Daugavpils Universitāte

MATEMĀTIKAS KATEDRA

Vallija Gedroica

VIENA ARGUMENTA FUNKCIJU DIFERENCIĀLRĒĶINI

2005

Anotācija

Metodiskajos materiālos ietverts īss teorijas izklāsts un uzdevumi. Darbā iekļauti uzdevumu atrisināšanas paraugi, auditorijā risināmie uzdevumi un mājas darbu uzdevumi. Pielikumā apkopoti uzdevumi studentu individuālajam darbam.

1. Viena argumenta funkciju diferenciālrēķini

Pieņemsim, ka f ir punkta x_0 apkārtnē definēta funkcija.

1.1. definīcija. Par funkcijas f **atvasinājumu punktā** x_0 sauc robežu no funkcijas pieauguma attiecības pret argumenta pieaugumu, ja argumenta pieaugums tiecas uz nulli, t.i.,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Funkcijas *atvasinājuma atrašanas kārtula.*

1. Izvēlas tādu Δx, lai $x_0 + \Delta x \in D(f)$ un atrod

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0);$$

2. sastāda attiecību $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$;
3. atrod šīs attiecības robežu, kad $\Delta x \to 0$, t.i., $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Ja šī robeža eksistē, tad tas ir dotās funkcijas atvasinājums punktā x_0.

Ja punkts x_0 nav dots, tad jāatrod funkcijas atvasinājums, kas ir kaut kādā kopā D_1 definēta funkcija. To var atrast, atrodot $f'(x_0)$, kur x_0 ir patvaļīgs funkcijas f definīcijas apgabala iekšējais punkts, kuru aizstāj ar x, kas ir patvaļīgs kopas D_1 punkts.

1.1. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x) = x^3$ atvasinājumu punktā $x_0 = -1$.

Izmanto iepriekš minēto kārtulu:

1. $\Delta f(-1) = f(-1 + \Delta x) - f(-1) = (-1 + \Delta x)^3 - (-1)^3 =$
   $= \Delta x^3 - 3\Delta x^2 + 3\Delta x;$
2. $\dfrac{\Delta f(-1)}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x^3 - 3\Delta x^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = \Delta x^2 - 3\Delta x + 3;$
3. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(-1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x^2 - 3\Delta x + 3) = 3.$

Tātad $f'(-1) = 3$.

1.2. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x) = \cos 2x$ atvasinājumu.

Izvēlas patvaļīgu $x_0 \in D(f) = \mathbb{R}$.

1. $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \cos 2(x_0 + \Delta x) - \cos 2x_0 =$
   $= \cos(2x_0 + 2\Delta x) - \cos 2x_0 = -2\sin(2x_0 + \Delta x)\sin \Delta x;$
2. $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -2\sin(2x_0 + \Delta x)\dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x};$
3. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(-2\sin(2x_0 + \Delta x)\dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right) = -2\sin 2x_0 \cdot 1 =$
   $= -2\sin 2x_0.$

Tātad $f'(x_0) = -2\sin 2x_0$. Ja x_0 vietā liek patvaļīgu $x \in \mathbb{R}$, tad iegūst

$$f'(x) = (\cos 2x)' = -2\sin 2x.$$

Auditorijā risināmie uzdevumi

Izmantojot atvasinājuma definīciju, noteikt funkcijas atvasinājumu vai atvasinājuma vērtību dotajā punktā.

1. $f(x) = 2x^2 + 3x - 4;$
2. $f(x) = \sqrt{x+3};$
3. $f(x) = \frac{1}{x-1};$
4. $f(x) = \ln 5x;$
5. $f(x) = \sin(3x + 1)$, atrast $f'(0)$;
6. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, atrast $f'(8)$.

Mājas darba uzdevumi

Izmantojot atvasinājuma definīciju, noteikt funkcijas atvasinājumu vai atvasinājuma vērtību dotajā punktā.

1. $f(x) = 2x - x^2;$
2. $f(x) = \sqrt{2x-1};$
3. $f(x) = \operatorname{tg} x;$
4. $f(x) = 2^x$, atrast $f'(1)$;
5. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, atrast $f'\left(\frac{1}{8}\right)$, $f'(0)$.

2. Funkciju atvasināšana

2.1. Ar formulu uzdotas funkcijas atvasināšana

Lai atrastu ar formulu uzdotas funkcijas $y = f(x)$ atvasinājumu, ir jāzina
1) elementāro pamatfunkciju atvasinājumu tabula,
2) diferencēšanas likumi,
3) saliktas funkcijas atvasinājums.

2.1.1. Elementāro pamatfunkciju atvasinājumu tabula

1) $(C)' = 0;$

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1};$

3) $(\sin x)' = \cos x;$

4) $(\cos x)' = -\sin x;$

5) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x};$

6) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x};$

7) $(a^x)' = a^x \ln a;$

$(e^x)' = e^x;$

8) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a};$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x};$

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};$

11) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2};$

12) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2};$

13) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x;$

14) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$

15) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x};$

16) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

2.1.2. Diferencēšanas likumi

Ja $u = u(x)$ un $v = v(x)$ ir punktā x diferencējamas funkcijas, tad

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
2. $(uv)' = u'v + uv'$;
3. $\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$

2.1.3. Saliktas funkcijas atvasinājums

Pieņemsim, ka $f\big(\varphi(x)\big) = F(x)$.

Ja funkcija φ ir diferencējama punktā x un funkcija f ir diferencējama atbilstošajā punktā $u = \varphi(x)$, tad salikta funkcija F ir diferencējama punktā x, pie tam

$$F'(x) = f'(u)\varphi'(x) \text{ jeb } F'(x) = f'\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x).$$

2.1. piezīme.

1. Atsevišķos gadījumos ir lietderīgi doto funkciju vienkāršot un pēc tam atvasināt, piemēram,

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)' = (\cos 2x)' = -2\sin 2x.$$

2. Lai atvasinātu funkciju $f(x) = u(x)^{v(x)}$, var rīkoties divējādi:
   1) pārraksta doto funkciju

$$f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$$

   jeb īsāk

$$f(x) = e^{v \ln u}$$

   un atvasina to kā saliktu funkciju:

$$f'(x) = e^{v\ln u}(v \ln u)' = e^{v \ln u}\big(v' \ln u + v(\ln u)'\big) = u^v \left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right);$$

   2) lieto tā saucamo logaritmisko diferencēšanu, kuras būtība ir šāda: logaritmē vienādības $f(x) = u^v$ abas puses, piemēram, ar bāzi e

$$\ln f(x) = v \ln u$$

un atvasina iegūtās vienādības abas puses pēc x:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = v' \ln u + v\frac{u'}{u};$$

izsaka $f'(x)$, reizinot šīs vienādības abas puses ar $f(x)$:

$$f'(x) = f(x)\left(v' \ln u + v\frac{u'}{u}\right);$$

ievieto $f(x) = u^v$, tātad

$$f'(x) = u^v v' \ln u + vu^{v-1}u'.$$

2.1. piemērs. Atvasināt funkcijas:

1. $f(x) = \frac{3}{4}\ln x - \sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$;
2. $f(x) = (x^3+1)\cos x$;
3. $f(x) = \frac{x-1}{2\arccos x}$.

$$\begin{aligned}
1.\ f'(x) &= \left(\frac{3}{4}\ln x - x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{2}{3}}\right)' = \left(\frac{3}{4}\ln x\right)' - \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + \left(5x^{-\frac{2}{3}}\right)' = \\
&= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 5\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{5}{3}} = \frac{3}{4x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{10}{3x\sqrt[3]{x^2}}. \\
2.\ f'(x) &= \left((x^3+1)\cos x\right)' = (x^3+1)'\cos x + (x^3+1)(\cos x)' = \\
&= 3x^2\cos x + (x^3+1)(-\sin x) = 3x^2\cos x - (x^3+1)\sin x. \\
3.\ f'(x) &= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{\arccos x}\right)' = \frac{1}{2}\frac{(x-1)'\arccos x - (x-1)(\arccos x)'}{\arccos^2 x} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{\arccos x + \frac{x-1}{1-x^2}}{\arccos^2 x} = \frac{(1-x^2)\arccos x + x - 1}{2(1-x^2)\arccos^2 x}.
\end{aligned}$$

2.2. piemērs. Atvasināt funkcijas:

1. $f(x) = \ln(x^3 - 3x^2 + 4x)$;
2. $f(x) = \cos^2\frac{x}{6}$;
3. $f(x) = (\cos^2 x)^{\ln x}$.

1. $f'(x) = \dfrac{1}{x^3 - 3x^2 + 4x}(x^3 - 3x^2 + 4x)' = \dfrac{3x^2 - 6x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4x}.$

2. $f'(x) = 2\cos\dfrac{x}{6}\left(\cos\dfrac{x}{6}\right)' = 2\cos\dfrac{x}{6}\left(-\sin\dfrac{x}{6}\right)\left(\dfrac{x}{6}\right)' =$

$$= 2\cos\frac{x}{6}\left(-\sin\frac{x}{6}\right)\cdot\frac{1}{6} = -\frac{1}{3}\cos\frac{x}{6}\sin\frac{x}{6} = -\frac{1}{6}\sin\frac{x}{3}.$$

3. Doto funkciju var atvasināt divējādi.

1. paņēmiens.

$$f(x) = e^{\ln x \ln\cos^2 x}$$

$$f'(x) = \left(e^{\ln x \cos^2 x}\right)' = e^{\ln x \ln\cos^2 x}(\ln x \ln\cos^2 x)' =$$

$$= (\cos^2 x)^{\ln x}\big((\ln x)'\ln\cos^2 x + \ln x(\ln\cos^2 x)'\big) =$$

$$= (\cos^2 x)^{\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln\cos^2 x + \ln x\frac{1}{\cos^2 x}2\cos x(-\sin x)\right) =$$

$$= (\cos^2 x)^{\ln x}\left(\frac{\ln\cos^2 x}{x} - \frac{2\ln x\sin x}{\cos x}\right) =$$

$$= (\cos^2 x)^{\ln x}\left(\frac{\ln\cos^2 x}{x} - 2\ln x\,\mathrm{tg}\,x\right).$$

2. paņēmiens.

$$\ln f(x) = \ln x\ln\cos^2 x;$$

$$\big(\ln f(x)\big)' = (\ln x\ln\cos^2 x)';$$

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = \frac{1}{x}\ln\cos^2 x + \ln x\frac{1}{\cos^2 x}2\cos x(-\sin x);$$

$$f'(x) = f(x)\left(\frac{\ln\cos^2 x}{x} - \frac{2\ln x\sin x}{\cos x}\right) =$$

$$= (\cos^2 x)^{\ln x}\left(\frac{\ln\cos^2 x}{x} - 2\ln x\,\mathrm{tg}\,x\right).$$

2.2. Apslēptā veidā uzdotas funkcijas atvasināšana

Ja funkcija $y = f(x)$ ir uzdota ar vienādojumu $F(x; y) = 0$ (vienādojums nav atrisināts attiecībā uz y), tad saka, ka funkcija ir uzdota apslēptā veidā.

Lai atrastu apslēptā veidā definētas funkcijas atvasinājumu, vienādību $F(x; y) = 0$ atvasina pēc x, ņemot vērā to, ka y ir x funkcija. No iegūtās vienādības izsaka y'.

2.3. piemērs. Atvasināt funkciju, kas uzdota apslēptā veidā ar vienādojumu

$$y^3 - 3y + 3x = 1.$$

Atvasinot vienādības abas puses pēc x (ņemot vērā to, ka $y = y(x)$), iegūst vienādību

$$3y^2y' - 3y' + 3 = 0,$$

jeb

$$y^2y' - y' + 1 = 0,$$

no kurienes

$$y' = \frac{1}{1 - y^2}.$$

Auditorijā risināmie uzdevumi

Atvasināt funkciju vai aprēķināt funkcijas atvasinājuma vērtību dotajā punktā.

1. $f(x) = \dfrac{x}{m} + \dfrac{m}{x} - \dfrac{x^2}{m^2} - \dfrac{m^2}{x^2}, \quad (m \neq 0);$
2. $f(t) = (a + b)t^5 + (a + b)^3;$
3. $\varphi(s) = (1 - 4s^2)(2s^3 + 1)^2;$
4. $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2};$
5. $f(t) = \dfrac{\cos t}{1 + \sin t};$
6. $f(x) = x \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x - \ln x;$
7. $f(x) = e^x(x^2 + x - 1);$
8. $f(x) = \dfrac{e^x + \sin x}{xe^x};$
9. $f(x) = \sin 3x;$
10. $f(x) = (1 + 3x)^5;$
11. $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 + x - 1};$
12. $f(x) = \left(\dfrac{1 + x^2}{1 - x}\right)^3;$

13. $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}}$;

14. $f(x)=2\cos(3x-1)\sin 2x$;

15. $f(x)=\ln(x+1)+x^2\sin^2 x$;

16. $f(x)=\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}+1\right)^2$;

17. $f(x)=\left(\sqrt{e^x-1}+\operatorname{arcctg}\sqrt{e^x-1}\right)\ln 2$;

18. $f(x)=\cos 3\ln\sqrt{x^2+2x+2}-2\arcsin\sqrt{1-x^2}$;

19. $f(x)=10^{x\operatorname{tg}x}$;

20. $f(x)=3^{\sin^3(x^2+3)}$;

21. $f(x)=e^{\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x}\cos x$;

22. $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{(6x+5)^3}(4x-7)^2}{(2x+9)^3}$;

23. $f(x)=x^{\sqrt{x}}$;

24. $f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x+1)}$;

25. $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$;

26. $f(x)=(\log_a x)^x$;

27. $y^3+3y^2+3x=10$;

28. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$, 1. kvadrants;

29. $x=\operatorname{arctg}(x+y)$;

30. $\ln y+\dfrac{y}{x}=0$;

31. $x^2-2xy+y^3=1, \quad M(0;1)$;

32. $e^{xy}-x^2+y^3=0, \quad M(0;-1)$;

33. $x\ln y-y\ln x=1, \quad M(1;e)$;

34. $f(x)=x+\ln\operatorname{tg}x, \quad f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$;

35. $f(x) = \ln^3\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\right), \quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right);$

36. $f(x) = 2^x \cos 2^x, \quad f'(0).$

Mājas darba uzdevumi

Atvasināt funkciju vai aprēķināt funkcijas atvasinājuma vērtību dotajā punktā.

1. $f(x) = ax^3 + (b-2a)x^2 + \dfrac{3a+b}{x} - 2a;$
2. $f(x) = 5^x(x^5 - 10x);$
3. $\rho(\varphi) = \dfrac{\sqrt{\varphi} - 2\varphi}{\sqrt[4]{\varphi} + 1};$
4. $\rho(\varphi) = \dfrac{\varphi^3 + \ln\varphi}{e^4};$
5. $f(x) = \sin^2 x + \cos x^2;$
6. $f(x) = \dfrac{1}{\ln 3x} - \operatorname{arctg}(3 - x^2);$
7. $f(x) = \log_3\sqrt{2x^2 - 5x + 1} + \ln\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^3 - 1}};$
8. $f(x) = 3^{2x}\operatorname{ctg}\ln x - 7^{\operatorname{tg} x};$
9. $f(x) = 2^{x^2 - x}\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6} - 3x\right);$
10. $f(x) = \sqrt[3]{\cos x}\cdot e^{-\arcsin x} + xe^{\frac{1}{\ln x}};$
11. $f(x) = x\arcsin(3\ln^2 x);$
12. $f(x) = \dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{2} + \sqrt{x^2 - 1}\cdot e^{\arcsin\frac{1}{x}};$
13. $f(x) = \dfrac{\arcsin^2 2x}{2} - \sqrt{1 - 4x^2};$
14. $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^{\sqrt{x^2+1}};$
15. $f(x) = (\sin 3x)^{\cos x};$

16. $f(x) = (x+1)^{\sqrt{x}}$, atrast $f'(1)$;

17. $f(x) = \sqrt[5]{(x+2)^2}(x^2-1)^3\sqrt{x-4}$;

18. $x^2 - y^2 - 2y = 0$;

19. $y = \cos(x+y)$;

20. $\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

21. $xe^{-\frac{y}{2}} + ye^{-\frac{x}{2}} = 2,\ \ M(0;2)$;

22. $(x+y)^3 = 27(x-y)$, M(2;1);

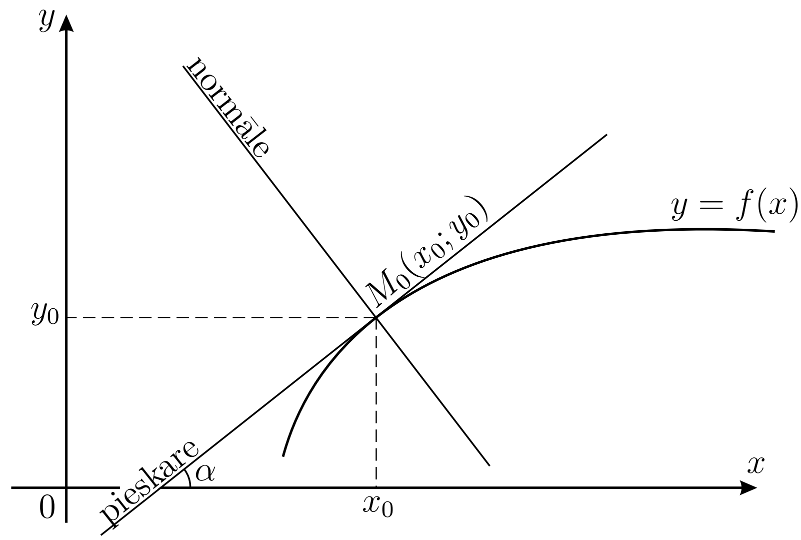
23. $f(x) = \arcsin\dfrac{x-1}{x},\ \ f'(5)$;

24. $f(x) = e^x \ln x,\ \ f'(1)$;

25. $f(x) = \ln(2-\sqrt{2x+1}),\quad f'(0)$.

