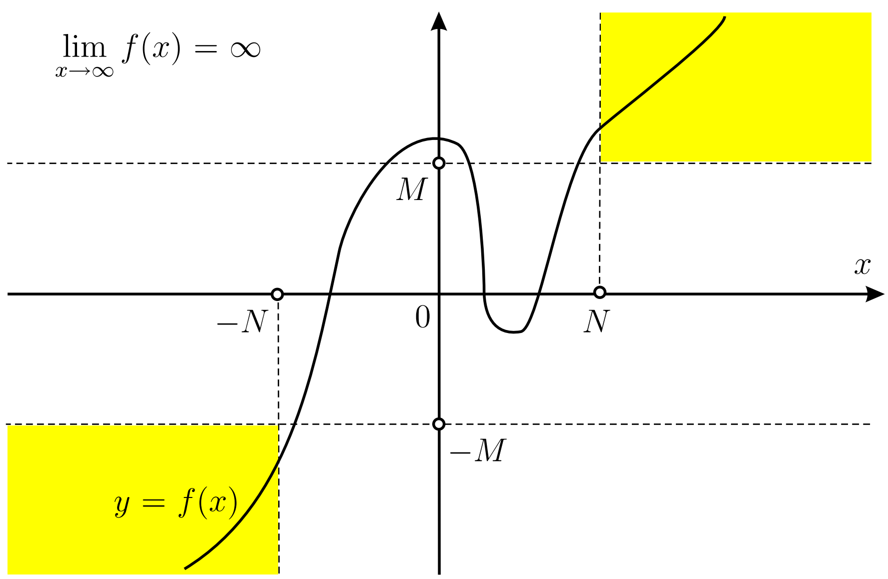
3.17. zīm.



3.18. zīm.



3.19. zīm.

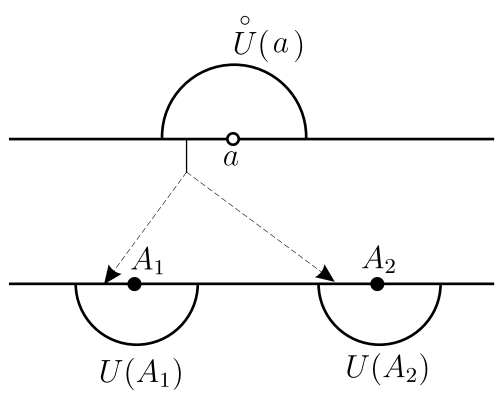


3.20. zīm.

3.3. Funkcijas robežas vienīgums

3.3. teorēma. *Ja funkcijai f punktā a eksistē robeža, tad vienīgā veidā.*

▶ Pieņemsim pretējo, t.i., ka $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_1$ un $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_2$, kur $A_1 \neq A_2$ (izņemot gadījumu, kad viena no tām ir bezgalība, bet otra - bezgalība ar zīmi). Izvēlēsimies punktu A_1 un A_2 apkārtnes $U(A_1)$ un $U(A_2)$, kas nešķeļas, t.i., tādas, lai $U(A_1) \cap U(A_2) = \emptyset$. Saskaņā ar funkcijas robežas definīciju punkta A_1 jebkurai apkārtnei $U(A_1)$ eksistē punkta a tāda apkārtne $\overset{\circ}{U}'(a)$, ka visiem $x \in \overset{\circ}{U}'(a)$, izpildīsies sakarība $f(x) \in U(A_1)$. Analoģiski punkta A_2 jebkurai apkārtnei $U(A_2)$ eksistē punkta a tāda apkārtne $\overset{\circ}{U}''(a)$, ka visiem $x \in \overset{\circ}{U}''(a)$, izpildīsies sakarība $f(x) \in U(A_2)$. Izvēlēsimies $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, kur $\overset{\circ}{U}(a) = \overset{\circ}{U}'(a) \cap \overset{\circ}{U}''(a)$. Šādiem x vienlaicīgi izpildīsies sakarības $f(x) \in U(A_1)$ un $f(x) \in U(A_2)$, kas ir pretrunā ar pieņēmumu, ka šīs apkārtnes nešķeļas (3.21. zīm.).



3.21. zīm.

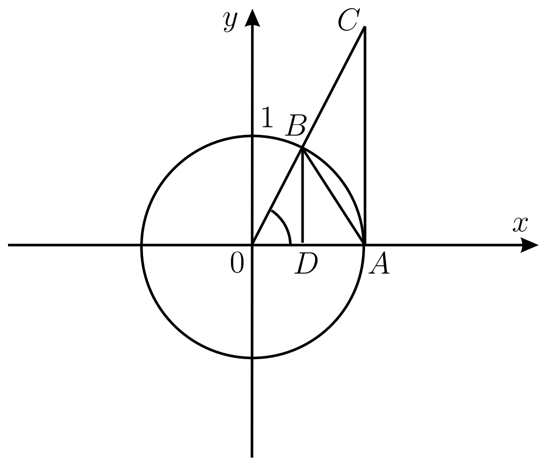
Pieņēmums, ka funkcijai f var būt divas dažādas robežas, nav pareizs. ◀

3.4. Sinusa attiecības pret argumentu robeža

3.4. teorēma. *Sinusa attiecības pret argumentu robeža, kad arguments tiecas uz nulli, ir vienāda ar 1, t.i.,*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

▶ Apskatīsim vienības riņķa līniju un izveidosim divus taisnleņķa trijstūrus BDO un CAO (3.22. zīm.) ar kopējo šauro leņķi x radiāni[7] $\left(x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right)$.



3.22. zīm.

Loka AB garums būs $|x|$, $BD = |\sin x|$, $AC = |\operatorname{tg} x|$. Salīdzinot trijstūra OBA, sektora OBA un trijstūra COA laukumus, iegūsim nevienādību

$$\frac{OA \cdot BD}{2} < \frac{OA^2 \cdot |x|}{2} < \frac{OA \cdot AC}{2}$$

jeb

$$|\sin x| < |x| < |\operatorname{tg} x| \quad (OA = 1).$$

Izdalīsim šo nevienādību ar $|\sin x| \neq 0$. Iegūsim nevienādību

$$1 < \left|\frac{x}{\sin x}\right| < \frac{1}{|\cos x|}.$$

Minētajām argumenta x vērtībām $\frac{x}{\sin x} > 0$ un $\cos x > 0$, tāpēc

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Tādējādi

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

No šīs nevienādības izriet, ka

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} < \frac{x^2}{2}.$$

[7] [lat. radius stars, rādiuss] - leņķa mērvienība, apmēram $57°17'44,8''$.

(Izmantojām, ka $|\sin x| < |x|$, tādējādi $\sin^2 x < x^2$). Esam ieguvuši, ka

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Izvēlēsimies $\varepsilon > 0$ un $\delta = \min\left(\frac{\pi}{2}; \sqrt{2\varepsilon}\right)$.
Visiem $0 < |x| < \delta$ izpildīsies

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \frac{x^2}{2} < \frac{(\sqrt{2\varepsilon})^2}{2} = \varepsilon.$$

Saskaņā ar funkcijas robežas definīciju $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. (Acīmredzami, funkcija $\frac{\sin x}{x}$ ir definēta punkta $x = 0$ pārdurtā apkārtnē.) ◀

3.5. Teorēmas par funkcijas galīgajām robežām

Turpmāk vienosimies apskatīt tikai tādas funkcijas, kas definētas punkta $x = a$ apkārtnē, izņemot varbūt pašu šo punktu. Ar punkta $x = a$ apkārtni sapratīsim šī punkta pārdurto apkārtni.

3.5. teorēma. *Ja eksistē galīga robeža $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ $(a \in \mathbb{R})$, tad f ierobežota funkcija punkta $x = a$ apkārtnē.*

▶ Saskaņā ar galīgas robežas definīciju jebkuram $\varepsilon > 0$, tai skaitā $\varepsilon = 1$, eksistē punkta $x = a$ tāda apkārtne $\overset{\circ}{U}(a)$, ka visiem $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, izpildīsies nevienādība

$$|f(x) - A| < 1,$$

t.i.,

$$A - 1 < f(x) < A + 1.$$

Tas nozīmē, ka funkcija f ierobežota punkta $x = a$ apkārtnē $\overset{\circ}{U}(a)$. ◀

Teorēmai apgrieztais apgalvojums nav spēkā, piemēram, Dirihlē funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ja } x \text{ – iracionāls skaitlis,} \\ 1, & \text{ja } x \text{ – racionāls skaitlis} \end{cases}$$

ir ierobežota punkta $x = 0$ apkārtnē, bet $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neeksistē.

3.6. teorēma. *Ja funkcija f ir konstanta punkta $x = a$ apkārtnē, t.i., visiem $x \in U(a)$, $f(x) = k = const$, tad $\lim\limits_{x\to a} f(x) = k$.*

▶ Jebkuram $\varepsilon > 0$ un katram x no minētās apkārtnes izpildīsies nevienādība $|f(x) - k| = 0 < \varepsilon$. Tātad $\lim\limits_{x \to a} f(x) = k$. ◀

3.7. teorēma. *Ja funkcijai f eksistē galīga robeža $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, tad eksistē arī robeža šīs funkcijas modulim $|f|$, pie tam*

$$\lim_{x \to a} |f(x)| = |A|.$$

▶ Saskaņā ar funkcijas f robežas A definīciju jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē punkta $x = a$ tāda apkārtne $\overset{\circ}{U}(a)$, ka visiem $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ izpildīsies nevienādība

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Saskaņā ar moduļa īpašību

$$\big||f(x)| - |A|\big| \leq |f(x) - A|,$$

tāpēc

$$\big||f(x)| - |A|\big| < \varepsilon;$$

tas nozīmē, ka

$$\lim_{x \to a} |f(a)| = |A|. \quad ◀$$

3.8. teorēma. *Ja $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A \quad (a \in \mathbb{R})$, tad*

$$\lim_{x \to a}\big(f(x) - A\big) = 0.$$

(Pierādīt patstāvīgi)

3.9. teorēma. *Ja eksistē galīgas robežas*

$$\lim_{x \to a} f(x) = A_1 \quad \textit{un} \quad \lim_{x \to a} g(x) = A_2,$$

tad eksistē galīga robeža arī šo funkciju summai, pie tam

$$\lim_{x \to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A_1 + A_2.$$

▶ Saskaņā ar funkcijas f robežas A_1 definīciju jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda punkta $x = a$ apkārtne $\overset{\circ}{U}'(a)$, ka visiem $x \in \overset{\circ}{U}'(a)$ izpildīsies nevienādība

$$|f(x) - A_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tādā pat veidā funkcijai g, tam pašam $\varepsilon > 0$ eksistē apkārtne $\overset{\circ}{U}''(a)$, ka visiem $x \in \overset{\circ}{U}''(a)$ izpildīsies nevienādība

$$|g(x) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Apzīmēsim ar $\overset{\circ}{U}(a) = \overset{\circ}{U}'(a) \cap \overset{\circ}{U}''(a)$. Tagad visiem $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ šīs divas nevienādības izpildīsies vienlaicīgi.

Tāpēc

$$\big|\big(f(x) + g(x)\big) - (A_1 + A_2)\big| \leq |f(x) - A_1| + |g(x) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tas nozīmē, ka

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A_1 + A_2. \quad ◀$$

Ar matemātiskās indukcijas metodi šo teorēmu var vispārināt uz jebkura galīga skaita funkciju summu.

3.9. teorēmai apgrieztais apgalvojums nav pareizs, piemēram, funkcijām $f(x) = 1 - \sin\frac{1}{x}$, $g(x) = \sin\frac{1}{x}$ neeksistē robežas, kad $x \to 0$, bet to summa ir konstanta un tās robeža ir viens.

3.10. teorēma. *Ja eksistē galīga robeža $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, tad eksistē galīga robeža šīs funkcijas reizinājumam ar konstanti k, pie tam*

$$\lim_{x\to a}\big(kf(x)\big) = kA.$$

▶ Gadījumā, kad $k = 0$, funkcija $kf = 0 = \text{const}$. Robeža eksistē un, acīmredzami, izpildās teorēmā minētā vienādība.

