

Paskāla trijstūris

A. Gricāns, I. Jermačenko

Daugavpils Universitāte
Dabaszinātņu un tehnoloģiju institūts
Fizikas un matemātikas katedra



DU Zinātnes skola
2016. gada 5. marts

Saturs I

1 levads

- Kas ir Paskāla trijstūris?
- Binomiālkoeficienti
- Blezs Paskāls

2 Dažas Paskāla trijstūra īpašības

- Simetrijas likums
- Paskāla likums
- Paskāla trijstūra rindas summa
- Paralelograma likums
- Hokeja nūjas likums
- Ziedlapīņas likums
- Iekavu likums
- Rindu nogriežņu no dažādām malām reizinājuma summa
- Rindu nogriežņu no vienas malas krusteniskā reizinājuma summa
- Diagonāļu nogriežņu krusteniskā reizinājuma summa

Saturs II

- Skaitļa 11 pakāpju mistērija
- Dalīšanās ar pirmskaitli
- Paskāla trijstūra pirmo rindu summa un Mersena skaitļi
- Paskāla trijstūris un kombinatorika
- Paskāla trijstūris un varbūtību teorija
- Paskāla trijstūris un skaitlis e
- Paskāla trijstūris un skaitlis π
- Paskāla trijstūris un visīsākie maršruti
- Paskāla trijstūris un punkti uz riņķa līnijas
- Paskāla trijstūris un Sierpinska trijstūris
- Hanojas torņi
- Paskāla trijstūris un Leibnica trijstūris

3 Paskāla trijstūra saistība ar dažiem skaitļiem

- Paskāla trijstūris un Fibonači skaitļi
- Paskāla trijstūris un vieninieki

Saturs III

- Paskāla trijstūris un naturālie skaitļi
- Paskāla trijstūris un trijstūra skaitļi
- Paskāla trijstūris un tetraedra skaitļi
- Kas atrodas uz Paskāla trijstūra piektās, sestās, ... diagonāles?

4 Modificētie Paskāla trijstūri

- Paskāla (2, 1)-trijstūris
- Paskāla (3, 1)-trijstūris
- Paskāla (4, 1)-trijstūris

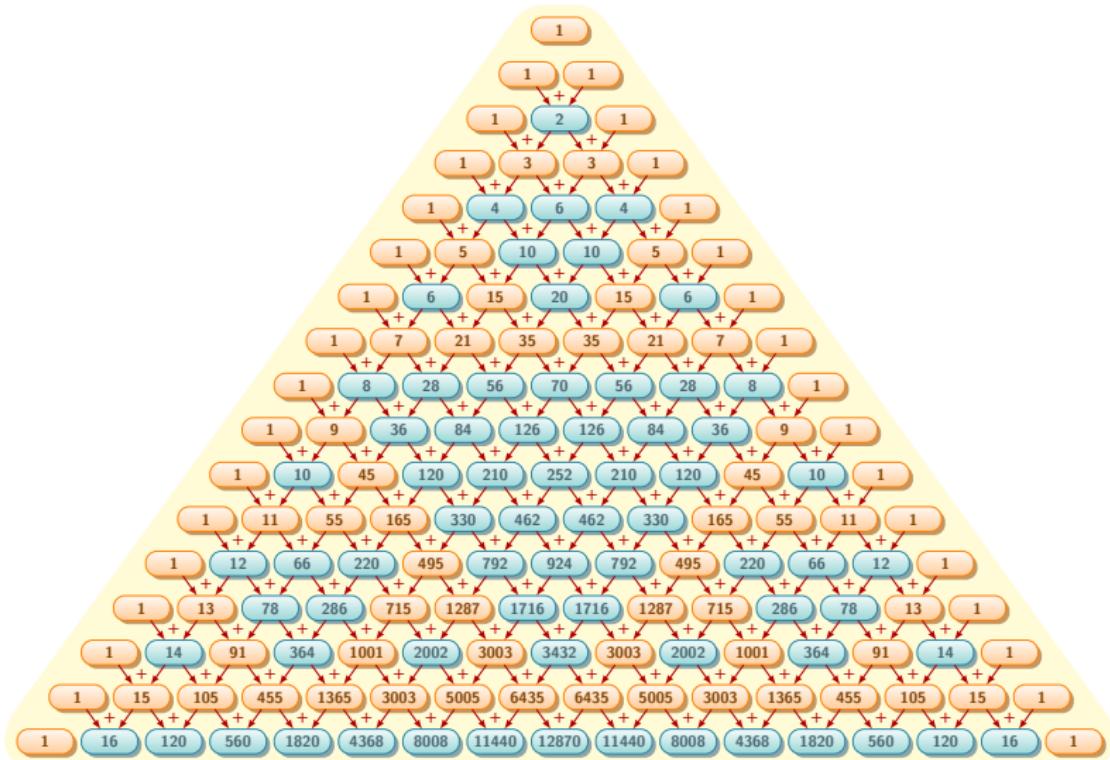
5 Vai eksistē četrstūra skaitļi un četrstūra piramīdas skaitļi?

6 Paskāla trijstūris ... iedvesmai

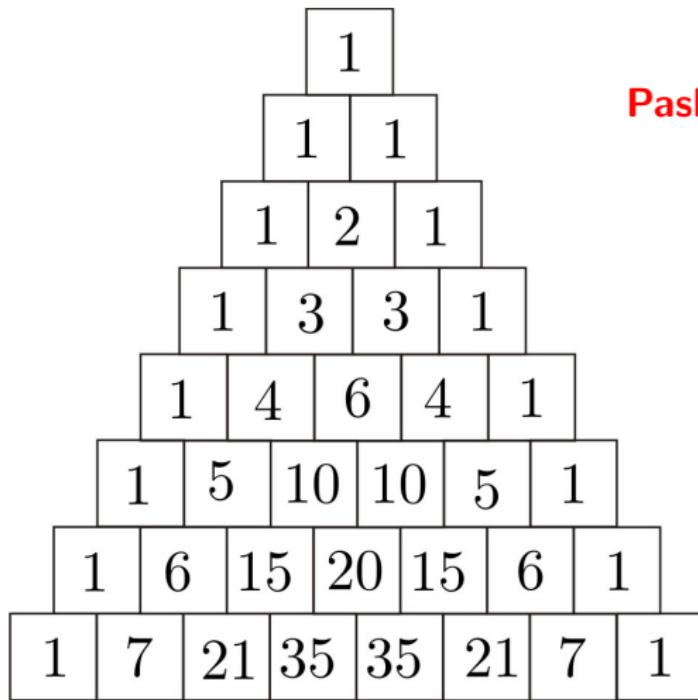
7 Nobeigums

8 Literatūra

Kas ir Paskāla trijstūris? I



Kas ir Paskāla trijstūris? II



Paskāla trijstūris ir trijstūrveida tabula, kuru veido **binomiālkoefficienti**

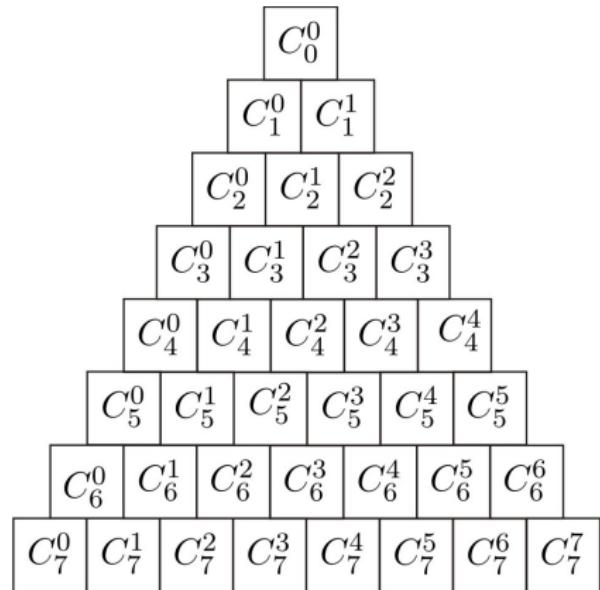
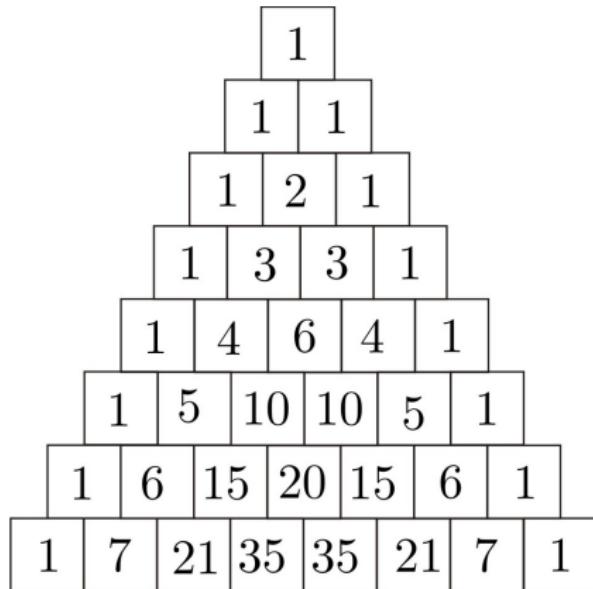
$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

kur

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

ir skaitļa n **faktoriāls**.

Kas ir Paskāla trijstūris? III



Binomiālkoeficienti

Skaitļu C_n^k nosaukums “binomiālkoeficienti” ir tāpēc, ka tie ir koeficienti binoma $(x + y)^n$ izvirzījumā:

$$(x + y)^n = \mathbf{C}_n^0 x^n y^0 + \mathbf{C}_n^1 x^{n-1} y^1 + \mathbf{C}_n^2 x^{n-2} y^2 + \cdots + \mathbf{C}_n^n x^0 y^n.$$

$$(x + y)^0 = \mathbf{C}_0^0 x^0 y^0 = \mathbf{1}.$$

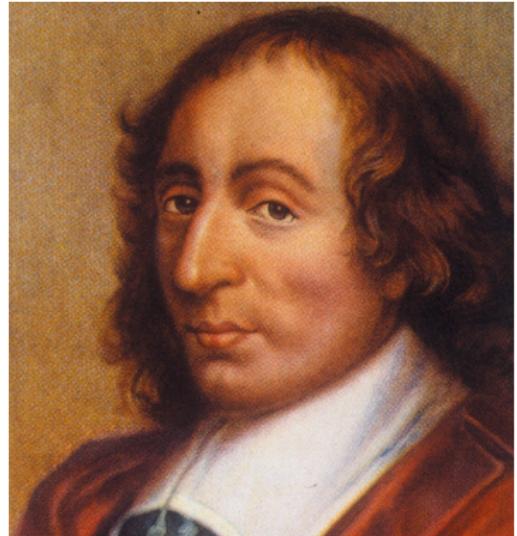
$$(x + y)^1 = \mathbf{C}_1^0 x^1 y^0 + \mathbf{C}_1^1 x^0 y^1 = \mathbf{1}x + \mathbf{1}y.$$

$$(x + y)^2 = \mathbf{C}_2^0 x^2 y^0 + \mathbf{C}_2^1 x^1 y^1 + \mathbf{C}_2^2 x^0 y^2 = \mathbf{1}x^2 + \mathbf{2}xy + \mathbf{1}y^2.$$

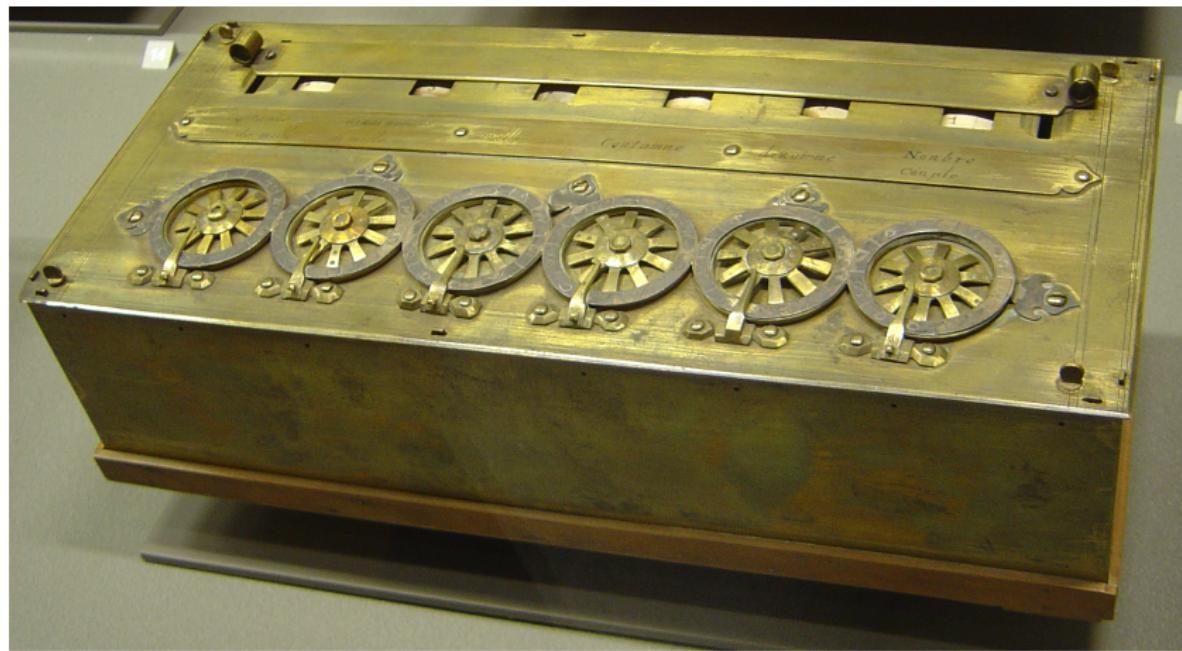
$$(x + y)^3 = \mathbf{C}_3^0 x^3 y^0 + \mathbf{C}_3^1 x^2 y^1 + \mathbf{C}_3^2 x^1 y^2 + \mathbf{C}_3^3 x^0 y^3 = \mathbf{1}x^3 + \mathbf{3}x^2 y + \mathbf{3}xy^2 + \mathbf{1}y^3.$$

Blezs Paskāls I

Paskāla trijstūris ir nosaukts franču matemātiķa un filozofa **Bleza Paskāla** (1623.–1662.) vārdā.



Blezs Paskāls II



Paskāla izgudrotā skaitļojamā mašīna **Paskālīns** - mehānisks kalkulators aritmētisko darbību izpildei; skat. avotu [1].

Blezs Paskāls III

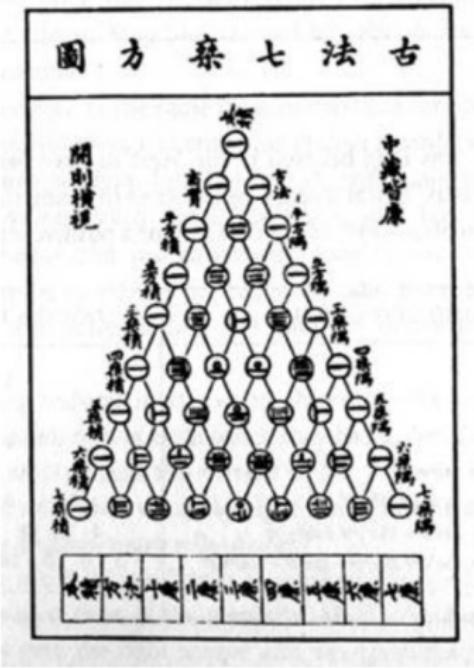
Jāatzīmē, ka skaitļi C_n^k bija pazīstami

- Indijā,
- Ķīnā,
- Babilonā,
- Grieķijā,
- Itālijā,
- Vācijā

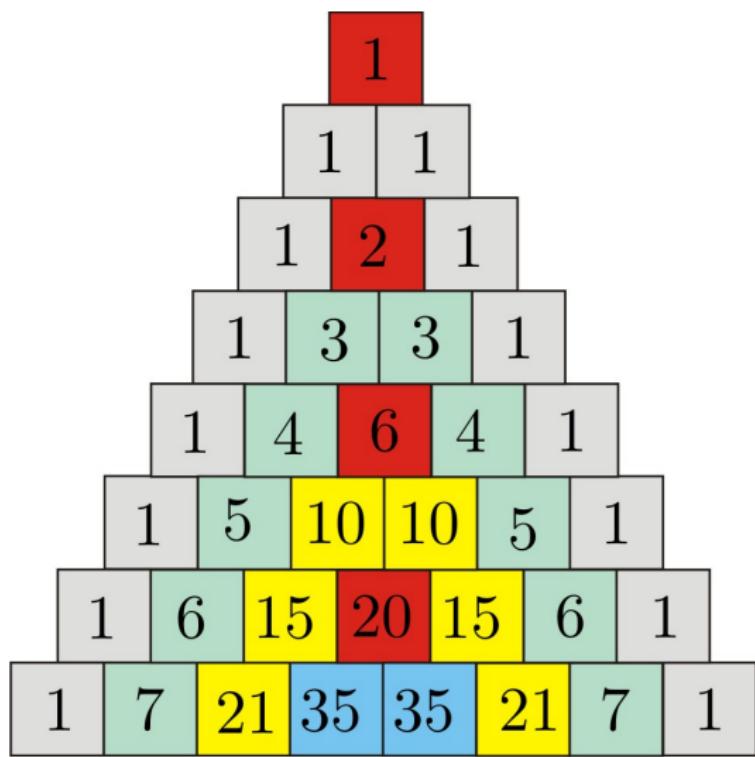
gadsimtiem pirms Paskāla. Taču Paskāls bija pirmais, kas sistemātiski pētīja skaitļu C_n^k īpašības, atklādams daudzas jaunas šo skaitļu īpašības.

Blezs Paskāls IV

Paskāla trijstūris senajā Ķīnā.



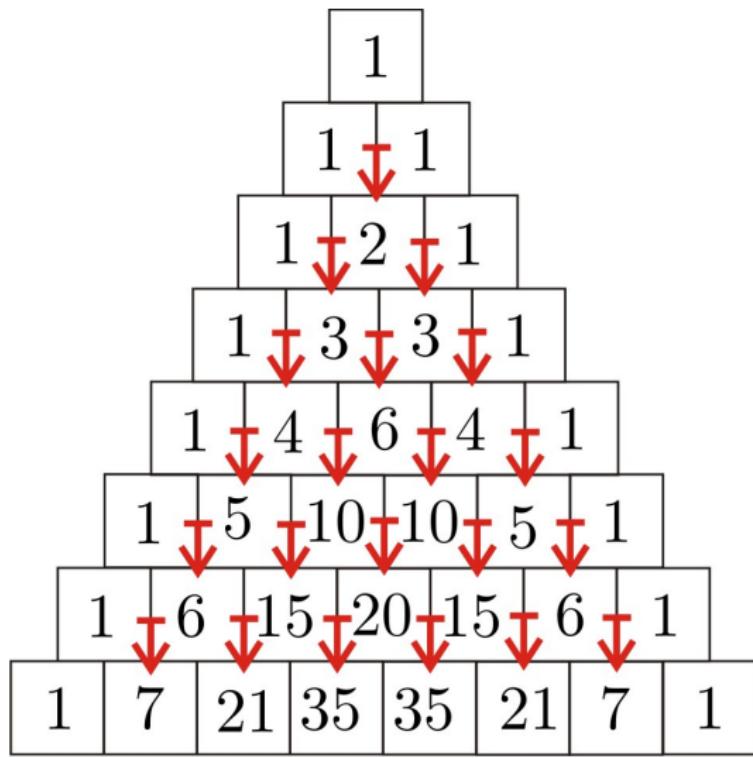
Simetrijas likums



Simetrijas likums:

$$C_n^k = C_n^{n-k}$$

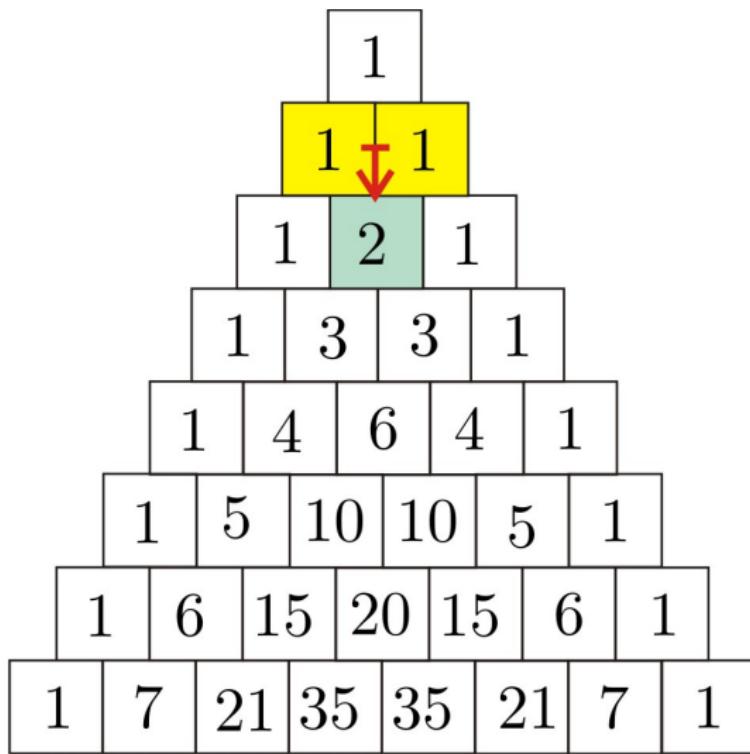
Paskāla likums I



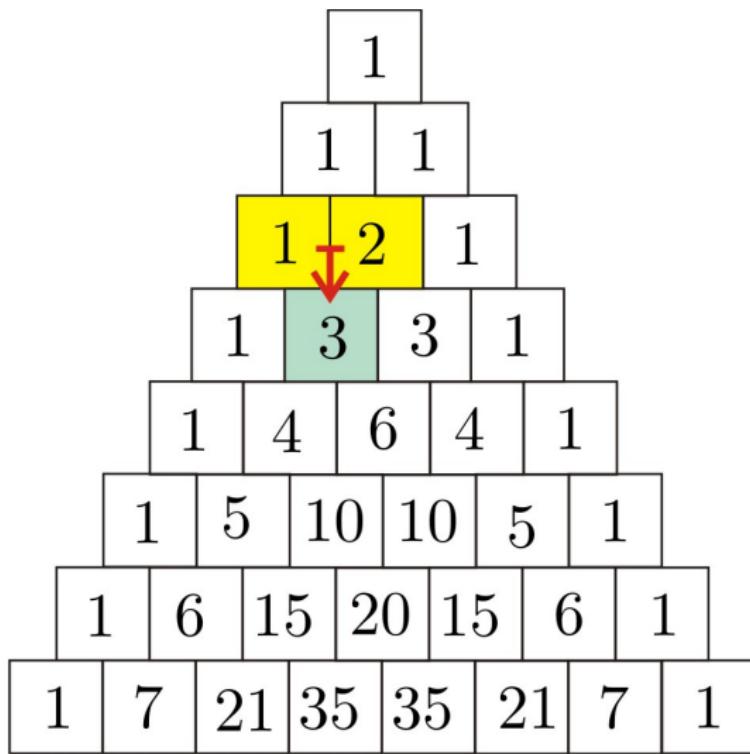
Paskāla likums:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