3. Funkcijas atvasinājuma ģeometriskā un fizikālā interpretācija. Funkcijas grafika pieskares un normāles vienādojumu sastādīšana

Pieņemsim, ka f ir diferencējama punktā x_0 (3.1. zīm.).



3.1. zīm.

Funkcijas $y = f(x)$ atvasinājums punktā x_0 ir vienāds ar pieskares, kas novilkta funkcijas grafikam punktā ar abscisu x_0, virziena koeficientu, t.i., $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$. Tātad funkcijas $y = f(x)$ grafikam punktā $M_0(x_0; y_0)$ novilktās pieskares vienādojums ir

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

jeb

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ja f atvasinājums punktā x_0 ir bezgalīgs, tad pieskare ir paralēla ordinātu asij un tās vienādojums ir $x = x_0$.

Attiecīgi normāles vienādojums ir

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0),$$

jo ņem vērā divu taišņu (pieskares un normāles) perpendikularitātes nosacījumu $k_n = -\frac{1}{k_p}$.

3.1. piemērs. Sastādīt funkcijas $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ grafikam punktā $M_0(1; -1)$ novilktās pieskares un normāles vienādojumus.

$$f'(x) = 4x - 6;$$
$$f'(1) = -2.$$
$$y - (-1) = -2(x - 1),$$

jeb

$$2x + y - 1 = 0$$

ir pieskares vienādojums;

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x - 1),$$

jeb

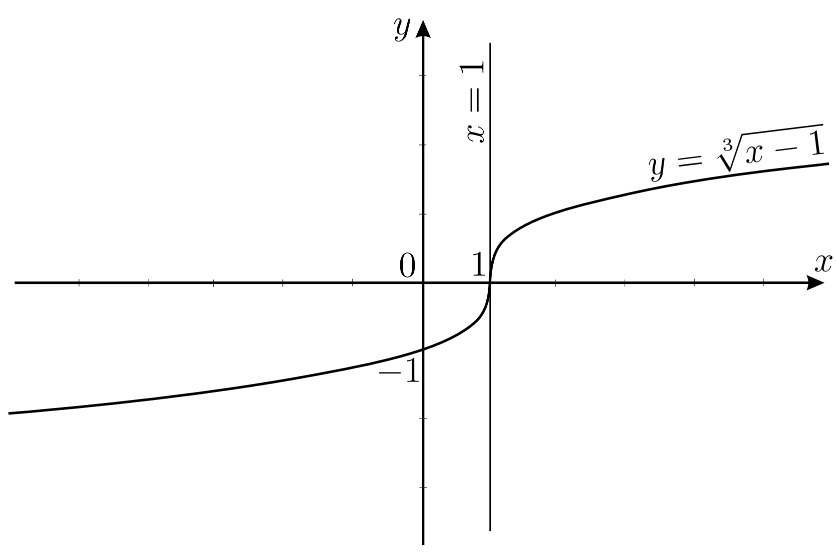
$$x - 2y - 3 = 0$$

ir normāles vienādojums.

3.2. piemērs. Sastādīt funkcijas $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ grafikam punktā ar abscisu $x_0 = 1$ novilktās pieskares vienādojumu.

$$f'(x) = \left((x-1)^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}(x-1)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

Pie $x = 1$ funkcijai ir bezgalīgs atvasinājums, tāpēc pieskare ir paralēla ordinātu asij un tās vienādojums ir $x = 1$ (3.2. zīm.).



3.2. zīm.

Funkcijas atvasinājuma fizikālā nozīme ir momentānais ātrums taisnvirziena kustībā.

3.3. piemērs. Ķermenis pārvietojas taisnā virzienā pēc likuma $x(t) = t^3 - t + 1$. Aprēķināt šī ķermeņa ātrumu laika momentā $t = 2$.

Lai aprēķinātu ķermeņa ātrumu dotajā laika momentā, ir jāatrod funkcijas x atvasinājuma vērtība punktā $t = 2$.

$$x'(t)\Big|_{t=2} = (3t^2 - 1)\Big|_{t=2} = 11.$$

Auditorijā risināmie uzdevumi

1. Noteikt leņķi, ko veido pieskare parabolai $y = x^2 - 3x + 5$ punktā $M(2;3)$ ar abscisu asi. Uzrakstīt šīs pieskares vienādojumu.

2. Sastādīt pieskares un normāles vienādojumu līknei $y = x^3 + 4x^2 - 1$ punktā ar abscisu $x_0 = -1$.

3. Sastādīt pieskares vienādojumu līnijai $y = \sqrt[3]{x}$ punktā $x = 0$.

4. Sastādīt vienādojumu līknes $y = x^4 - 2x^2 + 3x - 1$ pieskarēm, kas ir paralēlas taisnei $3x - y + 1 = 0$.

5. Dota funkcija $y = \left|x^2 - 2x\right|$. Uzrakstīt vienādojumus pieskarēm, kas novilktas funkcijas grafikam punktos ar abscisu $x = 2$. Konstruēt grafiku.

6. Uz funkcijas f grafika atrast punktu, kurā pieskare ir paralēla dotajai taisnei.

   (a) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 4,\ \ y = 2x - 1;$

   (b) $f(x) = \sqrt{1 + x^2},\ \ y = \frac{x}{2} + 1.$

7. Ķermanis pārvietojas taisnā virzienā pēc likuma

   $x(t) = -2t^2 + 8t + 7$. Noteikt laika momentu, kurā ķermenis apstājas un ķermeņa koordinātu šajā laika momentā.

8. Pirmais ķermenis pārvietojas pēc likuma $x_1(t) = 4t^2 - 22t + 20$, bet otrais - pēc likuma $x_2(t) = 2t^2 - 40$. Atrast šo ķermeņu ātrumus laika momentos, kad to koordinātas ir vienādas.

9. Uzzīmēt ķermeņa ātruma grafiku, ja ķermenis pārvietojas taisnā virzienā pēc likuma

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}t^3 + 7t, & \text{ja } \ 0 \leq t \leq 2, \\ -0,5t^2 + 4t, & \text{ja } \ 2 < t \leq 5. \end{cases}$$

Mājas darba uzdevumi

1. Uz līknes $y = 4x^2 - 6x + 3$ atrast punktu, kurā pieskare
   (a) ir paralēla taisnei $y = 2x$;
   (b) ir perpendikulāra taisnei $y = \frac{x}{4}$;
   (c) ar Ox ass pozitīvo virzienu veido leņķi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2. Sastādīt pieskaru un normāļu vienādojumus parabolai $y = x^2 - 4x + 4$ punktos, kuru ordinātas vienādas ar vienu.

3. Dota funkcija $y = \left|x^2 - 2x - 3\right|$. Uzrakstīt vienādojumus pieskarēm, kas novilktas funkcijas grafikam punktāos ar abscisu $x = -1$. Konstruēt grafiku.

4. Sastādīt pieskares vienādojumu funkcijas $f(x) = \ln x^2$ grafikam, ja šī pieskare ir paralēla taisnei $y = -x$.

5. Uzrakstīt vienādojumu funkcijas $y = \frac{3-x}{x+1}$ grafika pieskarei, kas novilkta grafika krustpunktos ar ordinātu asi.

6. Ķermenis pārvietojas taisnā virzienā pēc likuma $x(t) = 60t - 5t^3$. Aprēķināt šī ķermeņa ātrumu laika momentā $t = 1$. Noteikt laika momentu, kurā ķermenis apstājas.

7. Uzzīmēt ķermeņa ātruma grafiku, ja ķermenis pārvietojas taisnā virzienā pēc likuma

$$x(t) = \begin{cases} -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 1, & \text{ja } \ 0 \leq t \leq 23, \\ 3t - 1, & \text{ja } \ t > 3. \end{cases}$$

4. Funkcijas diferenciālis un tā lietojumi tuvīnajos aprēķinos

4.1. definīcija. Punktā x_0 diferencējamas funkcijas f pieauguma šajā punktā galveno daļu, kas ir lineāra attiecībā pret Δx, sauc par šīs **funkcijas diferenciāli** punktā x_0 un apzīmē ar $df(x_0)$.

Jebkuras diferencējamas funkcijas $y = f(x)$ diferenciālis ir vienāds ar tās atvasinājuma un argumenta diferenciāļa reizinājumu:

$$dy = f'(x)dx \quad (dx = \Delta x).$$

Ja $|\Delta x|$ ir pietiekami mazs, tad $\Delta y \approx dy$, tāpēc

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx. \tag{$*$}$$

Šo formulu izmanto, lai noteiktu funkcijas aptuveno vērtību.

4.1. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = x^2 - x + 1$ pieaugumu un diferenciāli, ja $x = 3$ un $\Delta x = 0,01$.

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) + 1 - (x^2 - x + 1) =$$
$$= (2x - 1)\Delta x + \Delta x^2.$$

$$\Delta f(x)\Big|_{\substack{x=3 \\ \Delta x=0,01}} = 0,0501.$$

$$dy = f'(x)\Delta x = (2x - 1)\Delta x;$$

$$dy\Big|_{\substack{x=3 \\ \Delta x=0,01}} = 0,05.$$

4.2. piemērs. Izmantojot funkcijas diferenciāli, izskaitļot $\sqrt[3]{8,01}$.

Apskatīsim funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x}$ un pieņemsim, ka $x_0 = 8$, $\Delta x = 0,01$. Tad $f(8,01) = \sqrt[3]{8,01}$.

Izmanto formulu (*).

$$f(8,01) = f(8 + 0,01) \approx f(8) + f'(8)0,01.$$

$$f(8) = \sqrt[3]{8} = 2;$$

$$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}};$$

$$f'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12};$$

$$\sqrt[3]{8,01} \approx 2 + \frac{1}{12} \cdot 0,01 = 2 + \frac{0,01}{12} \approx 2,0008.$$

Auditorijā risināmie uzdevumi

1. Atrast funkcijas $y = \frac{1}{x-1}$ pieaugumu un diferenciāli pie $x = 2$ un $\Delta x = 0,1$; $\Delta x = 0,01$; $\Delta x = 0,001$. Izdarīt secinājumus.

2. Aprēķināt funkcijas $f(x) = \frac{x}{x-1}$ diferenciāli punktā $x = 0$, ja arguments mainās no $x_0 = 0$ līdz $x_1 = -0,05$.

3. Atrast funkciju diferenciāļus, izmantojot diferenciāļa atrašanas formulu:

   (a) $y = \dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;

   (b) $y = 5^{\sqrt{\operatorname{arctg} x^2}}$;

   (c) $y = \sqrt{\arcsin 2x} + 2^{\cos 1}$;

   (d) $y = \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$ punktā $x = 1$.

4. Izmantojot funkcijas diferenciāli, izskaitļot tuvīni:

   (a) $\sqrt[4]{17}$;

   (b) $\operatorname{arctg} 0,97$;

   (c) $\cos 62^\circ$.

Mājas darba uzdevumi

1. Pierādīt, ka lineāras funkcijas $y = ax + b$ diferenciālis un pieaugums jebkurai argumenta vērtībai ir vienādi.

2. Aprēķināt starpību starp funkcijas $f(x) = 3 - x^2$ vērtību punktā $1 + \Delta x$ un funkcijas pieauguma galveno daļu punktā 1, ja Δx vērtības ir $0,1$; $0,01$; $0,001$. Izdarīt secinājumus.

3. Atrast funkciju diferenciāļus:

   (a) $y = \ln(1 + x^2)$;

   (b) $y = \sin^2 x$ punktā $x = \frac{\pi}{2}$;

   (c) $y = 5^{x^2} \arccos \frac{1}{x}$.

4. Izmantojot funkcijas diferenciāli, izskaitļot tuvīni:

(a) $e^{0,2}$;

(b) $\ln 1,01$;

(c) $\sqrt[3]{26,97}$;

(d) $\arcsin 0,54$.

5. Funkcijas augstāku kārtu atvasinājumi un diferenciāļi

Atvasinot funkciju $f'(x)$, iegūst diferencējamas funkcijas $y = f(x)$ otrās kārtas atvasinājumu: $y'' = \big(f'(x)\big)'$. Līdzīgi

$$
\begin{aligned}
&y''' = \big(f''(x)\big)', \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&y^{(n)} = \Big(f^{(n-1)}(x)\Big)'.
\end{aligned}
$$

5.1. definīcija. Atvasinājumus, kuru kārta ir lielāka par pirmo, sauc par **augstāku kārtu atvasinājumiem**.

Ja funkcijas pirmās kārtas atvasinājuma fizikālā nozīme ir momentānais ātrums taisnvirziena kustībā, tad otrās kārtas atvasinājuma fizikālā interpretācija ir taisnvirziena kustībā esoša materiāla punkta momentānais **paātrinājums**.

Ir zināms, ka diferencējamai funkcijai $df(x) = f'(x)dx$. Atrodot diferenciāli no funkcijas $df(x)$, iegūst otrās kārtas diferenciāli:

$$
\begin{aligned}
&d^2 f(x) = d\big(df(x)\big), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&d^n f(x) = d\left(d^{n-1} f(x)\right).
\end{aligned}
$$

5.2. definīcija. Diferenciāļus, kuru kārta ir lielāka par pirmo, sauc par **augstāku kārtu diferenciāļiem**.

Augstāku kārtu diferenciāļus var izskait, izmantojot formulas:

$$
\begin{aligned}
&d^2 f(x) = f''(x)dx^2; \\
&d^3 f(x) = f'''(x)dx^3; \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
&d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n,
\end{aligned}
$$

kur x ir neatkarīgais mainīgais[1].

[1] Ja $x = \varphi(t)$, tad $d^2 f(x) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x$.