Apskatīsim gadījumu, kad $k \neq 0$. Saskaņā ar funkcijas f robežas A definīciju jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē punkta $x = a$ tāda apkārtne $\overset{\circ}{U}(a)$, ka visiem $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ izpildīsies nevienādība

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{|k|}.$$

Tātad

$$|kf(x) - kA| < \varepsilon,$$

tas nozīmē, ka

$$\lim_{x\to a}\big(kf(x)\big) = kA. \quad ◀$$

Ja $k = -1$, iegūsim:

$$\lim_{x \to a} \bigl(-f(x)\bigr) = -\lim_{x \to a} f(x).$$

Izmantojot vēl 3.9. teorēmu, iegūsim:

$$\lim_{x \to a} \bigl(f(x) - g(x)\bigr) = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x).$$

Apvienojot 3.9. un 3.10. teorēmu apgalvojumus, var teikt, ka robeža no divu funkciju lineārās kombinācijas ir vienāda ar to robežu lineāro kombināciju, t.i.,

$$\lim_{x \to a} \bigl(k_1 f(x) + k_2 g(x)\bigr) = k_1 \lim_{x \to a} f(x) + k_2 \lim_{x \to a} g(x) \quad (k_1, k_2 \in \mathbb{R}).$$

3.11. teorēma. *Ja funkcija f definēta un ierobežota punkta $x = a$ kaut kādā apkārtnē un funkcijai g eksistē robeža $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, tad eksistē robeža šo funkciju reizinājumam, pie tam*

$$\lim_{x \to a} \bigl(f(x) g(x)\bigr) = 0.$$

▶ Tā kā funkcija f ierobežota punkta $x = a$ apkārtnē $U'(a)$, tad visiem $x \in U'(a)$, izpildīsies nevienādība $|f(x)| < M \quad (M > 0)$. Saskaņā ar funkcijas g robežas definīciju jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē punkta $x = a$ tāda apkārtne $\mathring{U}''(a)$, ka visiem $x \in \mathring{U}''(a)$ izpildīsies nevienādība $|g(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$. Apzīmēsim ar $\mathring{U}(a) = U'(a) \cap \mathring{U}''(a)$. Tagad visiem $x \in \mathring{U}(a)$ abas nevienādības izpildīsies vienlaicīgi, tāpēc

$$|f(x) \cdot g(x)| < M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

un

$$\lim_{x \to a} \bigl(f(x) g(x)\bigr) = 0. \quad ◀$$

3.12. teorēma. *Ja eksistē galīgas robežas $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A_1$ un $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A_2$, tad eksistē galīga robeža šo funkciju reizinājumam, pie tam*

$$\lim_{x \to a} \bigl(f(x) g(x)\bigr) = A_1 A_2.$$

▶ Funkciju f un g reizinājumu uzrakstīsim šādi:

$$f \cdot g = (f - A_1) g + A_1 g.$$

Tā kā $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A_1$, tad saskaņā ar 3.8. teorēmu $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x) - A_1\big) = 0$, bet funkcija $g(x)$ - ierobežota, jo tai eksistē galīga robeža (skat. 3.5. teorēmu). Saskaņā ar 3.11. teorēmu

$$\lim_{x\to a}\Big(\big(f(x) - A_1\big)g(x)\Big) = 0.$$

Tā kā $A_1 = \text{const}$, tad saskaņā ar 3.10. teorēmu

$$\lim_{x\to a}\big(A_1 g(x)\big) = A_1 \lim_{x\to a} g(x) = A_1 A_2.$$

Visbeidzot, saskaņā ar 3.9. teorēmu,

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x\to a}\Big(\big(f(x) - A_1\big)g(x)\Big) + \lim_{x\to a}\big(A_1 g(x)\big) = 0 + A_1A_2 = A_1A_2. \blacktriangleleft$$

Ar matemātiskās indukcijas metodi šo teorēmu var vispārināt uz jebkura galīga skaita funkciju reizinājumu, tai skaitā

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\big)^n = \big(\lim_{x\to a} f(x)\big)^n \quad (n \ \text{– naturāls skaitlis}).$$

3.12. teorēmai apgrieztais apgalvojums nav spēkā.

3.13. teorēma. *Ja eksistē galīga un no nulles atšķirīga robeža* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \ \ (A \neq 0)$, *tad eksistē galīga robeža funkcijai* $\frac{1}{f}$, *pie tam*

$$\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}.$$

$\blacktriangleright$ Saskaņā ar 3.7. teorēmu $\lim\limits_{x\to a}|f(x)| = |A|$. Izvēlēsimies punkta $|A| \neq 0$ tādu apkārtni, kas nesatur punktu 0, t.i., $(|A| - \varepsilon; |A| + \varepsilon)$, kur, piemēram, $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Saskaņā ar funkcijas $|f|$ robežas $|A|$ definīciju izvēlētajai punkta $|A|$ apkārtnei eksistē punkta $x = a$ tāda apkārtne $\overset{\circ}{U}(a)$, ka visiem $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, izpildīsies nevienādība

$$0 < |A| - \varepsilon < \big|f(x)\big| < |A| + \varepsilon.$$

Šajā apkārtnē $\big|f(x)\big| \neq 0$ un funkcija $\frac{1}{f}$ būs definēta visos funkcijas f definīcijas apgabala punktos. No šīs nevienādības iegūsim

$$\frac{1}{|A| + \varepsilon} < \left|\frac{1}{f(x)}\right| < \frac{1}{|A| - \varepsilon}.$$

Šī nevienādība norāda, ka funkcija $\frac{1}{f}$ - ierobežota punkta $x = a$ apkārtnē. Funkciju $\frac{1}{f}$ uzrakstīsim šādi

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{A} - \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{f}(f - A).$$

Analoģiski kā 3.12. teorēmas pierādījumā iegūsim:

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{A}. \quad ◀$$

Piemēram,

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1, \text{ jo } \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ un } \frac{x}{\sin x} = \frac{1}{\frac{\sin x}{x}}.$$

3.14. teorēma. *Ja eksistē galīgas robežas* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A_1$ *un* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A_2$, *pie tam* $A_2 \neq 0$, *tad eksistē galīga robeža funkcijai* $\frac{f}{g}$, *pie tam*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{A_2}.$$

(Pierādīt patstāvīgi, izmantojot 3.13. un 3.12. teorēmas, pie tam $\frac{f}{g} = f\frac{1}{g}$).

Ja $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, tad par šo funkciju attiecības robežu vēl neko nevar pateikt. Tā ir viena no nenoteiktībām $\frac{0}{0}$, kas ir jāpēta īpaši.

3.6. Teorēma par saliktas funkcijas robežu

3.15. teorēma. *Ja eksistē robežas* $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = b$, $\lim\limits_{u \to b} f(u) = B$ *un salikta funkcija* $f\big(\varphi(x)\big)$ *definēta punkta* $x = a$ *pārdurtā apkārtnē, pie tam šajā apkārtnē* $\varphi(x) \neq b$, *tad punktā* $x = a$ *eksistē robeža saliktai funkcijai* $f\big(\varphi(x)\big)$ *un šī robeža ir* B, *t.i.,* $\lim\limits_{x \to a} f\big(\varphi(x)\big) = B$.

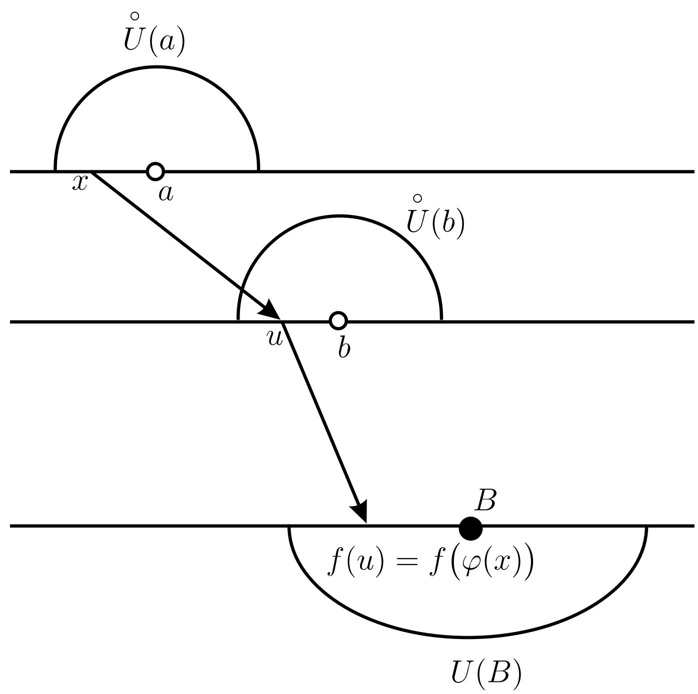
▶ Saskaņā ar funkcijas f robežas B definīciju punkta B patvaļīgai apkārtnei eksistē punkta $u = b$ tāda apkārtne $\overset{\circ}{U}(b)$, ka visiem $u \in \overset{\circ}{U}(b)$ izpildīsies sakarība $f(u) \in U(B)$ (3.23. zīm.).

Saskaņā ar funkcijas φ robežas b definīciju punkta b patvaļīgai apkārtnei, tai skaitā, arī iepriekš izvēlētajai apkārtnei $\overset{\circ}{U}(b)$ eksistē punkta $x = a$

tāda apkārtne $\overset{\circ}{U}(a)$, ka visiem $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, izpildīsies sakarība $u(x) \in \overset{\circ}{U}(b)$ (3.23. zīm.). Apvienojot šos divus apgalvojumus vienā, var teikt, ka punkta B patvaļīgai apkārtnei $U(B)$ eksistē punkta $x = a$ tāda apkārtne $\overset{\circ}{U}(a)$, ka visiem $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, izpildīsies sakarība $f(u) = f\big(\varphi(x)\big) \in U(B)$, t.i., $\lim\limits_{x \to a} f\big(\varphi(x)\big) = B$. ◀

Piemēram,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin kx}{x} = k \lim_{kx \to 0} \frac{\sin kx}{kx} = k \cdot 1 = k \quad (k \in \mathbb{R}).$$



3.23. zīm.

3.7. Teorēmas par nevienādībām

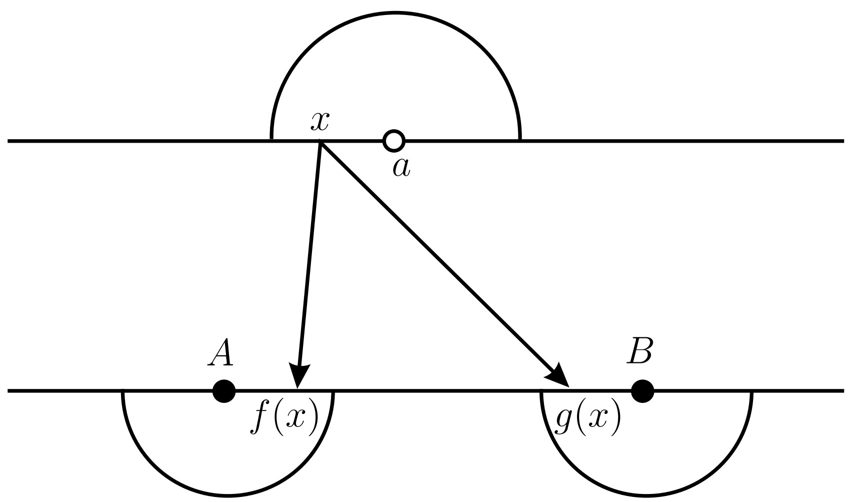
3.16. teorēma. *Ja funkcijām f un g punktā $x = a$ eksistē robežas, pie tam $\lim\limits_{x \to a} f(x) < \lim\limits_{x \to a} g(x)$, tad eksistē punkta $x = a$ tāda apkārtne, kurā $f(x) < g(x)$.*

► Apzīmēsim ar $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ un $B = \lim\limits_{x \to a} g(x)$. Pēc dotā $A < B$. Izvēlēsimies šo punktu A un B tādas apkārtnes $U(A)$ un $U(B)$, kas nešķeļas, t.i., $U(A) \cap U(B) = \emptyset$ (3.24. zīm.). Saskaņā ar funkcijas f robežas

A definīciju punkta A patvaļīgai apkārtnei, tai skaitā, apkārtnei $U(A)$ eksistē punkta $x = a$ apkārtne $\overset{\circ}{U}'(a)$, ka visiem $x \in \overset{\circ}{U}'(a)$, izpildīsies sakarība $f(x) \in U(A)$. Līdzīgā veidā apkārtnei $U(B)$ eksistē apkārtne $\overset{\circ}{U}''(a)$, ka visiem $x \in \overset{\circ}{U}''(a)$, izpildīsies sakarība $g(x) \in U(B)$. Apzīmēsim ar

$$\overset{\circ}{U}(a) = \overset{\circ}{U}'(a) \cap \overset{\circ}{U}''(a).$$

Tagad visiem $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ vienlaicīgi $f(x) \in U(A)$ un $g(x) \in U(B)$ (3.24. zīm.). Tā kā $A < B$, tad visiem $x \in \overset{\circ}{U}(a)$, $f(x) < g(x)$. ◄



3.24. zīm.

Sekas. Ja $\lim\limits_{x \to a} f(x) < c$ (vai $\lim\limits_{x \to a} f(x) > c$), tad eksistē punkta $x = a$ tāda apkārtne, kurā $f(x) < c$ (vai $f(x) > c$).

(Pierādīt patstāvīgi)

Apskatīsim gadījumu, kad $c = 0$. Šoreiz, ja

$$\lim_{x \to a} f(x) < 0 \text{ (vai } \lim_{x \to a} f(x) > 0),$$

tad eksistē punkta $x = a$ tāda apkārtne, kurā $f(x) < 0$ (vai $f(x) > 0$).