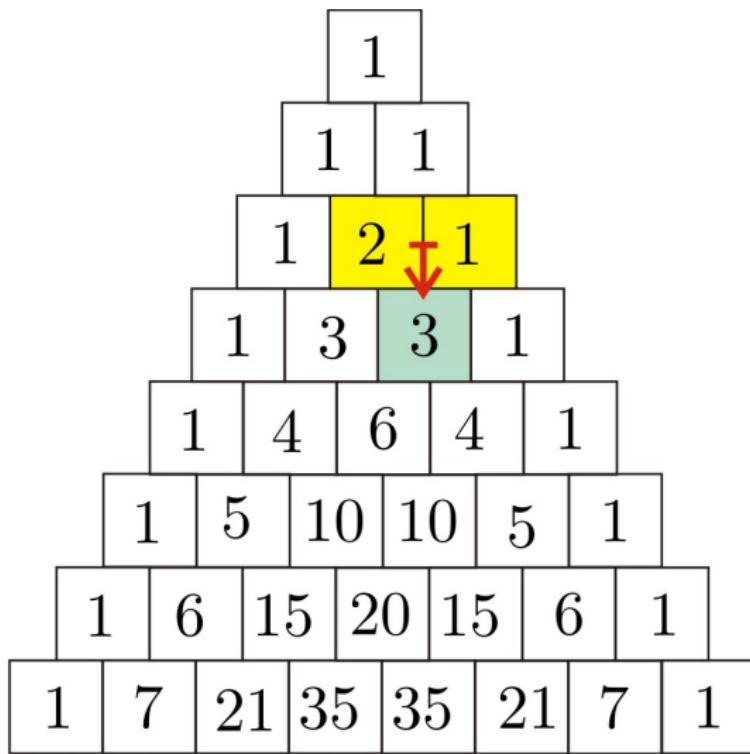
Paskāla likums II



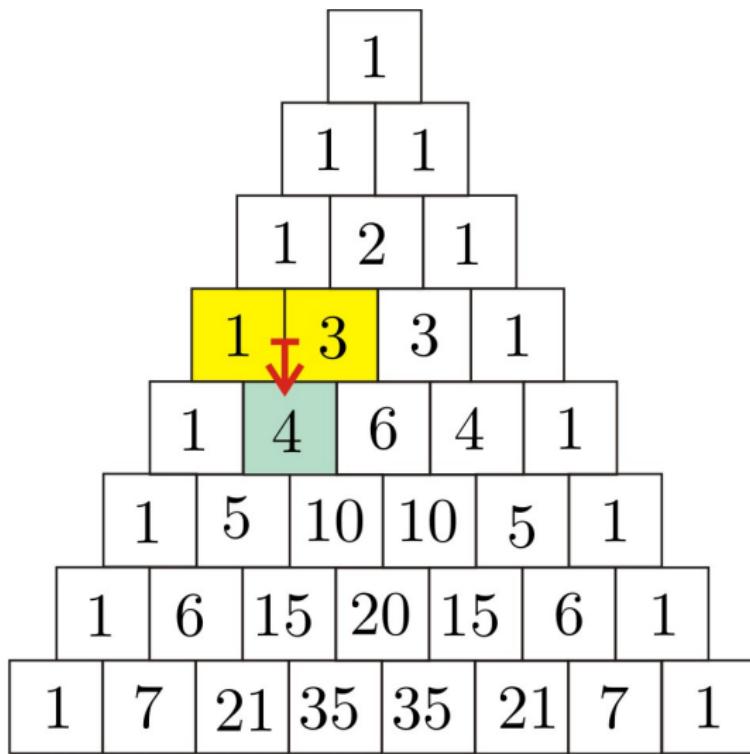
Paskāla likums III



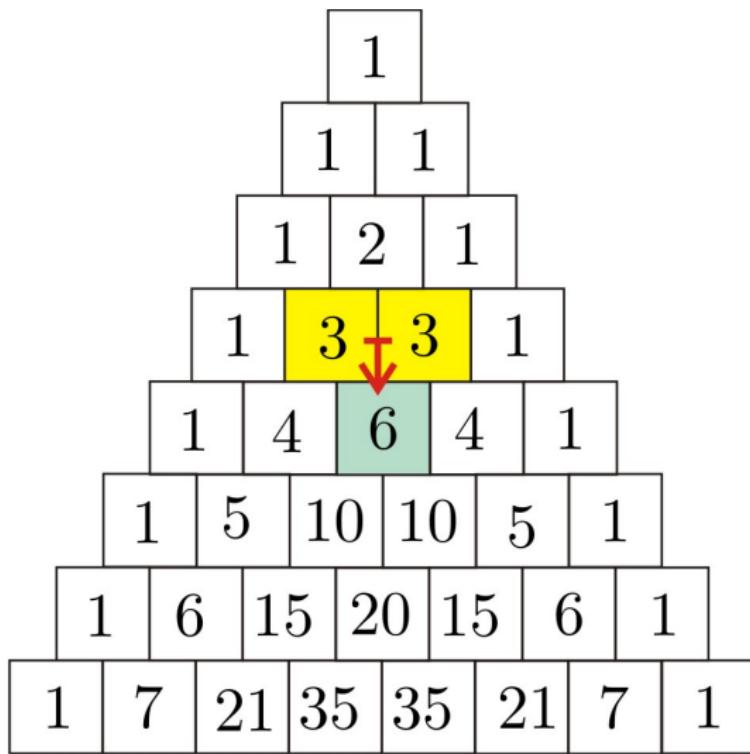
Paskāla likums IV



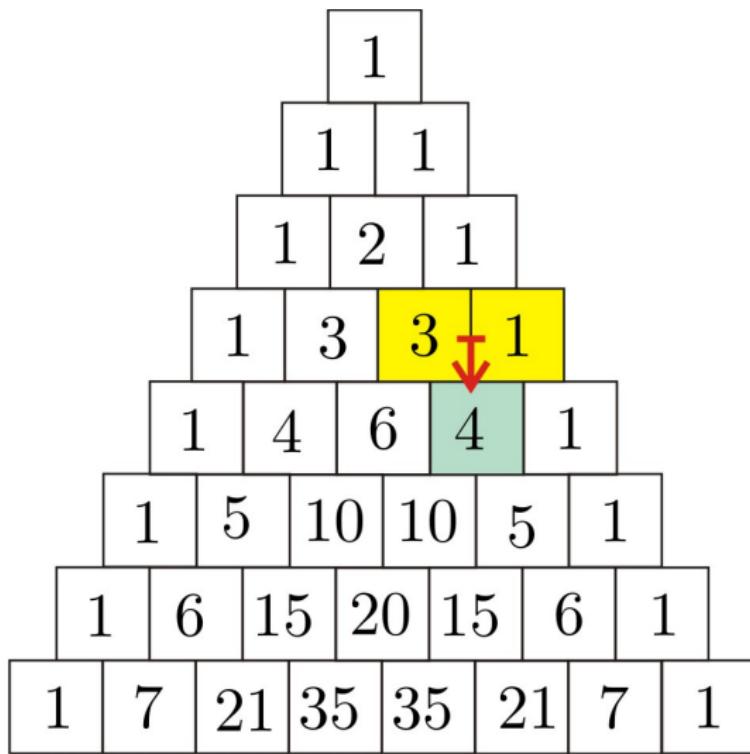
Paskāla likums V



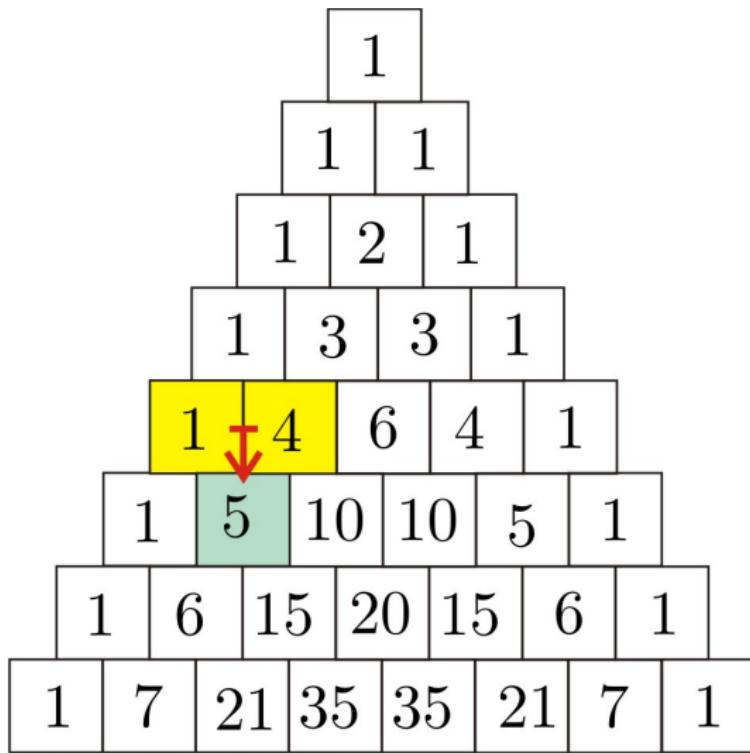
Paskāla likums VI



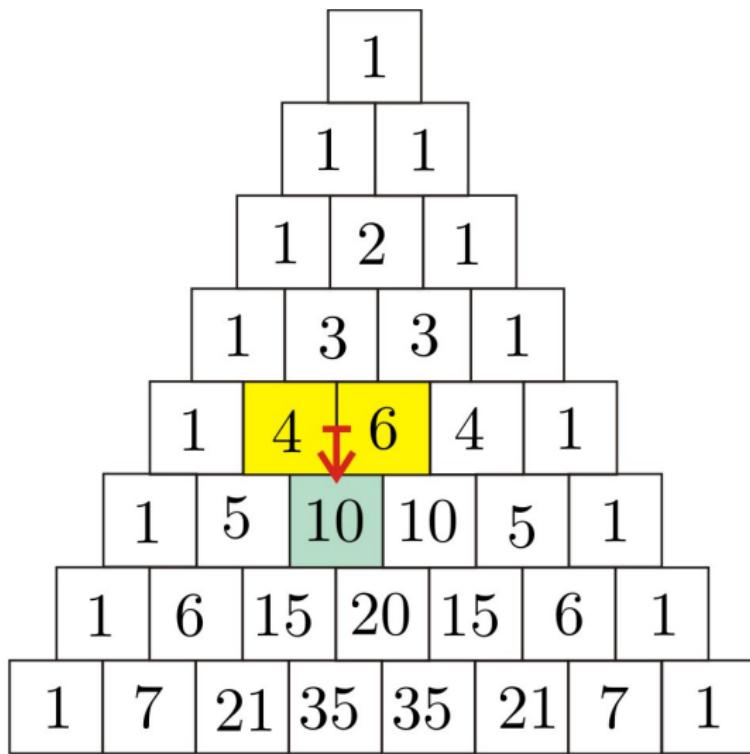
Paskāla likums VII



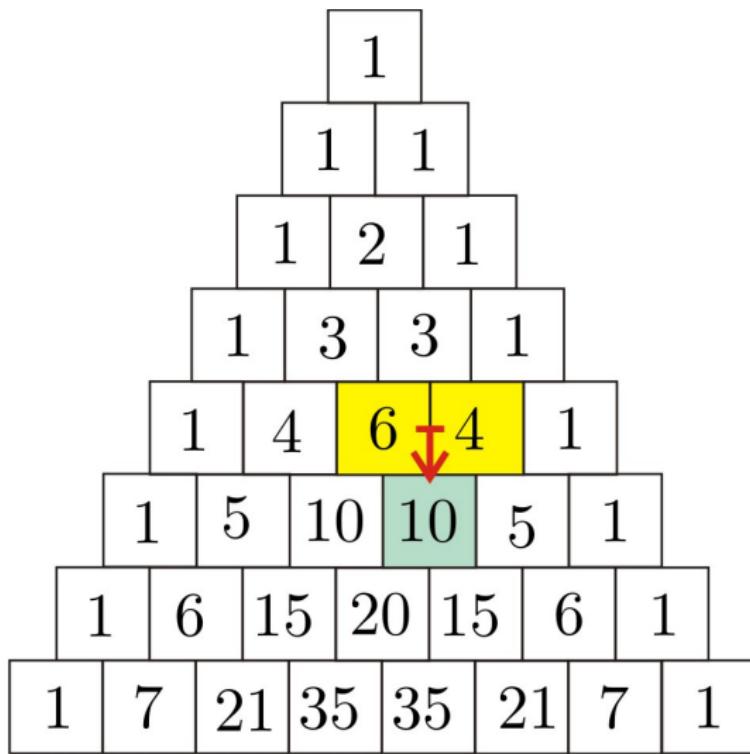
Paskāla likums VIII



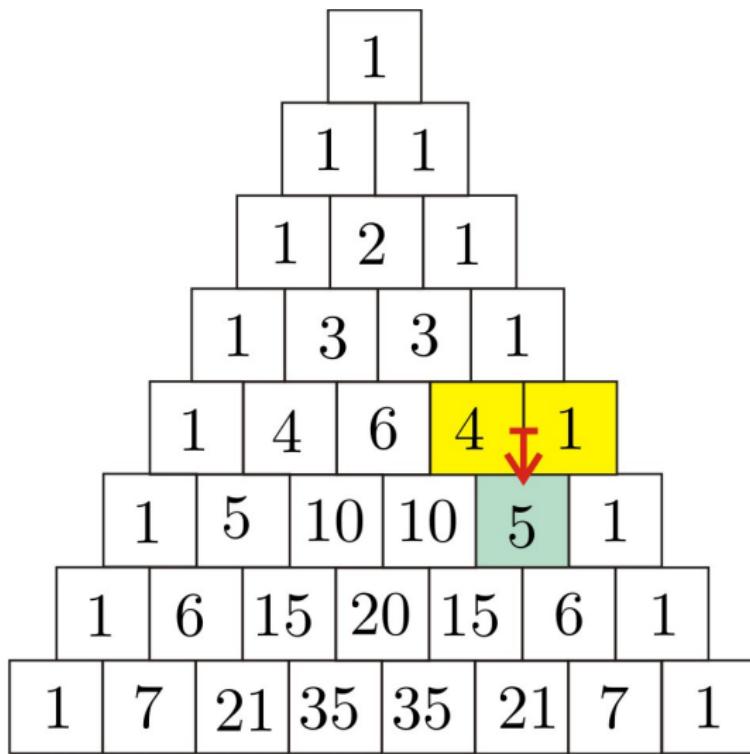
Paskāla likums IX



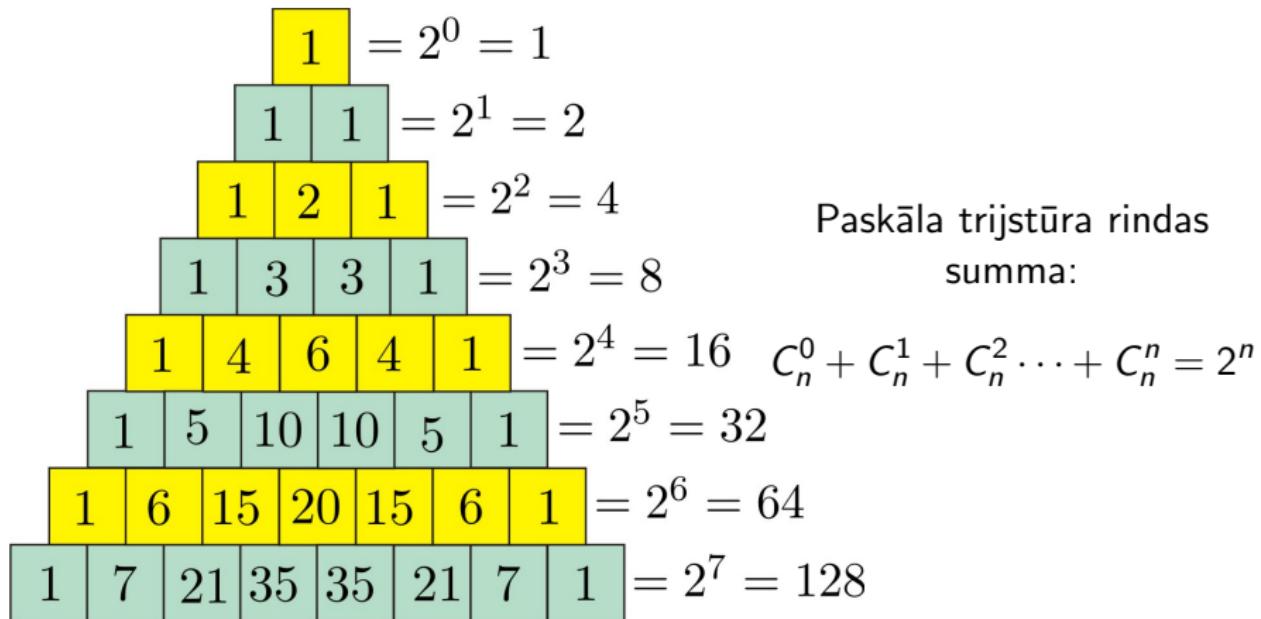
Paskāla likums X



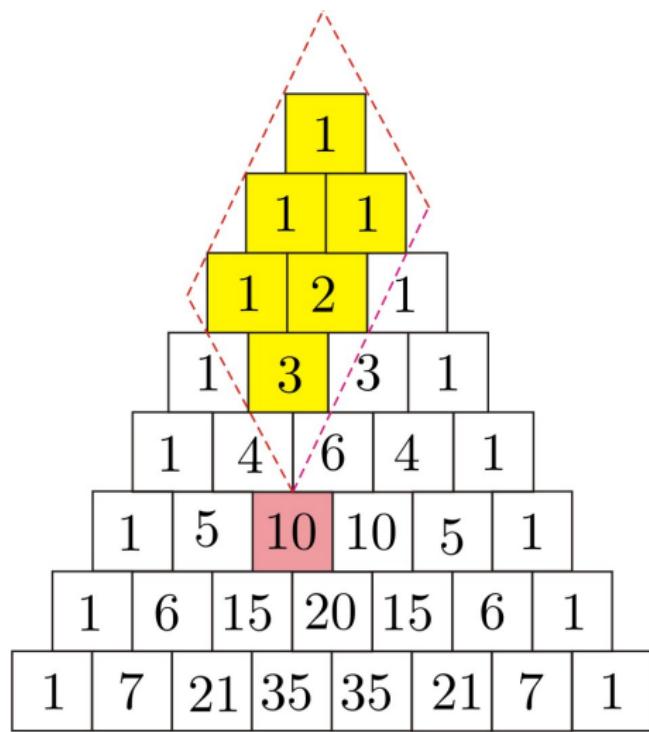
Paskāla likums XI



Paskāla trijstūra rindas summa

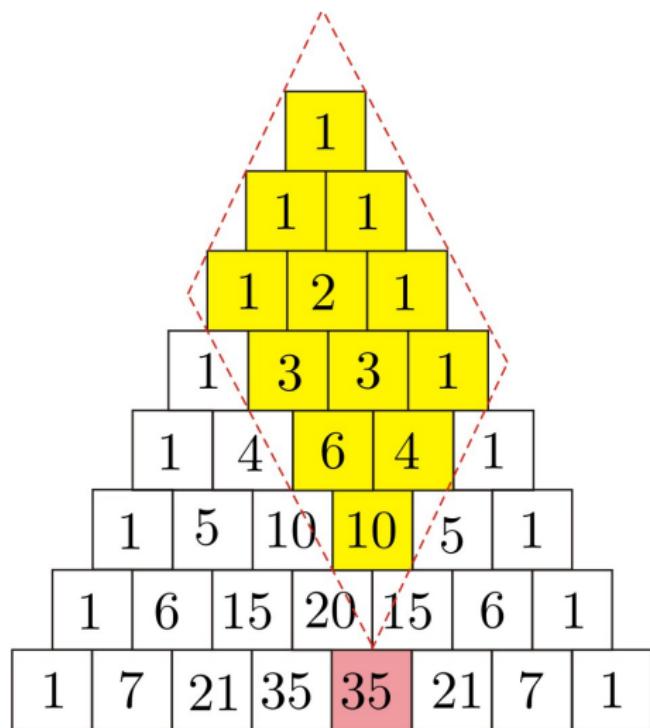


Paralelograma likums I



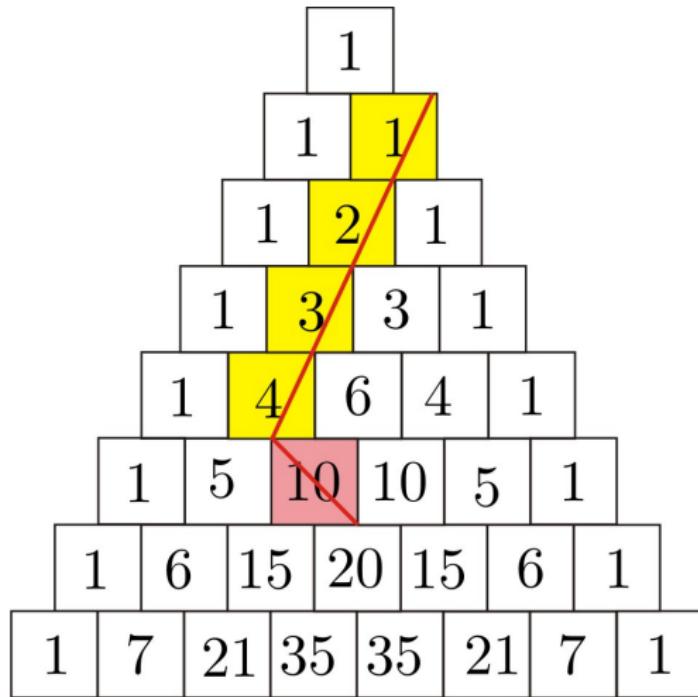
$$\begin{aligned}
 & 1 + 1 + \\
 & + 1 + 2 + \\
 & + 1 + 3 = 9 = \mathbf{10} - 1
 \end{aligned}$$