5.1. piemērs. Atrast funkcijas $y = x\ln 2x$ trešās kārtas atvasinājumu punktā $x = 2$.

$$y' = \ln 2x + x\frac{2}{2x} = \ln 2x + 1;$$
$$y'' = (\ln 2x + 1)' = \frac{1}{x};$$
$$y''' = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$
$$y'''\Big|_{x=2} = -\frac{1}{4}.$$

5.2. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x) = \ln x$ n-tās kārtas atvasinājumu:

$$f'(x) = \frac{1}{x};$$
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2};$$
$$f'''(x) = \frac{1\cdot 2}{x^3};$$
$$f^{IV}(x) = -\frac{1\cdot 2\cdot 3}{x^4};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

5.3. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x) = xe^x$ trešās kārtas diferenciāli punktā $x = 0$.

$$f'(x) = e^x + xe^x;$$
$$f''(x) = 2e^x + xe^x;$$
$$f'''(x) = 3e^x + xe^x;$$
$$d^3f(x) = (3e^x + xe^x)dx^3;$$
$$d^3f(0) = 3dx^3.$$

5.4. piemērs. Ķermenis pārvietojas taisnā virzienā pēc likuma $x(t) = 3t^4 - 4t^3$. Aprēķināt šī ķermeņa paātrinājumu laika momentā $t = 2$.

$$x'(t) = 12t^3 - 12t^2;$$
$$a(t) = x''(t) = 36t^2 - 24t;$$
$$a(2) = 36\cdot 4 - 24\cdot 2 = 96.$$

Auditorijā risināmie uzdevumi

1. Atrast funkcijas $f(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 7$ septītās kārtas atvasinājumu.

2. Dotajām funkcijām noteikt norādītās kārtas atvasinājumus.

   (a) $y = \ln(1+x)$, $y^{(5)}$;

   (b) $y = \operatorname{sh}^2 x$, y''';

   (c) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{t}{a}$, y''' $(a \ - const)$.

3. Pierādīt, ka funkcija $y = f(x)$ apmierina doto vienādojumu.

$$
\begin{array}{lll}
a) & f(x) = x^2 \ln x, & xy'' - y' = 2x; \\
b) & f(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} \ \ (c_1, c_2 \ - const), & y'' - 2y' - 3y = 0; \\
c) & f(x) = e^x \sin 2x, & \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0.
\end{array}
$$

4. Noteikt n-tās kārtas atvasinājumus funkcijām

   (a) $f(x) = 2^x$;

   (b) $f(x) = \sin x$.

5. Noteikt funkcijas

   (a) $y = (2x-3)^3$ otrās un trešās kārtas diferenciāli;

   (b) $v = e^{2t}$ otrās kārtas diferenciāli punktā $t = 1$.

6. Punkts pārvietojas taisnā virzienā pēc likuma $x(t) = t^3 - 4t^2 + 1$. Aprēķināt punkta ātrumu laika momentā, kad tā paātrinājums $a = 10\frac{m}{s^2}$.

7. Pirmais ķermenis pārvietojas pēc likuma $x_1(t) = 2t^3 - 4t^2 + 5t$, bet otrais - pēc likuma $x_2(t) = 2t^3 - 1,5t^2$. Aprēķināt šo ķermeņu paātrinājumus laika momentos, kad to ātrumi ir vienādi.

Mājas darba uzdevumi

1. Atrast otrās kārtas atvasinājumus funkcijām
   (a) $y = 5^{\sqrt{x}}$;
   (b) $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;
   (c) $\rho(\varphi) = \varphi^2 e^{-\varphi}$ punktos $\varphi = -1$, $\varphi = 0$.

2. Pierādīt, ka funkcija $y = f(x)$ apmierina doto vienādojumu.

$$\begin{array}{lll} a) & f(x) = 4e^{-2x} - 5e^x, & y''' - 3y' + 2y = 0; \\ b) & f(x) = x^2 \ln x, & xy'' - y' = 2x; \\ c) & f(x) = \arcsin x, & (x^2-1)\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} = 0. \end{array}$$

3. Noteikt n-tās kārtas atvasinājumu funkcijai $f(x) = \lg x$.

4. Noteikt funkcijas $y = e^x \sin 2x$ otrās kārtas diferenciāli punktā $x = 0$.

5. Punkts pārvietojas taisnā virzienā pēc likuma $x(t) = t^4 - 2t^3 + t - 3$. Aprēķināt punkta ātrumu laika momentā, kad tā paātrinājums $a = 24\frac{m}{s^2}$.

6. Diferenciālrēķinu pamatteorēmas

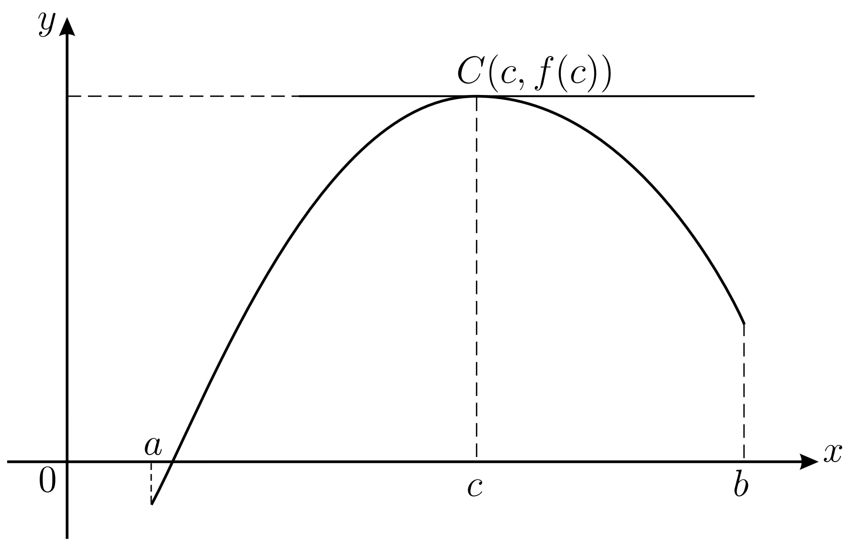
6.1. Fermā, Rolla, Lagranža un Košī teorēma

6.1. teorēma. [Fermā teorēma]

Ja intervālā $< a; b >$ definēta funkcija šī intervāla iekšējā punktā c sasniedz savu vismazāko vai vislielāko vērtību un ir diferencējama šajā punktā, tad $f'(c) = 0$.

Fermā teorēmas ģeometriskā interpretācija.

Funkcijai f, kas apmierina Fermā teorēmas nosacījumus, grafika punktā $C\big(c, f(c)\big)$ novilktā pieskare ir paralēla Ox asij (6.1. zīm.).



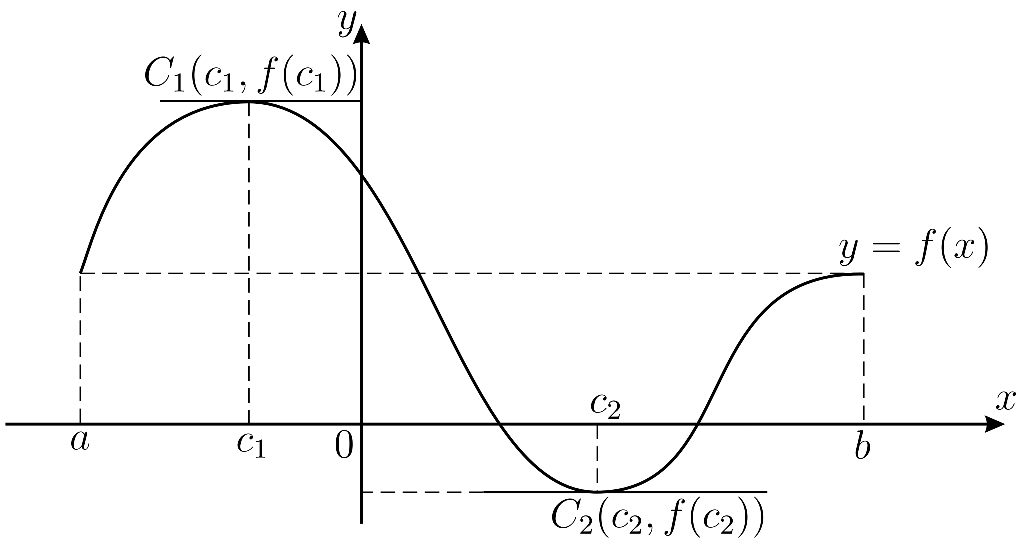
6.1. zīm.

6.2. teorēma. [Rolla teorēma]

Ja funkcija f ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a; b]$, diferencējama šī intervāla iekšējos punktos un šī intervāla galapunktos funkcijas vērtības ir vienādas, t.i., $f(a) = f(b)$, tad eksistē vismaz viens tāds intervāla iekšējais punkts c, kurā $f'(c) = 0$.

Ģeometriskā interpretācija:

Ja $f(a) = f(b)$, tad uz līknes atradīsies vismaz viens tāds punkts, kurā novilktā pieskare ir parēla Ox asij (6.2. zīm.).



6.2. zīm.

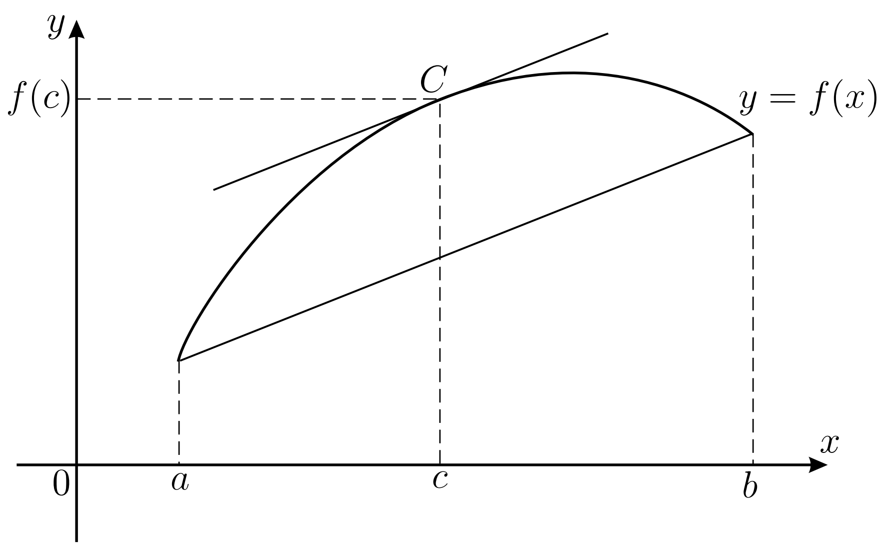
6.3. teorēma. [Lagranža teorēma]

Ja funkcija ir nepārtraukta intervālā $[a; b]$ un ir diferencējama šī intervāla iekšējos punktos, tad eksistē vismaz viens tāds intervāla iekšējais punkta c, kurā

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ģeometriskā interpretācija:

Ja funkcija f ir diferencējama, tad uz tās grafika loka varēs atrast tādu punktu, kurā novilktā piskare ir paralēla hordai, kas savelk šo loku (6.3. zīm.).



6.3. zīm.

6.4. teorēma. [Košī teorēma]

Ja funkcijas f un g ir nepārtrauktas slēgtā intervālā $[a;b]$ un diferencējamas šī intervāla iekšējos punktos, pie tam $g'(x) \neq 0$, tad eksistē vismaz viens tāds intervāla iekšējais punkts c, kurā

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

6.2. Lopitāla kārtula

6.5. teorēma. *Ja funkcijas f un g ir definētas un diferencējamas punkta $a \in \mathbb{R}$ apkārtnē, izņemot varbūt šo punktu, pie tam $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ vai $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$, eksistē $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$, tad eksistē arī $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = k$.*

Lopitāla kārtula. Lai atrastu $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, kad skaitītājs un saucējs reizē tiecas uz nulli vai bezgalību, atsevišķi jāatvasina skaitītājs un saucējs un jāaprēķina atvasinājumu attiecības robeža, kad $x \to a$.

6.1. piezīme.

1. Ja iegūtā robeža atkal ir nenoteiktība $\frac{0}{0}$ vai $\frac{\infty}{\infty}$, tad Lopitāla kārtulu drīkst izmantot atkārtoti.
2. Bez nenoteiktībām $\frac{0}{0}$ un $\frac{\infty}{\infty}$ Lopitāla kārtula dod iespēju atklāt nenoteiktības $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, tās iepriekš reducējot uz nenoteiktību $\frac{0}{0}$ vai $\frac{\infty}{\infty}$.
3. Saskaņā ar Lopitāla kārtulu ir spēkā apgalvojums: ja eksistē funkciju atvasinājumu attiecības robeža, tad eksistē arī šo funkciju attiecības robeža. Turpretī, ja atvasinājumu attiecības robeža neeksistē, tas vēl nenozīmē, ka neeksistē funkciju attiecības robeža.

6.1. piemērs. Noteikt, vai funkcija $f(x) = 3 - x^2$ apmierina Fermā teorēmas nosacījumus intervālā $[1;4]$.

Dotā funkcija intervālā $[1;4]$ Fermā teorēmas visus nosacījumus neapmierina, jo šajā intervālā ir dilstoša un savu vislielāko vai vismazāko vērtību sasniedz nevis intervāla iekšējos punktos, bet tā galapunktos, t.i., pie $x = 1$ un $x = 4$. Citiem vārdiem, $f'(1) \neq 0$, $f'(4) \neq 0$, jo $f'(1) = -2$, $f'(4) = -8$.

6.2. piemērs. Noteikt, vai ir spēkā Rolla teorēma

1. funkcijai $f(x) = x^2 + 6x - 35$ intervālā $[-5; -1]$,
2. funkcijai $f(x) = \sqrt[3]{(x-4)^2}$ intervālā $[0; 8]$.

1. Tā kā funkcija ir nepārtraukta dotajā intervālā un diferencējama intervālā $(-5; -1)$, pie tam $f(-5) = f(-1) = -40$, tad visi Rolla teorēmas nosacījumi ir spēkā. Vērtību c var atrast, atrisinot vienādojumu $f'(c) = 2c + 6 = 0$. Tātad, $c = -3$.
2. Funkcija ir nepārtraukta $[0; 8]$, pie tam $f(0) = f(8) = 2\sqrt[3]{2}$, bet $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-4}}$ nav definēts, ja $x = 4$. Šoreiz neizpildās viens no Rolla teorēmas nosacījumiem (funkcija nav diferencējama dotā intervāla iekšējā punktā $x = 4$). Tādējādi tāds punkts c, kurā $f'(c) = 0$, var neeksistēt. Acīmredzami, šoreiz tāda punkta c nav.

6.3. piemērs. Atrast punktu uz līknes $y = x^3 - 3x$ loka AB, kurā pieskare būtu paralēla hordai, kas savieno punktus $A(-1; 2)$ un $B(3; 18)$.

Funkcija $y = x^3 - 3x$ ir nepārtraukta intervālā $[-1; 3]$, tāpēc tai var pielietot Lagranža teorēmu:

$$f(3) - f(-1) = f'(c)\big(3 - (-1)\big),$$

t.i.,

$$18 - 2 = (3c^2 - 3)4,$$

no kurienes

$$c_1 = -\sqrt{\frac{7}{3}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Acīmredzami, ka tikai c_2 apmierina uzdevuma noteikumus, jo $c_2 \in (-1; 3)$. Ievietojot šo vērtību līknes vienādojumā, atradīsim, ka $y = -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}$. Tātad uzdevuma noteikumus apmierinās punkts $M\left(\sqrt{\frac{7}{3}}; -\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$.

6.4. piemērs. Pārbaudīt, vai funkcijas

$$f(x) = x^2 + 4x \quad \text{un} \quad \varphi(x) = x^3 - x - 2$$

apmierina Košī teorēmas nosacījumus intervālā $[1; 3]$ un atrast atbilstošo c vērtību.

Funkcijas f un φ ir nepārtrauktas visiem x, tātad arī dotajā intervālā.

$$f'(x) = 2x + 4 \quad \text{un} \quad \varphi'(x) = 3x^2 - 1$$

eksistē visiem $x \in (1;3)$, tātad funkcijas f un φ ir diferencējamas intervālā $(1;3)$, pie tam $\varphi'(x) \neq 0$ dotajā intervālā. Tātad šīm funkcijām var pielietot Koši teorēmu:

$$\frac{f(3) - f(1)}{\varphi(3) - \varphi(1)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)},$$

t.i.,

$$\frac{21 - 5}{22 - (-2)} = \frac{2c + 4}{3c^2 - 1},$$

no kurienes

$$c_1 = \frac{3 - \sqrt{93}}{6}; \quad c_2 = \frac{3 + \sqrt{93}}{6}.$$

6.5. piemērs. Izmantojot Lopitāla kārtulu, atrast robežas:

1. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}$;
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$;
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{\ln x}$ (n - naturāls skaitlis);
4. $\lim\limits_{x \to 0} (x \operatorname{ctg} 3x)$;
5. $\lim\limits_{x \to -3} \left(\dfrac{6}{9 - x^2} - \dfrac{1}{x + 3} \right)$;
6. $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$;
7. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$.

1. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{6x+2}{-2x+1} = -\frac{4}{3}$;
2.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= -\lim_{x \to 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{1} = -\lim_{x \to 0} \sin 2x = 0.$$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}n\cdot x^n=+\infty.$

   No šī piemēra var secināt, ka pakāpes funkcija x^n (pie n - naturāla) aug straujāk nekā logaritmiskā funkcija $\ln x$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{ctg}3x)=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{tg}3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\frac{3}{\cos^2 3x}}=\frac{1}{3}.$

5.
$$\lim_{x\to-3}\left(\frac{6}{9-x^2}-\frac{1}{x+3}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to-3}\frac{6-(3-x)}{9-x^2}=$$
$$=\lim_{x\to-3}\frac{x+3}{9-x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-3}\frac{1}{-2x}=\frac{1}{6}.$$

6. $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}.$

   1. paņēmiens.

   $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1}e^{\ln x\cdot\frac{1}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}}=\left(\frac{0}{0}\right)=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}}=e^{-1}.$

   2. paņēmiens.

   Lai atrastu šo robežu, apzīmē $y=x^{\frac{1}{1-x}}$ un logaritmē: $\ln y=\frac{\ln x}{1-x}$.

   $\lim\limits_{x\to 1}\ln y=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=-1.$

   Tātad, $\lim\limits_{x\to 1}y=e^{-1}$.

7. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}.$

   1. paņēmiens.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}e^{\cos x\ln\operatorname{tg}x}=(0\cdot\infty)=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\frac{1}{\cos x}}}$$
$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{\cos^2 x}(-\sin x)}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}}=e^0=1.$$

   2. paņēmiens.

   Ja $y=(\operatorname{tg}x)^{\cos x}$, tad

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x\ln\operatorname{tg}x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\operatorname{tg}x}{\frac{1}{\cos x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}x\cos^2 x}}{-\frac{-\sin x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x}=0.$$

Tātad $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1.$

Auditorijā risināmie uzdevumi

1. Noteikt, vai funkcija $f(x) = 3 + 2x - x^2$ intervālā $[0; 4]$ apmierina Fermā teorēmas nosacījumus. Atrast c.

2. Noteikt, vai funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 9x + 14}$ intervālā $[-7; -2]$ apmierina Rolla teorēmas nosacījumus. Atrast c.

3. Funkcijai $f(x) = x^2 + \sqrt[3]{x^2}$ intervāla $[-1; 1]$ galapunktos ir vienādas vērtības: $f(-1) = f(1) = 2$. Noteikt, vai šai funkcijai intervālā $[-1; 1]$ ir spēkā Rolla teorēma.

4. Noteikt, vai funkcija $f(x) = \ln x$ intervālā $[1; e]$ apmierina Lagranža teorēmu. Atrast c.

5. Parādīt, ka funkcijai $f(x) = \frac{1}{x}$ intervālā $[-2; 2]$ nevar pielietot Lagranža teorēmu. Sniegt ģeometrisku attēlojumu.

6. Noteikt, vai funkcijas $f(x) = \sqrt{x+9}$, $\varphi(x) = \sqrt{x}$ intervālā $[0; 16]$ apmierina Košī teorēmu. Ja var, atrast c.

7. Izmantojot Lopitāla kārtulu, atrast robežas:

   $a)$ $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{3-x}{x^3 - 27}$; $b)$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{e^x - e^{-x}}$;

   $c)$ $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}{\ln(1-x)}$; $d)$ $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \cos x)\operatorname{ctg} x$;

   $e)$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \cos^{-1} x\right)$; $f)$ $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{-\operatorname{ctg}^2 x}$;

   $g)$ $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$; $h)$ $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{5+\ln x}}$.

Mājas darba uzdevumi

1. Noteikt, vai funkcija $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ intervālā $[-1; 1]$ apmierina Rolla teorēmu. Ja var, atrast c.

2. Noteikt, vai funkcijas

   (a) $f(x) = \sqrt{x}$ intervālā $[1; 4]$,
   (b) $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ intervālā $[-2; 2]$

   apmierina Lagranža teorēmu. Ja var, atrast c.

3. Noteikt, vai funkcijas $f(x) = \sin x$, $\varphi(x) = \cos x$ intervālā $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ apmierina Košī teorēmu. Ja var, atrast c.

4. Izmantojot Lopitāla kārtulu, atrast robežas:

$$a)\ \lim_{x\to-0{,}5} \frac{2x^2 - 7x - 4}{-2x^2 + 5x + 3}; \qquad b)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{\frac{1}{x}} - 1};$$

$$c)\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1 + x)}{x}; \qquad d)\ \lim_{x\to0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}};$$

$$e)\ \lim_{x\to0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right); \qquad f)\ \lim_{x\to0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}};$$

$$g)\ \lim_{x\to+\infty} (1 + e^x)^{\frac{1}{x}}; \qquad h)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

7. Atvasinājuma pielietojumi funkciju pētīšanā

Izmantojot atvasinājumu, var izveidot vispārīgu metodi funkciju īpašību un grafika vispusīgai izpētei. Šīs metodes pamatā ir sakarības starp funkcijas atvasinājuma un tās grafika īpašībām.

7.1. Funkcijas monotonitātes intervāli

7.1. definīcija. Funkciju sauc par **augošu** (**dilstošu**) intervālā, ja pieaugot argumenta vērtībām, funkcijas vērtības pieaug (samazinās). Augošas vai dilstošas funkcijas sauc par stingri **monotonām** funkcijām.

Ja funkcija nav monotona, tad tās definīcijas apgabalu var sadalīt monotonitātes intervālos (starp tiem var būt arī pastāvīguma intervāli).

Funkcijas $y = f(x)$ monotonitāti raksturo tās pirmās kārtas atvasinājuma $f'(x)$ zīme, t.i., ja kādā intervālā $f'(x) > 0$ $\big(f'(x) < 0\big)$, tad funkcija ir **augoša** (**dilstoša**) šajā intervālā. (Atsevišķos intervāla punktos atvasinājums var būt 0).

Funkcijas $y = f(x)$ monotonitātes intervālu atrašanas kārtula.

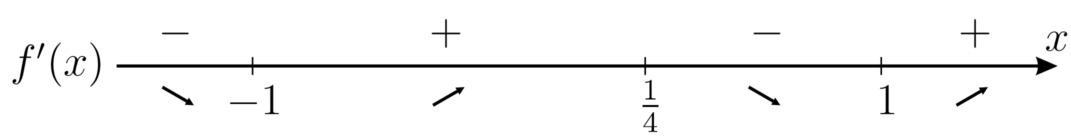
1. Atrod funkcijas atvasinājumu $f'(x)$.

2. Atrod intervālus, kuros atvasinājums saglabā zīmi. Ja kādā intervālā $f'(x) > 0$, tad tas ir funkcijas augšanas intervāls, ja $f'(x) < 0$, tad - dilšanas intervāls.

7.1. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = x^4 - \frac{x^3}{3} - 2x^2 + x$ monotonitātes intervālus.

$D(f) = \mathbb{R}$;

$$f'(x) = 4x^3 - x^2 - 4x + 1 = 4x(x^2 - 1) - (x^2 - 1) = (x^2 - 1)(4x - 1) =$$
$$= (x + 1)(x - 1)(4x - 1).$$

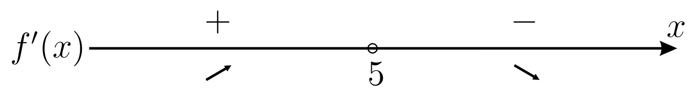


7.1. zīm.

Tātad dotā funkcija ir augoša visiem $x \in \left(-1; \frac{1}{4}\right) \cup (1; +\infty)$ un dilstoša, ja $x \in (-\infty; -1) \cup \left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

7.2. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$ monotonitātes intervālus.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{5\}$;
$f'(x) = -\frac{2}{(x-5)^3}$;



7.2. zīm.

Funkcija ir augoša visiem $x \in (-\infty; 5)$, dilstoša, ja $x \in (5; +\infty)$.

Auditorijā risināmie uzdevumi

1. Pierādīt, ka funkcija $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$ ir augoša visiem $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, bet funkcija $f(x) = \frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} - 2x$ ir dilstoša visiem $x \in \mathbb{R}$.

2. Noteikt monotonitātes intervālus funkcijām:

$a)\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}; \qquad b)\ f(x) = \operatorname{arctg} x - x;$

$c)\ f(x) = \dfrac{x^2}{10} - \ln x; \qquad d)\ f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ja } x < 0, \\ 0, & \text{ja } 0 \le x < 1, \\ (x-1)^2, & \text{ja } x \ge 1; \end{cases}$

$e)\ f(x) = 4x - 3\sqrt[3]{x} \qquad f)\ f(x) = 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 2x \ln 2.$

Mājas darba uzdevumi

1. Pierādīt, ka funkcija $f(x) = -x + \cos x$ ir dilstoša, bet funkcija $f(x) = \operatorname{sh} x$ ir augoša visiem $x \in \mathbb{R}$.

2. Noteikt monotonitātes intervālus funkcijām:

$a)\ f(x) = x^4 + 8x^3 + 5; \qquad b)\ f(x) = \dfrac{1}{(x-5)^2};$

$c)\ f(x) = \sqrt{x}(x-3); \qquad d)\ f(x) = \ln(1+x^2) - x;$

$e)\ f(x) = x \cdot e^{-5x} \qquad f)\ f(x) = \sin 2x - x.$

7.2. Funkcijas ekstrēmi

7.2. definīcija. Punktu x_0 sauc par funkcijas $y = f(x)$ **maksismuma** (**minimuma**) **punktu**, ja eksistē punkta $x = x_0$ tāda apkārtne, ka visiem x $(x \neq x_0)$ no šīs apkārtnes ir spēkā nevienādība $f(x) < f(x_0)$ $\big(f(x) > f(x_0)\big)$.

7.3. definīcija. Funkcijas maksimuma un minimuma punktus sauc par tās **ekstrēma punktiem**, bet funkcijas vērtību maksimuma (minimuma) punktā - par funkcijas maksimumu (minimumu).

Punktu x_0 sauc par **stacionāro punktu**, ja $f'(x_0) = 0$. Stacionārie punkti un punkti, kuros funkcijas atvasinājums neeksistē, veido **kritiskos punktus**.

Lai punktā $x_0 \in D(f)$ funkcijai būtu ekstrēms, **nepieciešami**, lai punkts x_0 būtu kritiskais punkts.

Lai kritiskais punkts x_0 būtu funkcijas f ekstrēma punkts, ir **pietiekami**, lai tās atvasinājums f', argumentam izejot caur x_0, mainītu zīmi. Pie tam, ja atvasinājums pa kreisi no x_0 ir pozitīvs, pa labi - negatīvs, tad x_0 ir funkcijas maksimuma punkts, bet ja f' pa kreisi no x_0 ir negatīvs, pa labi - pozitīvs, tad x_0 ir funkcijas minimuma punkts.

Funkcijas **ekstrēma noteikšanas 1. kārtula**.

1. Atrod funkcijas **kritiskos** punktus.

2. Sadala funkcijas definīcijas apgabalu ar kritisko punktu palīdzību intervālos un nosaka $f'(x)$ zīmi katrā no šiem intervāliem.

3. No visiem kritiskajiem punktiem izvēlas tos, kuros funkcija ir definēta un f', "izejot" caur šiem punktiem, maina zīmi. Pie tam, ekstrēma punkts $x = x_0$ ir maksimuma punkts, ja pa kreisi no x_0 $f'(x) > 0$, bet pa labi no x_0 $f'(x) < 0$, un minimuma punkts - pretējā gadījumā.

4. Atrod funkcijas ekstrēmus, aprēķinot funkcijas vērtības ekstrēma punktos.

Dažreiz funkcijas ekstrēmus atrast ir izdevīgāk, izmantojot f otrās kārtas atvasinājumu: ja $f''(x_0)$ eksistē un nav nulle, tad stacionārais punkts x_0 ir funkcijas ekstrēma punkts; konkrēti - tas ir minimuma punkts, ja $f''(x_0) > 0$, un maksimuma punkts, ja $f''(x_0) < 0$.

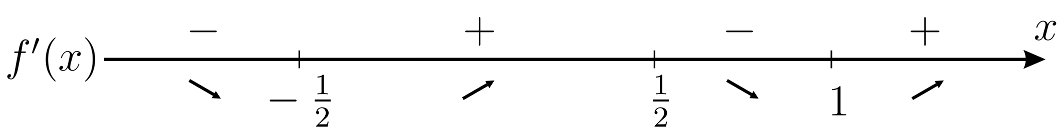
Funkcijas **ekstrēma noteikšanas 2. kārtula**.

1. Atrod funkcijas **stacionāros** punktus.
2. Atrod $f''(x)$ un nosaka tā skaitlisko vērtību katrā stacionārajā punktā x_0. Ja $f''(x_0) < 0$, tad x_0 ir maksimuma punkts, ja $f''(x_0) > 0$, tad - minimuma punkts.
3. Aprēķina funkcijas vērtības ekstrēma punktos.

7.3. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = 6x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 6x$ ekstrēmus.

$D(f) = \mathbb{R}$;

$$f'(x) = 24x^3 - 24x^2 - 6x + 6 = 6(2x+1)(2x-1)(x-1).$$



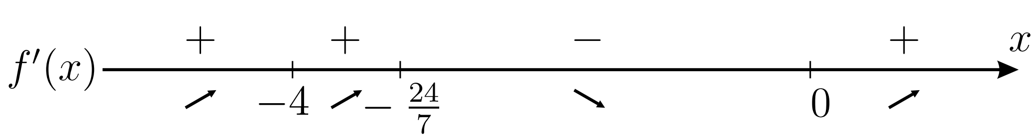
7.3. zīm.

$$\min f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{19}{8};$$
$$\min f(x) = f(1) = 1;$$
$$\max f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{8}.$$

7.4. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = x^2\sqrt[3]{x+4}$ ekstrēmus.

$D(f) = \mathbb{R}$;

$$f'(x) = 2x\sqrt[3]{x+4} + x^2\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}} = \frac{x}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}(6x + 24 + x) =$$
$$= \frac{x(7x+24)}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}.$$



7.4. zīm.

$$\max f(x) = f\left(-\frac{24}{7}\right) = \frac{576}{49}\sqrt[3]{\frac{4}{7}} \approx 9,8;$$
$$\min f(x) = f(0) = 0.$$

$x = -4$ nav ekstrēma punkts, jo izejot caur šo punktu, $f'(x)$ zīmi nemaina $\big(f'(x) > 0\big)$.

7.5. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = \cos^2 x - \sin x$ ekstrēmus intervālā $[-\pi; \pi]$.

$$f'(x) = -2\cos x \sin x - \cos x = -2\cos x\left(\sin x + \frac{1}{2}\right);$$

$$-2\cos x\left(\sin x + \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$\cos x = 0; \qquad\qquad \sin x = -\frac{1}{2};$$
$$x = -\frac{\pi}{2}; \quad x = \frac{\pi}{2}; \qquad\qquad x = -\frac{5\pi}{6}; \quad x = -\frac{\pi}{6}.$$

Tātad ir četri stacionārie punkti.

Izmantojot ekstrēmu noteikšanas otro kārtulu, pārbauda, vai šie stacionārie punkti ir arī funkcijas ekstrēma punkti.

$$f''(x) = (-\sin 2x - \cos x)' = -2\cos 2x + \sin x;$$
$$f''\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} < 0;$$
$$f''\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2(-1) - 1 > 0;$$
$$f''\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -2\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} < 0;$$
$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2(-1) + 1 > 0.$$

Tātad,

$$\max f(x) = f\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{4};$$
$$\min f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$
$$\min f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Auditorijā risināmie uzdevumi

1. Atrast ekstrēmus funkcijām, izmantojot 1. kārtulu:
   (a) $f(x) = x^2 - 6x + 8$;
   (b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^4$;
   (c) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$;
   (d) $f(x) = \sqrt[5]{(x-1)^4}$;
   (e) $f(x) = x^2 - \ln(1+2x)$.
2. Atrast ekstrēmus funkcijām, izmantojot 2. kārtulu:
   (a) $f(x) = x \ln x$;
   (b) $f(x) = \frac{x}{2} - \operatorname{arctg} x$;
   (c) $f(x) = x \ln x - x$.
3. Atrast ekstrēmus funkcijām, konstruēt funkciju grafikus:
   (a) $f(x) = \begin{cases} 5 + x, & \text{ja } x < 1, \\ x^2 + 1, & \text{ja } x \geq 1. \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{ja } x < 0, \\ -x^2 + 2, & \text{ja } x \geq 0. \end{cases}$

Mājas darba uzdevumi

1. Atrast ekstrēmus funkcijām, izmantojot 1. kārtulu:
   (a) $f(x) = 10 + 15x + 6x^2 - x^3$;
   (b) $f(x) = x - 6\sqrt[3]{x^2}$;
   (c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{10 - x^2}}$;
   (d) $f(x) = (x^2 - 8)e^x$;
   (e) $f(x) = \ln(1 - x) + x$.
2. Atrast ekstrēmus funkcijām, izmantojot 2. kārtulu:
   (a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$;

(b) $f(x) = \dfrac{\ln x + 2}{x}$.