3.17. teorēma. *Ja eksistē robežas* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ *un* $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, *pie tam* $f(x) < g(x)$ *punkta* $x = a$ *kaut kādā apkārtnē, tad*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

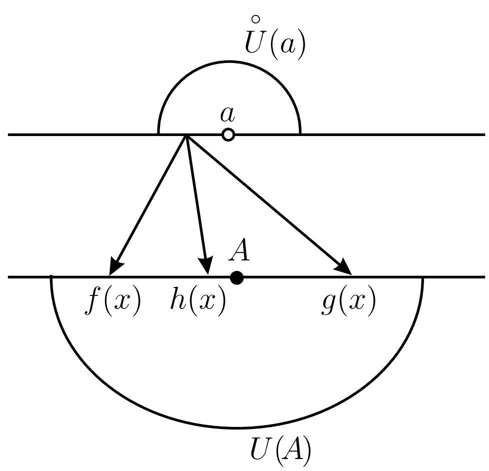
(Pierādīt patstāvīgi[8])

3.18. teorēma. *Ja punktā $x = a$ funkcijām f un g eksistē vienādas robežas, t.i., $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$ un punkta $x = a$ kaut kādā apkārtnē izpildās nevienādība $f(x) < h(x) < g(x)$, tad punktā $x = a$ funkcijai h eksistē robeža, pie tam $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$.*

► Saskaņā ar funkcijas f robežas A definīciju patvaļīgai punkta A apkārtnei $U(A)$ eksistē punkta $x = a$ tāda apkārtne $\mathring{U}'(a)$, ka visiem $x \in \mathring{U}'(a)$, izpildīsies sakarība $f(x) \in U(A)$. Punkts A ir par robežu arī funkcijai g, tāpēc apkārtnei $U(A)$ eksistē punkta $x = a$ tāda apkārtne $\mathring{U}''(a)$, ka visiem $x \in \mathring{U}''(a)$ izpildīsies sakarība $g(x) \in U(A)$. Pēc dotā visiem $x \in U'''(a)$ izpildīsies nevienādība $f(x) < h(x) < g(x)$. Apzīmēsim ar

$$\mathring{U}(a) = \mathring{U}'(a) \cap \mathring{U}''(a) \cap U'''(a).$$

Tagad visiem $x \in \mathring{U}(a)$ izpildīsies vienlaicīgi $f(x) \in U(A)$ un $g(x) \in U(A)$. Tā kā $h(x)$ atrodas starp $f(x)$ un $g(x)$, tad visiem $x \in \mathring{U}(a)$ $h(x) \in U(A)$, t.i., $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$ (3.25. zīm.). ◄



3.25. zīm.

Piemēram,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

punkta $x = 0$ apkārtnē un $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$. Tāpēc

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

[8]Izmantojot pretējā pieņēmuma paņēmienu un 3.16. teorēmu.

3.8. Funkcijas vienpusējās robežas

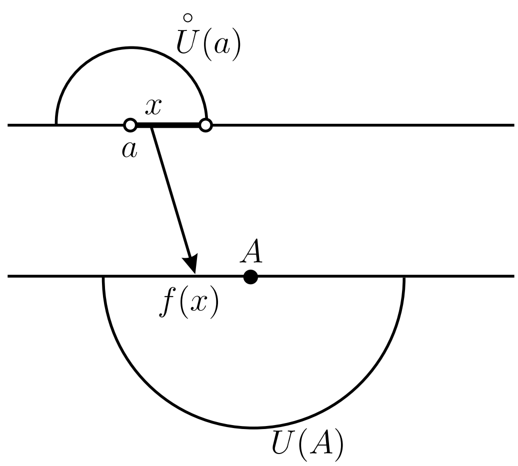
3.7. definīcija. Punktu A nosauksim par **funkcijas f robežu punktā $x = a$ ($a \neq +\infty$) no labās puses**, ja punkta A patvaļīgai apkārtnei $U(A)$ eksistē punkta $x = a$ tāda apkārtne $U(a)$, ka visiem $x > a$ un $x \in U(a)$ izpildīsies sakarība $f(x) \in U(A)$(3.26. zīm.).

Apzīmēsim

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0).$$

Analoģiski var definēt funkcijas robežu punktā no kreisās puses. Šo robežu apzīmēsim

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0).$$



3.26. zīm.

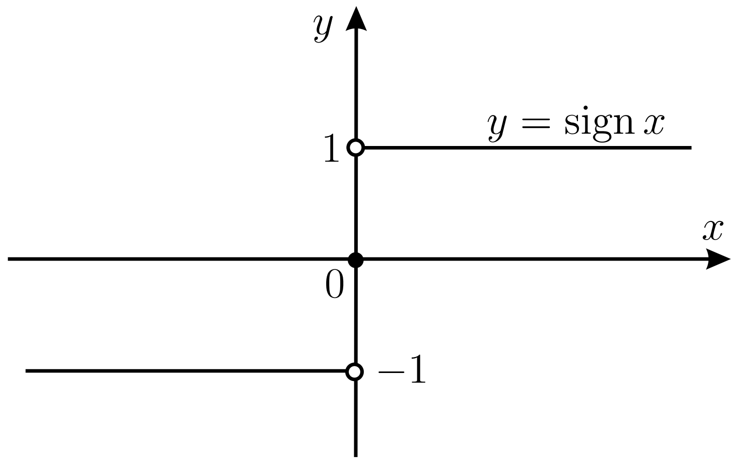
Acīmredzami, ir spēkā šādi apgalvojumi:

1. Ja $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$, tad $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ - neeksistē;
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ tad un tikai tad, kad $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = A$.

Piemēram, funkcijai

$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{ja } x > 0, \\ 0, & \text{ja } x = 0, \\ -1, & \text{ja } x < 0, \end{cases}$$

(skat.[9]) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1$, bet $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$, tāpēc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ - neeksistē (3.27. zīm.).



3.27. zīm.

3.9. Bezgalīgi mazas un bezgalīgi lielas funkcijas

3.8. definīcija. Funkciju f nosauksim par **bezgalīgi mazu funkciju**[10]**, kad x tiecas uz** a, ja $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.

Piemēram, $f(x) = x$ ir bezgalīgi maza funkcija, kad x tiecas uz nulli, jo $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

3.9. definīcija. Funkciju f nosauksim par **bezgalīgi lielu funkciju, kad x tiecas uz** a, ja $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ir bezgalība.

Piemēram, $f(x) = \frac{1}{x}$ ir bezgalīgi liela funkcija, kad x tiecas uz nulli.

3.19. teorēma. *Ja f ir bezgalīgi maza funkcija, kad x tiecas uz a, tad $\frac{1}{f}$ - bezgalīgi liela funkcija, kad x tiecas uz a.*

► Tā kā f ir bezgalīgi maza funkcija, kad x tiecas uz a, tad

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

[9][lat. signum - zīme].

[10]Parasti šādas funkcijas apzīmē ar α, β, γ utt.

Saskaņā ar robežas definīciju jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē punkta $x = a$ tāda apkārtne $\overset{\circ}{U}(a)$, ka visiem $x \in \overset{\circ}{U}(a)$ izpildīsies nevienādība $|f(x)| < \varepsilon$. Seko, ka

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| > \frac{1}{\varepsilon} = M.$$

Tātad $\lim\limits_{x\to a} \frac{1}{f(x)}$ ir bezgalība, t.i., $\frac{1}{f}$ - bezgalīgi liela funkcija, kad x tiecas uz a. ◀

Acīmredzami, 3.19. teorēmai apgrieztais apgalvojums arī ir spēkā.

Apskatīsim divas bezgalīgi mazas funkcijas α un β, kad x tiecas uz a. Apzīmēsim ar c šo funkciju attiecības $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ robežu punktā a, t.i.,

$$c = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

1. Ja $c = 0$, tad α nosauksim par **augstākas kārtas bezgalīgi mazu funkciju**, salīdzinot ar β, kad x tiecas uz a un pierakstīsim $\alpha = o(\beta)$ (skat.[11]).

2. Ja $c \neq 0$ $(c \in \mathbb{R})$, tad α, β nosauksim par **vienādas kārtas bezgalīgi mazām funkcijām**, kad x tiecas uz a.

3. Īpaši izdalīsim gadījumu, kad $c = 1$, t.i.,

   $$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

   Šoreiz α un β nosauksim par **ekvivalentām**[12] **bezgalīgi mazām funkcijām**, kad x tiecas uz a. Pierakstīsim $\alpha \sim \beta$ $(x \to a)$. Piemēram, $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$, jo $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

3.20. teorēma. *Ja* $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c$, $\alpha \sim \alpha_1$ $(x \to a)$ *un* $\beta \sim \beta_1$ $(x \to a)$, *tad* $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = c$.

Apgalvojums kļūst acīmredzams, ja $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ uzraksta šādi:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\beta_1}.$$

3.20. teorēmu plaši pielieto robežu aprēķināšanā, t.i., funkcijas aizstāj ar tām ekvivalentām bezgalīgi mazām funkcijām, kad x tiecas uz a.

[11] Lasa: α vienāds ar omikrons (grieķu alfabēta burts) no β

[12] [lat. aequivalens] kaut kas līdzvērtīgs, ar tādu pašu nozīmi, tik pat stiprs.

3.10. definīcija. Funkciju α nosauksim par k **-tās kārtas bezgalīgi mazu funkciju**, salīdzinot ar bezgalīgi mazu funkciju β, kad x tiecas uz a, ja α un β^k (k - naturāls skaitlis) ir vienādas kārtas bezgalīgi mazas funkcijas, kad x tiecas uz a.

Piemēram, funkcija $\alpha(x) = 1 - \cos 2x$ ir 2. kārtas bezgalīgi maza funkcija, kad $x \to 0$, salīdzinot ar funkciju $\beta(x) = x$, jo

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = 2 \left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2 \cdot 1 = 2.$$

3.10. Monotonas virknes robeža

3.11. definīcija. Skaitļu virkni (a_n) nosauksim par **augošu** (vai dilstošu), ja $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$), kur n - naturāls skaitlis.

3.12. definīcija. Skaitļu virkni (a_n) nosauksim par **nedilstošu** (vai neaugošu), ja $a_n \leq a_{n+1}$ (vai $a_n \geq a_{n+1}$), kur n - naturāls skaitlis.

3.13. definīcija. Skaitļu virkni (a_n) nosauksim par **ierobežotu no augšas** (vai ierobežotu no apakšas), ja ir ierobežota no augšas (vai ierobežota no apakšas) tās vērtību kopa.

3.14. definīcija. Par skaitļu virknes (a_n) **augšējo slieksni** (vai apakšējo slieksni) nosauksim šīs virknes vērtību kopas augšējo slieksni (vai apakšējo slieksni).

Šos sliekšņus apzīmēsim $\alpha = \sup a_n$, $\beta = \inf a_n$.

3.21. teorēma. *Katra augoša un ierobežota no augšas virkne ir konverģenta.*

▶ Tā kā virkne (a_n) ir ierobežota no augšas, tad tai eksistē galīgs augšējais slieksnis $\alpha = \sup a_n$. Parādīsim, ka eksistē robeža $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ un tā ir vienāda ar α.

Saskaņā ar kopas augšējā sliekšņa $\alpha = \sup a_n$ definīciju var teikt, ka

1. $a_n \leq \alpha$ (n - naturāls skaitlis);
2. jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds a_N, ka $a_N > \alpha - \varepsilon$.

Tā kā virkne (a_n) augoša, tad visiem tās numuriem $n > N$ izpildīsies nevienādība $a_n > \alpha - \varepsilon$.

Visiem numuriem n, tai skaitā arī $n > N$, izpildīsies nevienādība $a_n \leq \alpha$. Iegūsim, ka visiem $n > N$, izpildīsies divkārša nevienādība

$$\alpha - \varepsilon < a_n \leq \alpha \ \text{ vai } \ \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon,$$

t.i., virkne (a_n) konverģenta un $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. ◄

Analoģiski pierāda, ka ir konverģenta katra dilstoša un ierobežota no apakšas virkne. Šoreiz

$$\beta = \inf a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Sekas. Konverģentai un augošai virknei (a_n) izpildās nevienādība $a_n < \alpha$, kur $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (n - naturāls skaitlis).