Paralelograma likums II



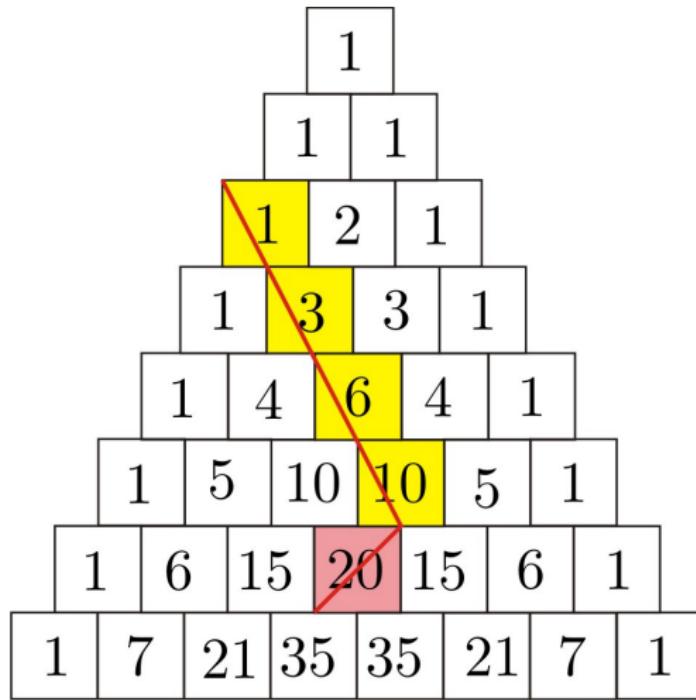
$$\begin{aligned} & 1 + 1 + 1 + 1 + \\ & + 1 + 2 + 3 + 4 + \\ & + 1 + 3 + 6 + 10 = \\ & = 34 = \mathbf{35} - 1 \end{aligned}$$

Hokeja nūjas likums I



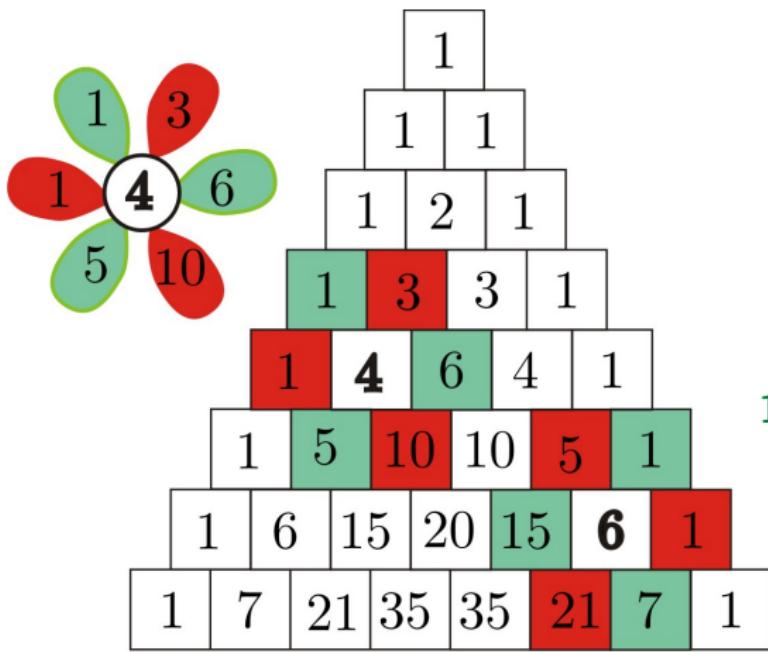
$$1 + 2 + 3 + 4 = \mathbf{10}$$

Hokeja nūjas likums II



$$1 + 3 + 6 + 10 = \mathbf{20}$$

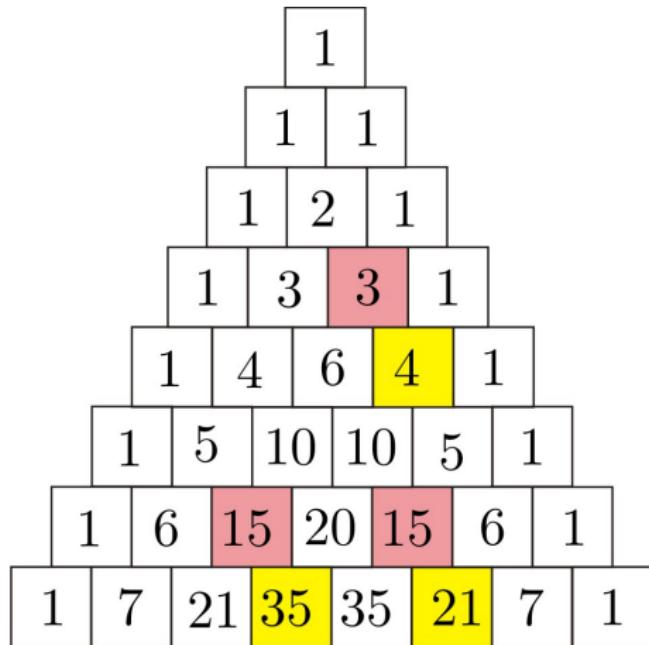
Ziedlapīņas likums



$$1 \cdot 3 \cdot 10 = 30 = 1 \cdot 6 \cdot 5$$

$$1 \cdot 7 \cdot 15 = 105 = 5 \cdot 1 \cdot 21$$

Iekavu likums



$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$$

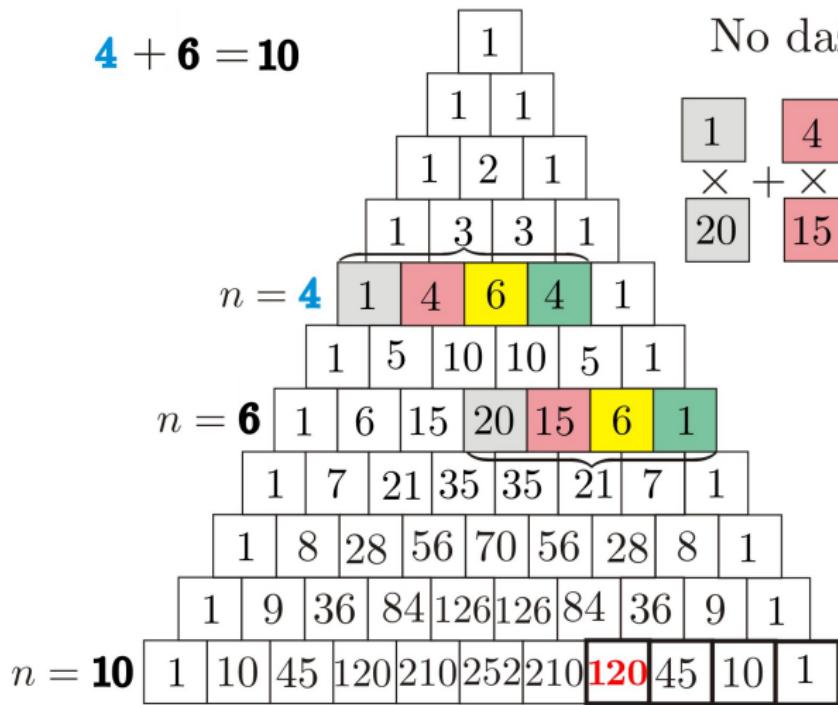
$$\binom{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \binom{3}{2} \text{ jeb } 4 = \frac{4}{3} \cdot 3$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7}{3} \cdot \binom{6}{2} \text{ jeb } 35 = \frac{7}{3} \cdot 15$$

$$\binom{7}{5} = \frac{7}{5} \cdot \binom{6}{4} \text{ jeb } 21 = \frac{7}{5} \cdot 15$$

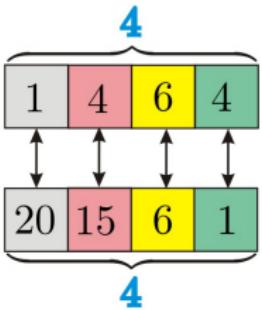
Rindu nogriežņu no dažādām malām reizinājuma summa I

$$4 + 6 = 10$$



No dažādām malām!

$$\begin{array}{c} 1 \\ \times \\ 20 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \times \\ 15 \end{array} + \begin{array}{c} 6 \\ \times \\ 6 \end{array} + \begin{array}{c} 4 \\ \times \\ 1 \end{array} = 120$$



Rindu nogriežņu no dažādām malām reizinājuma summa II

$$3 + 6 = 9$$

1

1
11
2
1
 $n = 3$
 1
3
3
1

 1
4
6
4
1

 1
5
10
10
5
1

 $n = 6$
 1
6
15
20
15
6
1

 1
7
21
35
35
21
7
1

 1
8
28
56
70
56
28
8
1

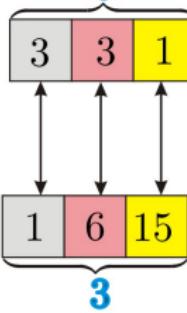
 $n = 9$
 1
9
36
84
126
126
84
36
9
1

 1
10
45
120
210
252
210
120
45
10
1

No dažādām malām!

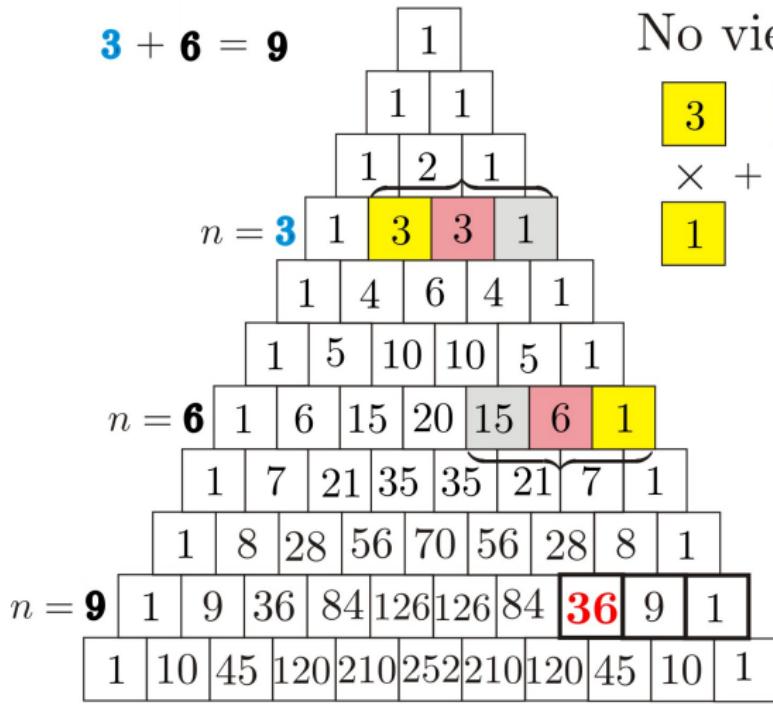
$$\begin{matrix} 3 \\ \times \\ 1 \end{matrix} + \begin{matrix} 3 \\ \times \\ 6 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ \times \\ 15 \end{matrix} = \boxed{36}$$

3



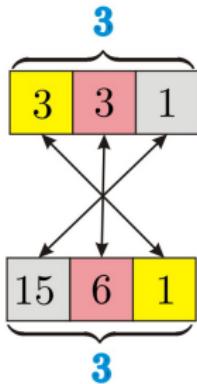
Rindu nogriežņu no vienas malas krusteniskā reizinājuma summa I

$$3 + 6 = 9$$



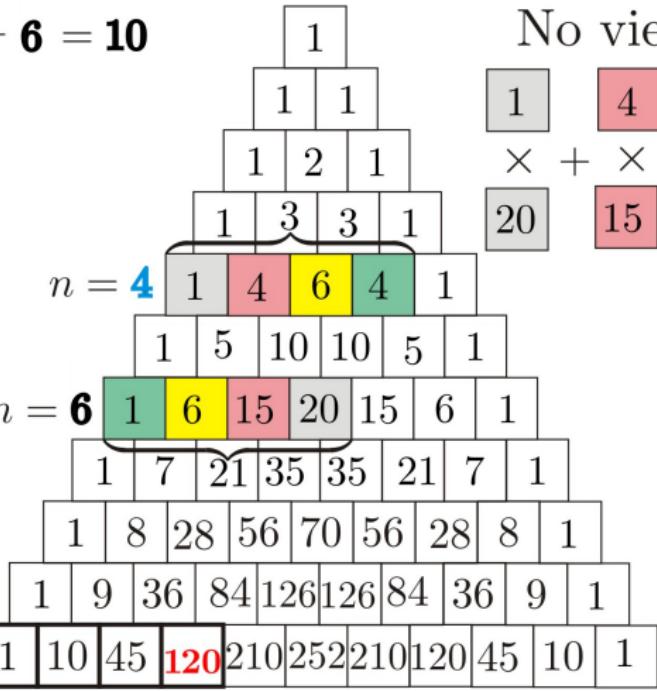
No vienas malas!

$$\begin{matrix} 3 \\ \times \\ 1 \end{matrix} + \begin{matrix} 3 \\ \times \\ 6 \end{matrix} + \begin{matrix} 1 \\ \times \\ 15 \end{matrix} = \boxed{36}$$



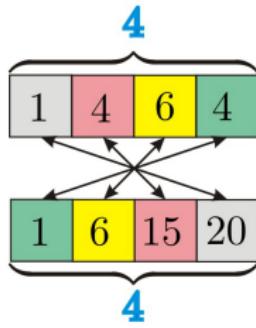
Rindu nogriežņu no vienas malas krusteniskā reizinājuma summa II

$$4 + 6 = 10$$

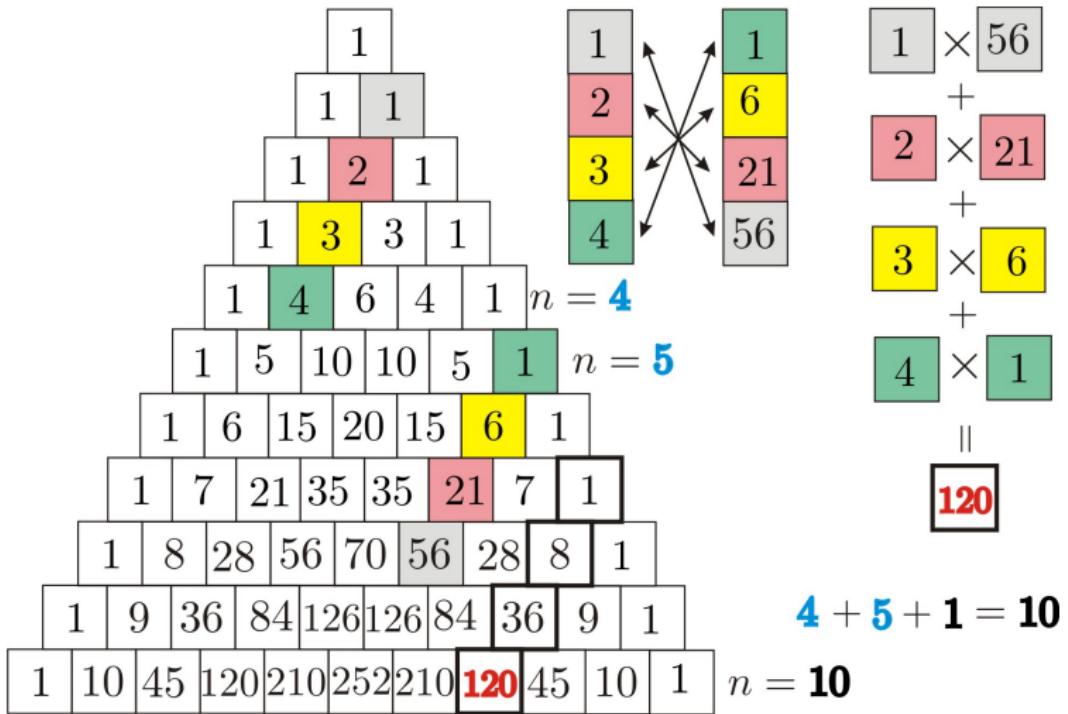


No vienas malas!

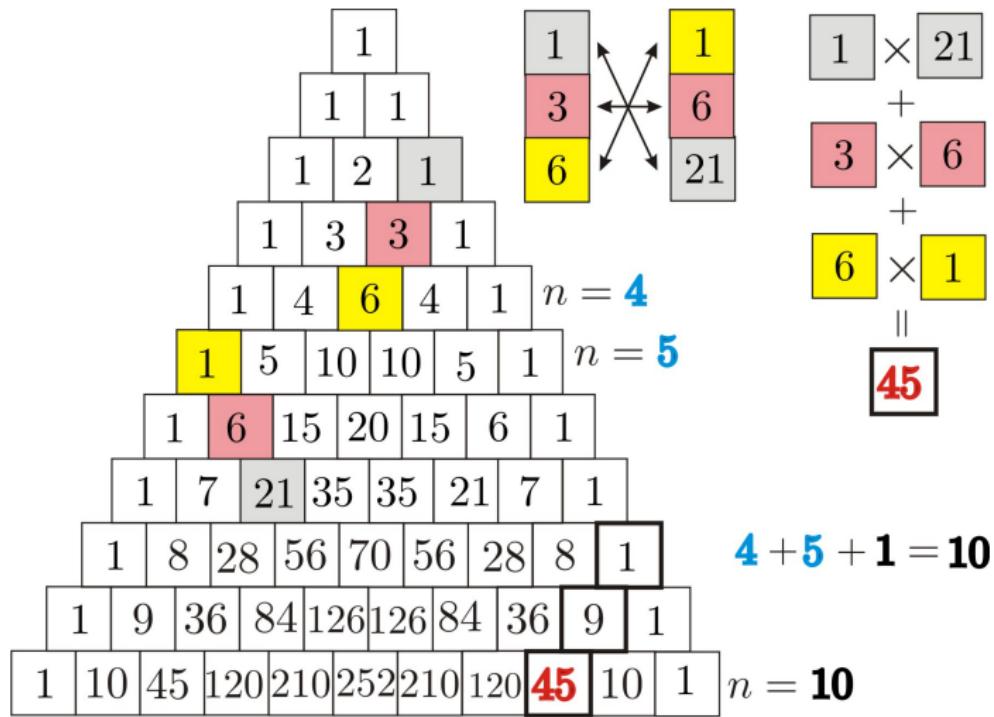
$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 6 & 4 \\ \times & + & \times & + & \times & = \\ 20 & 15 & 6 & 1 \end{array} \boxed{120}$$



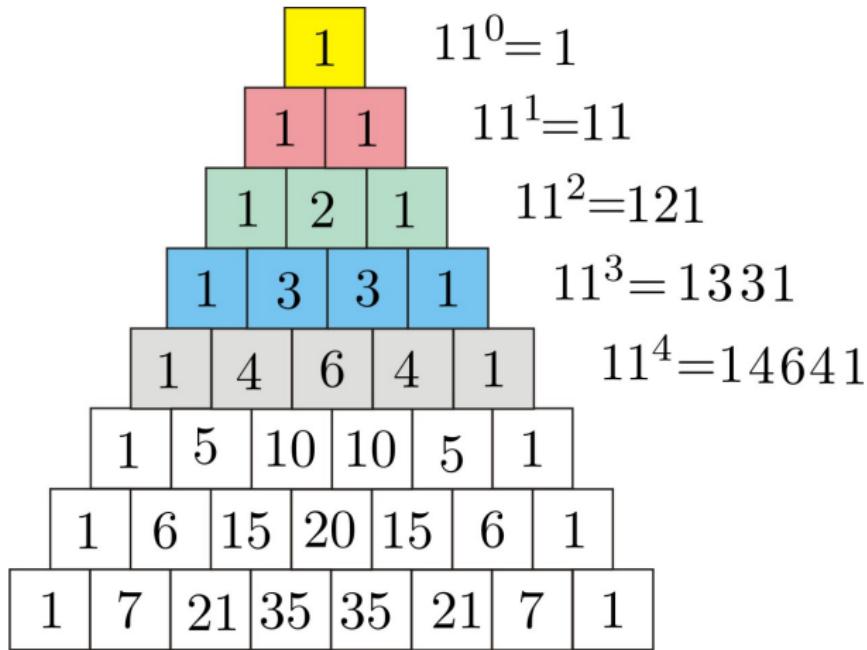
Diagonāļu nogriežņu krusteniskā reizinājuma summa I



Diagonāļu nogriežņu krusteniskā reizinājuma summa II



Skaitļa 11 pakāpju mistērija I



Skaitļa 11 pakāpju mistērija II

$$11^0 = \mathbf{1} \cdot 10^0 = \mathbf{1}$$

$$11^1 = \mathbf{1} \cdot 10^1 + \mathbf{1} \cdot 10^0 = \mathbf{11}$$

$$11^2 = \mathbf{1} \cdot 10^2 + \mathbf{2} \cdot 10^1 + \mathbf{1} \cdot 10^0 = \mathbf{121}$$

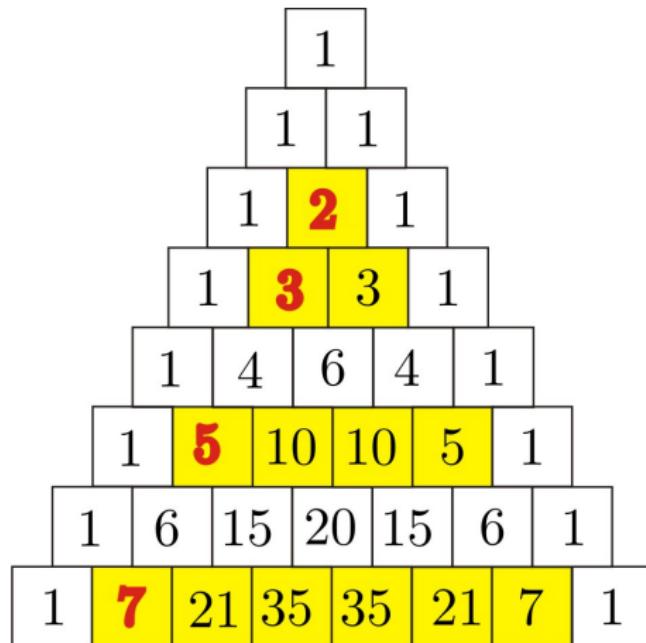
$$11^3 = \mathbf{1} \cdot 10^3 + \mathbf{3} \cdot 10^2 + \mathbf{3} \cdot 10^1 + \mathbf{1} \cdot 10^0 = \mathbf{1331}$$

$$11^4 = \mathbf{1} \cdot 10^4 + \mathbf{4} \cdot 10^3 + \mathbf{6} \cdot 10^2 + \mathbf{4} \cdot 10^1 + \mathbf{1} \cdot 10^0 = \mathbf{14641}$$

$$11^5 = \mathbf{1} \cdot 10^5 + \mathbf{5} \cdot 10^4 + \mathbf{10} \cdot 10^3 + \mathbf{10} \cdot 10^2 + \mathbf{5} \cdot 10^1 + \mathbf{1} \cdot 10^0 = \mathbf{161051}$$

$$11^6 = \mathbf{1} \cdot 10^6 + \mathbf{6} \cdot 10^5 + \mathbf{15} \cdot 10^4 + \mathbf{20} \cdot 10^3 + \mathbf{15} \cdot 10^2 + \mathbf{6} \cdot 10^1 + \mathbf{1} \cdot 10^0 = \mathbf{1771561}$$

Dalīšanās ar pirmskaitli



Ja Paskāla trijstūra rindas otrs
elements ir pirmskaitlis p , tad pārējie
šīs rindas elementi, izņemot malējos,
dalās ar p .