3. Atrast ekstrēmus funkcijām, konstruēt funkciju grafikus:

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{ja} \ \ x \le 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x+4}}, & \text{ja} \ \ x > 0. \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ja} \ \ x \ne 0, \\ 0, & \text{ja} \ \ x = 0. \end{cases}$

7.3. Funkcijas vislielākā un vismazākā vērtība

Pieņemsim, ka $y = f(x)$ ir slēgtā intervālā $[a; b]$ nepārtraukta funkcija. Tā sasniedz šinī intervālā savu vislielāko un vismazāko vērtību vai nu kritiskajos punktos, vai intervāla galapunktos.

Funkcijas **vislielākās un vismazākās vērtības noteikšanas kārtula**.

1. Atrod funkcijas visus kritiskos punktus, kas atrodas intervālā $(a; b)$.
2. Aprēķina funkcijas vērtības atrastajos kritiskajos punktos.
3. Aprēķina funkcijas vērtības intervāla galapunktos.
4. No atrastajām vērtībām izvēlas vislielāko un vismazāko.

Ja funkcija ir nepārtraukta vaļējā intervālā, tad vismazāko vai vislielāko vērtību tā var šajā intervālā nesasniegt. Ja šādai funkcijai ir vienīgais ekstrēma punkts, tad šajā punktā funkcija sasniedz vismazāko vērtību, ja tas ir minimuma punkts, un vislielāko vērtību, ja tas ir maksimuma punkts.

7.6. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ vislielāko un vismazāko vērtību intervālā $[-3; 3]$.

Dotā funkcija ir nepārtraukta visiem $x \in [-3; 3]$.

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2).$$

Kritiskie punkti $x = -1$, $x = 2$ atrodas dotajā intervālā.

$$f(-1) = 17; \ f(2) = -10; \ f(-3) = -35; \ f(3) = 1.$$

Tātad,

$$\min_{[-3;3]} f(x) = f(-3) = -35;$$
$$\max_{[-3;3]} f(x) = f(-1) = 17.$$

7.7. piemērs. Atrast funkcijas $\varphi(x) = \frac{1}{\sin x}$ vismazāko un vislielāko vērtību intervālā $(0;\pi)$.

$$\varphi'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Nosaka kritiskos punktus.

$$\cos x = 0; \qquad\qquad \sin x = 0;$$
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k \ (k \in \mathbb{Z}), \qquad\qquad x = \pi k \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Dotajā intervālā atrodas punkts $x = \frac{\pi}{2}$; $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

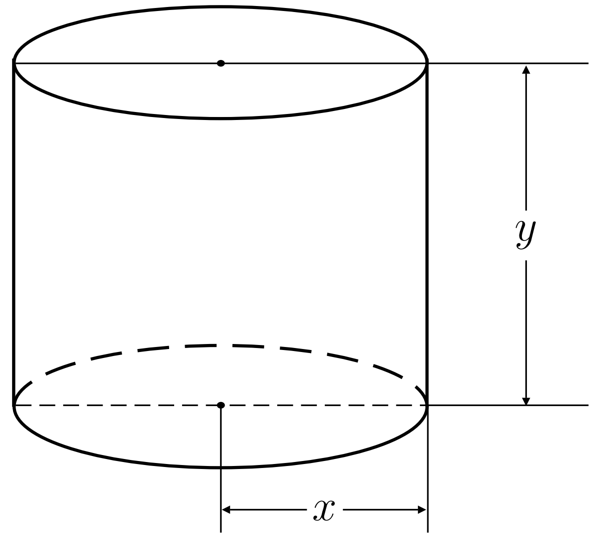
Tā kā dotais intervāls ir vaļējs, tad var noteikt, kā izmainās funkcija, argumentam tiecoties uz 0 no labās puses un uz π no kreisās puses:

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{\sin x} = +\infty;$$
$$\lim_{x\to \pi-} \frac{1}{\sin x} = +\infty.$$

Tātad pie $x = \frac{\pi}{2}$ funkcija sasniedz savu vismazāko vērtību.

$$\min_{(0;\pi)} \varphi(x) = \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

7.8. piemērs. Noteikt, kādiem jābūt konservu kārbas izmēriem, lai pie dotā virsmas laukuma S tai būtu vislielākais tilpums.



7.5. zīm.

Tilpums $V = \pi x^2 y$.

Pilnas virsmas laukums $S = 2\pi x^2 + 2\pi xy$, kas ir konstants.

No laukuma formulas var izteikt y:

$$y = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x}.$$

Tad

$$V = \frac{\pi x^2 (S - 2\pi x^2)}{2\pi x} = \frac{1}{2} x (S - 2\pi x^2)$$

ir argumenta x funkcija.

$D(V) = (0; +\infty)$.

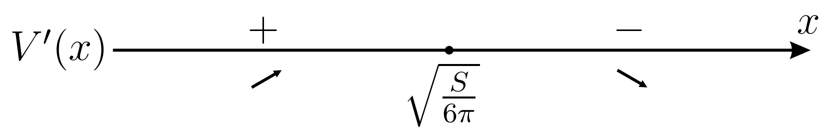
Tā kā šoreiz ir jāatrod funkcijas vislielākā vērtība vaļējā intervālā, tad pietiek atrast šīs funkcijas maksimumu.

$$V' = \frac{1}{2} S - 3\pi x^2;$$

$$\frac{1}{2} S - 3\pi x^2 = 0;$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$

Ņemot vērā funkcijas definīcijas apgabalu, kritiskais punkts ir $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$.



7.6. zīm.

$$\max V(x) = V\left(\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{6\pi}}\left(S - 2\pi\frac{S}{6\pi}\right) = \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}} = \max_{(0;+\infty)} V(x).$$

Ja

$$x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}},$$

tad

$$y = \frac{S - 2\pi\frac{S}{6\pi}}{2\pi\sqrt{\frac{S}{6\pi}}} = \sqrt{\frac{2S}{3\pi}}.$$

Acīmredzami, ka $2x = y$, tātad kārbas diametram jābūt vienādam ar tās augstumu, t.i., $\sqrt{\frac{2S}{3\pi}}$.

Auditorijā risināmie uzdevumi

1. Atrast vismazāko un vislielāko vērtību katrai no dotajām funkcijām norādītajā intervālā:

   $a)$ $f(x) = x + \sqrt{x}$, $\quad x \in [0; 4]$.

   $b)$ $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $\quad x \in [-1; 2]$.

   $c)$ $f(x) = \ln x$, $\quad x \in (0; 1]$.

   $d)$ $f(x) = \sqrt{x(10 - x)}$, $\quad x \in D(f)$.

   $e)$ $f(x) = x + \cos^2 x$, $\quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

   $f)$ $f(x) = 2x^2 - \ln x$, $\quad x \in [1; e]$.

2. Doto pozitīvo skaitli m sadalīt divos saskaitāmajos tā, lai to reizinājums būtu vislielākais.

3. Skaitli 180 sadalīt trijos saskaitāmajos tā, lai divu saskaitāmo attiecība būtu 1 : 2, bet triju saskaitāmo reizinājums būtu vislielākais.

4. Jāizgatavo kastīte (bez vāciņa) ar taisnstūra pamatu un doto tilpumu V. Pamata taisnstūra malu attiecība ir k. Kādiem jābūt kastītes izmēriem, lai kastītes virsma būtu vismazākā?

Mājas darba uzdevumi

1. Atrast vismazāko un vislielāko vērtību katrai no dotajām funkcijām norādītajā intervālā.

$$\begin{array}{ll} a)\ f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}, & x \in \left[-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right]. \\ b)\ f(x) = 2^{x-\sqrt{x}}, & x \in [0; 4]. \\ c)\ f(x) = \cos 2x + 2x, & x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]. \\ d)\ f(x) = \arcsin x, & x \in (-1; 1]. \\ e)\ f(x) = 2\cos x - \sin^2 x, & x \in [0; 2\pi]. \end{array}$$

2. Skaitli 16 sadalīt divos saskaitāmajos tā, lai to kvadrātu summa būtu vismazākā.

3. Riņķī ar rādiusu R ievilkt vienādsānu trijstūri ar vislielāko laukumu.

7.4. Funkcijas grafika ieliekums un izliekums, pārliekuma punkti

Diferencējamas funkcijas grafiku intervālā $(a; b)$ sauc par **ieliektu** (**izliektu**), ja tas atrodas virs (zem) pieskares, kas novilkta grafika jebkurā punktā.

Ja funkcijai intervālā $(a; b)$ eksistē $f''(x) > 0$, tad funkcijas grafiks šajā intervālā ir ieliekts, ja $f''(x) < 0$ visiem $x \in (a; b)$ - izliekts.

Funkcijas grafika punktu $M_0(x_0; y_0)$ sauc par tās grafika pārliekuma punktu, ja punktā x_0 funkcija ir nepārtraukta un tas atdala grafika izliekto daļu no ieliektās daļas vai otrādi.

Lai pie $x = x_0$ nepārtrauktas funkcijas grafikam būtu pārliekuma punkts, ir nepieciešami, lai $f''(x_0) = 0$ vai neeksistē un pietiekami, lai "izejot" caur katru no šiem punktiem, $f''(x)$ mainītu zīmi.

Funkcijas grafika **pārliekuma punktu noteikšanas kārtula**.

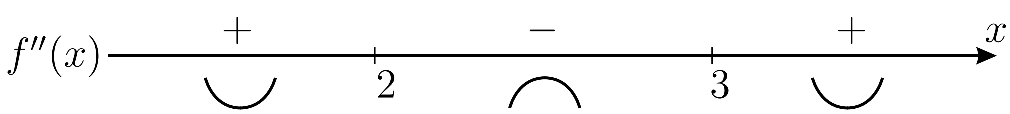
1. Atrod funkcijas otrās kārtas atvasinājumu $f''(x)$.

2. Atrod tos punktus, kuros otrās kārtas atvasinājums ir nulle un tos funkcijas nepārtrauktības punktus, kuros funkcija nav divreiz diferencējama.

3. Izpēta $f''(x)$ zīmi atrasto punktu apkārtnēs. Ja argumentam "izejot" caur kādu no šiem punktiem x_0 $f''(x)$ zīme mainās, tad punkts $M_0\big(x_0; f(x_0)\big)$ ir funkcijas grafika pārliekuma punkts. Ja $f''(x) > 0$, tad grafiks ir ieliekts, ja $f''(x) < 0$ - izliekts.

7.9. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 31x - 37$ grafika izliekuma un ieliekuma intervālus un pārliekuma punktus.

$$D(f) = \mathbb{R};$$
$$f'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 72x - 31;$$
$$f''(x) = 12x^2 - 60x + 72 = 12(x-2)(x-3).$$



7.7. zīm.

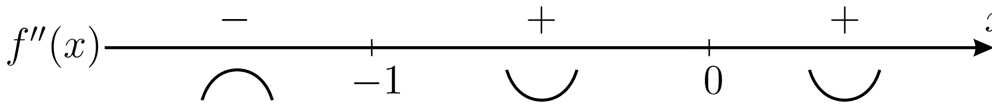
Tātad, funkcijas grafiks ir ieliekts visiem $x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$, izliekts - $x \in (2; 3)$.

Pie $x = 2$ un $x = 3$ funkcijas grafikam ir pārliekuma punkti, t.i., pārliekuma punkti ir $(2; -19)$ un $(3; 5)$.

7.10. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = (x^2 + 7x)\sqrt[3]{x} - 5x - 8$ grafika izliekuma un ieliekuma intervālus un pārliekuma punktus.

$$D(f) = \mathbb{R};$$
$$f'(x) = \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} + \frac{28}{3}x^{\frac{1}{3}} - 5;$$
$$f''(x) = \frac{28}{9}x^{\frac{1}{3}} + \frac{28}{9}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{28}{9}\frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

$f''(x)$ ir nulle, ja $x = -1$ un neeksistē, ja $x = 0$.



7.8. zīm.

Tātad, funkcijas grafiks ir izliekts, ja $x \in (-\infty; -1)$ un ieliekts, ja $x \in (-1; +\infty)$.

Pie $x = -1$ ir pārliekuma punkts, t.i., punkts $(-1; 3)$.

Auditorijā risināmie uzdevumi

1. Paierādīt, ka dotā līkne ir ieliekta visiem $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $y = \dfrac{x^2}{2} - \sin x$;

   (b) $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$;

   (c) $y = (x+2)^4 + e^{2x}$.

2. Atrast doto funkciju grafiku izliekuma un ieliekuma intervālus un pārliekuma punktus:

   (a) $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 12x^2 + 15x - 6$;

   (b) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$;

   (c) $f(x) = (1 + x^2)e^x$;

   (d) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$;

   (e) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$;

   (f) $2x^2 + \ln x$.

Mājas darba uzdevumi

1. Pierādīt, ka dotā līkne ir izliekta visiem $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $y = 3x - x^4$;

   (b) $y = 1 - \operatorname{ch} x$;

(c) $y = 2 - e^{3x}$.

2. Atrast doto funkciju grafiku izliekuma un ieliekuma intervālus un pārliekuma punktus:

   (a) $f(x) = 3x^5 - 10x^4 - 30x^3 + 12x + 7$;

   (b) $f(x) = \dfrac{x-5}{x+7}$;

   (c) $f(x) = 5 + \sqrt[3]{x-4}$;

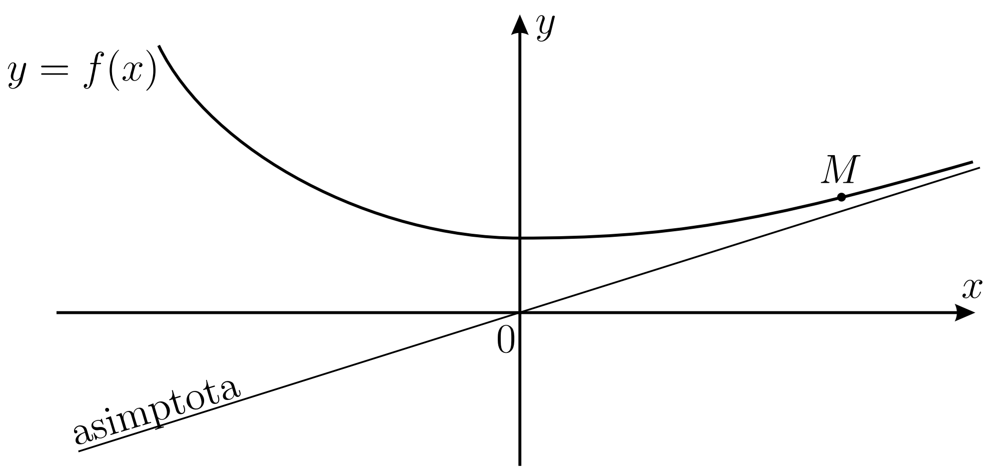
   (d) $f(x) = \cos x, \quad x \in (0; 2\pi)$;

   (e) $f(x) = \ln(1 + x^2)$;

   (f) $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$.

7.5. Funkcijas grafika asimptotas

Taisne ir funkcijas $y = f(x)$ grafika asimptota, ja attālums no punkta $M(x, y)$, kas atrodas uz grafika, līdz šai taisnei tiecas uz nulli, kad punkts M neierobežoti attālinās (7.9. zīm.) no koordinātu sākumpunkta.