► Saskaņā ar 3.21. teorēmu visiem numuriem n $a_n \leq \alpha$. Ja pieņemtu, ka kādam numuram N $a_N = \alpha$, tad $a_{N+1} > \alpha$, jo virkne augoša. Radās pretruna. ◄

Ilustrēsim šo teorēmu ar konkrētu piemēru. Apskatīsim virkni $a_n = \frac{2^n}{n!}$. Apskatīsim attiecību

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \leq 1,$$

tas nozīmē, ka virkne ir neaugoša un, acīmredzami, ierobežota no apakšas, piemēram, ar nulli. Tātad virkne (a_n) ir konverģenta. Tās robežu apzīmēsim ar $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Atradīsim šo robežu a.

$$a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = a_n \frac{2}{n+1}.$$

Vienādībā

$$a_{n+1} = a_n \frac{2}{n+1}$$

pāriesim pie robežas, kad n tiecas uz bezgalību. Iegūsim, ka $a = a \cdot 0$, t.i., $a = 0$. Tātad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

Esam ne tikai pierādījuši virknes (a_n) konverģenci, bet arī izskaitļojuši tās robežu.

3.11. Skaitlis e

3.22. teorēma. *Funkcijai*

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

punktā $x = +\infty$ *eksistē galīga robeža, kuru apzīmē ar* e*.*

▶ Vispirms apskatīsim virkni

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

un parādīsim, ka tā konverğē. Apskatīsim attiecību

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}}.$$

Saskaņā ar Bernulli nevienādību

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n(n+2)},$$

tāpēc

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq \left(1 + \frac{n+1}{n(n+2)}\right) \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} > \left(1 + \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} = 1.$$

Esam ieguvuši, ka $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1$, t.i., $a_n > a_{n+1}$. Seko, ka virkne (a_n) ir dilstoša un, acīmredzami, ierobežota no apakšas, piemēram, ar nulli. Virkne (a_n) konverğē; tās robežu apzīmēsim ar

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Saskaņā ar Bernulli nevienādību

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq 1 + \frac{n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n} > 2.$$

Viegli izskaitļot un pārliecināties, ka $a_7 < 3$. Tā kā virkne (a_n) ir dilstoša, tad visiem nākamajiem numuriem n $a_n < 3$. Virknes robeža e atradīsies intervālā $(2; 3)$, t.i., $2 < e < 3$.

Tā kā skaitļa x veselā sastāvdaļa $[x]$ apmierina nevienādību

$$[x] \leq x < [x] + 1,$$

tad, acīmredzami, izpildīsies arī nevienādība

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}. \qquad (*)$$

Ja x tiecas uz $+\infty$, tad $[x]$ diskrēti[13] tiecas uz $+\infty$. Saskaņā ar iepriekš apskatīto gadījumu robeža no nevienādības (*) labās puses ir e, t.i.,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} = e.$$

Parādīsim, ka robeža no nevienādības kreisās puses arī ir e,

$$\left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+2} : \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{2}.$$

Šīs vienādības labās puses pirmajam loceklim robeža ir e, t.i.,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]+2} = e,$$

bet otrajam loceklim robeža ir viens, t.i.,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{2} = 1,$$

tāpēc

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{[x]+1}\right)^{[x]} = e : 1 = e.$$

Saskaņā ar 3.18. teorēmu eksistē robeža

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = e. \blacktriangleleft$$

[13] Šoreiz $[x]$ vērtības ir naturāli skaitļi.

Parādīsim, ka funkcijai

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

punktā $x = -\infty$ eksistē robeža, kas arī ir skaitlis e.

Pārveidosim

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(\frac{x+1}{x}\right)^x = \left(\frac{x}{x+1}\right)^{-x} = \left(\frac{x+1-1}{x+1}\right)^{-x} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x} = \left(1+\frac{1}{-x-1}\right)^{-x-1} \cdot \left(1+\frac{1}{-x-1}\right).$$

Ja x tiecas uz $-\infty$, tad $-x-1$ tiecas uz $+\infty$. Robeža šīs vienādības labajai pusei ir $e \cdot 1 = e$. Tātad arī kreisajai pusei robeža eksistē un ir vienāda ar e, t.i.,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Turpmāk rakstīsim

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

Viegli saskatīt, ka

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.}$$

Skaitļa e vērtība ar 26 zīmēm pēc komata ir

$$e = 2,71828182845904523536028747\ldots.$$

3.12. Savelkošos slēgtu intervālu princips

3.15. definīcija. Slēgtu intervālu virkni $\big([a_n; b_n]\big)$ sauksim par **savelkošos slēgtu intervālu virkni**, ja

1. $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \cdots \supset [a_n; b_n] \supset \cdots;$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$

3.23. teorēma. *Savelkošos slēgtu intervālu virknei* $\big([a_n; b_n]\big)$ *eksistē vienīgs kopīgs punkts.*

▶ Izveidosim virkni (a_n). Šī virkne, acīmredzami, ir nedilstoša un ierobežota no augšas, piemēram, ar b_1. Eksistē galīga robeža

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n.$$

Otra virkne (b_n) ir neaugoša un ierobežota no apakšas, tāpēc eksistē galīga robeža

$$\beta = \lim_{n\to\infty} b_n = \inf b_n.$$

Tā kā $a_n \le b_n$, tad

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty} b_n,$$

t.i., $\alpha \le \beta$. Saskaņā ar kopas sliekšņu definīcijām $a_n \le \alpha$, $\beta \le b_n$. Tāpēc izpildīsies nevienādība $a_n \le \alpha \le \beta \le b_n$. No šīs nevienādības seko, ka $0 \le \beta - \alpha \le b_n - a_n$. Robeža no šīs nevienādības kreisās un labās puses ir nulle, tāpēc arī robeža no konstantes $\beta - \alpha$ arī ir nulle, t.i.,

$$\lim_{n\to\infty} (\beta - \alpha) = 0.$$

Robeža no konstantes ir vienāda ar šo konstanti, tāpēc seko, ka $\alpha = \beta = c$. Esam ieguvuši nevienādību $a_n \le c \le b_n$, t.i., eksistē skaitlis c, kopīgs visiem slēgtajiem intervāliem $[a_n; b_n]$. Te arī tika pierādīts šāda kopīga skaitļa c vienīgums. ◀

Vaļēju intervālu virknei šī teorēma nav spēkā, piemēram, virknei

$$(0;1), \left(0;\frac{1}{2}\right), \ldots, \left(0;\frac{1}{n}\right), \ldots$$

nav kopīgā punkta. Teorēma būs spēkā tikai tādai vaļēju intervālu virknei, kura katrs nākamais vaļējais intervāls stingri iekļaujas iepriekšējā, t.i.,

$$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$$

(n - naturāls skaitlis) un kurai

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Savelkošos slēgtu intervālu principu varētu ņemt par reālu skaitļu kopas nepārtrauktības aksiomu.

3.13. Bolcano-Veierštrāsa teorēma

3.24. teorēma. [**Bolcano** [14]**- Veierštrāsa**[15] **teorēma**]

No jebkuras ierobežotas skaitļu virknes var izdalīt konverģentu apakšvirkni.

▶ Vispirms pierādīsim, ka no jebkuras skaitļu virknes (a_n) var izdalīt monotonu apakšvirkni.

Apzīmēsim ar E kopu, kas izveidota no tiem virknes (a_n) locekļu numuriem, kuriem izpildās šāda prasība: ja $n < m$, tad $a_n > a_m$. Iespējami divi gadījumi:

1. E - bezgalīga kopa. Kopas E elementiem
$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$
atbilst dotās virknes dilstoša apakšvirkne (a_{n_k}), jo tās locekļi apmierina sakarību:
$$a_{n_1} > a_{n_2} > \cdots > a_{n_k} > \cdots$$
(skat. kopas E konstrukciju).

2. E - galīga kopa. Tātad patvaļīgam n_1 eksistē tāds numurs m, kur $n_1 < m$, ka $a_{n_1} \leq a_m$. Vismazāko starp šādiem numuriem m apzīmēsim ar n_2. Esam ieguvuši, ka $n_1 < n_2$ un atbilstoši $a_{n_1} \leq a_{n_2}$. Ar n_2 rīkosimies tāpat kā ar n_1 un iegūsim, ka $n_2 < n_3$ un atbilstoši $a_{n_2} \leq a_{n_3}$ utt. Bezgalīgi turpinot šo procesu, iegūsim dotās virknes nedilstošu apakšvirkni (a_{n_k}).

Tātad abos iespējamos gadījumos no dotās virknes (a_n) esam izdalījuši monotonu apakšvirkni (a_{n_k}).

Dotā virkne ir ierobežota, tāpēc ir ierobežota arī tās apakšvirkne (a_{n_k}). Zināms, ka katra ierobežota un monotona virkne ir konverģenta, tāpēc virkne (a_{n_k}) konverģē. ◀

[14] Bernhards Bolcano - čehu filozofs un matemātiķis (1781-1848).
[15] Kārlis Veierštrāss - vācu matemātiķis (1815-1897).

3.14. Skaitļu virknes konverğences Košī kritērijs

3.25. teorēma. [**Košī**[16] **kritērijs**]

Lai skaitļu virkne (a_n) *būtu konverğenta, nepieciešami un pietiekami, lai jebkuram* $\varepsilon > 0$ *eksistē tāds naturāls skaitlis* N *(atkarīgs no* ε*), ka visiem numuriem* n*,* $m > N$ *izpildās nevienādība*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \ (skat.^{17}).$$

▶ ***Nepieciešamība***. Tā kā virkne (a_n) konverğē, tad eksistē galīga robeža $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$; saskaņā ar virknes (a_n) robežas a definīciju jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds naturāls skaitlis, ka visiem $n > N$ izpildīsies nevienādība

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Izvēlēsimies vēl $m > N$. Šādiem m izpildīsies nevienādība

$$|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Apskatīsim

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \le |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Tātad visiem $n, m > N$ izpildīsies nevienādība $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Pietiekamība. Dots, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds naturāls skaitlis N, ka visiem $n, m > N$ izpildīsies nevienādība

$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Šī sakarība ir līdzvērtīga nevienādībai

$$a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon.$$

Ja m - fiksēts, tad šī nevienādība norāda, ka virkne (a_n) ierobežota. Saskaņā ar Bolcano-Veierštrāsa teorēmu no šīs virknes var izdalīt konverğentu apakšvirkni (a_{n_k}). Apzīmēsim ar

$$a = \lim_{k\to\infty} (a_{n_k}) \quad (a \in \mathbb{R}).$$

[16] Ogistens Košī - franču matemātiķis (1789-1857)

[17] Šādu virkni sauksim par fundamentālu virkni.

Skaitli k paņemsim tik lielu, lai $n_k > N$. Tāpēc izpildīsies nevienādība

$$a_m - \varepsilon < a_{n_k} < a_m + \varepsilon.$$

Šajā nevienādībā pāriesim pie robežas, kad k tiecas uz bezgalību. Iegūsim nevienādību

$$a_m - \varepsilon \leq a \leq a_m + \varepsilon$$

jeb

$$|a_m - a| \leq \varepsilon.$$

Tātad visiem $m > N$ izpildīsies nevienādība $|a_m - a| < \varepsilon_1$, kur $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$ (arī ir pozitīvs skaitlis). Tas nozīmē, ka dotā virkne ir konverğenta. ◀

Jautājumi

1. Definēt konverğentu skaitļu virkni un tās robežu.
2. Uzrakstīt Bernulli nevienādību.
3. Definēt diverğentas uz $+\infty$ un uz $-\infty$ skaitļu virknes.
4. Definēt funkcijas robežu punktā (funkcijas robežas vispārīgā definīcija).
5. Definēt vienu no funkcijas galīgām robežām (iespējami 4 gadījumi).
6. Definēt vienu no funkcijas bezgalīgām robežām (iespējami 12 gadījumi).
7. Formulēt teorēmu par konverğentas virknes ierobežotību.
8. Formulēt teorēmu par sinusa attiecības pret argumentu robežu.
9. Formulēt teorēmas par funkcijas galīgām robežām (funkcijas ierobežotība; konstantas funkcijas robeža; funkcijas moduļa un reizinājuma ar skaitli robeža; funkciju summas, reizinājuma un dalījuma robeža).
10. Formulēt teorēmu par saliktas funkcijas robežu.
11. Formulēt teorēmas par nevienādībām (pāreja pie robežas nevienādības, mainīga starplieluma robeža).
12. Definēt funkcijas robežu punktā no labās un no kreisās puses.
13. Definēt bezgalīgi mazu un bezgalīgi lielu funkciju.

14. Sniegt bezgalīgi mazu funkciju salīdzināšanas paņēmienus.
15. Definēt augošu, dilstošu, neaugošu un nedilstošu skaitļu virkni.
16. Definēt ierobežotu skaitļu virkni.
17. Definēt skaitļu virknes augšējo un apakšējo slieksni.
18. Formulēt teorēmu par monotonas virknes konverģenci.
19. Definēt skaitli "e".
20. Definēt savelkošos slēgtu intervālu virkni.
21. Formulēt savelkošos slēgtu intervālu principu.
22. Formulēt Bolcano-Veierštrāsa teorēmu par ierobežotas skaitļu virknes apakšvirkni.
23. Formulēt skaitļu virknes konverģences Košī kritēriju.