Paskāla trijstūra pirmo rindu summa un Mersena skaitji I

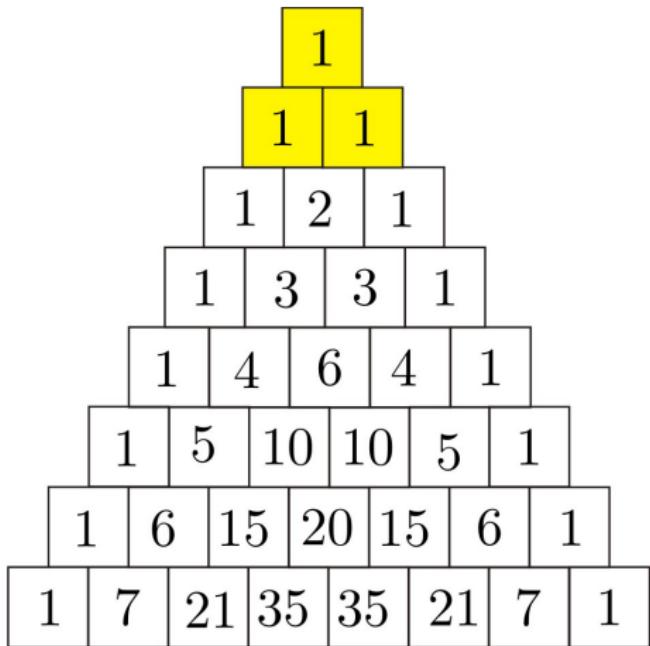
Mersena skaitji ir pirmskaitļi, kuriem ir veids $2^n - 1$:

n	2	3	5	7	13	17	...
$2^n - 1$	3	7	31	127	8191	131071	...



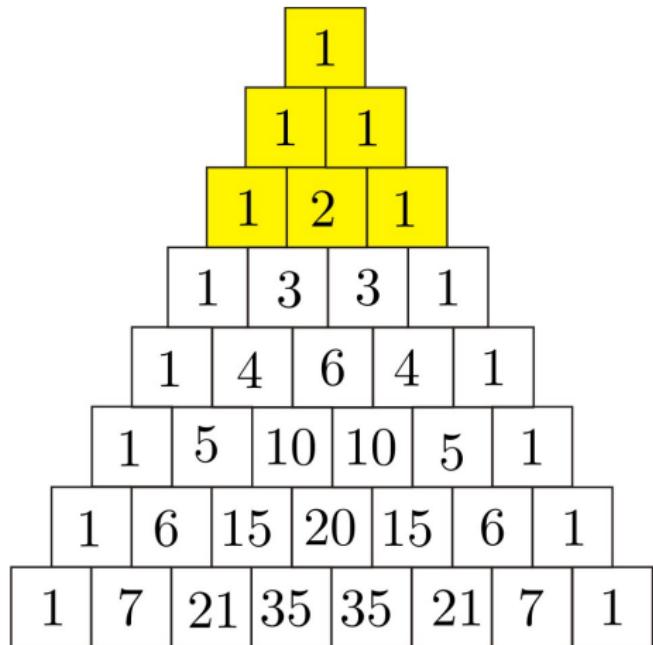
Marins Mersens (1588.–1648.) –
franču matemātiķis.

Paskāla trijstūra pirmo rindu summa un Mersena skaitļi II



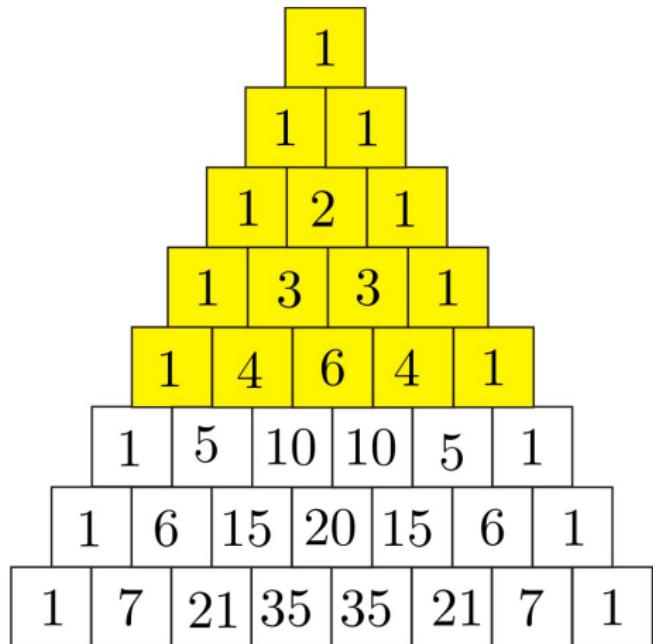
$$\text{Summa} = 2^2 - 1 = 3$$

Paskāla trijstūra pirmo rindu summa un Mersena skaitļi III



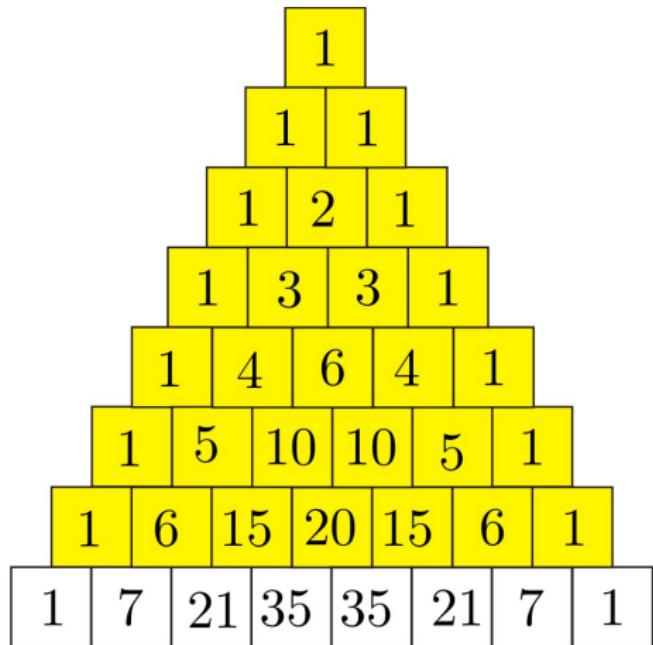
$$\text{Summa} = 2^3 - 1 = 7$$

Paskāla trijstūra pirmo rindu summa un Mersena skaitļi IV



$$\text{Summa} = 2^5 - 1 = 31$$

Paskāla trijstūra pirmo rindu summa un Mersena skaitļi V



$$\text{Summa} = 2^7 - 1 = 127$$

Paskāla trijstūris un kombinatorika I

Kombinatorikā binomiālkoeficienti $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ izsaka **kombināciju bez atkārtojumiem no n pa k** skaitu.

Citiem vārdiem sakot, C_n^k ir vienāds ar kopas

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

visu apakškopu, kas sastāv no k elementiem, skaitu.

Paskāla trijstūris un kombinatorika II

Piemēram, tā kā Paskāla trijstūra **3** rinda ir

$$C_3^0 = 1, \quad C_3^1 = 3, \quad C_3^2 = 3, \quad C_3^3 = 1,$$

tad **3** elementu kopai $X = \{a, b, c\}$ ir

- $C_3^0 = 1$ apakškopa, kas sastāv no **0** elementiem, - **tukšā kopa**;
- $C_3^1 = 3$ apakškopas $\{a\}, \{b\}, \{c\}$, kas sastāv no **1** elementa;
- $C_3^2 = 3$ apakškopas $\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}$, kas sastāv no **2** elementiem;
- $C_3^3 = 1$ apakškopa $\{a, b, c\}$, kas sastāv no **3** elementiem, - kopa X .

Visu kopas $X = \{a, b, c\}$ apakškopu skaits ir vienāds ar Paskāla trijstūra **3** rindas elementu summu:

$$C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3,$$

$$1 + 3 + 3 + 1 = 8.$$

Paskāla trijstūris un varbūtību teorija

Pieņemsim, ka izmēģinājumu veicot n reizes, notikums **A** iestājas tieši k reizes, pie tam

- notikuma iestāšanās varbūtība p katrā izmēģinājumā ir viena un tā pati,
- notikuma **A** iestāšanās vai neiestāšanās secība nav svarīga.

Varbūtība, ka notikums **A** iestāsies tieši k reizes, ir vienāda ar

$$\mathcal{P}_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Monētas mešana



Kāda ir varbūtība, ka, monētu metot 5 reizes, 2 reizes uzkritīs četras?

Šajā gadījumā $n = 5$ un $k = 2$, bet varbūtība, ka vienā izmēģinājumā uzkritīs četras, ir vienāda ar $p = \frac{1}{2}$. Tātad

$$\mathcal{P}_5(2) = C_5^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{5-2} = 10 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{5}{16} \approx 0,31.$$

Spēļu kauliņa mešana



Kāda ir varbūtība, ka, spēļu kauliņu metot 4 reizes, 3 reizes uzkritīs piecnieks?

Šajā gadījumā $n = 4$ un $k = 3$, bet varbūtība, ka vienā izmēģinājumā uzkritīs piecnieks, ir vienāda ar $p = \frac{1}{6}$. Tātad

$$\mathcal{P}_4(3) = C_4^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-3} = 4 \cdot \frac{1}{6^3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{324} \approx 0,02.$$

Paskāla trijstūris un skaitlis e

	1								$= S_0 = 1$
	1	1							$= S_1 = 1$
	1	2	1						$= S_2 = 2$
	1	3	3	1					$= S_3 = 9$
	1	4	6	4	1				$= S_4 = 96$
	1	5	10	10	5	1			
	1	6	15	20	15	6	1		
	1	7	21	35	35	21	7	1	

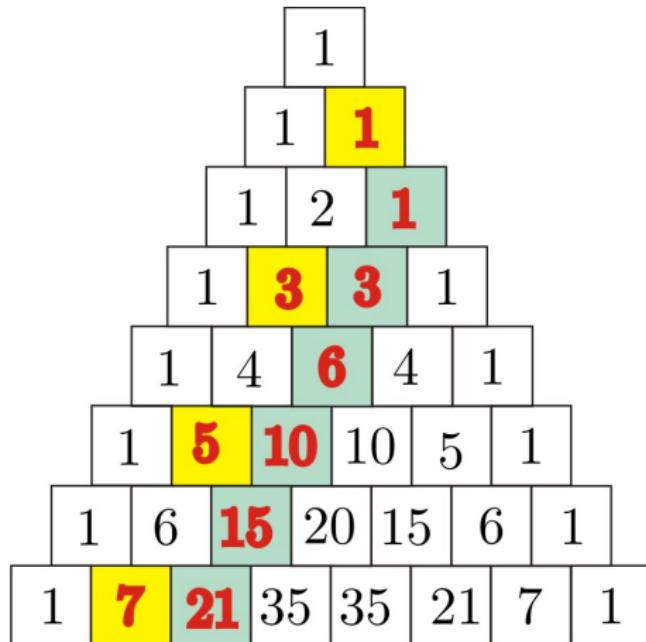
Pavisam nesen 2012. gadā tika atklāta [3] Paskāla trijstūra saistība ar skaitli

$$e = 2,7182818284\dots$$

Ja S_n ir Paskāla trijstūra n -tās rindas elementu reizinājums, tad

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{n-1} S_{n+1}}{S_n^2} = e.$$

Paskāla trijstūris un skaitlis π



Paskāla trijstūra saistība ar skaitli

$$\pi = 3,1415926535 \dots$$

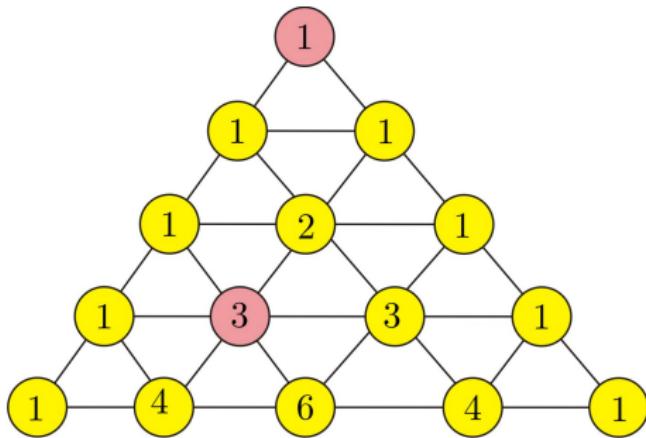
izpaužās vairākos veidos:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \dots$$

$$\pi - 2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} - \dots$$

un citos

Paskāla trijstūris un visīsākie maršruti I

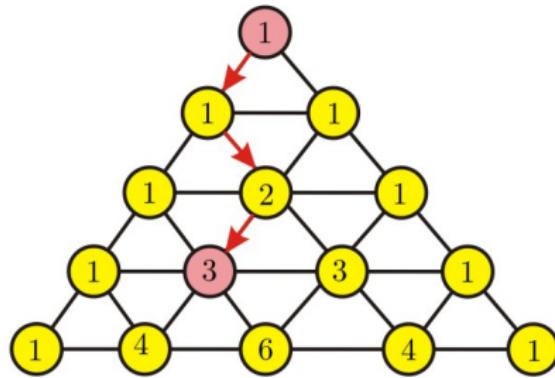
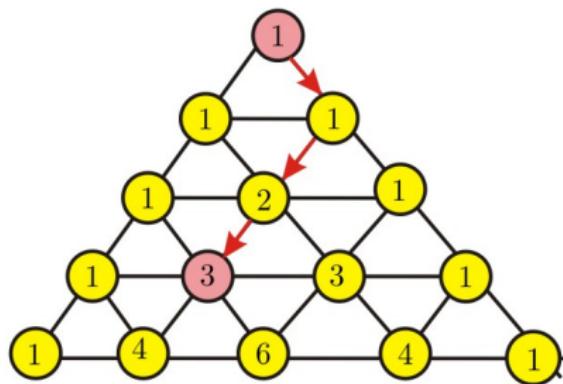
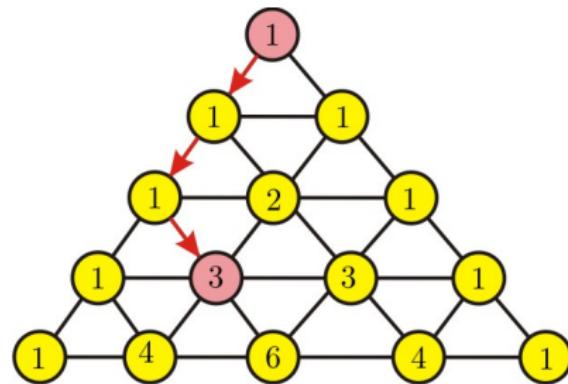


Paskāla trijstūra elementi norāda visīsāko maršrutu no augšējās virsotnes līdz apskatāmajai virsotnei skaitu.

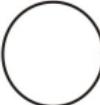
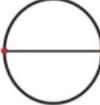
Rindas numurs, kurā atrodas apskatāmā virsotne, norāda visīsāko maršrutu garumu.

Dotajā gadījumā ir pavisam 3 visīsākie maršruti ar garumu 3.

Paskāla trijstūris un visīsākie maršruti II

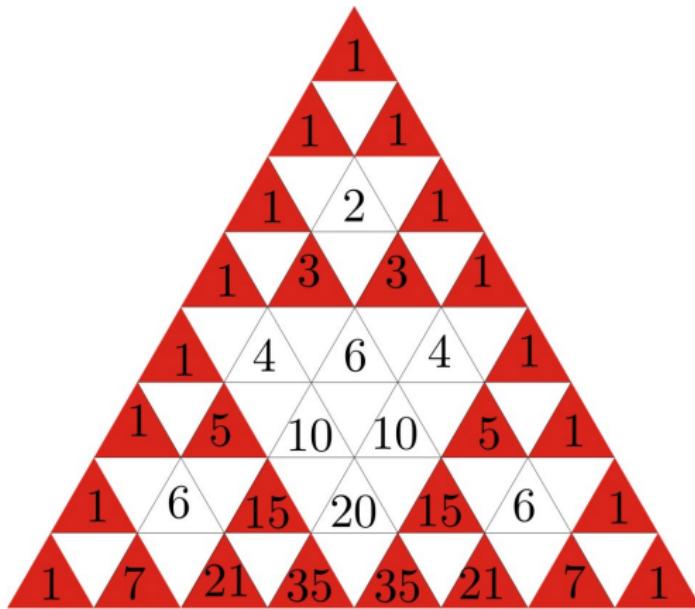


Paskāla trijstūris un punkti uz riņķa līnijas I

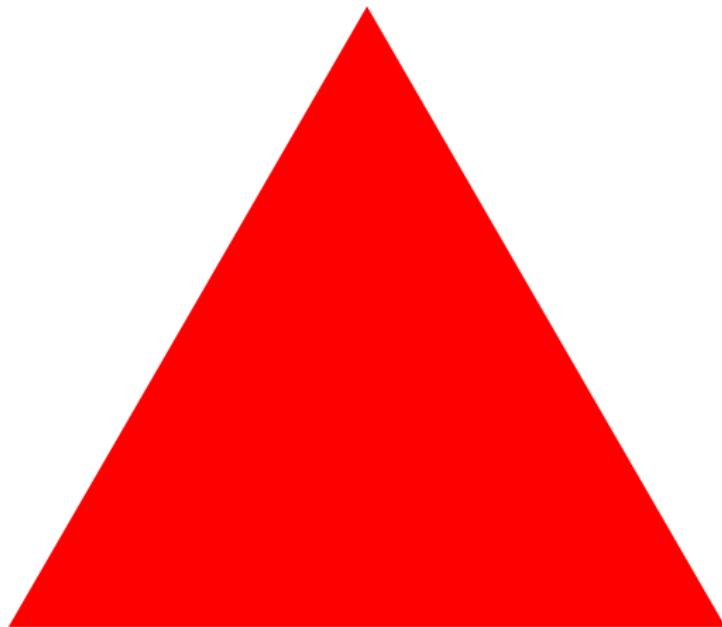
	Punktu skaits	Nogriežņu skaits	Trijstūru skaits	Četrstūru skaits	Piecstūru skaits
	1				
	2	1			
	3	3	1		
	4	6	4	1	
	5	10	10	5	1

Paskāla trijstūris un Sierpinska trijstūris I

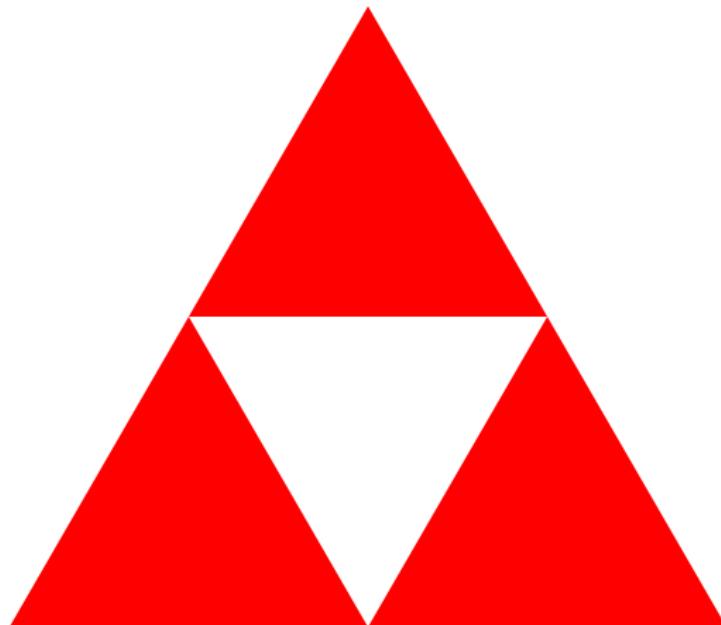
Paskāla trijstūrī iezīmējam trijstūrus, kuros atrodas nepāra skaitļi, šādā veidā.