7.9. zīm.

Var būt 3 veidu asimptotas: vertikālās, horizontālās un slīpās.

Ja vismaz viena no vienpusējām robežām punktā a ir bezgalīga, tad taisne $x = a$ ir funkcijas f grafika **vertikālā** asimptota.

Ja eksistē galīgas robežas $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1$ un $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) - k_1 x\big) = b_1$, tad taisne $y = k_1 x + b_1$ ir funkcijas f grafika **slīpā asimptota** (no labās puses).

Analogi - ja eksistē $\lim\limits_{x\to+-\infty}\frac{f(x)}{x} = k_2$ un $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-k_2x\big) = b_2$, tad taisne $y = k_2x + b_2$ ir funkcijas f grafika **slīpā asimptota** (no kreisās puses).

Daudzām funkcijām $k_1 = k_2 = k$ un $b_1 = b_2 = b$, tad taisne $y = kx + b$ ir grafika slīpā asimptota gan, kad $x \to +\infty$, gan, kad $x \to -\infty$.

Ja $k = 0$, tad taisne $y = b$ ir funkcijas grafika **horizontālā asimptota**, kad $x \to +\infty$ vai $x = -\infty$.

7.11. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = \frac{-5x+3}{x+2}$ grafika asimptotas.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Tā kā

$$\lim_{x\to-2-}\frac{-5x+3}{x+2} = -\infty\ ,\ \lim_{x\to-2+}\frac{-5x+3}{x+2} = +\infty,$$

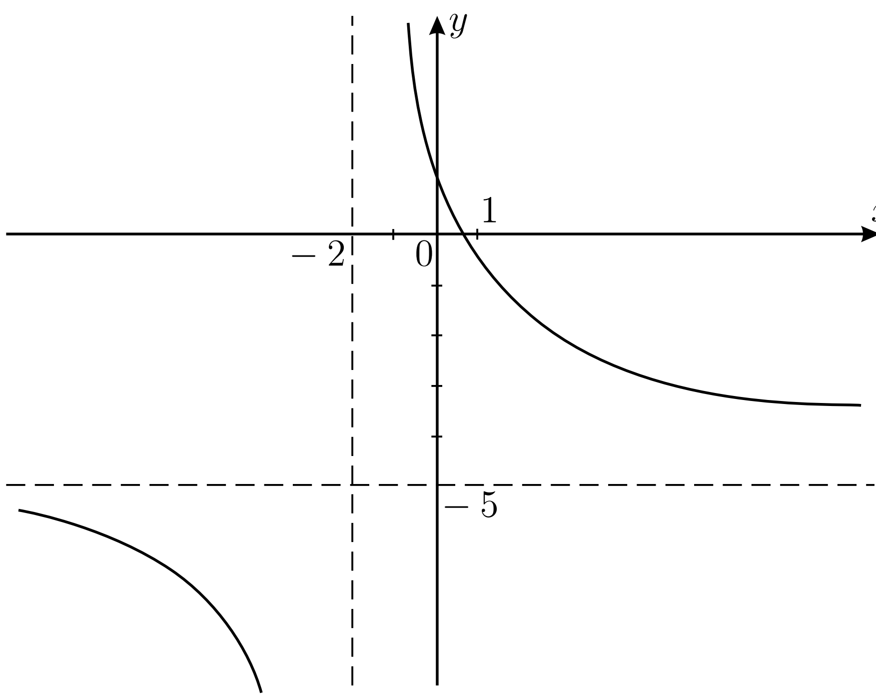
tad taisne $x = -2$ ir dotās funkcijas grafika vertikālā asimptota.

Atradīsim slīpās asimptotas.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x+3}{x(x+2)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5}{2x+2} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x+3}{x(x+2)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5}{1} = -5.$$

Tātad dotās funkcijas grafikam ir horizontālā asimptota $y = -5$. (7.10. zīm.)



7.10. zīm.

7.12. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = \frac{-x^2+7x}{x-3}$ grafika asimptotas.

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3\}$;

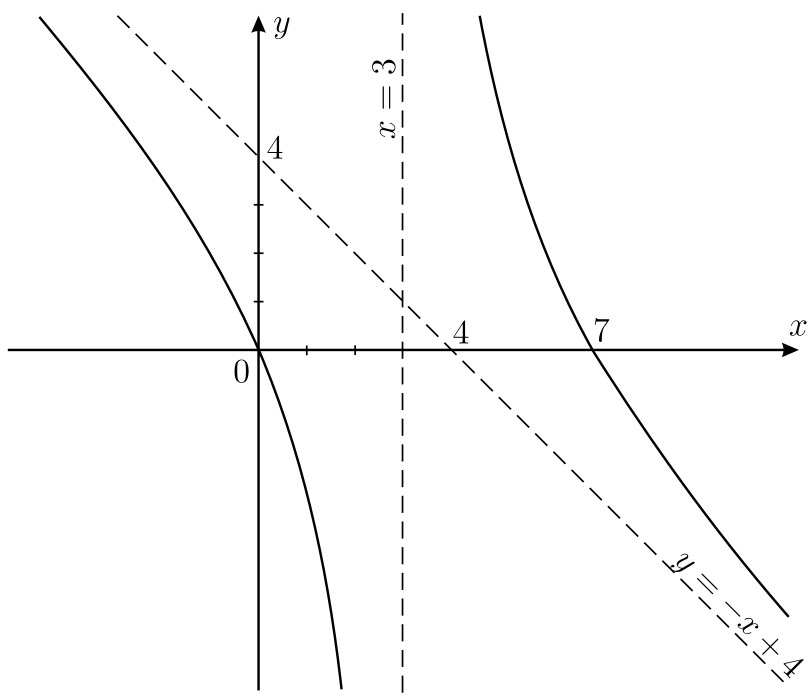
$$\lim_{x\to 3-} \frac{-x^2+7x}{x-3} = -\infty; \quad \lim_{x\to 3+} \frac{-x^2+7x}{x-3} = +\infty.$$

Tātad $x = 3$ ir dotās funkcijas grafika vertikālā asimptota.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2+7x}{x(x-3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2+7x}{x^2-3x} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{-x^2+7x}{x-3} + x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4x}{x-3} = 4.$$

Tātad taisne $y = -x + 4$ ir slīpā asimptota. (7.11. zīm.)



7.11. zīm.

7.13. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = \sqrt{2+x^2} - 2x$ grafika asimptotas.

$D(f) = \mathbb{R}$.

Vertikālo asimptotu dotās funkcijas grafikam nav. Atrodot slīpās asimptotas, šoreiz robežas, kad $x \to +\infty$ un $x \to -\infty$, ir dažādas, tāpēc funkcijas grafikam var būt divas slīpās asimptotas.

Atradīsim slīpo asimptotu no labās puses ($x \to +\infty$):

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}-2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{x^2}+1}-2}{1} = -1;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2+x^2}-2x+x\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2+x^2}-x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{2+x^2}+x} = 0.$$

Tātad, ja $x \to +\infty$, tad slīpā asimptota ir $y = -x$.

Atradīsim slīpo asimptotu no kreisās puses (kad $x \to -\infty$):

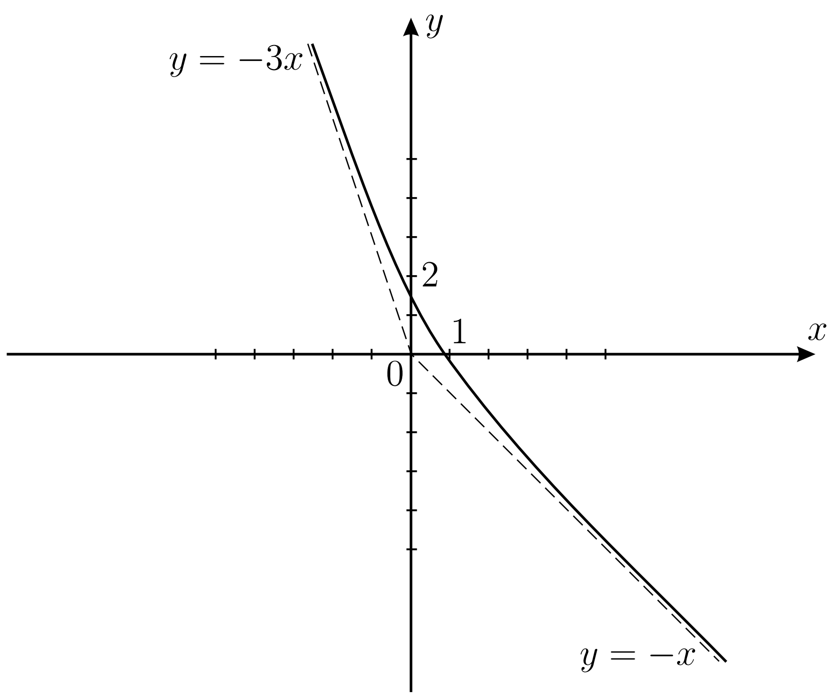
$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{2+x^2}-2x}{x} = \left| \begin{array}{c} t = -x, \\ x = -t \\ \text{ja } x \to -\infty, \text{tad } t \to +\infty \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{2+t^2}+2t}{-t} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{2}{t^2}+1}+2}{-1} = -3;$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{2+x^2}-2x+3x\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{2+x^2}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{2+x^2}-2} = 0.$$

Tātad, ja $x \to -\infty$, tad dotās funkcijas grafikam ir asimptota $y = -3x$. (7.12. zīm.)



7.12. zīm.

Auditorijā risināmie uzdevumi

1. Izmantojot asimptotas definīciju, pierādīt, ka taisne $y = 2x + 1$ ir funkcijas $y = \frac{2x^4+x^3+1}{x^3}$ grafika asimptota.

2. Atrast doto funkciju grafiku asimptotas.

   (a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$;

   (b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$;

   (c) $f(x) = x + \ln x$;

   (d) $f(x) = 2x + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$;

   (e) $f(x) = x^2 e^{-x}$;

   (f) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$.

Mājas darba uzdevumi

1. Izmantojot asimptotas definīciju, pierādīt, ka taisne $y = x + \frac{1}{2}$ ir funkcijas $y = \frac{x}{2x-1} + x$ grafika asimptota.

2. Atrast doto funkciju grafiku asimptotas.

   (a) $f(x) = \dfrac{3}{(x-4)^2}$;

   (b) $f(x) = \dfrac{x^3}{4-x^2}$;

   (c) $f(x) = \sqrt{1+x^2} + 2x$;

   (d) $f(x) = \ln(1-x^2)$;

   (e) $f(x) = x + \dfrac{\sin x}{x}$.

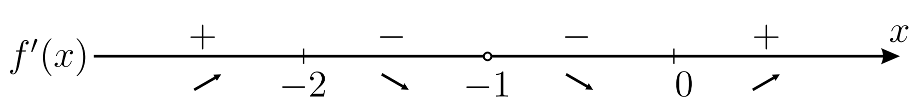
7.6. Funkcijas pilnā pētīšana

Funkcijas pētīšanas shēma.

1. Atrod funkcijas definīcijas apgabalu $D(f)$, nosaka pārtraukuma punktus un to veidu, norāda funkcijas nepārtrauktības intervālus.
2. Noskaidro, vai f ir pāra vai nepāra funkcija, vai tā ir periodiska funkcija.
3. Atrod funkcijas grafika krustpunktus ar koordinātu asīm.
4. Nosaka funkcijas monotonitātes intervālus un ekstrēmus.
5. Nosaka funkcijas grafika izliekuma un ieliekuma intervālus, kā arī grafika pārliekuma punktus.
6. Atrod funkcijas grafika asimptotas.
7. Koordinātu plaknē atzīmē visus funkciju raksturojošos punktus (f grafika krustpunktus ar koordinātu asīm, ekstrēma punktus, pārliekuma punktus), novelk grafika asimptotas un konstruē funkcijas grafiku.

7.14. piemērs. Izpētīt funkciju $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.

1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Funkcija ir nepārtraukta kā divu nepārtrauktu funkciju dalījums.
2. Funkcija nav ne pāra, ne nepāra, jo tās definīcijas apgabals nav simetrisks pret koordinātu sākuma punktu; tā nav periodiska.
3. Krustpunkts ar koordinātu asīm $(0; 0)$.
4. $f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.



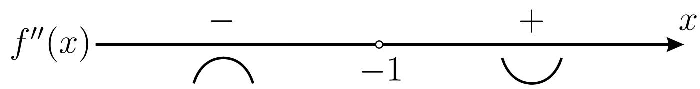
7.13. zīm.

Funkcija ir augoša, ja $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ un dilstoša, ja $x \in (-2; -1) \cup (-1; 0)$.

$$\max f(x) = f(-2) = -4;$$
$$\min f(x) = f(0) = 0.$$

5.

$$f''(x) = \frac{(2x+2)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x)}{(x+1)^4} =$$
$$= \frac{2(x^2+2x+1-x^2-2x)}{(x+1)^3} = \frac{2}{(x+1)^3}.$$



7.14. zīm.

Funkcijas grafiks ir izliekts, ja $x \in (-\infty; -1)$ un ieliekts, ja $x \in (-1; +\infty)$.

Funkcijas grafikam pārliekuma punktu nav.

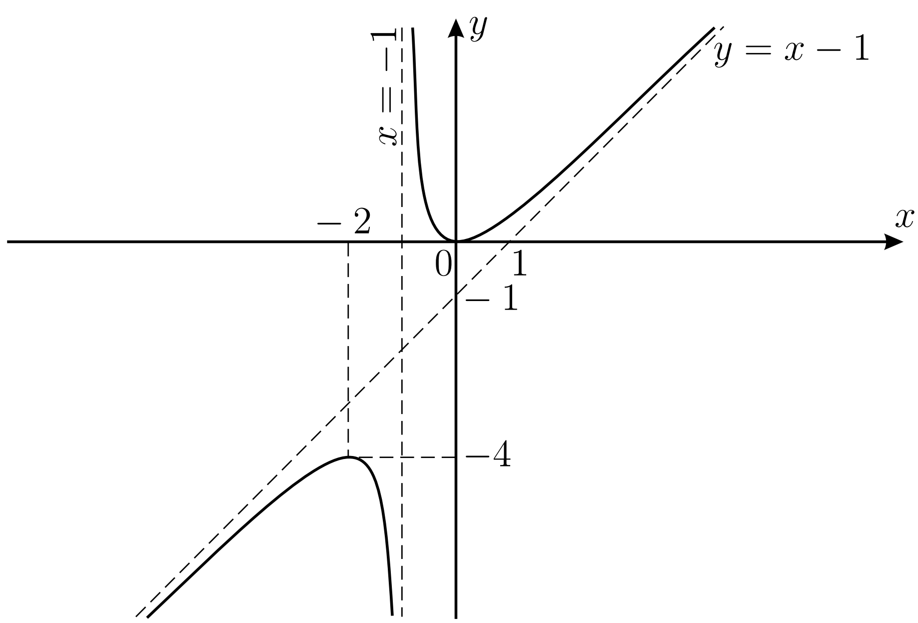
6. Taisne $x = -1$ ir funkcijas grafika vertikālā asimptota, jo

$$\lim_{x \to -1-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty \text{ un } \lim_{x \to -1+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty.$$

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2+x} = 1;$$
$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-x}{x+1} = -1.$$

Tātad, taisne $y = x - 1$ ir funkcijas grafika slīpā asimptota.

7. Konstruē grafiku. (7.15. zīm.)



7.15. zīm.

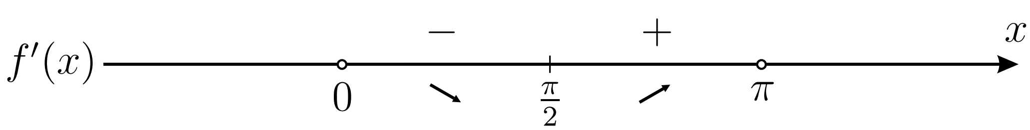
7.15. piemērs. Izpētīt funkciju $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ un konstruēt tās grafiku.

1. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$, funkcija ir nepārtraukta.
2. $f(-x) = -\sin x - \dfrac{1}{\sin x} = -\left(\sin x + \dfrac{1}{\sin x}\right) = -f(x)$, tātad funkcija ir nepāra.

   $$f(x) = \sin(x + 2\pi) + \frac{1}{\sin(x + 2\pi)} = f(x + 2\pi),$$

   tātad funkcija ir periodiska ar periodu $T = 2\pi$.