Vingrinājumi

1. Konstruēt konverģentu skaitļu virkni un sniegt tās robežas ģeometrisku interpretāciju.
2. Konstruēt ierobežotu un diverģentu skaitļu virkni.
3. Pierādīt, ka Dirihlē funkcijai

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \quad \text{racionāls skaitlis;} \\ 0, & \text{ja} \quad x \quad \text{iracionāls skaitlis} \end{cases}$$

   neeksistē robeža punktā $x = 0$.
4. Formulēt funkcijas robežas $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ definīciju šādos gadījumos:
   (a) $a \in \mathbb{R},\ A = +\infty$;
   (b) $a \in \mathbb{R},\ A = -\infty$;
   (c) $a = +\infty,\ A = +\infty$;
   (d) $a = +\infty,\ A = -\infty$;
   (e) $a = -\infty,\ A = +\infty$;
   (f) $a \in \mathbb{R},\ A = \infty$;

(g) $a = -\infty,\ A = \infty$;

(h) $a = \infty,\ A = +\infty$;

(i) $a = \infty,\ A = -\infty$;

(j) $a = \infty,\ A = \infty$.

5. Izskaitļot $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

6. Parādīt, ka 3.7. teorēmai apgrieztais apgalvojums nav spēkā.

7. Pierādīt 3.8. teorēmu.

8. Parādīt, ka 3.12. teorēmai apgrieztais apgalvojums nav spēkā.

9. Pierādīt 3.14. teorēmu.

10. Izskaitļot $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

11. Formulēt un pierādīt šādas teorēmas par virknes galīgām robežām:

    (a) par virknes robežas vienīgumu;

    (b) par divu konverģentu virkņu summu;

    (c) par konverģentas virknes reizinājumu ar skaitli;

    (d) par divu konverģentu virkņu reizinājumu;

    (e) par divu konverģentu virkņu dalījumu.

12. Pierādīt 3.16. teorēmas sekas.

13. Pierādīt 3.17. teorēmu.

14. Definēt funkcijas robežu punktā no kreisās puses.

15. Pierādīt, ka divu bezgalīgi mazu funkciju summa un reizinājums ir bezgalīgi maza funkcija.

16. Pierādīt, ka bezgalīgi mazas funkcijas reizinājums ar ierobežotu funkciju ir bezgalīgi maza funkcija.

17. Pierādīt, ka bezgalīgi lielai funkcijai f apgriezta funkcija $\frac{1}{f}$ ir bezgalīgi maza funkcija.

18. Pierādīt, ka $\operatorname{tg} x \sim x \quad (x \to 0)$.

19. Pierādīt, ka bezgalīgi lielas funkcijas modulis un reizinājums ar konstanti $k \neq 0$ ir bezgalīgi lielas funkcijas.

20. Pierādīt, ka divu bezgalīgi lielu funkciju reizinājums ir bezgalīgi liela funkcija.

21. Pierādīt, ka bezgalīgi lielas funkcijas reizinājums ar ierobežotu funkciju ir bezgalīgi liela funkcija.

22. Pierādīt, ka bezgalīgi lielas funkcijas un ierobežotas funkcijas summa ir bezgalīgi liela funkcija.

23. Parādīt, ka $\alpha(x) = \operatorname{tg}^3 x - \sin x$ ir 3. kārtas bezgalīgi maza funkcija, kad $x \to 0$, salīdzinot ar $\beta(x) = x$.

24. Pierādīt 3.20. teorēmu.

25. Pierādīt, ka dilstoša un ierobežota no apakšas virkne ir konverğenta.

26. Pierādīt, ka dilstošas un konverğentas virknes katrs loceklis ir lielāks par šīs virknes robežu.

27. Pierādīt, ka $\lim\limits_{\alpha \to 0}(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$.

4. nodaļa

FUNKCIJAS NEPĀRTRAUKTĪBA

4.1. Nepārtrauktas funkcijas jēdziens

4.1. definīcija. Funkciju f nosauksim par **nepārtrauktu punktā** $x_0 \in D(f)$, ja $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$, citiem vārdiem,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

No funkcijas robežas definīcijas izriet, ka funkciju f nosauksim par nepārtrauktu punktā $x_0 \in D(f)$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem x, kuriem $|x - x_0| < \delta$, izpildīsies nevienādība

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Apzīmēsim $x - x_0$ ar Δx un nosauksim par **argumenta pieaugumu** punktā x_0, bet $f(x) - f(x_0)$ ar $\Delta f(x_0)$ un nosauksim par **funkcijas pieaugumu** punktā x_0, kas atbilst argumenta pieaugumam Δx. Šajos apzīmējumos punktā nepārtrauktas funkcijas definīcija būs šāda: funkciju f nosauksim par nepārtrauktu punktā $x_0 \in D(f)$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem x, kuriem $|\Delta x| < \delta$, izpildīsies nevienādība $|\Delta f(x)| < \varepsilon$. Tas nozīmē, ka mazam argumenta pieaugumam atbilst mazs funkcijas pieaugums, t.i.,

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0.}$$

Praktiski šo vienādību visbiežāk pielieto funkciju pētīšanā uz nepārtrauktību.

4.2. definīcija. Funkciju f nosauksim par **nepārtrauktu kopā** $E \subset D(f)$, ja tā ir nepārtraukta šīs kopas katrā punktā.

4.3. definīcija. Funkciju, kas nepārtraukta savā definīcijas apgabalā, nosauksim par **nepārtrauktu funkciju**.

Turpmāk, lai pierādītu funkcijas nepārtrauktību, vajadzēs pierādīt tās nepārtrauktību definīcijas apgabala patvaļīgajā punktā x_0.

Apskatīsim dažu nepārtrauktu funkciju piemērus.

1. $f(x) = k = \text{const}$.

   Visiem $x_0 \in D(f) = \mathbb{R}$
   $$\Delta f(x_0) = k - k = 0,$$
   tāpēc $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$. Funkcija ir nepārtraukta sava definīcijas apgabala katrā punktā, tātad tā ir nepārtraukta funkcija.

2. $f(x) = x^2$.

   Patvaļīgam x_0
   $$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x)$$
   un
   $$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \big(\Delta x(2x_0 + \Delta x)\big) = 0.$$
   Tātad f ir nepārtraukta funkcija.

3. $f(x) = \sin x$.

   Patvaļīgam x_0
   $$\Delta f(x_0) = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = 2\cos\frac{x_0 + \Delta x}{2}\sin\frac{\Delta x}{2}.$$
   Tā kā
   $$\left|\cos\frac{x_0 + \Delta x}{2}\right| \leq 1$$
   un
   $$\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| \leq \frac{|\Delta x|}{2},$$
   tad
   $$|\Delta f(x_0)| \leq 2 \cdot 1 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|.$$
   Seko, ka
   $$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0.$$
   Tātad $f(x) = \sin x$ ir nepārtraukta funkcija.

4.2. Nepārtrauktu funkciju pamatīpašības

Nepārtrauktu funkciju svarīgākās īpašības apraksta šādas teorēmas.

4.1. teorēma. *Nepārtrauktas funkcijas modulis ir nepārtraukta funkcija.*

4.2. teorēma. *Nepārtrauktas funkcijas reizinājums ar konstanti ir nepārtraukta funkcija.*

4.3. teorēma. *Divu nepārtrauktu funkciju summa ir nepārtraukta funkcija.*

4.4. teorēma. *Divu nepārtrauktu funkciju reizinājums ir nepārtraukta funkcija.*

4.5. teorēma. *Divu nepārtrauktu funkciju dalījums ir nepārtraukta funkcija.*

Pierādīsim tikai vienu no šīm teorēmām, piemēram, 4.5. teorēmu.

▶ Izvēlēsimies patvaļīgu $x_0 \in D\left(\frac{f}{g}\right)$. Šis punkts $x_0 \in D(f)$ un $x_0 \in D(g)$. Tā kā funkcijas f un g ir nepārtrauktas, tad

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{un} \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Saskaņā ar teorēmu par divu funkciju dalījuma robežu eksistē

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0).$$

Tātad $\frac{f}{g}$ - nepārtraukta funkcija. ◀

Līdzīgā veidā pierāda visas pārējās teorēmas.

4.6. teorēma. [**Par robežpāreju zem nepārtrauktas funkcijas zīmes**]

Ja eksistē galīga robeža $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ un funkcija $g(y)$ nepārtraukta punktā y_0, tad

$$\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = g\big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big).$$

▶ Tā kā funkcija g nepārtraukta punktā y_0, tad $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = g(y_0)$. Saskaņā ar saliktas funkcijas $g\big(f(x)\big)$ robežu

$$\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = g(y_0) = g\big(\lim_{x\to x_0} f(x)\big). \; ◀$$

Sekas. Ja funkcija f nepārtraukta punktā x_0 un virkne $(x_n) \subset D(f)$ konverğē uz x_0, tad funkcijas vērtību virkne $\big(f(x_n)\big)$ konverğē uz $f(x_0)$.

▶ Tā kā virkne (x_n) konverğē uz x_0, tad $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Tā kā funkcija f nepārtraukta punktā x_0, tad $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Saskaņā ar 4.6. teorēmu

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x_0).$$

Seko, ka virkne $\big(f(x_n)\big)$ konverğē uz $f(x_0)$. ◀

4.7. teorēma. *Ja jebkurai uz $x_0 \in D(f)$ konverğentai virknei $(x_n) \subset D(f)$ atbilstošā virkne $\big(f(x_n)\big)$ konverğē uz $f(x_0)$, tad funkcija f nepārtraukta punktā x_0.*

Šo teorēmu viegli pierādīt no pretējā.

No 4.6. teorēmas sekām un 4.7. teorēmas izriet punktā nepārtrauktas funkcijas vēl viena definīcija (līdzvērtīga iepriekšējām).

4.4. definīcija. (Pēc Heines[1] jeb virkņu valodā).

Funkciju f nosauksim par **nepārtrauktu punktā** $x_0 \in D(f)$, ja jebkurai virknei $(x_n) \subset D(f)$, kas konverğē uz x_0, atbilstošā virkne $\big(f(x_n)\big)$ konverğē uz $f(x_0)$.

4.8. teorēma. (*Par saliktas funkcijas nepārtrauktību*)

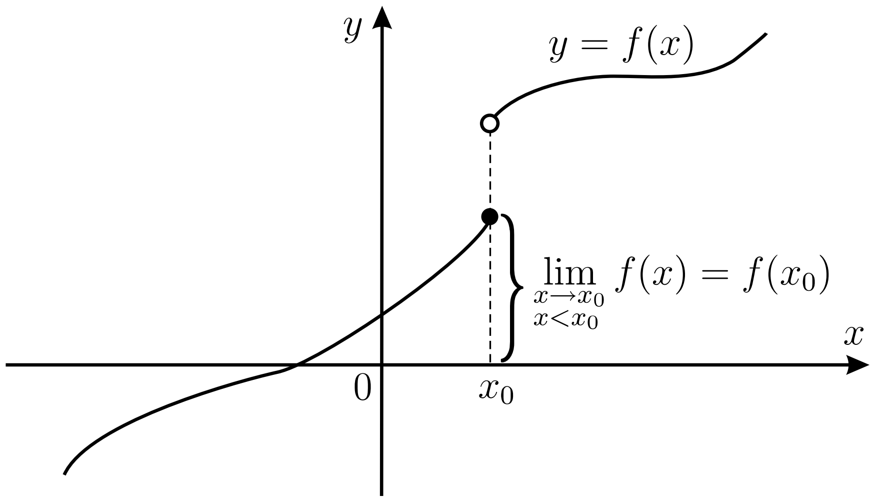
Ja funkcija f nepārtraukta punktā x_0 un $g(y)$ nepārtraukta atbilstošajā punktā y_0, kur $y_0 = f(x_0)$, tad salikta funkcija $g\big(f(x)\big)$ nepārtraukta punktā x_0.

Pierāda, izmantojot 3.15. teorēmu par saliktas funkcijas robežu.

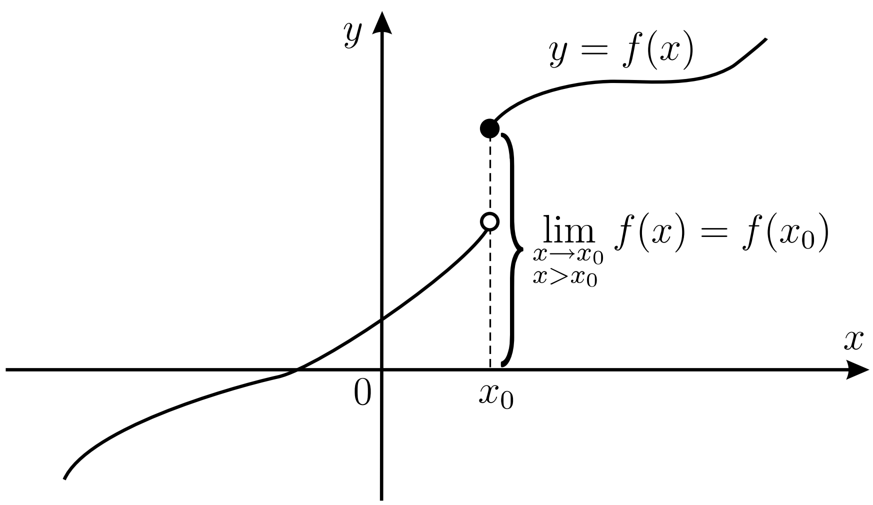
4.3. Funkcijas vienpusējā nepārtrauktība

4.5. definīcija. Funkciju f nosauksim par **nepārtrauktu punktā** $x_0 \in D(f)$ **no kreisās puses** (vai no labās puses), ja

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0) \quad \left(\text{vai } \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)\right).$$



4.1. zīm.