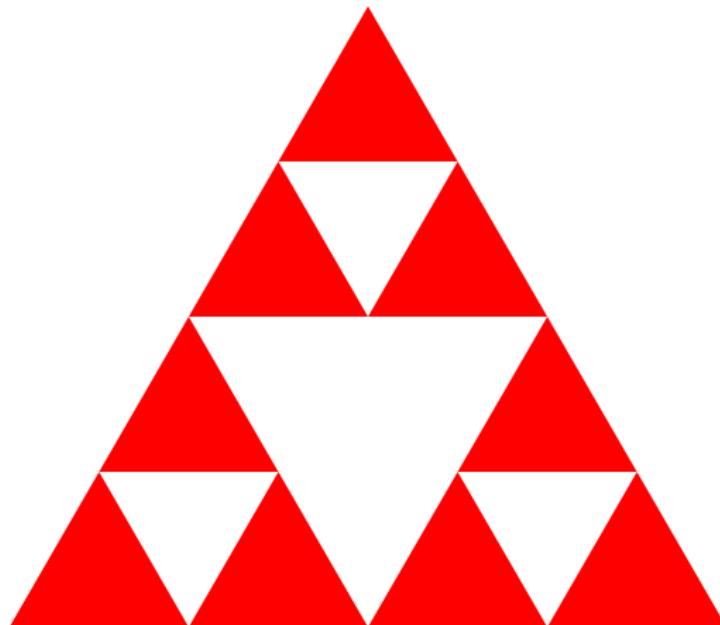
Paskāla trijstūris un Sierpinska trijstūris II



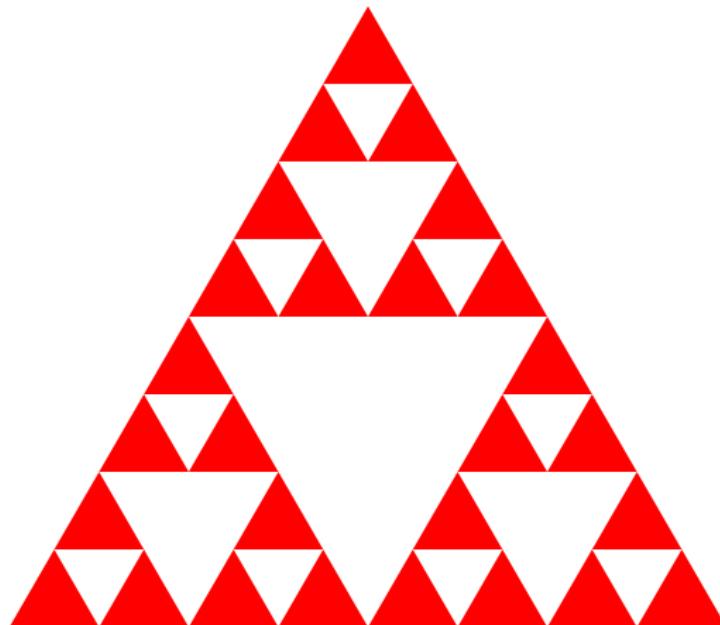
Paskāla trijstūris un Sierpinska trijstūris III



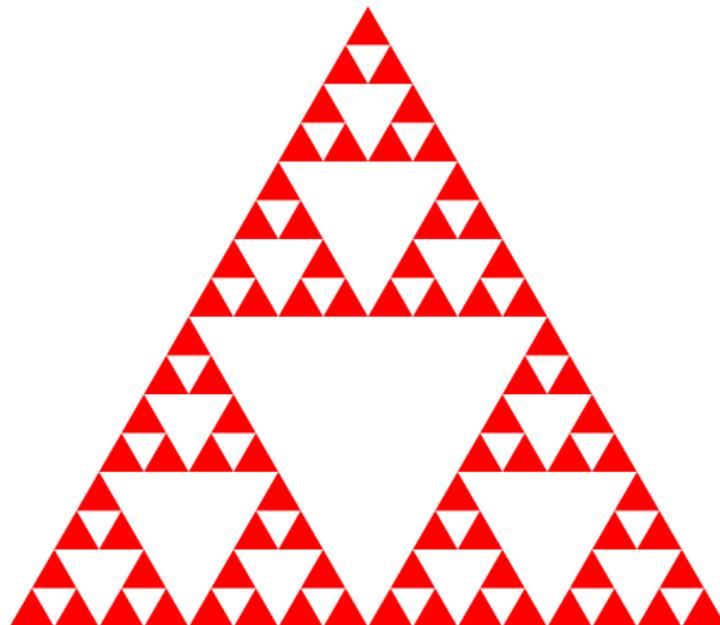
Paskāla trijstūris un Sierpinska trijstūris IV



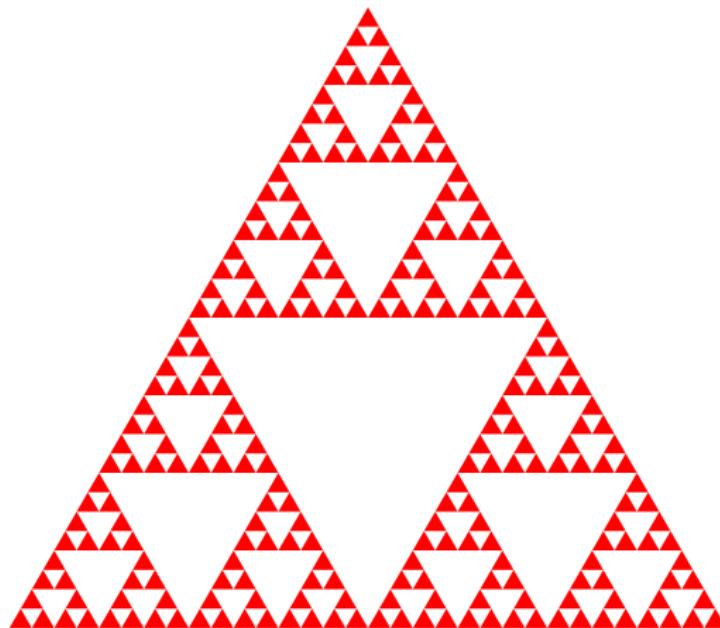
Paskāla trijstūris un Sierpinska trijstūris V



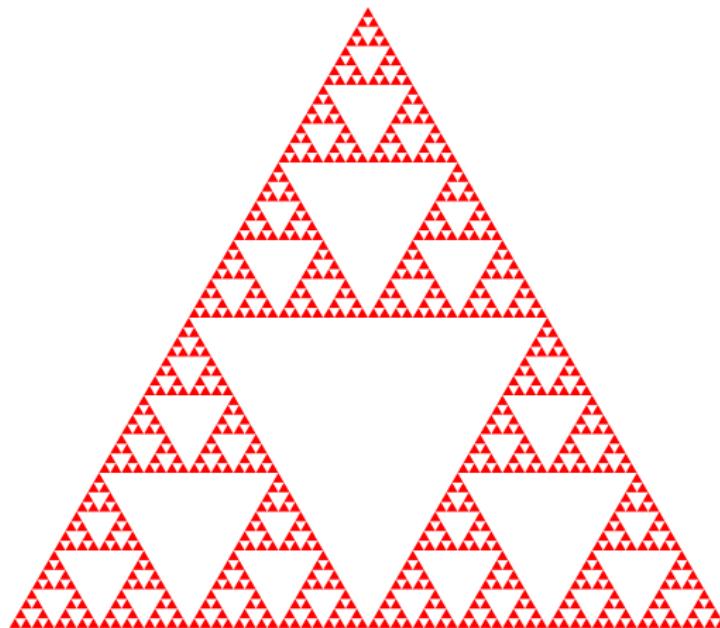
Paskāla trijstūris un Sierpinska trijstūris VI



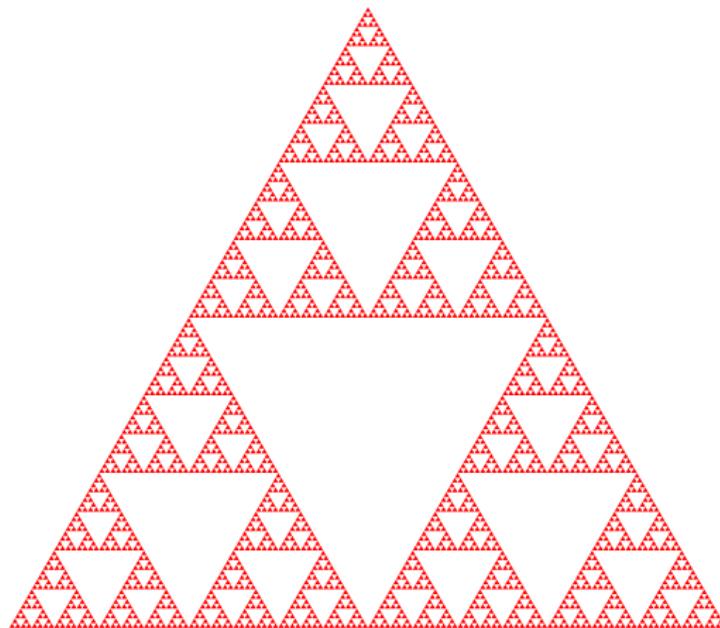
Paskāla trijstūris un Sierpinska trijstūris VII



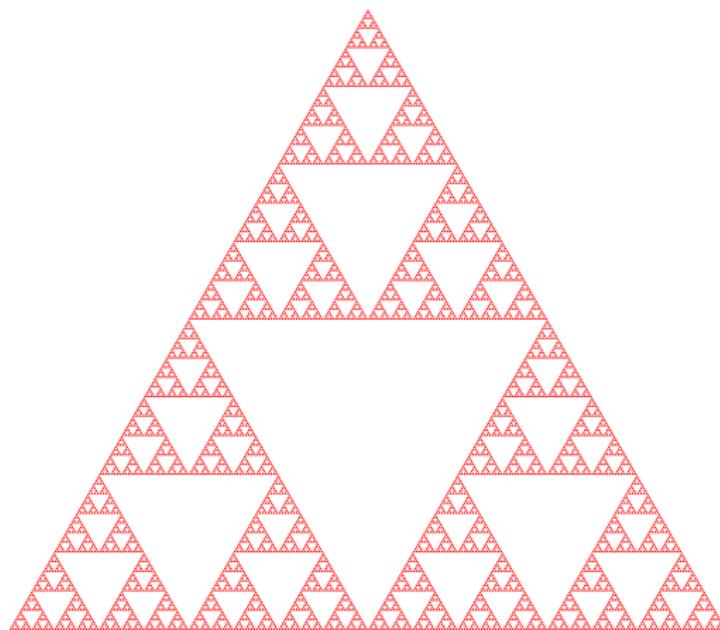
Paskāla trijstūris un Sierpinska trijstūris VIII



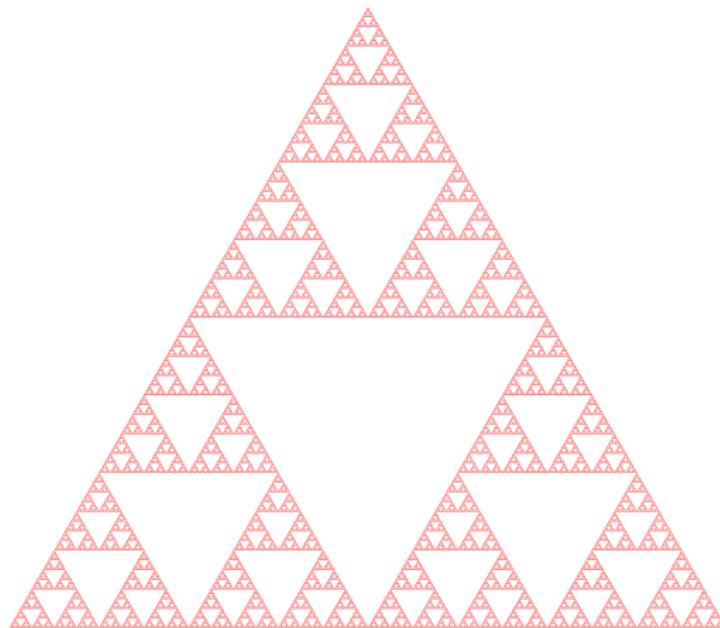
Paskāla trijstūris un Sierpinska trijstūris IX



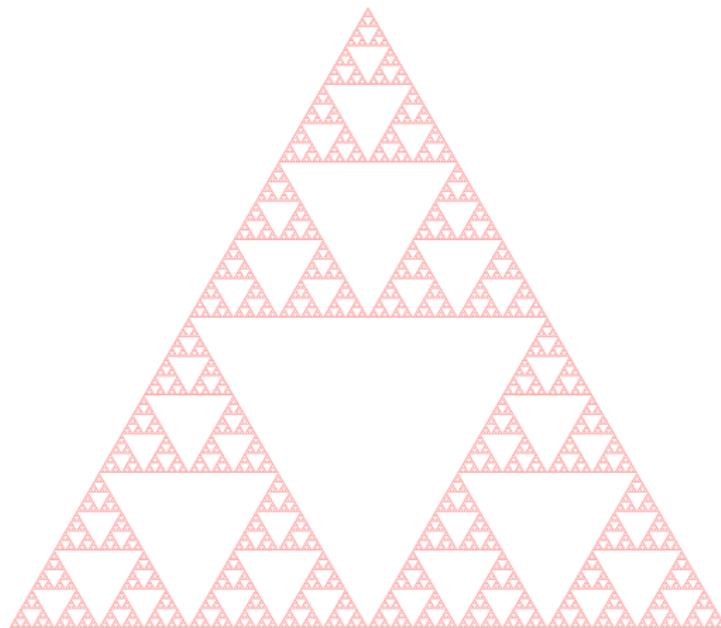
Paskāla trijstūris un Sierpinska trijstūris X



Paskāla trijstūris un Sierpinska trijstūris XI



Paskāla trijstūris un Sierpinska trijstūris XII



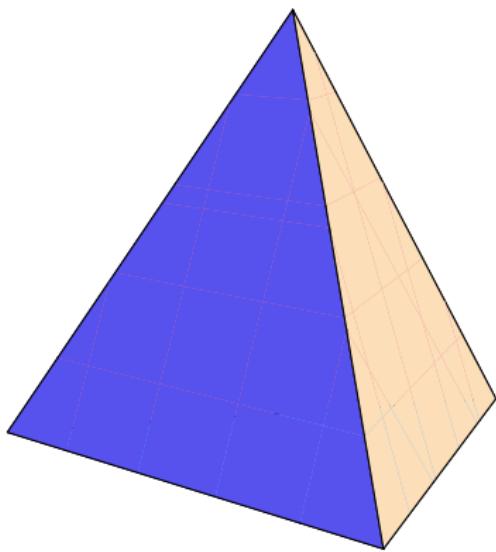
Paskāla trijstūris un Sierpinska trijstūris XIII

Turpinot šo procesu bezgalīgi, iegūsim **Sierpinska trijstūri**. Sierpinska trijstūris ir **fraktāls** - pašlīdzīga figūra.

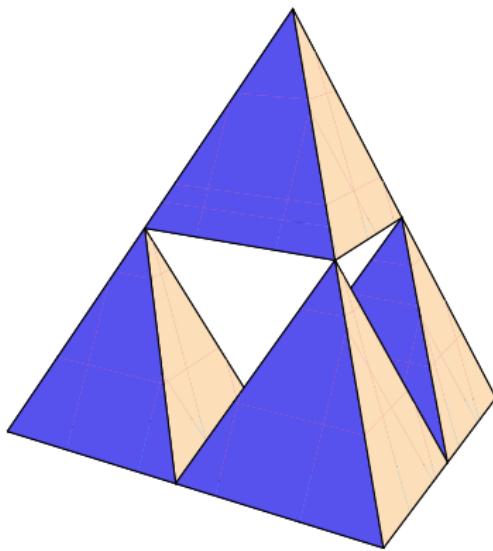


Vaclav Sierpinski (1882–1969) – polu matemātiķis.

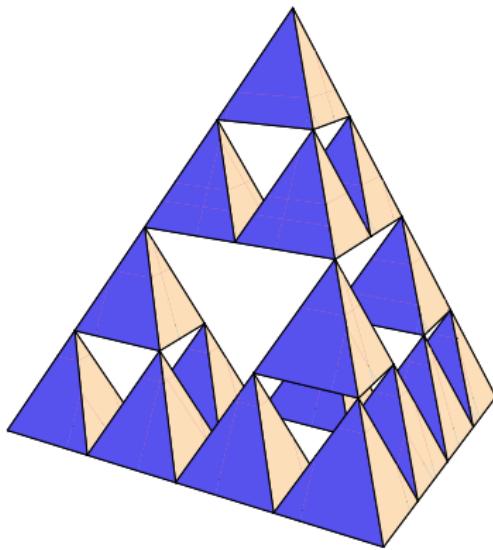
Sierpinska tetraedrs I



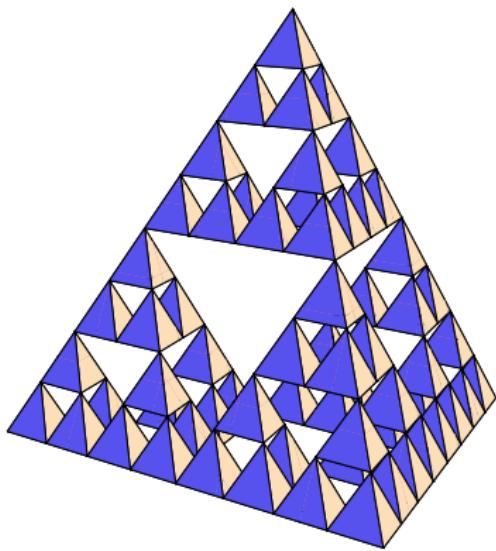
Sierpinska tetraedrs II



Sierpinska tetraedrs III



Sierpinska tetraedrs IV



Hanojas torņi |

Hanojas torņi ir matemātiska spēle (puzzle). Šai spēlei ir arī citi nosaukumi. Doti 3 stieņi un n savstarpēji dažādi pēc izmēra diskī, kurus var novietot uz stieņiem.

Sākuma stāvoklī visi diskī atrodas uz viena no stieņiem un ir sarindoti pēc izmēra tā, ka lielākais disks atrodas pašā apakšā, bet pats mazākais pašā augšā.

Uzdevums: pārvietot visus diskus uz citu stieni, kur diskiem ir jābūt izvietotiem tāpat kā sākuma stāvoklī.

Noteikumi disku pārvietošanai:

- katrā solī pārvieto tikai vienu disku,
- pārvietojamo disku noņem no viena stieņa augšas un uzliek uz cita stieņa augšas,
- lielāks disks nevar atrasties uz mazāka diska.

Hanojas torņi II



Hanojas torņi III

Iepriekšējais attēls un leģenda par Hanojas torņiem ir ņemti no [8].

“Leģenda vēsta, ka kādā Indijas svētnīcā dievs Brahma pasaules radīšanas brīdī uzstādījis 3 briljanta stieņus. Uz vidējā stieņa viņš uzvilka 64 dažāda diametra zelta diskus pieaugošā lielumā. Priesteriem, svētnīcas kalpotājiem, tika dots uzdevums - pārkārtot piramīdu no viena stieņa uz otru, bet noteikti ievērojot 2 noteikumus:

- *vienā reizē drīkst nocelt tikai vienu disku,*
- *ielāko disku nedrīkst likt uz mazāko disku.*

Kad priesteri pārcels visus diskus no centrālā stieņa uz kādu no malējiem, iestāsies pasaules gals, Brahma iznīcinās to ar uguni.”

Hanojas torņi IV

Minimālais soļu skaits, lai pārvietotu n diskus, ir

n	2	3	4	5	6	7	\dots
$2^n - 1$	3	7	15	31	63	127	\dots

Lai pārvietotu $n = 64$ diskus, ir nepieciešami vismaz

$$2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$$

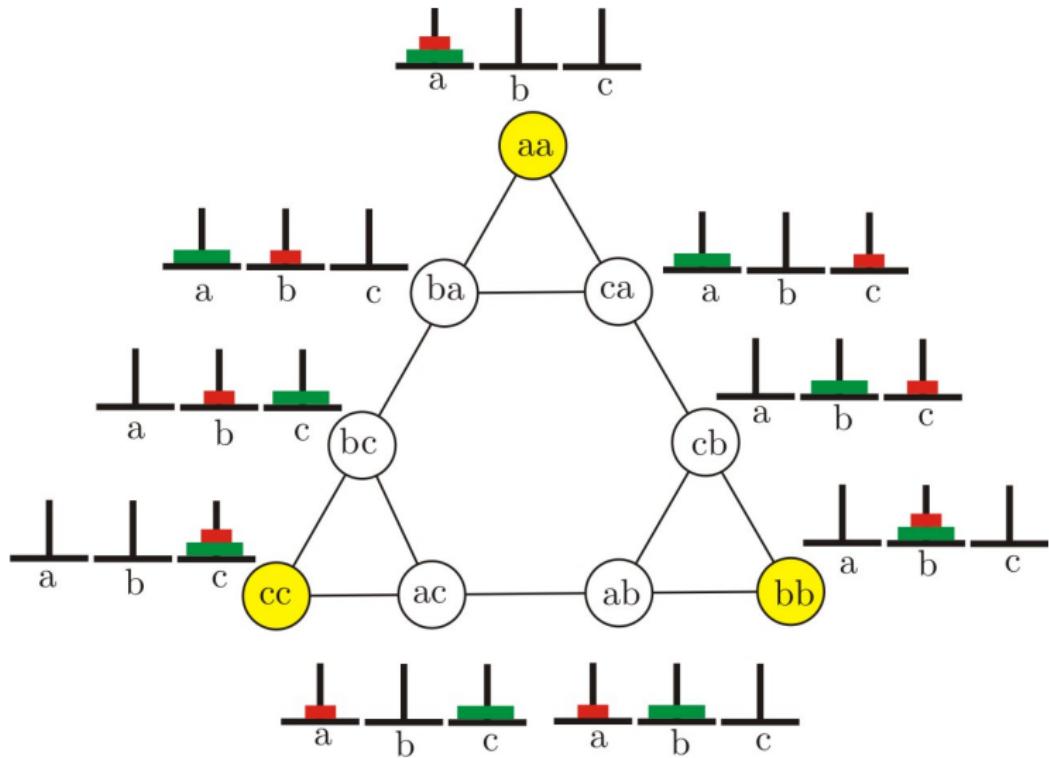
soļi. Ja uzskatīt, ka priesteri veic 1 soli 1 sekundē un strādā bez atpūtas, tad viņiem būtu jāstrādā vismaz

593 066 617 596

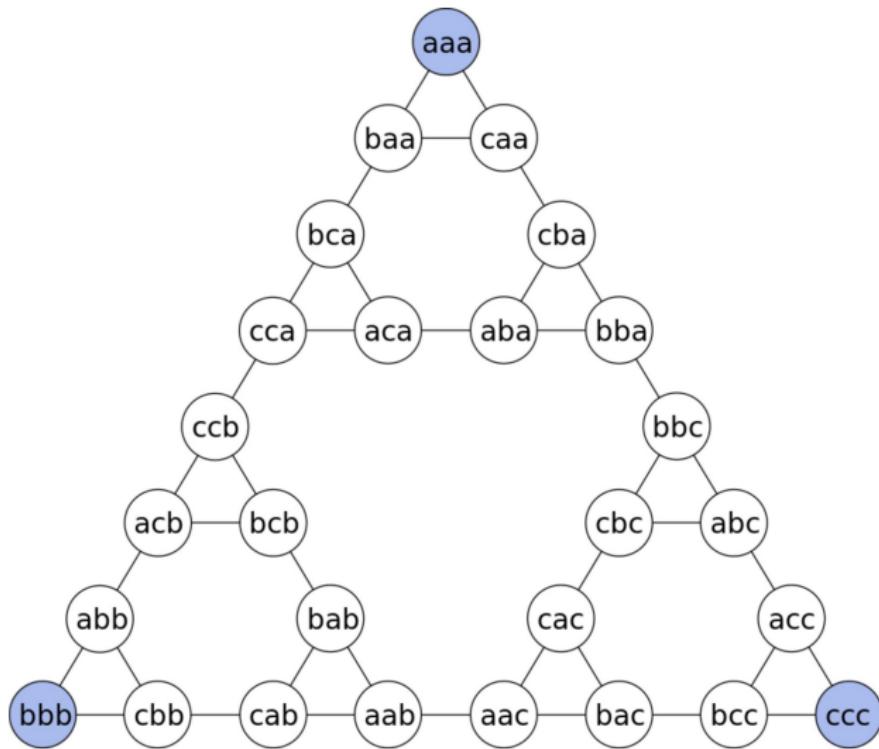
gadi, t.i., **593 miljardi 66 miljoni 617 tūkstoši 596 gadi.**

Uzdevuma par Hanojas torņiem atrisinājumu sniedz speciāla veida maršruti Sierpinska trijstūra konstrukcijā izmantotajos trijstūros.