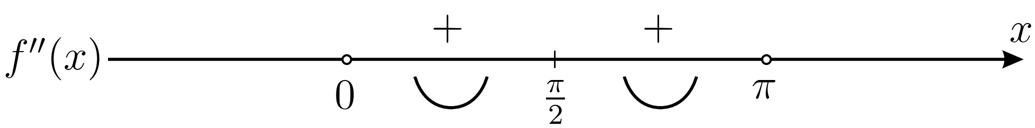
   Ņemot vērā funkcijas periodiskumu un to, ka funkcija ir nepāra, funkciju pietiekami izpētīt intervālā $(0; \pi)$.
3. Funkcijas grafikam krustpunktu ar koordinātu asīm nav, jo $x \neq 0$ un $y \neq 0$.
4. $f'(x) = \cos x - \dfrac{\cos x}{\sin^2 x} = \cos x \left(1 - \dfrac{1}{\sin^2 x}\right) = -\dfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$.
   $f'(x)$ ir definēts visiem $x \in (0; \pi)$; $f'(x) = 0$, ja $x = \frac{\pi}{2}$.



7.16. zīm.

   Funkcija ir dilstoša, ja $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ un augoša, ja $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
   $\min f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
5.

$$f''(x) = -\frac{3\cos^2 x(-\sin x)\sin^2 x - \cos^3 x 2\sin x \cos x}{\sin^4 x} =$$
$$= \frac{\cos^2 x(3\sin^2 x + 2\cos^2 x)}{\sin^3 x}.$$



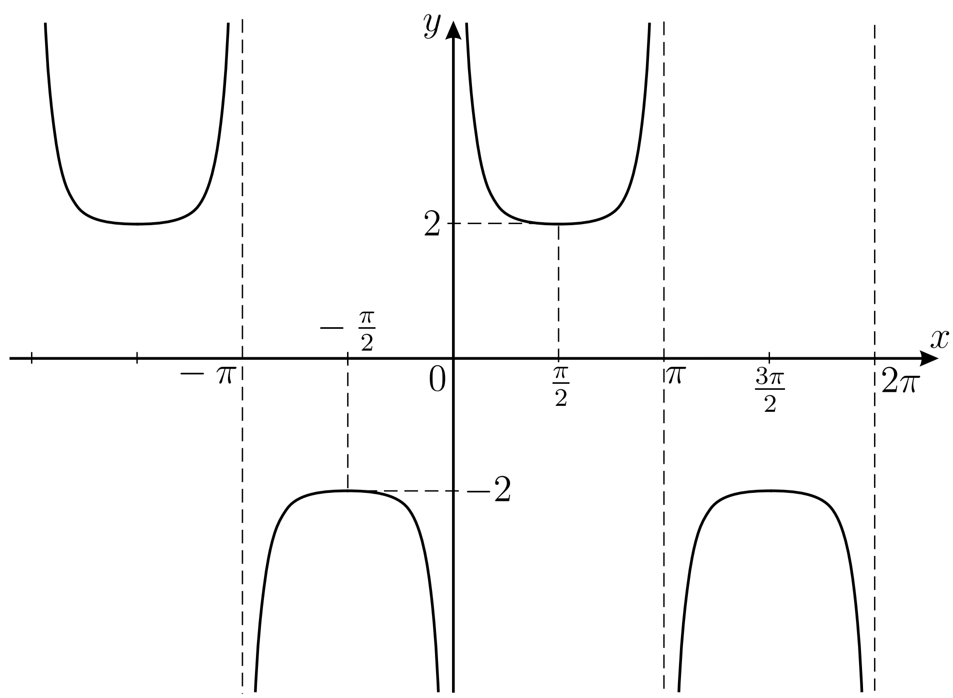
7.17. zīm.

Tātad funkcijas grafiks visiem $x \in (0; \pi)$ ir ieliekts.

6.
$$\lim_{x\to 0+}\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=+\infty,$$
$$\lim_{x\to \pi-}\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)=+\infty.$$

Tātad taisnes $x=0$ un $x=\pi$ ir funkcijas grafika vertikālās asimptotas. Slīpo vai horizontālo asimptotu nav, jo $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x$ neeksistē.

7. Izmantojot iepriekš iegūtos rezultātus, konstruē grafiku funkcijai intervālā $(0;\pi)$. Pēc tam izmanto nepāra funkcijas grafika simetriju attiecībā pret koordinātu sākuma punktu un konstruē grafiku funkcijai intervālā $(\pi;0)$. Tā kā funkcija ir periodiska, tad var konstruēt dotās funkcijas grafiku definīcijas apgabalā.



7.18. zīm.

Auditorijā risināmie uzdevumi

Izpētīt funkcijas

1. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$;

2. $f(x)=x+\dfrac{x}{3x-1}$;

3. $f(x) = e^{\frac{1}{x-3}}$;
4. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$;
5. $f(x) = x^2 \ln x$.

Mājas darba uzdevumi

Izpētīt funkcijas

1. $f(x) = x \ln x$;
2. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$;
3. $f(x) = 3\left(\dfrac{x^4}{2} - x^2\right)$;
4. $f(x) = x^2(1 - \ln x)$;
5. $f(x) = (x-1)e^{1-x}$.

8. Parametriski definētas funkcijas un to atvasināšana

Ja funkcijas y atkarība no argumenta x ir dota ar parametra t palīdzību

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

$(t \in \mathfrak{I})$ un funkcijas $x = \varphi(t)$ un $y = \psi(t)$ ir divreiz diferencējamas intervālā $\mathfrak{I}$, tad

$$y' = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \text{ jeb } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \text{ ja } \frac{dx}{dt} \neq 0.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)}{\frac{dx}{dt}}.$$

8.1. piemērs. Atrast $\frac{dy}{dx}$ un $\frac{d^2y}{dx^2}$ funkcijai

$$\begin{cases} x = t^2 - 1, \\ y = t^3 + 5, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t;$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}t\right) = \frac{\left(\frac{3}{2}t\right)'_t}{2t} = \frac{3}{4t}.$$

8.2. piemērs. Atrast $\frac{dy}{dx}$ un $\frac{d^2y}{dx^2}$ funkcijai

$$\begin{cases} x = \arcsin 2t, \\ y = t^2, \end{cases} \quad \text{ja } t = \frac{1}{4}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{\frac{2}{\sqrt{1-4t^2}}} = t\sqrt{1-4t^2};$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{8};$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\left(t\sqrt{1-4t^2}\right)'_t}{\frac{2}{\sqrt{1-4t^2}}} = \frac{\sqrt{1-4t^2} - \frac{-4t^2}{\sqrt{1-4t^2}}}{\frac{2}{\sqrt{1-4t^2}}} = \frac{1}{2};$$
$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Auditorijā risināmie uzdevumi

Atrast norādītos atvasinājumus dotajām parametriski definētām funkcijām

1. $\begin{cases} x = e^{-t}\sin t, \\ y = e^{t}\cos t, \end{cases}$ $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Atrast $\frac{dy}{dx}$.

2. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = \operatorname{arctg} t. \end{cases}$ Atrast $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=-\frac{1}{6}}$.

3. $\begin{cases} x = a(\sin t - t\cos t), \\ y = a(\cos t + t\sin t), \end{cases}$ $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Atrast $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{4}}$.

4. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^2. \end{cases}$ Atrast $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1}$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{t=1}$.

Mājas darba uzdevumi

Atrast norādītos atvasinājumus dotajām parametriski definētām funkcijām

1. $\begin{cases} x = 5\sin t, \\ y = 5\cos t, \end{cases}$ $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Atrast $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{3}}$.

2. $\begin{cases} x = \frac{3t}{1+t^3}, \\ y = \frac{3t^2}{1+t^3}. \end{cases}$ Atrast $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=0}$, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{t=1}$.

3. $\begin{cases} x = e^{-\varphi}, \\ y = e^{3\varphi}. \end{cases}$ Atrast $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\varphi=0}$.

4. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 3\sin t, \end{cases}$ $t \in [0; \pi]$. Atrast $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Pielikums

I Izmantojot atvasinājuma definīciju, atrast funkcijas atvasinājumu

1. $f(x) = \sqrt{x} + x$ punktā $x_0 = 1$.
2. $f(x) = \frac{1}{x} + 2x - 1$ punktā $x_0 = 2$.
3. $f(x) = \ln 3x$ punktā $x_0 = e$.
4. $f(x) = \operatorname{ctg} x$ punktā $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
5. $f(x) = \sin 3x$ punktā $x_0 = \pi$.
6. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ punktā $x_0 = \frac{\pi}{6}$.
7. $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 3$ punktā $x_0 = 4$.
8. $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ punktā $x_0 = \pi$.
9. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ punktā $x_0 \neq 0$.
10. $f(x) = 2^x$ punktā x_0.
11. $f(x) = 2x - x^2$ punktā x_0.
12. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{x}$ punktā $x_0 > 0$.
13. $f(x) = \operatorname{ctg} 2x$ punktā $x_0 \neq \frac{\pi}{2}k$.
14. $f(x) = \ln 4x$ punktā $x_0 > 0$.
15. $f(x) = e^{2x}$ punktā x_0.
16. $f(x) = \sqrt{x} + 1$ punktā $x_0 > 0$.
17. $f(x) = e^{\frac{x}{2}}$.
18. $f(x) = \log_2 x$.
19. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$.
20. $f(x) = 4^x$.
21. $f(x) = \sqrt{8x}$.
22. $f(x) = \cos 3x$.

23. $f(x) = \frac{1}{x^2} - 3x + 2.$

24. $f(x) = \operatorname{tg} 2x.$

25. $f(x) = \sin 5x.$

II Noteikt funkciju atvasinājumus

1. a) $f(x) = \sqrt{e^{x^2} - 1} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} 2x + 3.$

   b) $f(x) = (\sin^2 x)^{\ln x}.$

   c) $2x - 5y^3 + 10 = 0.$

2. a) $f(x) = \arcsin \sqrt{1 - e^{2x}} - \frac{1}{4x}.$

   b) $f(x) = \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x^2} - 1 + 1\right)^{2x}.$

   c) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ja $x \geq 0$ un $y \geq 0$.

3. a) $f(x) = \ln^2(x^2 + 2x + 3) - 3 \operatorname{arctg}(x + 1) - 1.$

   b) $f(x) = \left(\operatorname{arctg}(e^x - e^{-x})\right)^{\cos x}.$

   c) $x^3 + y^3 = a^3.$

4. a) $f(x) = \operatorname{arcctg} 3x + \ln \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} + 2x.$

   b) $f(x) = (\sin^2 x + \sin 2x)^{\frac{1}{1+x^2}}.$

   c) $x^3 + x^2 y + y^2 = 0.$

5. a) $f(x) = \ln \frac{x}{x-2} - \frac{1}{x}(1 + 3x^2).$

   b) $f(x) = \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(1+\sqrt{x})}.$

   c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}.$

6. a) $f(x) = \frac{1}{x(x^3+1)} - \ln \sqrt{x^2 + 1} + 3.$

   b) $f(x) = \left(\ln(1 + x^2)\right)^{\operatorname{tg} 2x}.$

   c) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}.$

7. a) $f(x) = x\sqrt{1 - x} - \arcsin x^2.$

   b) $f(x) = \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^{\sin x}.$

   c) $y^3 = \frac{x-y}{x+y}.$

8. a) $f(x) = \ln\frac{1+x^2}{1-x^2} + 2\sin x\cos x$.

   b) $f(x) = (1-x^3)^{\ln\sin x}$.

   c) $y - 0,3\sin y = x$.

9. a) $f(x) = \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x^2 - \frac{3}{16}\ln\frac{x-1}{x+1}$.

   b) $f(x) = (\ln\operatorname{tg})^{\arccos x^2}$.

   c) $a\cos^2(x+y) = b$.

10. a) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} + \operatorname{ctg} 6x$.

    b) $f(x) = \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

    c) $\operatorname{tg} y = xy$.

11. a) $f(x) = \sin(x^2 - 5x + 1) - \ln^2 x$.

    b) $f(x) = (\sin 2x)^{\sqrt{x}}$.

    c) $xy = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

12. a) $f(x) = -\frac{1}{20}\cos(5x^3) - \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{1}{x}$.

    b) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

    c) $\operatorname{arctg}(x + y^3) = x$.

13. a) $f(x) = \operatorname{arctg}\sqrt{x} + e^x\cos 2x$.

    b) $f(x) = (\cos 3x)^{\sin x}$.

    c) $e^y = x + y$.

14. a) $f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{arctg} x} - \frac{x^2-1}{\sin x}$.

    b) $f(x) = (\ln x)^{\sqrt{2x}}$.

    c) $\ln x + e^{\frac{y}{x}} = a$.

15. a) $f(x) = \frac{(1+x^2)\cos x - \sqrt[3]{x^2}}{2}$.

    b) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^x$.

    c) $\ln y + \frac{x}{y} = a$.

16. a) $f(x) = \lg 2\ln x - \frac{1}{x^3+8}$.

    b) $f(x) = \sqrt[x]{x}$.

    c) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)$.

17. a) $f(x) = \sin^3 5x + \frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$.

b) $f(x) = x^{x^2}$.

c) $\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

18. a) $f(x) = \ln \sqrt{1 + x^2} + 2 \operatorname{arctg} x$.

b) $f(x) = x^{\sin x}$.

c) $x^y = y^x$.

19. a) $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x} + \lg(1 - x^2)$.

b) $f(x) = x^x$.

c) $x^3 + 7yx - 2y = 0$.

20. a) $f(x) = 3 \sin x \cos^2 x - \sqrt{e^{2x}}$.

b) $f(x) = x^{x^x}$.

c) $3x^2 + 3y^2x - 3a(y + xy) = 0$.

21. a) $f(x) = 2^{\operatorname{ctg} \frac{1}{x}} + \arccos(2x^2 - 6x - 1)$.

b) $f(x) = (x^2 + 1)^{2x}$.

c) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

22. a) $f(x) = \frac{1}{10} e^{-x}(3 \sin 3x - \cos x) + 9$.

b) $f(x) = (\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

c) $(x + 1)(2y + 1) = 5y^3$.

23. a) $f(x) = -\sqrt{2} \operatorname{arcctg} \frac{x^2}{5} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

b) $f(x) = (x + 1)^{\frac{1}{\sin x}}$.

c) $\frac{y}{x} + \sqrt[3]{y} = 0$.

24. a) $f(x) = \sin(\ln x) + 3^{\sqrt{\cos x}}$.

b) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

c) $5xy - \frac{1}{y} + x - 1 = 0$.

25. a) $f(x) = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2\frac{x}{\sin^2 x}$.

b) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$.

c) $13y + x^2 - y^3 = 4$.

III Noteikt, kādām parametra t vērtībām dotie vienādojumi parametriskā veidā uzdod funkciju un atrast šīs funkcijas pirmās un otrās kārtas atvasinājumus un izskaitļot to vērtības punktā t_0

1. $\begin{cases} x = 2 - \operatorname{tg} t, \\ y = \sin^2 t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

2. $\begin{cases} x = 1 - 2t, \\ y = \operatorname{arctg} t, \end{cases}$ $t_0 = 1.$

3. $\begin{cases} x = 2t, \\ y = \ln \sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

4. $\begin{cases} x = \frac{1-t}{t}, \\ y = \ln 2t, \end{cases}$ $t_0 = 1.$

5. $\begin{cases} x = e^{2t-1}, \\ y = \frac{1+t}{t}, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{1}{2}.$

6. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = e^{-t}, \end{cases}$ $t_0 = 1.$

7. $\begin{cases} x = 1 - \cos^2 t, \\ y = \operatorname{tg} t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

8. $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = 1 - e^{-t}, \end{cases}$ $t_0 = 0.$

9. $\begin{cases} x = \frac{5}{2} \cos 2t, \\ y = \frac{5}{4} \sin 2t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{6}.$

10. $\begin{cases} x = \sin \frac{t}{2}, \\ y = 1 - 2^t, \end{cases}$ $t_0 = 0.$

11. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3, \end{cases}$ $t_0 = 2.$

12. $\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2, \end{cases}$ $t_0 = -3.$

13. $\begin{cases} x = a \cos^2 t, \\ y = b \sin^2 t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

14. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

15. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

16. $\begin{cases} x = t \ln t, \\ y = \frac{\ln t}{t}, \end{cases}$ $t_0 = 1.$

17. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

18. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}, \end{cases}$ $t_0 = 1.$

19. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = b \sin^3 t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

20. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}, \end{cases}$ $t_0 = 4.$

21. $\begin{cases} x = 1 - \ln t, \\ y = 3e^t, \end{cases}$ $t_0 = 1.$

22. $\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3}, \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \end{cases}$ $t_0 = 3.$

23. $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \arcsin \sqrt{1-t^2}, \end{cases}$ $t_0 = 0.$

24. $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = t + \sin t, \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{2}.$

25. $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$ $t_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

IV Sastādīt pieskares un normāles vienādojumu funkcijas grafikam norādītajā punktā

1. $f(x) = \operatorname{tg} 2x$ koordinātu sākumpunktā.