4.2. zīm.

4.1. zīm. attēlota nepārtraukta punktā x_0 no kreisās puses funkcija, bet 4.2. zīmējumā - nepārtraukta punktā x_0 no labās puses funkcija.

Apskatīsim dažus piemērus.

1. $f(x) = [x]$.

   Ja x_0 - vesels skaitlis, tad

$$f(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

   Tas nozīmē, ka funkcija nepārtraukta visos šādos punktos no labās puses.

[1]Heinrihs Heine - vācu matemātiķis (1821 - 1881)

Tā kā

$$f(x_0) \neq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x),$$

tad funkcija nav nepārtraukta punktā x_0 no kreisās puses. Piemēram, $f(1) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = 1$ (2.5. zīm.).

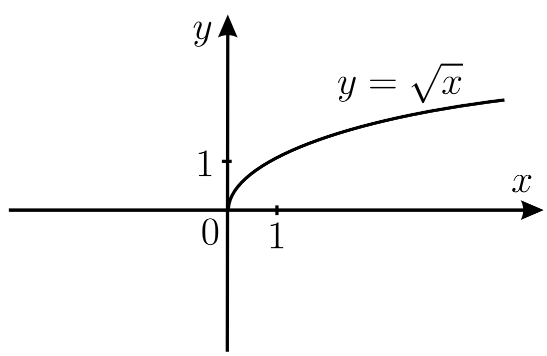
Pārējos punktos šī funkcija ir nepārtraukta gan no kreisās, gan no labās puses.

2. $f(x) = \operatorname{sign} x$.

   Šai funkcijai $f(0) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$ (3.27. zīm.). Tāpēc tā nav nepārtraukta punktā $x = 0$ ne no kreisās, ne no labās puses.

3. $f(x) = \sqrt{x}$.

   Funkcija nav definēta pa kreisi no punkta $x = 0$ un $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$ (4.3. zīm.).



4.3. zīm.

4.1. piezīme. Ja punktā x_0 funkcija ir nepārtraukta, piemēram, no labās puses, bet pa kreisi no šī punkta tā nav definēta, tad uzskatīsim, ka funkcija ir nepārtraukta punktā x_0.

Tātad funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ ir nepārtraukta punktā $x = 0$. Ar funkcijas robežu tādā punktā saprot tās vienpusējo robežu. Šajā piemērā

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = 0.$$

4.9. teorēma. *Funkcija f ir nepārtraukta punktā* [2] *x_0 tad un tikai tad, ja tā ir nepārtraukta šajā punktā gan no kreisās, gan no labās puses.*

▶ ***Nepieciešamība.*** Tā kā funkcija f nepārtraukta punktā x_0, tad $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Tas nozīmē, ka šajā punktā funkcijai eksistē vienādas vienpusējās robežas $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$ un šīs robežas ir vienādas ar $f(x_0)$. Seko, ka funkcija nepārtraukta punktā x_0 gan no kreisās, gan no labās puses.

Pietiekamība. Tā kā funkcija f nepārtraukta punktā x_0 gan no kreisās, gan no labās puses, tad

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0) \quad \text{un} \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Seko, ka eksistē $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ un tā ir vienāda ar $f(x_0)$. Funkcija f ir nepārtraukta punktā x_0. ◀

4.2. piezīme. Šī teorēma ļauj punktā $x_0 \in D(f)$ nepārtrauktu funkciju definēt ar šādu vienādību

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Piemēram, funkcijai

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ja} \quad x \le 0; \\ x, & \text{ja} \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2 = 0,$$

$$f(0) = 0^2 = 0,$$

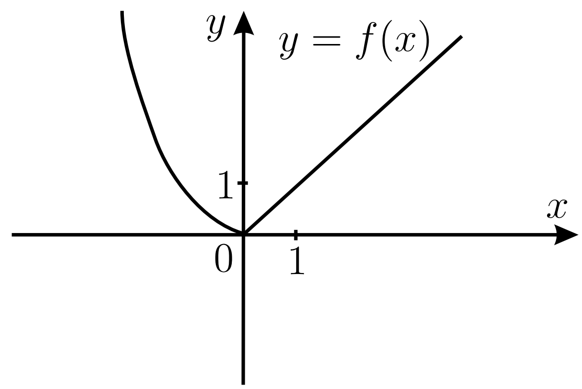
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0 \quad \text{(4.4. zīm.).}$$

Tātad

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = f(0),$$

t.i., funkcija ir nepārtraukta punktā $x = 0$.

[2] Šoreiz funkcija ir definēta punkta x_0 apkārtnē.



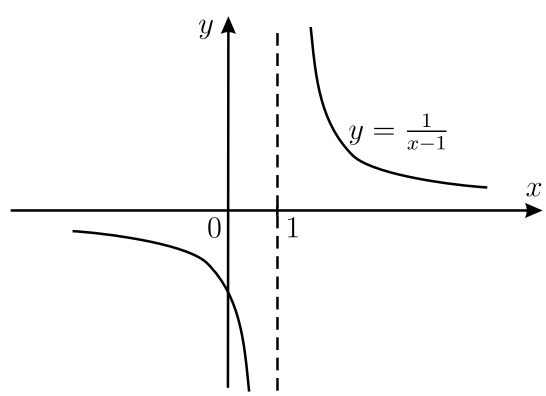
4.4. zīm.

4.4. Funkcijas pārtraukuma punkti un to klasifikācija

4.6. definīcija. Punktu $x_0 \in D(f)$ nosauksim par **funkcijas pārtraukuma punktu**, ja šajā punktā funkcija nav nepārtraukta.

Tātad visi funkcijas definīcijas apgabala punkti sadalās funkcijas pārtraukuma un nepārtrauktības punktos.

Piemēram, funkcijai $f(x) = \frac{1}{x-1}$ (4.5. zīm.) definīcijas apgabals $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pārtraukuma punktu šai funkcijai nav.



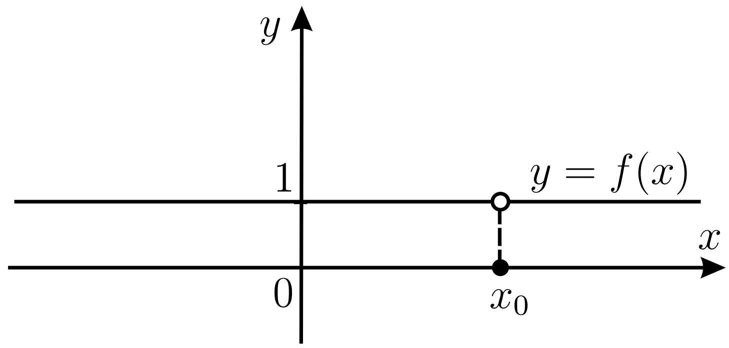
4.5. zīm.

Funkcijai

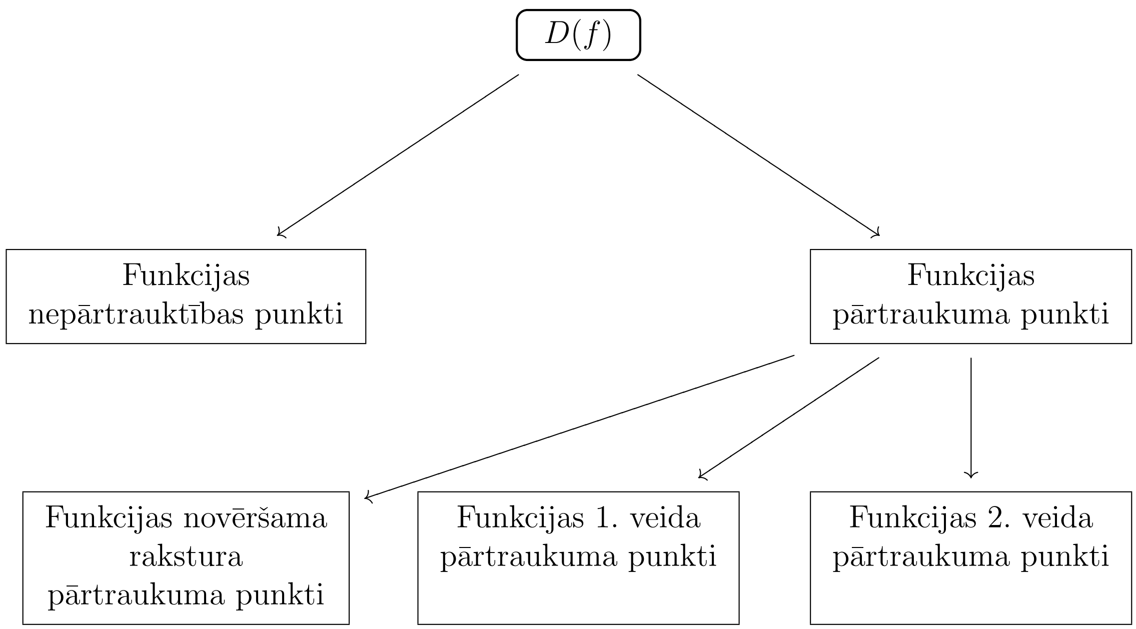
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \neq x_0, \\ 0, & \text{ja} \quad x = x_0 \end{cases}$$

(4.6. zīm.) definīcijas apgabala punkts $x = x_0$ ir par funkcijas pārtraukuma punktu, jo $f(x_0) = 0$, bet $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 1$.

Funkcijai $f(x) = \operatorname{sign} x$ definīcijas apgabala punkts $x = 0$ ir par funkcijas pārtraukuma punktu, jo $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ neeksistē (3.27. zīm.).



4.6. zīm.



4.7. zīm.

Funkcijas pārtraukuma punktu klasifikācija ir šāda: funkcijas novēršama rakstura pārtraukuma punkti, funkcijas 1. veida pārtraukuma punkti un funkcijas 2. veida pārtraukuma punkti.

4.7. definīcija. Funkcijas pārtraukuma punktu x_0 nosauksim par tās **novēršama rakstura pārtraukuma punktu**, ja punktā x_0 eksistē galīgas un vienādas funkcijas vienpusējās robežas, bet tās nav vienādas ar funkcijas vērtību šajā punktā, t.i.,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \neq f(x_0).$$

Tā kā punktā x_0 funkcijas vienpusējās robežas sakrīt, tad šajā punktā eksistē galīga robeža $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Piemēram, funkcijai

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \neq x_0, \\ 0, & \text{ja} \quad x = x_0 \end{cases}$$

punkts $x = x_0$ ir tās novēršama rakstura pārtraukuma punkts (4.6. zīm.).

Apskatīsim funkciju

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ja} \quad x \neq x_0, \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x), & \text{ja} \quad x = x_0. \end{cases}$$

Funkcija φ ir nepārtraukta punktā x_0. Šādā veidā, punktā x_0 izmainot funkcijas vērtību, funkcijas pārtraukuma punktu x_0 izdevās novērst.

4.8. definīcija. Funkcijas pārtraukuma punktu x_0 nosauksim par tās **1. veida pārtraukuma punktu**, ja punktā x_0 eksistē galīgas un dažādas funkcijas vienpusējās robežas, t.i.,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

Acīmredzot, šoreiz $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ neeksistē.

Piemēram, funkcijai $f(x) = \operatorname{sign} x$ punkts $x = 0$ ir tās 1. veida pārtraukuma punkts (3.27. zīm.).

4.9. definīcija. Funkcijas pārtraukuma punktu x_0, kas nav ne funkcijas novēršama rakstura pārtraukuma punkts, ne funkcijas 1. veida pārtraukuma punkts, nosauksim par funkcijas **2. veida pārtraukuma punktu**.

Acīmredzami, funkcijas 2. veida pārtraukuma punkti ir tie pārtraukuma punkti, kuros vismaz viena no šīs funkcijas vienpusējām robežām ir bezgalība vai vispār neeksistē.