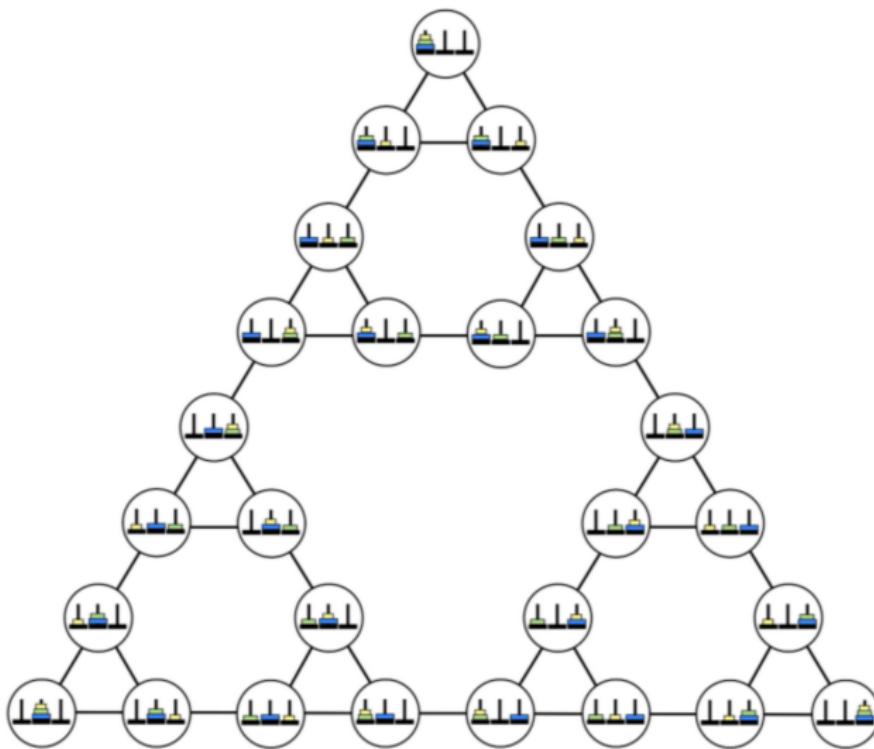
Uzdevums par Hanojas torņiem 2 disku gadījumā



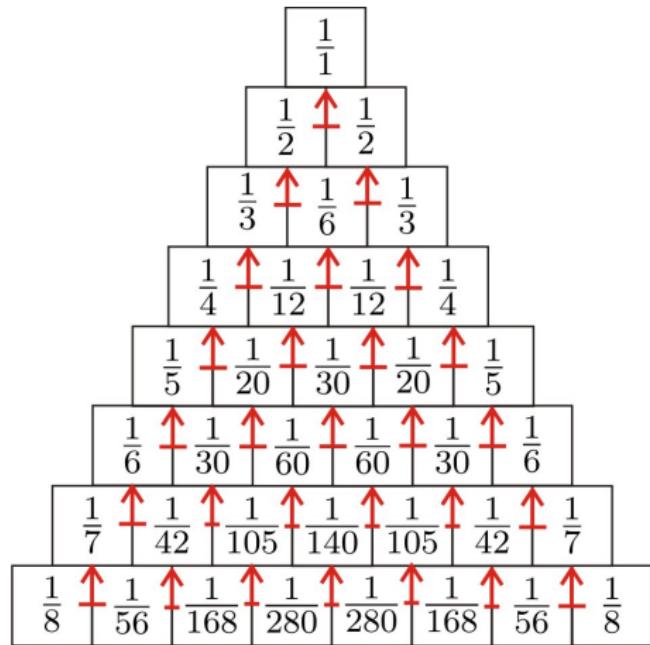
Uzdevums par Hanojas torņiem 3 disku gadījumā I



Uzdevums par Hanojas torņiem 3 disku gadījumā II



Paskāla trijstūris un Leibnica trijstūris I



Leibnica trijstūris ir trijstūrveida skaitļu tabula, kuras malējie elementi ir

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \dots$$

un kurā jebkurš elements ir divu zemāk stāvošo elementu summa.

Paskāla trijstūris un Leibnica trijstūris II

Saistība starp Paskāla un Leibnica trijstūriem.

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1 \cdot 1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot 1} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3 \cdot 1} \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{3 \cdot 2} \quad \frac{1}{3} = \frac{1}{3 \cdot 1}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4 \cdot 1} \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{4 \cdot 3} \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{4 \cdot 3} \quad \frac{1}{4} = \frac{1}{4 \cdot 1}$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{5 \cdot 1} \quad \frac{1}{20} = \frac{1}{5 \cdot 4} \quad \frac{1}{30} = \frac{1}{5 \cdot 6} \quad \frac{1}{20} = \frac{1}{5 \cdot 4} \quad \frac{1}{5} = \frac{1}{5 \cdot 1}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{6 \cdot 1} \quad \frac{1}{30} = \frac{1}{6 \cdot 5} \quad \frac{1}{60} = \frac{1}{6 \cdot 10} \quad \frac{1}{60} = \frac{1}{6 \cdot 10} \quad \frac{1}{30} = \frac{1}{6 \cdot 5} \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{6 \cdot 1}$$

Paskāla trijstūris un Leibnica trijstūris III



Vilhelms Leibnics (1646–1716) - vācu matemātiķis.

Fibonači skaitļi I

Fibonači skaitļi veido virkni, kurā katrs nākamais loceklis ir divu iepriekšējo summa:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

$$F_0 = \textcolor{red}{0},$$

$$F_1 = \textcolor{red}{1},$$

$$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = \textcolor{red}{1},$$

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = \textcolor{red}{2},$$

$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = \textcolor{red}{3},$$

$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = \textcolor{red}{5},$$

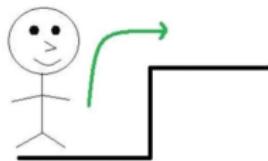
$$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = \textcolor{red}{8},$$

$$F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = \textcolor{red}{13},$$

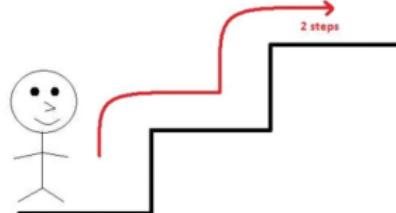
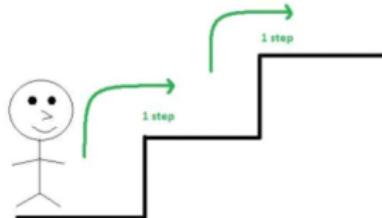
$$F_8 = F_7 + F_6 = 13 + 8 = \textcolor{red}{21}, \dots$$

Aktīvie cilvēciņi I

Kāpjot pa kāpnēm, cilvēciņš var uzkāpt uz katras kāpnītes vai lekt pāri vienai kāpnītei. Cik veidos viņš var uzkāpt pa n kāpnītēm?

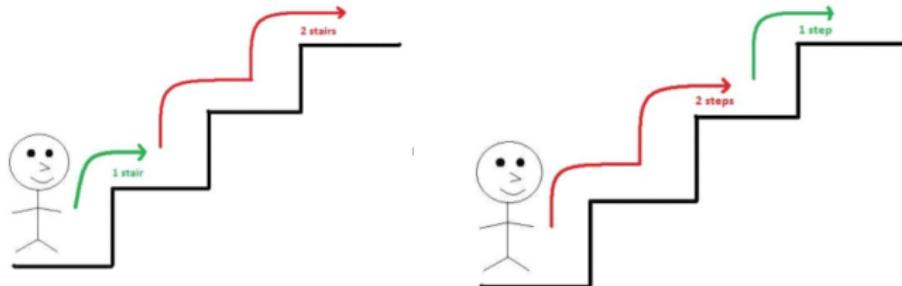
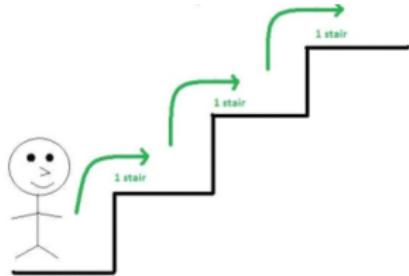


Ja 1 kāpnīte, tad var uzkāpt **1** veidā.



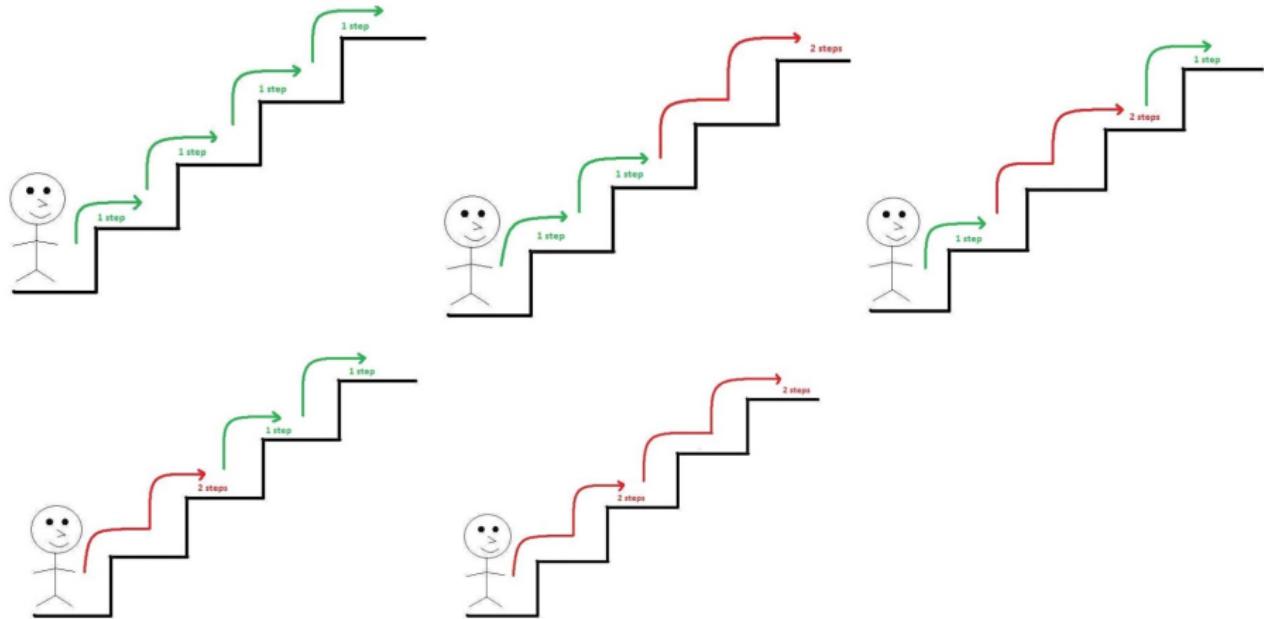
Ja 2 kāpnītes, tad var uzkāpt **2** veidos.

Aktīvie cilvēciņi II



Ja 3 kāpnītes, tad var uzkāpt **3** veidos.

Aktīvie cilvēciņi III



Ja 4 kāpnītes, tad var uzķāpt **5** veidos.

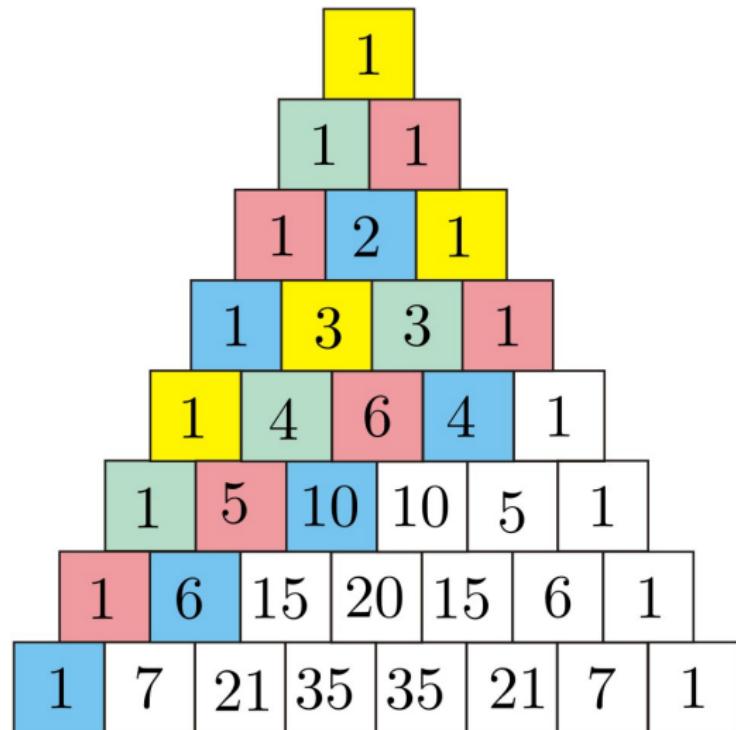
Pizas Leonards



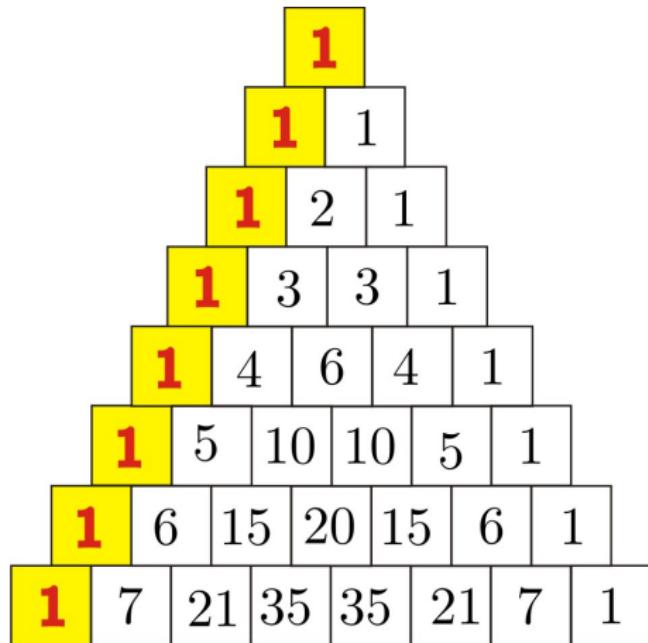
Pizas Leonards vai **Fibonači** (apt. 1170. – apt. 1250.) - itāļu matemātiķis.

Paskāla trijstūris un Fibonači skaitļi

1	= 1
1	= 1
2	= 1 + 1
3	= 1 + 2
5	= 1 + 3 + 1
8	= 1 + 4 + 3
13	= 1 + 5 + 6 + 1
21	= 1 + 6 + 10 + 4



Paskāla trijstūris un vieninieki

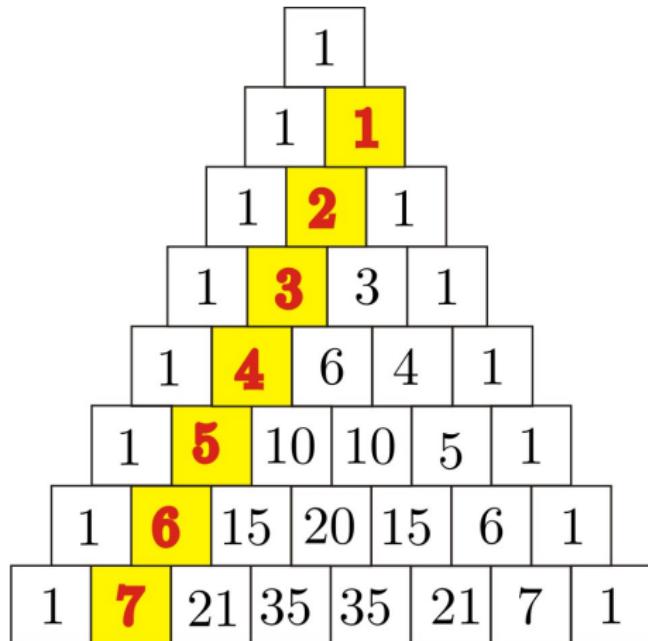


Vieninieki

$$C_n^0 = 1 \quad (n = 0, 1, \dots)$$

1, 1, 1, 1, 1, ..., 1, ...

Paskāla trijstūris un naturālie skaitļi I



Naturālie skaitļi

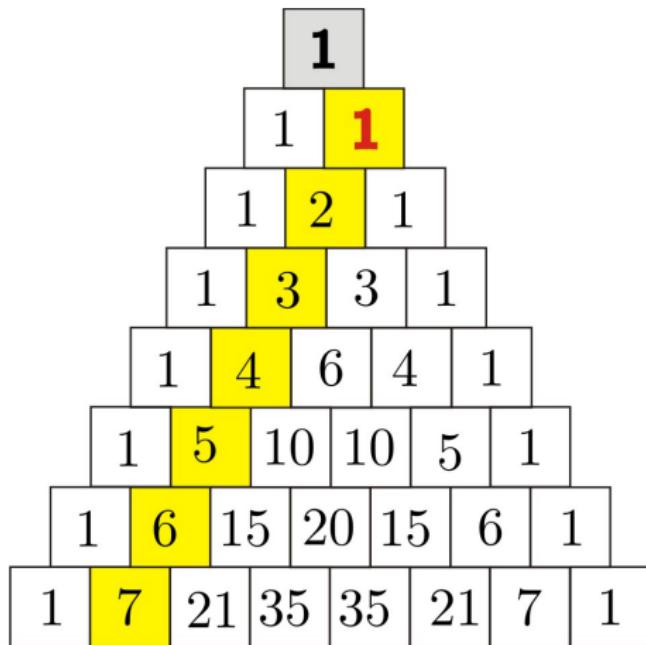
$$C_n^1 = n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$$

ir n vieninieku summa:

$$\begin{aligned} C_n^1 &= C_0^0 + C_1^0 + \cdots + C_{n-1}^0 = \\ &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_n = n. \end{aligned}$$

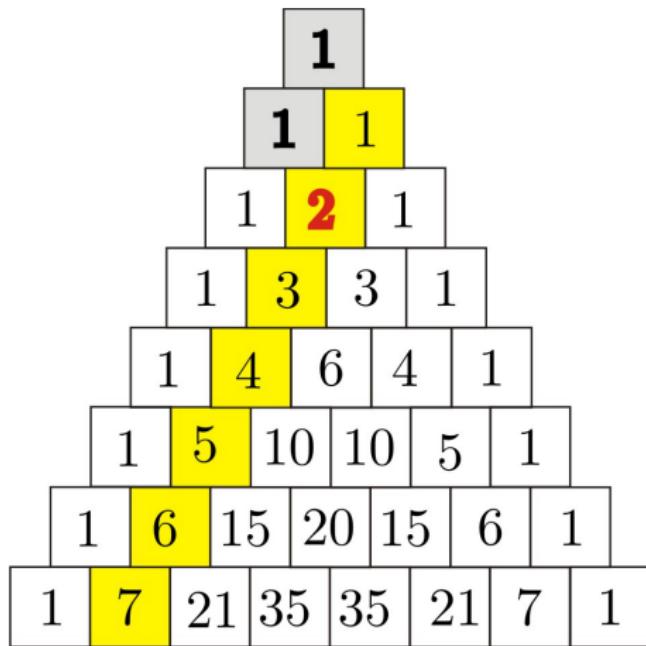
Paskāla trijstūris un naturālie skaitļi II



$n = 1:$

$$\underbrace{1}_1 = \mathbf{1}$$

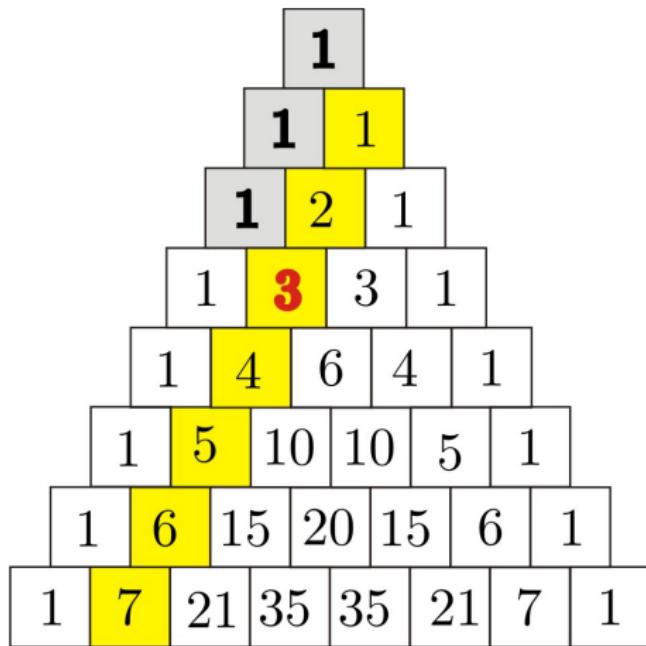
Paskāla trijstūris un naturālie skaitļi III