2. $f(x) = \arcsin \frac{x-1}{2}$ krustpunktā ar Ox asi.

3. $f(x) = \arccos 3x$ krustpunktā ar Oy asi.

4. $f(x) = \ln x$ krustpunktā ar Ox asi.

5. $f(x) = e^{1-x^2}$ punktos, kuros grafiku krusto taisne $y = 1$.

6. $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ punktā, kura abscisa $x = -2$.

7. $f(x) = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$ punktā, kura abscisa $x = 1$.

8. $f(x) = \sqrt{x}$ punktā, kura abscisa $x = 4$.

9. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ punktā, kura abscisa $x = -2$.

10. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ punktā, kura abscisa $x = 1$.

11. $f(x) = \frac{x^2-2x-3}{4}$ punktā, kura abscisa $x = 4$.

12. $f(x) = \sqrt{4x}$ punktā, kura abscisa $x = 1$.

13. $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ punktā, kura abscisa $x = 4$.

14. $f(x) = \frac{3x-2x^3}{3}$ punktā, kura abscisa $x = 1$.

15. $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{x^2}$ punktā, kura abscisa $x = 3$.

16. $f(x) = \frac{1}{3x+2}$ punktā, kura abscisa $x = 2$.

17. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ punktā, kura abscisa $x = -2$.

18. $f(x) = \frac{x^3+2}{x^3-2}$ punktā, kura abscisa $x = 2$.

19. $f(x) = 2x^2 + 3$ punktā, kura abscisa $x = -1$.

20. $f(x) = \frac{1}{x}$ punktā, kura abscisa $x = -\frac{1}{2}$.

21. $f(x) = \frac{8a3}{4a^2+x^2}$ punktā, kura abscisa $x = 2a$.

22. $f(x) = x - \frac{1}{x}$ krustpunktā ar Ox asi.

23. $f(x) = \frac{x^2}{10} + 3$ punktā, kura abscisa $x = 2$.

24. $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - 20$ punktā, kura abscisa $x = -8$.

25. $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ punktā, kura abscisa $x = 1$.

V Izmantojot funkcijas diferenciāli, izskaitļot

1. $\operatorname{tg} 46^\circ$.
2. $\sqrt[4]{254}$.
3. $\operatorname{tg} 44^\circ$.
4. $\arcsin 0,47$.
5. $\lg 0,9$.
6. $\operatorname{arctg} 0,98$.
7. $\cos 61^\circ$.
8. $e^{0,2}$.
9. $\sin 62^\circ$.
10. $\sqrt[4]{17}$.
11. $\sqrt{16,8}$.
12. $\sin 29^\circ$.
13. $\operatorname{arctg} 1,05$.
14. $f(x) = \sqrt{1+x}$ punktā $x = 0,2$.
15. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ punktā $x = 0,1$.
16. $f(x) = e^{1-x^2}$ punktā $x = 1,05$.
17. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ punktā $x = 1,21$.
18. $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ punktā $x = 1,97$.
19. $f(x) = x^4$ punktā $3,99$.
20. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ punktā $1,58$.
21. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ punktā $x = 1,03$.
22. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ punktā $x = 4,16$.
23. $f(x) = \sqrt{4x-3}$ punktā $x = 2,997$.
24. $f(x) = \sqrt{x^3}$ punktā $x = 0,98$.

25. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ punktā $8,36$.

VI Izmantojot Lopitāla kārtulu, aprēķināt robežu

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x\ln x)$.
4. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+2\ln x}{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-3)}{x^2+3x-10}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.
11. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$.
12. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos x}{\cos x-1}$.
14. $\lim\limits_{x\to 1}\big(\ln x\ln(x-1)\big)$.
15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.
16. $\lim\limits_{x\to a}\left(\arcsin\dfrac{x-a}{a}\operatorname{ctg}(x-a)\right)$.
17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\operatorname{ctg}^2 x\right)$.
18. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.
19. $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x\cdot\operatorname{ctg} x)$.
20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$.
21. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.
22. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$.
23. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.
24. $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.
25. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

VII Atrast funkcijas vislielāko un vismazāko vērtību slēgtā intervālā

1. $f(x)=x^4-8x^2-9$; $[-1;1]$.
2. $f(x)=x^3-1,5x^2-6x+1$; $[-2;0]$.
3. $f(x)=x^2-e^{x^2}$; $[0,2;0,5]$.
4. $f(x)=x^2+3\cos x$; $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5;$ $[-2; 2]$.

6. $f(x) = x + 2\sqrt{x};$ $[0; 4]$.

7. $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1;$ $[-1; 2]$.

8. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2;$ $[-1; 1]$.

9. $f(x) = \sqrt{100 - x^2};$ $[-6; 8]$.

10. $f(x) = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x - x^2};$ $[0; 1]$.

11. $f(x) = \dfrac{4}{x^2} - 8x - 15;$ $\left[-2; -\dfrac{1}{2}\right]$.

12. $f(x) = \dfrac{-x^2}{2} + \dfrac{8}{x} + 8;$ $[-4; -1]$.

13. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2};$ $[0; 3]$.

14. $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1 - x}{1 + x};$ $[0; 1]$.

15. $f(x) = -x^3 + x^2 + 3x;$ $[-2; 3]$.

16. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1;$ $[-1; 5]$.

17. $f(x) = 4 - x - \dfrac{4}{x^2};$ $[1; 4]$.

18. $f(x) = x^3 - 3x + 3;$ $[-1,5; 2,5]$.

19. $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9;$ $[0; 3]$.

20. $f(x) = x^2 + \dfrac{16}{x} - 16;$ $[1; 4]$.

21. $f(x) = -\dfrac{2(x^2 + 3)}{x^2 + 2x + 5};$ $[-5; 1]$.

22. $f(x) = \dfrac{10x + 10}{x^2 + 2x + 2};$ $[-1; 2]$.

23. $f(x) = 8x + \dfrac{4}{x^2} - 15;$ $\left[\dfrac{1}{2}; 2\right]$.

24. $f(x) = 2x^2 + \dfrac{108}{x} - 59;$ $[2; 4]$.

25. $f(x) = 2\sqrt{x} - x;$ $[0; 4]$.

VIII Atrisināt uzdevumu, izmantojot funkcijas atvasinājumu

1. No visiem taisnleņķa trijstūriem, kuriem hipotenūzas garums ir c, atrast tādu, kuram būtu vislielākais laukums.

2. Atrast skaitli, kurš saskaitīts ar savu kvadrātu, dod vismazāko summu.

3. Cilindrveidīgas vaļējas tvertnes tilpums ir V. Kādiem ir jābūt tās izmēriem, lai izgatavošanai patērētu vismazāk materiāla?

4. Ar 20 m garu stiepli jāierobežo sektorveida puķu dobe, lai tai būtu vislielākais laukums.

5. No visiem cilindriem, kas ievilkti dotajā konusā, atrast tādu, kuram būtu vislielākā virsma.

6. Ķermeņa kustības vienādojums $S = -t^3 + 9t^2 - 25t - 8$. Atrast šī ķermeņa vislielāko kustības ātrumu.

7. Kvadrātveida skārda loksnes malas garums ir a. Izgriežot šīs loksnes stūros kvadrātiņus un atlikušās malas atliecot, jāizgatavo vaļēja kārbiņa. Cik garai jābūt kārbiņas pamata malai, lai kārbiņas tilpums būtu vislielākais?

8. Parādīt, ka no visiem dotajā riņķī ievilktajiem vienādsānu trijstūriem vislielākais laukums ir vienādmalu trijstūrim.

9. Kādiem jābūt cilindra izmēriem, lai pie dotā tilpuma tam būtu vismazākā pilnā virsma?

10. Taisnstūra paralēlskaldņa vaļējas tvertnes tilpumam jābūt $13,5$ l. Kā jāizvēlas tvertnes lineārie izmēri, lai tās pagatavošanai tiktu izlietots vismazāk materiāla (tvertnes pamatā ir kvadrāts)?

11. Stiepli, kuras garums ir l, saliekt taisnstūra veidā tā, lai taisnstūra laukums būtu vislielākais.

12. No visiem taisnleņķa trijstūriem, kuriem perimetrs ir $2p$, atrast tādu, kuram būtu vislielākais laukums.

13. No riņķveida lapas izgriezt tādu sektoru, lai no tā izveidotai piltuvei būtu vislielākais tilpums.

14. Dotajā lodē ievilkt tādu cilindru, kuram būtu lielākā sānu virsma.

15. Uz līknes $y = \frac{1}{1+x^2}$ atrast punktu, kurā novilktā pieskare veidotu ar Ox asi vislielāko (pēc absolūtās vērtības) leņķi.

16. No visiem konusiem, kas apvilkti ap doto lodi, atrast to, kuram ir vislielākais tilpums.

17. Dotajā lodē ievilkt tādu taisnu riņķa konusu, lai tā sānu virsma būtu vislielākā.

18. Dotajā lodē ievilkt tādu taisnu riņķa konusu, lai tā tilpums būtu vislielākais.

19. Atrast tādu pozitīvu skaitli, lai starpība starp to un tā kubu būtu vislielākā.

20. Caur punktu leņķa iekšpusē novilkt tādu taisni, lai tā atšķeltu no leņķa trijstūri ar vismazāko laukumu.

21. Dotajā lodē ievilkt tādu cilindru, lai tā tilpums būtu vislielākais.

22. Skaitli 8 sadalīt tādos divos saskaitāmajos, lai to kubu summa būtu vismazākā.

23. Urbšanas tornis atrodas klajā laukā, un tā attālums līdz šosejas tuvākajam punktam ir 9 km. Šosejas malā 15 km attālumā no minētā punkta atrodas apdzīvota vieta, uz kuru no torņa jānosūta kurjers. Braucot ar velosipēdu pa lauku, kurjera ātrums ir 8 km/h. Noteikt šosejas punktu, uz kuru jābrauc kurjeram, lai visīsākā laikā sasniegtu apdzīvoto vietu (uzskatīt, ka šoseja neveido līkumus).

24. Vienādsānu trijstūra perimetrs ir $2p$. Kādam jābūt tā malām, lai ķermenim, kurš izveidojas šim trijstūrim rotējot ap pamata malu, tilpums būtu vislielākais?

25. Vienādsānu trijstūra perimetrs ir $2p$. Kādām jābūt tā malām, lai konusam, kurš veidojas, šim trijstūrim rotējot ap savu augstumu, tilpums būtu vislielākais?

IX Izpētīt funkcijas un attēlot tās grafiski

1. *a*) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x-1}}$, *b*) $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$.
2. *a*) $f(x) = x\sqrt{x+3}$, *b*) $f(x) = x^3 \ln^2 x$.
3. *a*) $f(x) = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$, *b*) $f(x) = x - \ln(x+1)$.
4. *a*) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}$, *b*) $f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x$.
5. *a*) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$, *b*) $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}$.

6. a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$, b) $f(x)=e^{\frac{x^2-1}{x^4}}$.

7. a) $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$, b) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

8. a) $f(x)=\dfrac{x^2}{4-x^2}$, b) $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

9. a) $f(x)=2x^2-\dfrac{3}{x^3}$, b) $f(x)=e^{2x-x^2}$.

10. a) $f(x)=\dfrac{1}{4}(x^2-3)^2$, b) $f(x)=\ln(x^2-4)$.

11. a) $f(x)=x^2(1+\sqrt{x})$, b) $f(x)=\ln(x^2+1)$.

12. a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, b) $f(x)=\ln(9-x^2)$.

13. a) $f(x)=\dfrac{4x}{4+x^2}$, b) $f(x)=xe^{-x^2}$.

14. a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, b) $f(x)=x^2-2\ln x$.

15. a) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, b) $f(x)=e^{\frac{1}{2-x}}$.

16. a) $f(x)=\dfrac{x^2-5}{x-3}$, b) $f(x)=(2+x^2)e^{-x^2}$.

17. a) $f(x)=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$, b) $f(x)=(x-1)e^{3x+1}$.

18. a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, b) $f(x)=-(x+1)e^{x+2}$.

19. a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$, b) $f(x)=2\ln x\dfrac{x+3}{x}-3$.

20. a) $f(x)=\dfrac{4x^3+5}{x}$, b) $f(x)=\dfrac{e^{2(x-1)}}{2(x-1)}$.

21. a) $f(x)=\dfrac{x^4}{x^3-1}$, b) $f(x)=(x-2)e^{3-x}$.

22. a) $f(x)=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$, b) $f(x)=(2x+5)e^{-2(x+2)}$.

23. a) $f(x)=2x+\dfrac{1}{x^2}$, b) $f(x)=\ln\dfrac{x}{x+2}+1$.

24. a) $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2}$, b) $f(x)=\dfrac{e^{x-3}}{x-3}$.

25. *a*) $f(x) = \dfrac{2}{x^2 + 2x}$, *b*) $f(x) = 2\ln\dfrac{x-1}{x} + 1$.

Literatūra

[1] Dz. Bože, L. Biezā, B. Siliņa, A. Strence. Uzdevumu krājums augstākajā matemātikā. - R.: Zvaigzne, 1986.

[2] E. Kronbergs, P. Rivža, Dz. Bože. Augstākā matemātika. 1. daļa. - R.: Zvaigzne, 1988.

[3] M. Grebenča, S. Novoselovs. Matemātiskās analīzes kurss. 1. daļa - R.: LVI, 1952.

[4] V. Gedroics. Viena argumenta funkcijas diferenciālrēķini - R.: LU, 1990.

[5] D. Kriķis, P. Zariņš, V. Ziobrovskis. Diferencēti uzdevumi matemātikā. 1. daļa - R.: Zvaigzne ABC, 1996.

[6] А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. - Минск, 1991.

SATURS

1. Viena argumenta funkciju diferenciālrēķini **3**

2. Funkciju atvasināšana **5**
- 2.1. Ar formulu uzdotas funkcijas atvasināšana 5
  - 2.1.1. Elementāro pamatfunkciju atvasinājumu tabula . . 5
  - 2.1.2. Diferencēšanas likumi 6
  - 2.1.3. Saliktas funkcijas atvasinājums 6
- 2.2. Apslēptā veidā uzdotas funkcijas atvasināšana 8

3. Funkcijas atvasinājuma ğeometriskā un fizikālā interpretācija. Funkcijas grafika pieskares un normāles vienādojumu sastādīšana **13**

4. Funkcijas diferenciālis un tā lietojumi tuvīnajos aprēķinos **17**

5. Funkcijas augstāku kārtu atvasinājumi un diferenciāļi **20**

6. Diferenciālrēķinu pamatteorēmas **24**
- 6.1. Fermā, Rolla, Lagranža un Koši teorēma 24
- 6.2. Lopitāla kārtula 26

7. Atvasinājuma pielietojumi funkciju pētīšanā **32**
- 7.1. Funkcijas monotonitātes intervāli 32
- 7.2. Funkcijas ekstrēmi 34
- 7.3. Funkcijas vislielākā un vismazākā vērtība 38
- 7.4. Funkcijas grafika ieliekums un izliekums, pārliekuma punkti 42
- 7.5. Funkcijas grafika asimptotas 45
- 7.6. Funkcijas pilnā pētīšana 50

8. Parametriski definētas funkcijas un to atvasināšana **55**

Pielikums **57**

Literatūra **70**