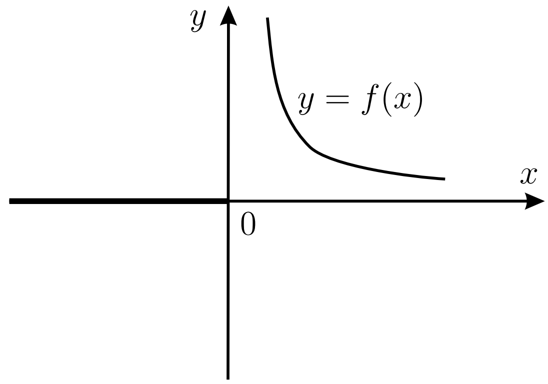
Piemēram, funkcijai

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ja} \quad x > 0 \\ 0, & \text{ja} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

(4.8. zīm.) tās pārtraukuma punkts $x = 0$ ir funkcijas 2. veida pārtraukuma punkts, jo

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty.$$

Apskatīsim vēl dažus iespējamus gadījumus:



4.8. zīm.

1. Funkcija definēta punktā x_0 un tikai, piemēram, pa labi no punkts x_0.

   (a) Eksistē galīga $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$.

   Kā tika atzīmēts iepriekš, uzskatīsim, ka eksistē
   $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$
   un ka f nepārtraukta šajā punktā.

   (b) Eksistē galīga $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) \neq f(x_0)$.

   Arī šoreiz uzskatīsim, ka eksistē $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$. Punkts x_0 būs funkcijas novēršama rakstura pārtraukuma punkts.

   (c) Robeža $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$ neeksistē vai ir bezgalība. Punkts x_0 būs funkcijas 2. veida pārtraukuma punkts.

2. Ja punkts $x_0 \notin D(f)$ un eksistē galīga $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, tad funkciju var definēt punktā x_0, turpinot to pēc nepārtrauktības, t.i.,
$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ja } x \neq x_0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & \text{ja } x = x_0. \end{cases}$$

Piemēram, funkcija $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ nav definēta punktā $x = 0$ un eksistē
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Funkcija
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ja } x \neq 0, \\ 1, & \text{ja } x = 0 \end{cases}$$
būs nepārtraukta punktā $x = 0$.

4.5. Monotonas funkcijas robeža un tās pārtraukuma punkti

4.10. teorēma. *Ja funkcija f definēta punktā x_0 un tā apkārtnē, monotona šajā apkārtnē, tad punktā x_0 tai eksistē galīgas vienpusējās robežas, pie tam augošai vai nedilstošai funkcijai*

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

dilstošai vai neaugošai funkcijai

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \geq f(x_0) \geq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

▶ Apskatīsim tikai **augošu** funkciju. Apzīmēsim ar E kopu, kas sastāv no punkta x_0 minētās apkārtnes tiem punktiem x, kuriem $x \leq x_0$. Visiem $x \in E$ izpildīsies nevienādība $f(x) \leq f(x_0) = \text{const}$. Tas nozīmē, ka kopā E funkcija f ierobežota no augšas ar $f(x_0)$. Tātad kopā E eksistē galīgs funkcijas augšējais slieksnis[3]

$$b = \sup_E f(x),$$

pie tam $b \leq f(x_0)$. Saskaņā ar kopas augšējā sliekšņa definīciju eksistē tāds $x' \in E$, ka $f(x') > b - \varepsilon$.

Tā kā funkcija f ir augoša, tad visiem x, kuriem $x' < x < x_0$, izpildīsies nevienādība $f(x') < f(x)$.

Ievērojot, ka $f(x') > b - \varepsilon$, iegūsim $b - \varepsilon < f(x)$. Acīmredzami, $f(x) \leq b$, tāpēc visiem šādiem x ($x' < x < x_0$) izpildīsies nevienādība

$$b - \varepsilon < f(x) \leq b \quad \text{vai} \quad b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon,$$

t.i.,

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Tātad punktā x_0 eksistē galīga robeža no kreisās puses un tā ir vienāda ar b, t.i.,

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = b,$$

[3] Ar funkcijas f augšējo slieksni kopā E $\sup\limits_E f(x)$ sapratīsim šīs funkcijas atbilstošas vērtību kopas $f(E)$ augšējo slieksni, t.i., $\sup\limits_E f(x) = \sup f(E)$.

pie tam

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \leq f(x_0),$$

jo $b \leq f(x_0)$.

Ja apzīmē ar E kopu, kas sastāv no punkta x_0 minētās apkārtnes tiem punktiem x, kuriem $x \geq x_0$ un rīkojas līdzīgi, tad iegūst, ka punktā x_0 eksistē galīga robeža no labās puses, pie tam

$$f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x). \blacktriangleleft$$

4.11. teorēma. *Punktā x_0 un tā apkārtnē definēta un monotona funkcija ir vai nu nepārtraukta šajā punktā, vai x_0 ir šīs funkcijas 1. veida pārtraukuma punkts.*

▶ Apskatīsim tikai **augošu** funkciju. Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu punktā x_0 eksistē galīgas vienpusējās robežas, pie tam

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Iespējami šādi divi gadījumi:

1. $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

   Acīmredzami, funkcija f ir nepārtraukta punktā x_0, jo eksistē

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

   Šoreiz $\lim_{x \to x_0} f(x)$ neeksistē. Punkts x_0 ir funkcijas 1. veida pārtraukuma punkts. ◀

4.6. Bolcano teorēma par nepārtrauktas funkcijas starpvērtībām

4.12. teorēma. [**Bolcano teorēma**]

Ja funkcija f ir nepārtraukta intervālā $\mathfrak{I}$, tad patvaļīgiem $a, b \in \mathfrak{I}$, kuriem $f(a) \neq f(b)$ un patvaļīgam C, kas atrodas starp $f(a)$ un $f(b)$, eksistē tāds c, kas atrodas starp a un b, ka $f(c) = C$.

▶ Pieņemsim, ka $a < b$. Apzīmēsim ar $F(x) = f(x) - C$. Funkcija F arī nepārtraukta intervālā $\mathfrak{I}$, pie tam tai vērtības slēgtā intervāla $[a; b]$ galapunktos ir ar pretējām zīmēm, jo

$$F(a)F(b) = \big(f(a) - C\big) \cdot \big(f(b) - C\big) < 0$$

(C atrodas starp $f(a)$ un $f(b)$).

Parādīsim, ka intervālā $[a; b]$ eksistē tāds punkts c, kurā $F(c) = 0$, t.i., $f(c) = C$.

Intervālu $[a; b]$ sadalīsim uz pusēm. Ja dalījuma punktā funkcijas F vērtība ir nulle, tad teorēma ir pierādīta. Pretējā gadījumā to daļu, kuras galapunktos funkcijas F vērtības ir ar pretējām zīmēm, apzīmēsim ar $[a_1; b_1]$. Ar intervālu $[a_1; b_1]$ rīkosimies tāpat kā ar $[a; b]$.

Ja kādā no dalīšanas etapiem nonāksim pie tāda dalījuma punkta, kurā funkcijas F vērtība ir nulle, tad dalīšanas procesu pārtrauc un teorēma ir pierādīta. Ja dalīšanas process turpinās bezgalīgi, tad iegūsim savelkošos slēgtu intervālu virkni

$$[a; b] \supset [a_1; b_1] \supset \cdots \supset [a_n; b_n] \supset \cdots,$$

kurai eksistē vienīgais kopīgais punkts c. Šis punkts c pieder visiem intervāliem, tai skaitā, arī intervālam $[a; b]$. Saskaņā ar dalīšanas procesa nosacījumu

$$F(a_n)F(b_n) < 0.$$

Pāriesim pie robežas, kad n tiecas uz bezgalību un iegūsim

$$\lim_{n\to\infty} \big(F(a_n)F(b_n)\big) \leq 0$$

jeb

$$F\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot F\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) \leq 0.$$

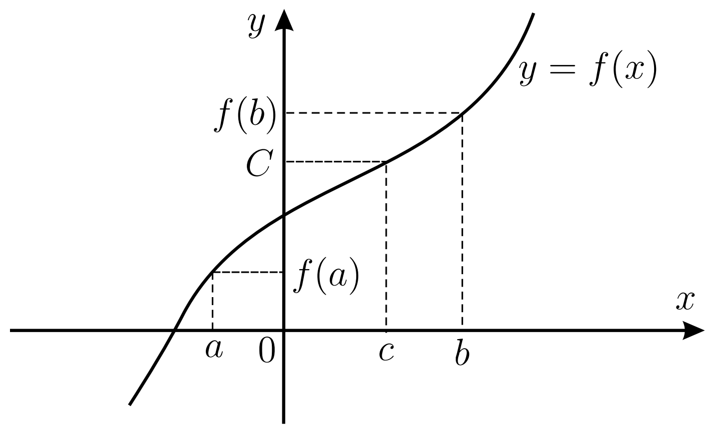
Tā kā $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, tad iegūsim, ka

$$\big(F(c)\big)^2 \leq 0.$$

Seko, ka $F(c) = 0$ jeb $f(c) = C$. Punkts c nesakrīt ne ar punktu a, ne ar punktu b, jo $F(c) = 0$, bet $F(a) \neq 0$ un $F(b) \neq 0$ (4.9. zīm.). ◀

Šādi punkti c, kuros $f(c) = C$, var būt arī vairāki. Stingri monotonai funkcijai tāds punkts c ir vienīgs.

No šīs teorēmas izriet, ka nepārtrauta funkcija intervālu attēlo par intervālu.



4.9. zīm.

4.7. Apvērstas funkcijas nepārtrauktība

4.13. teorēma. *Ja funkcija f nepārtraukta un stingri monotona intervālā $\langle a; b\rangle$, tad tās apvērstā funkcija g nepārtraukta atbilstošajā intervālā.*

▶ Funkcijai f apvērsta funkcija g eksistē, jo f stingri monotona funkcija. Apzīmēsim ar $m = \inf\limits_{\langle a;b\rangle} f(x)$ un $M = \sup\limits_{\langle a;b\rangle} f(x)$. Tā kā f nepārtraukta funkcija, tad tā attēlo intervālu $\langle a; b\rangle$ par intervālu $\langle m; M\rangle$, kurā ir definēta tās apvērstā funkcija g.

Apskatīsim tikai gadījumu, kad f augoša funkcija. Tās apvērstā funkcija g arī būs augoša funkcija.

Izvēlēsimies patvaļīgu y_0 ($m < y_0 < M$) un parādīsim, ka funkcija g nepārtraukta punktā y_0. Saskaņā ar Bolcano teorēmu (skat. 4.12. teorēmu) par nepārtrauktas funkcijas starpvērtībām eksistē tāds $x_0 \in \langle a; b\rangle$, ka $f(x_0) = y_0$ jeb
$x_0 = g(y_0)$.

Izvēlēsimies jebkuru $\varepsilon > 0$, bet tādu, lai

$$[x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon] \subset \langle a; b\rangle.$$

Tā kā f nepārtraukta un augoša funkcija, tad tā attēlo šo slēgto intervālu par intervālu $\big[f(x_0 - \varepsilon); f(x_0 + \varepsilon)\big]$. Tā kā

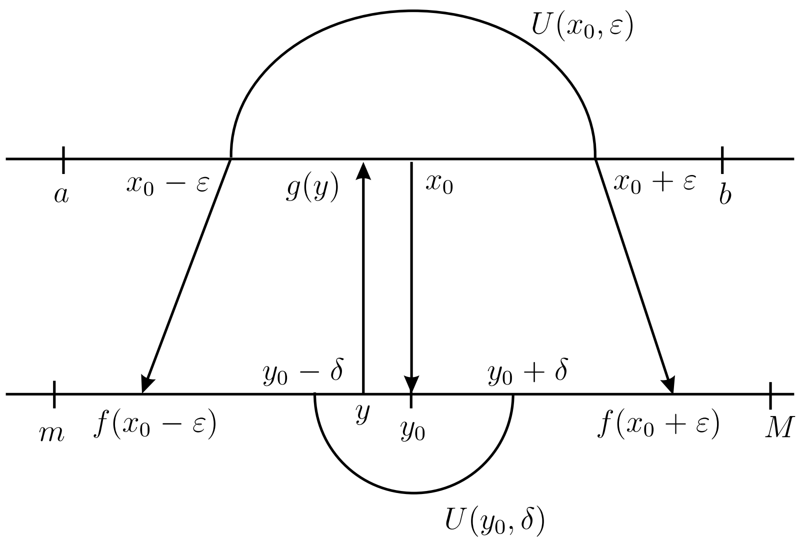
$$x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon,$$

tad

$$f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon).$$

Izvēlēsimies punkta $f(x_0)$ tādu δ -apkārtni, lai

$$f(x_0-\varepsilon) < f(x_0)-\delta < f(x_0)+\delta < f(x_0+\varepsilon) \text{ (4.10. zīm.).}$$



4.10. zīm.

Jebkuram y, kas piederēs punkta $y_0 = f(x_0)$ δ -apkārtnei, izpildīsies nevienādība

$$f(x_0-\varepsilon) < y < f(x_0+\varepsilon).$$

Tā kā g augoša funkcija, tad izpildīsies šāda nevienādība:

$$g\big(f(x_0-\varepsilon)\big) < g(y) < g\big(f(x_0+\varepsilon)\big)$$

jeb

$$x_0-\varepsilon < g(y) < x_0+\varepsilon,$$

t.i., $g(y)$ pieder punkta x_0 ε -apkārtnei.