$n = 2:$

$$\underbrace{1+1}_2 = 2$$

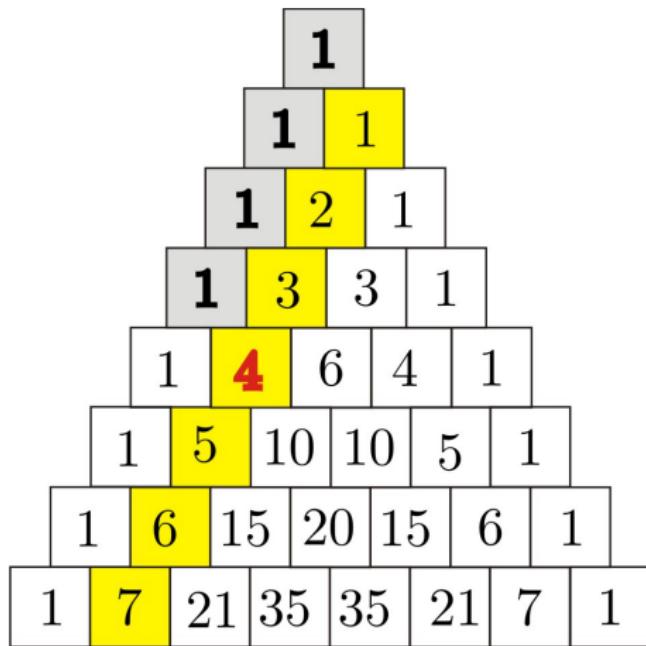
Paskāla trijstūris un naturālie skaitļi IV



$$n = 3:$$

$$\underbrace{1 + 1 + 1}_3 = 3$$

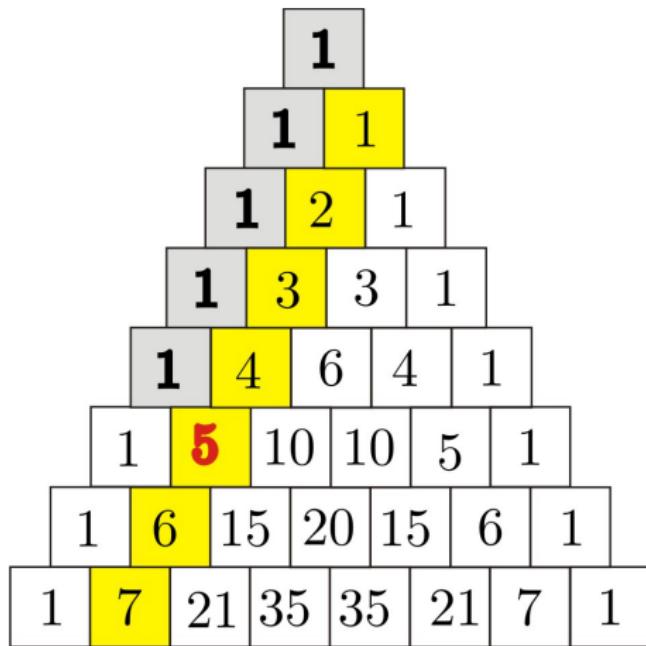
Paskāla trijstūris un naturālie skaitļi V



$n = 4$:

$$\underbrace{1 + 1 + 1 + 1}_4 = \textcolor{red}{4}$$

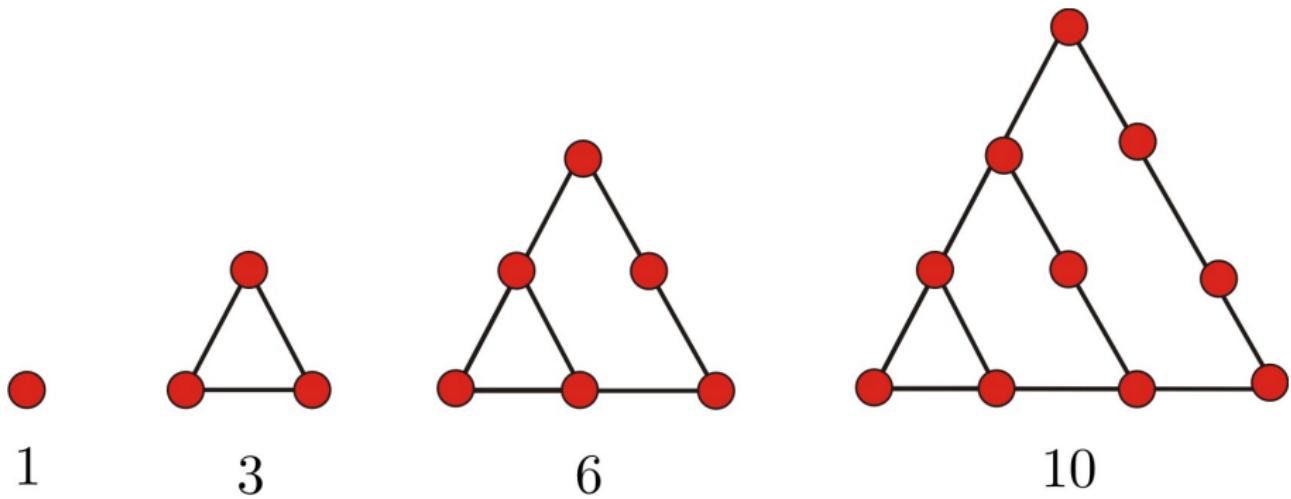
Paskāla trijstūris un naturālie skaitļi VI



$n = 5$:

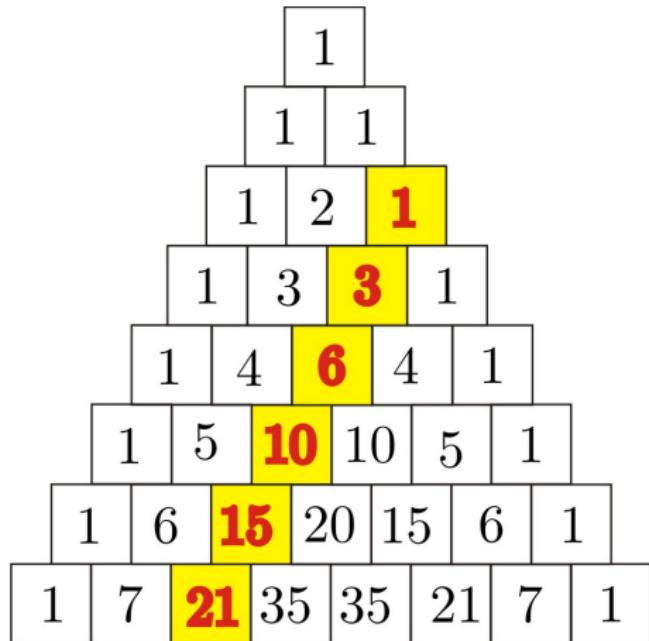
$$\underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + 1}_5 = \mathbf{5}$$

Paskāla trijstūris un trijstūra skaitļi I



Trijstūra skaitļi: 1, 3, 6, 10, 15, ...

Paskāla trijstūris un trijstūra skaitļi II



Trijstūra skaitļi

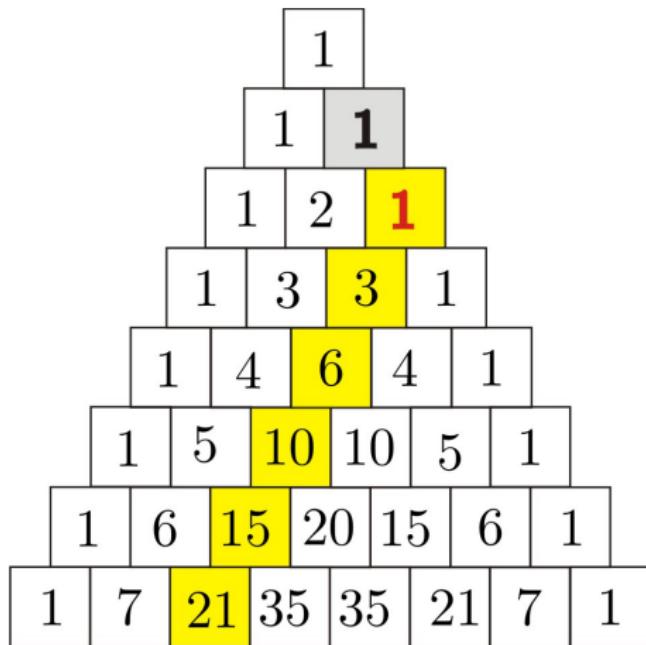
$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

$$1, 3, 6, 10, 15, \dots, \frac{n(n-1)}{2}, \dots$$

ir pirmo $n-1$ naturālo skaitļu summa:

$$\begin{aligned} C_n^2 &= C_1^1 + C_2^1 + \cdots + C_{n-1}^1 \\ &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}. \end{aligned}$$

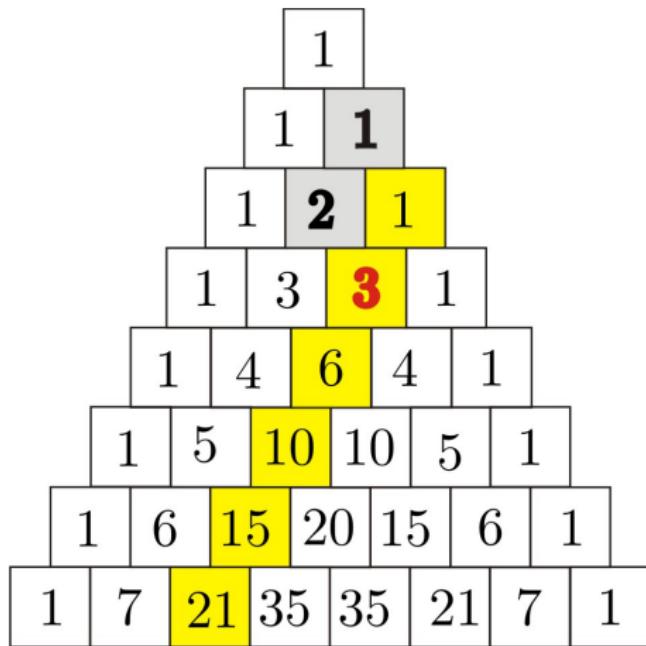
Paskāla trijstūris un trijstūra skaitļi III



$$n = 2:$$

$$1 = \frac{2(2-1)}{2} = 1$$

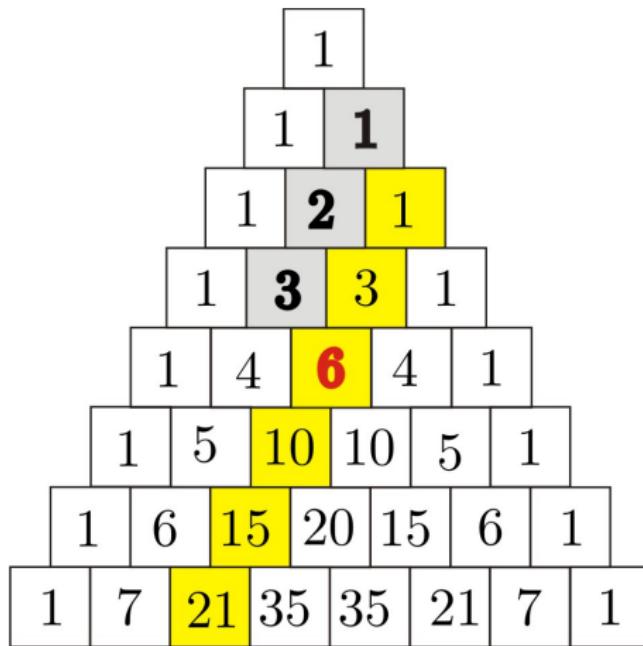
Paskāla trijstūris un trijstūra skaitļi IV



$$n = 3:$$

$$1 + 2 = \frac{3(3-1)}{2} = 3$$

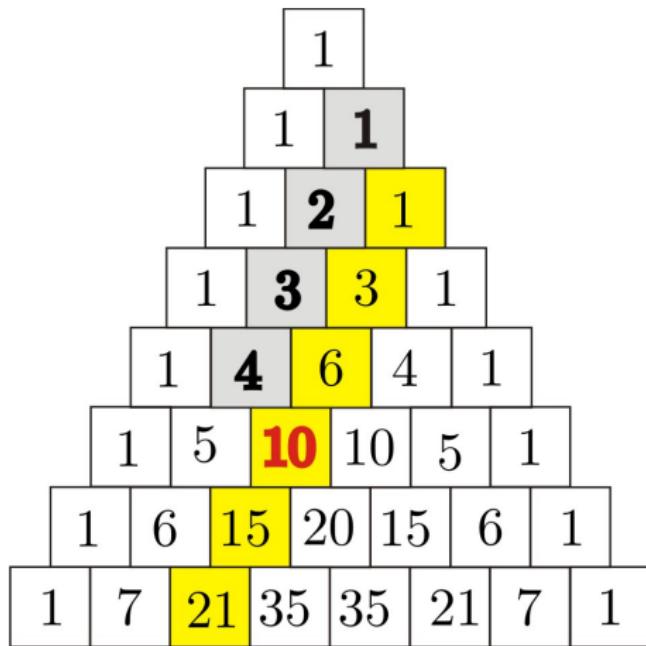
Paskāla trijstūris un trijstūra skaitļi V



$$n = 4:$$

$$1 + 2 + 3 = \frac{4(4-1)}{2} = 6$$

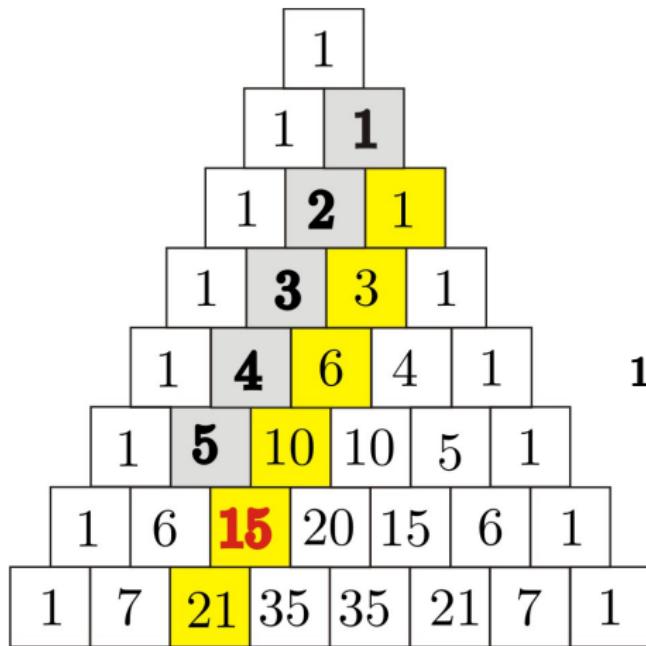
Paskāla trijstūris un trijstūra skaitļi VI



$$n = 5:$$

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{5(5-1)}{2} = 10$$

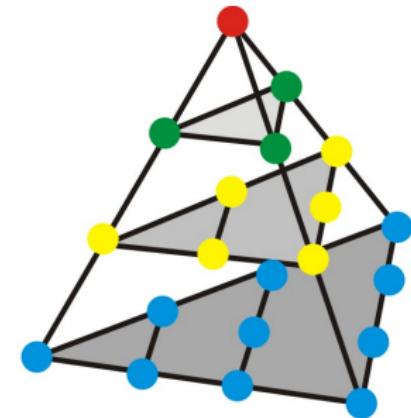
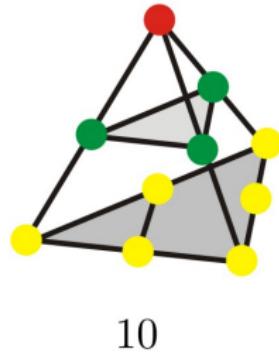
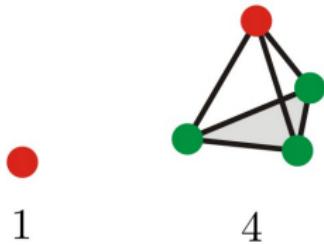
Paskāla trijstūris un trijstūra skaitļi VII



$$n = 6:$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \frac{6(6-1)}{2} = 15$$

Paskāla trijstūris un tetraedra skaitļi I

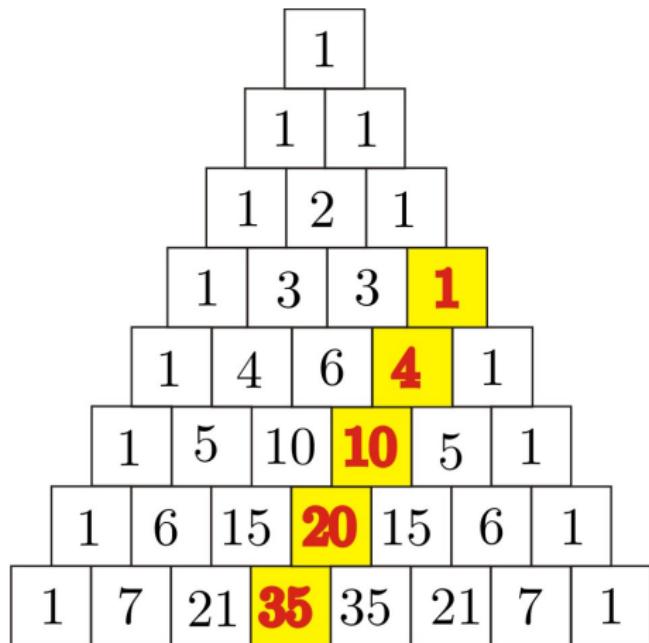


Tetraedra skaitļi jeb **trijstūra piramīdas skaitļi:** **1, 4, 10, 20, 35, ...**

Uz tetraedru pamatiem atrodošos punktu skaits veido trijstūra skaitļus:

1, 3, 6, 10, 15, ...

Paskāla trijstūris un tetraedra skaitļi II



Tetraedra skaitļi

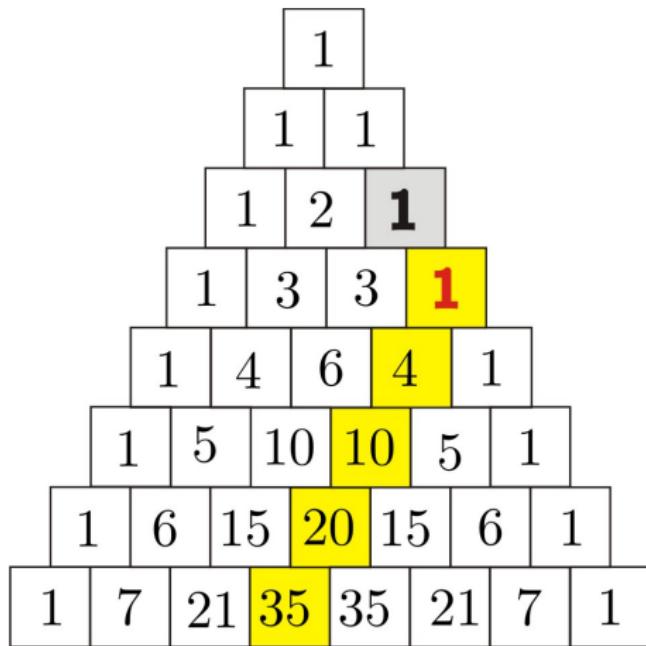
$$C_n^3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6} \quad (n = 3, 4, \dots)$$

$$1, 4, 10, 20, \dots, \frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \dots$$

ir pirmo $n-2$ trijstūra skaitļu summa:

$$\begin{aligned} C_n^3 &= C_2^2 + C_3^2 + \cdots + C_{n-1}^2 = \\ &= 1 + 3 + 6 + \cdots + \frac{(n-1)(n-2)}{2} = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6}. \end{aligned}$$

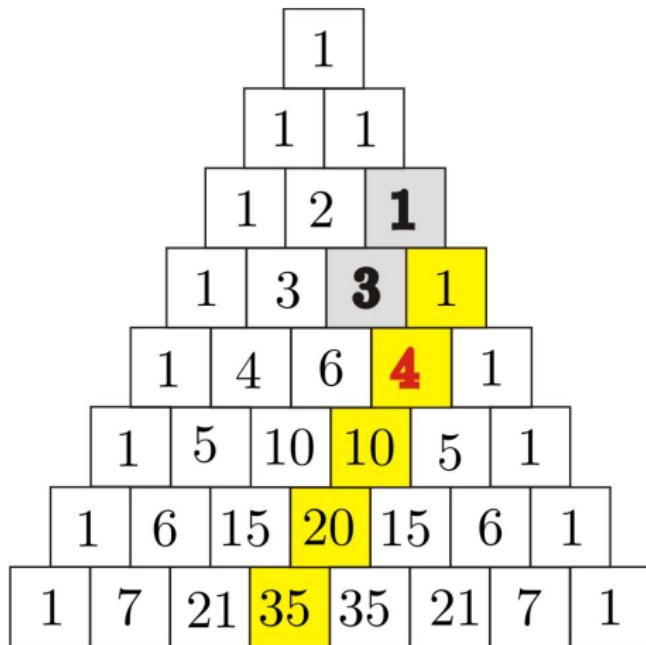
Paskāla trijstūris un tetraedra skaitļi III



$n = 3$:

$$1 = \frac{3(3-1)(3-2)}{6} = 1$$

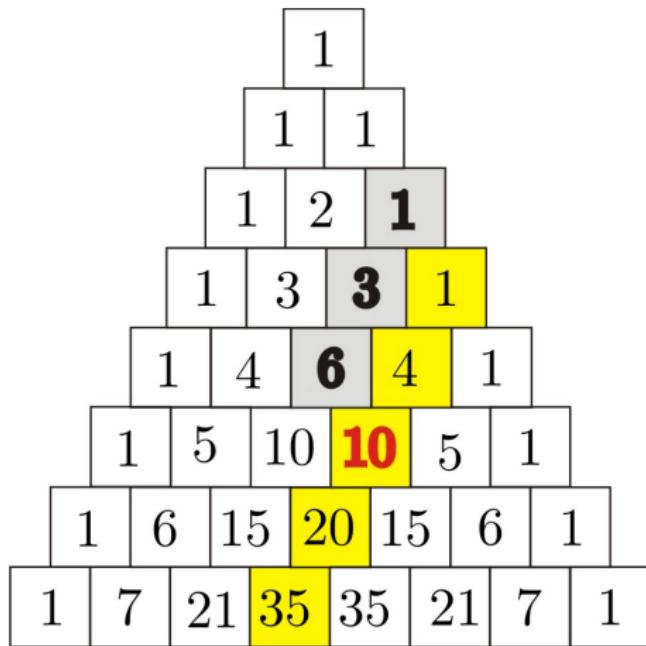
Paskāla trijstūris un tetraedra skaitļi IV



$$n = 4:$$

$$1 + 3 = \frac{4(4-1)(4-2)}{6} = 4$$

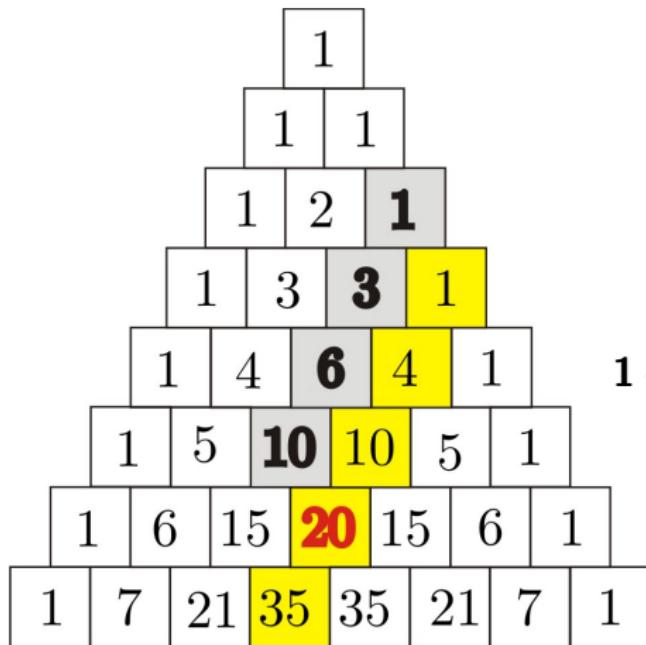
Paskāla trijstūris un tetraedra skaitļi V



$$n = 5:$$

$$1 + 3 + 6 = \frac{5(5-1)(5-2)}{6} = 10$$

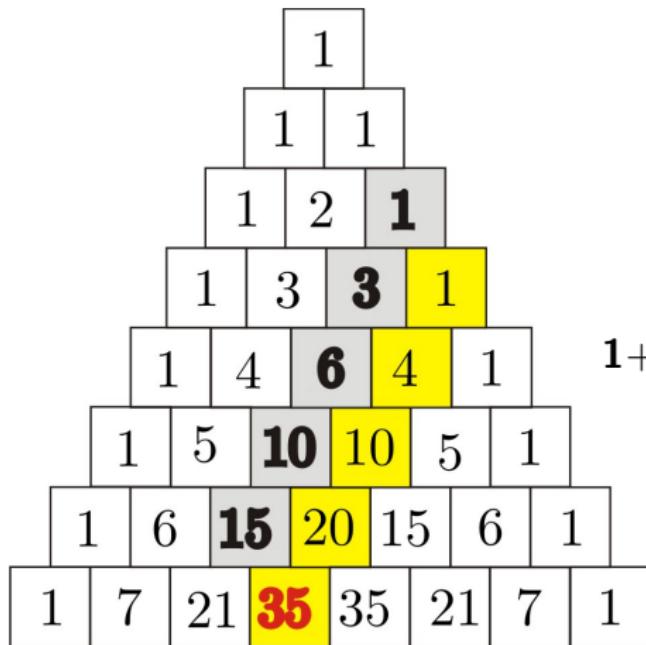
Paskāla trijstūris un tetraedra skaitļi VI



$$n = 6:$$

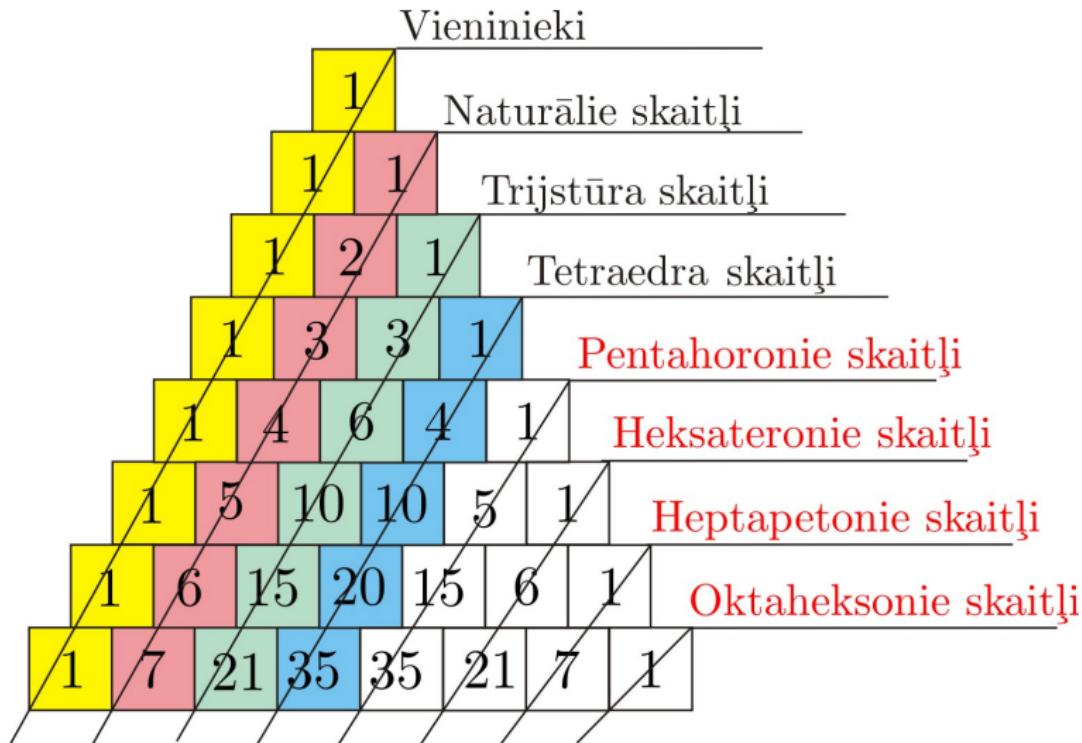
$$1 + 3 + 6 + 10 = \frac{6(6-1)(6-2)}{6} = 20$$

Paskāla trijstūris un tetraedra skaitļi VII

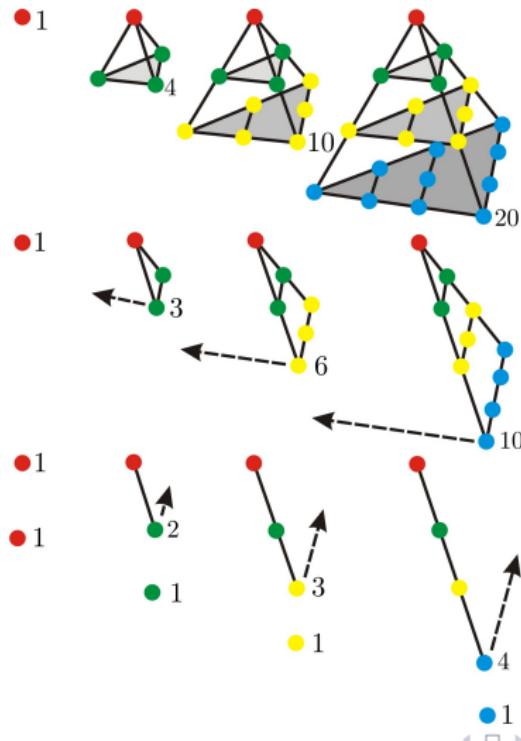
 $n = 7:$

$$1+3+6+10+15 = \frac{7(7-1)(7-2)}{6} = 35$$

Paskāla trijstūra diagonāles



Pentahorono skaitļu interpretācija atrodas 4-dimensiju telpā, heksaterono skaitļu 5-dimensiju telpā, . . .



Paskāla trijstūra elementi - n -dimensiju trijstūra skaitļi

0-dimensiju trijstūra skaitļi - vieninieki

1-dimensiju trijstūra skaitļi - naturālie skaitļi (uz taisnes)

2-dimensiju trijstūra skaitļi - trijstūra skaitļi (plaknē)

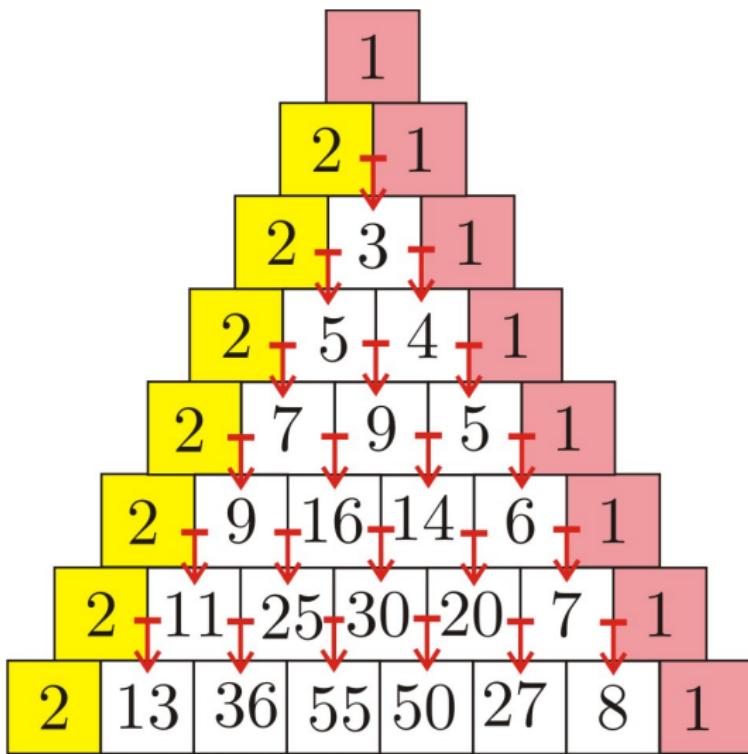
3-dimensiju trijstūra skaitļi - tetraedra skaitļi (telpā)

4-dimensiju trijstūra skaitļi - pentahoronie skaitļi

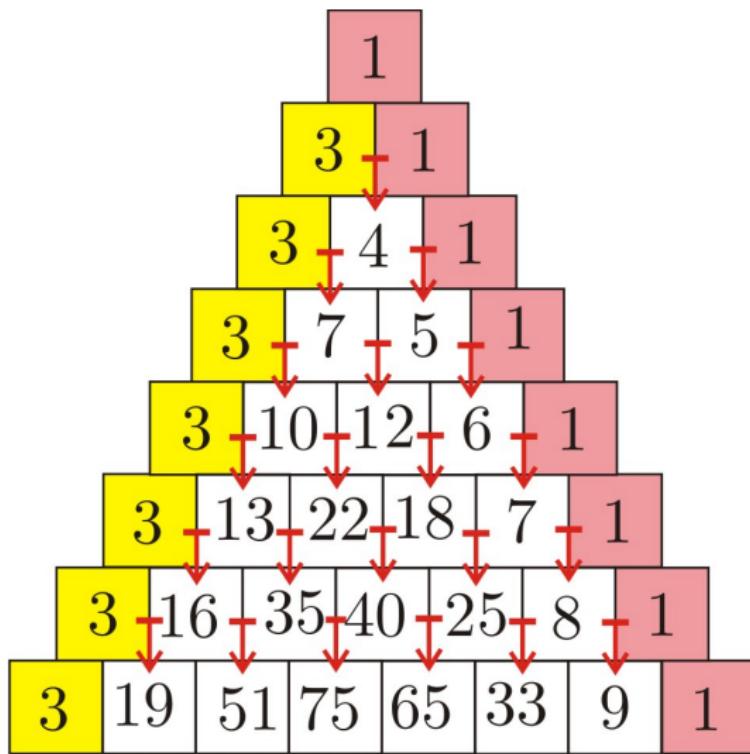
5-dimensiju trijstūra skaitļi - heksateronie skaitļi

.....

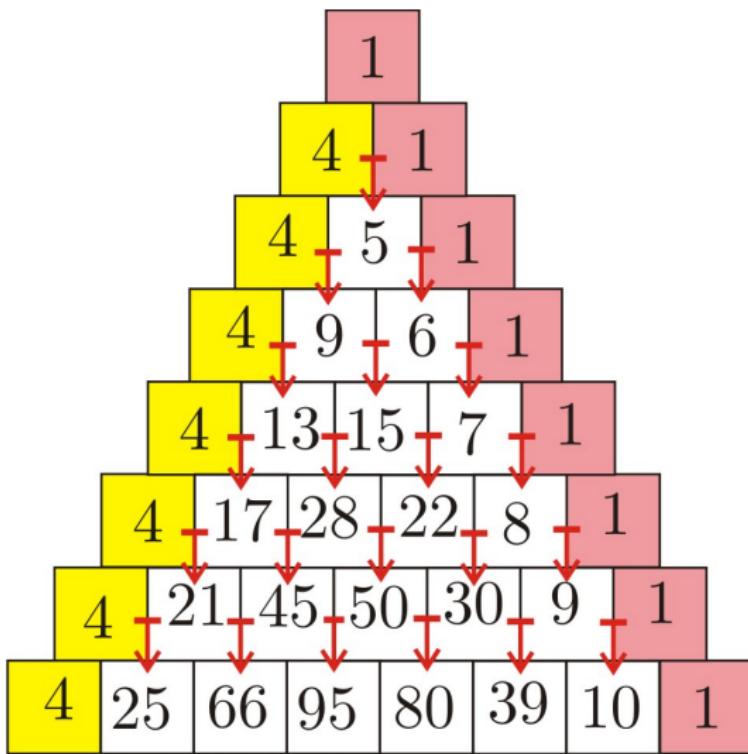
Paskāla (2, 1)-trijstūris



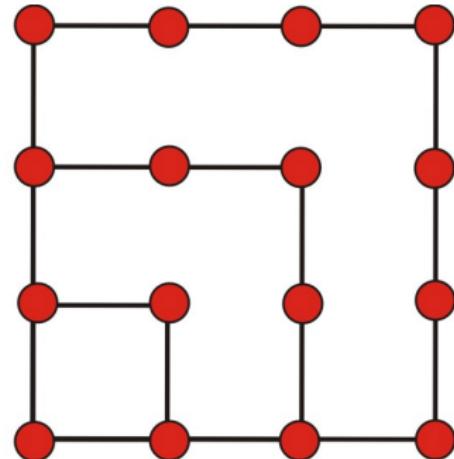
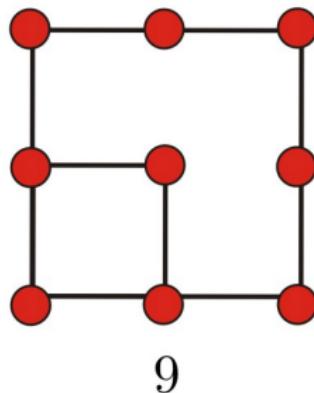
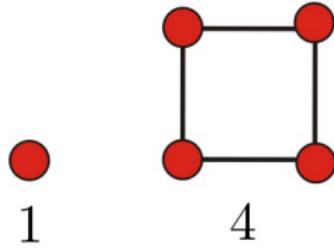
Paskāla (3, 1)-trijstūris



Paskāla (4, 1)-trijstūris

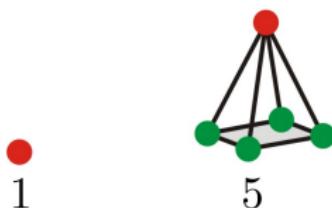


Četrstūra skaitļi

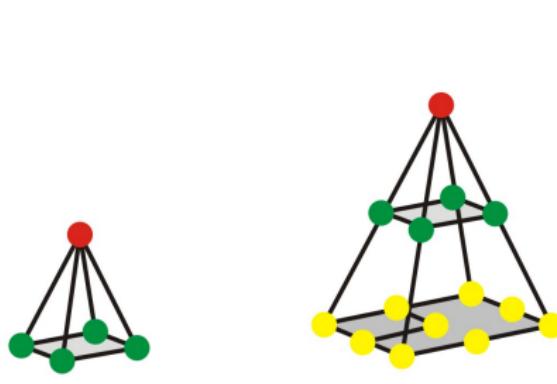


Četrstūra skaitļi: 1, 4, 9, 16, 25, ...

Četrstūra piramīdas skaitji

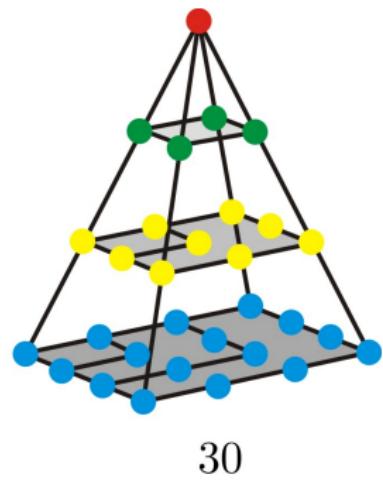


1



5

14



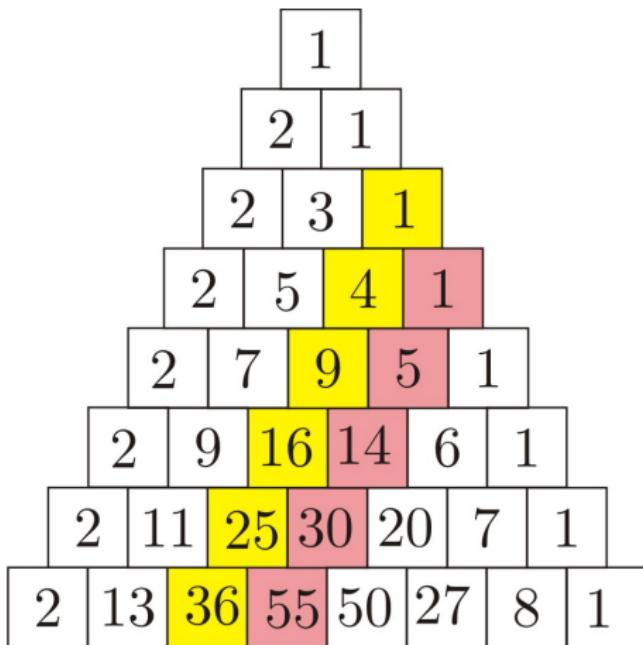
30

Četrstūra piramīdas skaitji: 1, 5, 14, 30, 55, ...

Uz piramīdas pamatiem atrodošos punktu skaits veido četrstūra skaitļus:

1, 4, 9, 16, 25, ...

Četrstūra skaitļi un četrstūra piramīdas skaitļi Paskāla (2, 1)-trijstūrī



Paskāla trijstūris . . . iedvesmai I



Paskāla trijstūris . . . iedvesmai II



Paskāla trijstūris . . . iedvesmai III



Paskāla trijstūris . . . iedvesmai IV



Paskāla trijstūris . . . iedvesmai V



Nobeigums

- Paskāla trijstūrim piemīt daudzas interesantas īpašības.
- Literatūrā, salīdzinot ar Paskāla trijstūri, modificētie Paskāla trijstūri nav tik plaši apskatīti.
- Ko iegūsim, ja modificētajiem Paskāla trijstūriem pielietosim Sierpinska trijstūrī izmantoto konstrukciju?
- Iepriekš sastapāmies ar divām trijstūra veidošanas stratēģijām: malējie elementi tiek uzdoti, bet pārējie elementi ir
 - divu augstāk stāvošo elementu summa,
 - divu zemāk stāvošo elementu summa.

Tiek apskatītas arī citas trijstūra veidošanas stratēģijas, skat, piemēram, [12], kad Paskāla trijstūra rindas tiek pareizinātas ar 2^k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$). Būtu interesanti apzināt dažādas trijstūru veidošanas stratēģijas.

Literatūra I

[1] **Biography of Blaise Pascal**

<https://www.thoughtco.com/biography-of-blaise-pascal-1991787>

[2] **D. Borkovitz,**

Excel for Math Classes: Pascal's Triangle

<https://www.youtube.com/watch?v=LUsczE6HkuM&feature=youtu.be>

[3] **H.J. Brothers,**

Pascal's triangle: The hidden stor-e, *The Mathematical Gazette*, Vol. 96, N. 535, March 2012, pp. 145–148.

[4] **E. Deza and M.M. Deza,**

Figurate Numbers, World Scientific, 2012.

[5] **Higher Polygonal Numbers and Pascal's Triangle**

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/>

Literatūra II

- [6] **Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles**

<http://www.cut-the-knot.org/>

- [7] **D.E. Knuth,**

The Art of Computer Programming (Vol. 1, Fundamental Algorithms), Addison-Wesley, 1997.

- [8] **Koka rotāļlietas. Attīstības spēles**

[http://www.kokaspeles.lv/lv/kategorijas/logikas-speles/
hanojas-tornis](http://www.kokaspeles.lv/lv/kategorijas/logikas-speles/hanojas-tornis)

- [9] **O. Krastiņš,**

Varbūtību teorija un matemātiskā statistika, Rīga, Zvaigzne, 1985.

- [10] **MacTutor History of Mathematics archive**

[http://www.mathrecreation.com/2008/07/
higher-polygonal-numbers-and-pascals.html](http://www.mathrecreation.com/2008/07/higher-polygonal-numbers-and-pascals.html)

Literatūra III

[11] Mathematical Figures Using Mathematica by Robert M. Dickau

<http://mathforum.org/advanced/robertd/index.html>

[12] Pascal's triangle

[http://www.wikiwand.com/en/Pascal's_triangle](http://www.wikiwand.com/en/Pascal%27s_triangle)

[13] Pascal's triangle

[https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal's_triangle](https://en.wikipedia.org/wiki/Pascal%27s_triangle)

[14] C.A Pickover,

Computers, Pattern, Chaos and Beauty: Graphics From an Unseen World, Dover Publications, 1990.

[15] Simplicial polytopic numbers

http://oeis.org/wiki/Simplicial_polytopic_numbers

Literatūra IV

[16] **The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences**

<https://oeis.org/>

[17] **Tower of Hanoi**

https://en.wikipedia.org/wiki/Tower_of_Hanoi