Seko, ka

$$\lim_{y\to y_0} g(y) = x_0 = g(y_0),$$

t.i., funkcija g nepārtraukta punktā y_0. Tā kā y_0 ir patvaļīgs punkts, tad g -nepārtraukta funkcija intervālā $\langle m; M\rangle$. ◀

4.8. Slēgtā intervālā nepārtrauktu funkciju pamatīpašības

Slēgtā intervālā nepārtrauktu funkciju svarīgākās īpašības apraksta šādas trīs teorēmas: Veierštrāsa I teorēma, Veierštrāsa II teorēma un Kantora[4] teorēma.

4.14. teorēma. (*Veierštrāsa I teorēma*).

Slēgtā intervālā nepārtraukta funkcija ir ierobežota šajā intervālā.

► Pieņemsim pretējo, t.i., ka slēgtajā intervālā $[a;b]$ nepārtraukta funkcija f nav ierobežota šajā intervālā. Intervālu $[a;b]$ sadalīsim trīs vienādās daļās un to intervālu, kurā funkcija nav ierobežota, apzīmēsim ar $[a_1;b_1]$. (Tāds intervāls, acīmredzami, eksistē). Ar intervālu $[a_1;b_1]$ rīkosimies tāpat kā ar $[a;b]$. Turpinot šo procesu bezgalīgi, iegūsim savelkošos slēgtu intervālu virkni

$$[a;b] \supset [a_1;b_1] \supset \cdots \supset [a_n;b_n] \supset \cdots,$$

kur

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{3^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Saskaņā ar savelkošos slēgtu intervālu principu eksistē vienīgs visiem intervāliem kopīgais punkts c. Izvēlēsimies punkta $c \in [a;b]$ patvaļīgu δ -apkārtni $U(c;\delta)$. Kāds arī nebūtu $\delta > 0$, eksistē tāds numurs k, ka intervāls $[a_k;b_k] \subset U(c;\delta)$. Saskaņā ar konstrukciju f neierobežota intervālā $[a_k;b_k]$, tātad neierobežota arī apkārtnē $U(c;\delta)$. Tā kā f nepārtraukta intervālā $[a;b]$, tad tā būs nepārtraukta arī punktā c. Saskaņā ar punktā nepārtrauktu funkciju īpašībām f ierobežota punkta c apkārtnē. Pretruna. ◄

Vaļējā intervālā teorēma nav spēkā. Piemēram, intervālā $(0;1)$ nepārtraukta funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ nav ierobežota šajā intervālā.

Tikpat būtiska ir otra prasība - funkcijas nepārtrauktības nosacījums. Piemēram, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{ja } \ 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{ja } \ x = 0 \end{cases}$$

ir definēta slēgtā intervālā, bet nav ierobežota šajā intervālā.

4.15. teorēma. (*Veierštrāsa II teorēma*).

Slēgtā intervālā nepārtraukta funkcija sasniedz šajā intervālā savu vismazāko un vislielāko vērtību.

[4] Georgs Kantors - vācu matemātiķis, mūsdienu kopu teorijas pamatlicējs (1845 - 1918)

▶ Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu funkcija f ierobežota slēgtā intervālā $[a;b]$, t.i., eksistē galīgi $m = \inf\limits_{[a;b]} f(x)$ un $M = \sup\limits_{[a;b]} f(x)$.

Atliek tikai pierādīt, ka eksistē tādi punkti c, $C \in [a;b]$, ka $f(c) = m$ un $f(C) = M$. Pieņemsim pretējo, t.i., ka, piemēram, tāda $C \in [a;b]$, kurā funkcijas vērtība būtu vienāda ar M, nav. Tādā gadījumā visiem $x \in [a;b]$ $M - f(x) > 0$ un funkcija $\frac{1}{M-f(x)}$ būs nepārtraukta šajā intervālā. Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu šī funkcija būs ierobežota minētajā intervālā, t.i., eksistē tāds $p > 0$, ka visiem $x \in [a;b]$, izpildīsies nevienādība

$$0 < \frac{1}{M - f(x)} < p,$$

jeb

$$f(x) < M - \frac{1}{p}.$$

Šī nevienādība ir pretrunā ar funkcijas f augšējā sliekšņa M definīciju, jo saskaņā ar šo definīciju eksistē tāds $x' \in [a;b]$, ka

$$f(x') > M - \frac{1}{p} \quad \left(\frac{1}{p} > 0\right).$$

Līdzīgi var pierādīt, ka intervālā $[a;b]$ eksistē tāds punkts c, ka $f(c) = m$.
◀

Šādi punkti c un C var būt arī vairāki.

Funkcijas nepārtrauktības nosacījums ir būtisks, piemēram, funkcija

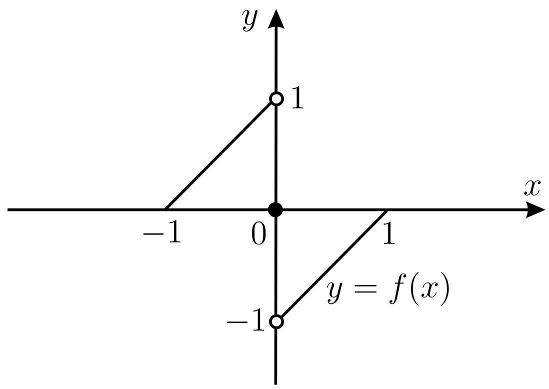
$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{ja } -1 \le x < 0, \\ 0, & \text{ja } x = 0, \\ x-1,, & \text{ja } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

(4.11. zīm.) intervālā $[0;1]$ nesasniedz ne savu vismazāko, ne savu vislielāko vērtību.

4.10. definīcija. Funkciju f nosauksim par **vienmērīgi nepārtrauktu** intervālā $\mathfrak{I}$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $x', x'' \in \mathfrak{I}$, kuriem $|x'' - x'| < \delta$, izpildās nevienādība

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Acīmredzami, katra vienmērīgi nepārtraukta funkcija ir nepārtraukta funkcija. Apgriezts apgalvojums, vispārīgi runājot, nav spēkā.



4.11. zīm.

Piemēram, $f(x) = \frac{1}{x}$ nepārtraukta intervālā $(0; 1)$.

Apskatīsim izteiksmi

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \frac{|x_2 - x_1|}{x_1 x_2}.$$

Izvēlēsimies $\varepsilon < 1$, $x_1 = \frac{\varepsilon}{n}$ un $x_2 = \frac{\varepsilon}{n+1}$. Šādām argumenta vērtībām

$$|f(x_2) - f(x_1)| = \frac{1}{\varepsilon} > 1.$$

Tātad, lai cik tuvas arī nebūtu argumenta vērtības x_1 un x_2, attālums starp to attēliem $f(x_1)$ un $f(x_2)$ ir lielāks par vienu.

4.16. teorēma. [**Kantora teorēma**]

Slēgtā intervālā nepārtraukta funkcija ir vienmērīgi nepārtraukta šajā intervālā.

► Pieņemsim pretējo, t.i., ka funkcija f nav vienmērīgi nepārtraukta intervālā $[a; b]$. Tas nozīmē, ka eksistē tāds $\varepsilon > 0$, ka jebkuram $\delta > 0$ varēs sameklēt x' un $x'' \in [a; b]$, kuriem $|x'' - x'| < \delta$, bet izpildīsies nevienādība

$$|f(x'') - f(x')| \geq \varepsilon.$$

Izvēlēsimies pozitīvu skaitļu δ_n virkni (δ_n), kas konverģē uz nulli. Katram tādam δ_n varēs sameklēt x'_n un $x''_n \in [a; b]$, kuriem $|x''_n - x'_n| < \delta_n$, bet izpildīsies nevienādība

$$|f(x''_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon.$$

Apskatīsim virkni $(x'_n) \subset [a; b]$, tātad šī virkne ir ierobežota. No šīs virknes var izdalīt konverģentu uz punktu $x_0 \in [a; b]$ apakšvirkni $\left(x'_{n_k}\right)$. Šai virknei $\left(x'_{n_k}\right)$ atbilstoša virkne $\left(x''_{n_k}\right)$ konverģēs arī uz x_0, jo

$$\left|x''_{n_k} - x'_{n_k}\right| < \delta_{n_k} \xrightarrow[k \to \infty]{} 0.$$

Tā kā funkcija f nepārtraukta intervālā $[a;b]$, tad tā būs nepārtraukta punktā x_0.

Virknes $\left(f\left(x'_{n_k}\right)\right)$, $\left(f\left(x''_{n_k}\right)\right)$ konverģēs uz $f(x_0)$, tātad

$$\left|f\left(x''_{n_k}\right) - f\left(x'_{n_k}\right)\right| \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

kas pretrunā ar pieņēmumu, ka

$$\left|f\left(x''_{n_k}\right) - f\left(x'_{n_k}\right)\right| \geq \varepsilon. \blacktriangleleft$$

Jautājumi

1. Definēt punktā nepārtrauktu funkciju (apskatīt vairākas iespējamās definīcijas).
2. Definēt kopā nepārtrauktu un nepārtrauktu funkciju.
3. Formulēt nepārtrauktu funkciju pamatīpašības.
4. Definēt funkciju, kas nepārtraukta punktā no kreisās puses.
5. Definēt funkcijas pārtraukuma punktu.
6. Sniegt funkcijas pārtraukuma punktu klasifikāciju.
7. Formulēt teorēmu par monotonas funkcijas robežu.
8. Formulēt teorēmu par monotonas funkcijas pārtraukuma punktiem.
9. Formulēt Bolcano teorēmu par nepārtrauktas funkcijas starpvērtībām.
10. Formulēt teorēmu par apvērstas funkcijas nepārtrauktību.
11. Formulēt Veierštrāsa teorēmas par slēgtā intervālā nepārtrauktām funkcijām.
12. Definēt vienmērīgi nepārtrauktu funkciju.
13. Formulēt Kantora teorēmu par slēgtā intervālā nepārtrauktu funkciju.

Vingrinājumi

1. Pierādīt funkciju nepārtrauktību:

   (a) $f(x) = x$;

   (b) $f(x) = \cos x$;

   (c) $f(x) = \operatorname{tg} x$.

2. Pierādīt 4.1. teorēmu.

3. Pierādīt 4.2. teorēmu.

4. Pierādīt 4.3. teorēmu.

5. Pierādīt 4.4. teorēmu.

6. Pierādīt 4.7. teorēmu.

7. Pierādīt 4.8. teorēmu.

8. Dotajām funkcijām sameklēt pārtraukuma punktus un noteikt to veidu:

   (a) $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{ja} \quad x \leq 2, \\ 2 - x, & \text{ja} \quad x > 2. \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{ja} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 3x + 2, & \text{ja} \quad 1 < x \leq 2. \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{ja} \quad |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2}, & \text{ja} \quad |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

   (d) $f(x) = \begin{cases} x + 3, & \text{ja} \quad x < 0, \\ 0, & \text{ja} \quad x = 0, \\ 3 - x, & \text{ja} \quad x > 0. \end{cases}$

9. Pierādīt 4.10. teorēmu dilstošai funkcijai.

10. Pierādīt 4.11. teorēmu dilstošai funkcijai.

11. Funkcija nepārtraukta intervālā $\mathfrak{I}$ un punktos $a, b \in \mathfrak{I}$ tās vērtības ir ar dažādām zīmēm. Pierādīt, ka starp a un b eksistē tāds punkts, kurā funkcijas vērtība ir nulle.

12. Pierādīt 4.13. teorēmu dilstošai funkcijai.

13. Pierādīt funkciju nepārtrauktību:

(a) $f(x) = \arcsin x$,

(b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$,

(c) $\log_a x$.

14. Pierādīt, ka katra intervālā nepārtraukta un injektīva funkcija ir stingri monotona šajā intervālā.

LITERATŪRA

[1] Algebra un analīzes elementi 9. - 11. klasei. Mācību līdzeklis A. Kolmogorova redakcijā. - R.: Zvaigzne, 1987. - 384 lpp.

[2] Виленкин Н.Я., Куницкая Е.С. Математический анализ. Введение в анализ. - М.: Просвещение, 1973. - 270 с.

[3] Виленкин Н.Я., Мордкович А.Г. Математический анализ. - М.: Просвещение, 1983. - 191 с.

[4] Гребенча М.К., Новоселов С.И. Курс математического анализа. Ч.1. - М.: Просвещение,1960. - 543 с.

[5] Райков Д.А. Одномерный математический анализ. - М.: Высшая школа, 1982. - 415 с.

[6] Уваренков Н.М., Маллер М.З. Курс математического анализа. Т.1. - М.: Просвещение, 1956. -640 с.

SATURS