DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

Matemātiskās analīzes katedra

Vitolds Gedroics

VAIRĀKU ARGUMENTU FUNKCIJU DIFERENCIĀLRĒĶINI

2002. gada 22. jūnijs

2002

ANOTĀCIJA

Mācību līdzeklis ir turpinājums iepriekš izdotajiem autora mācību līdzekļiem. Mācību līdzeklī iekļauti teorētiski jautājumi kā arī uzdevumi. Katras tēmas beigās sniegti jautājumi zināšanu kontrolei un vingrinājumi vielas nostiprināšanai. Pierādījuma sākums un beigas atzīmēti atbilstoši ar simboliem ► un ◄.

I nodaļa

PAMATJĒDZIENI

1.1. Vairāku argumentu funkcijas jēdziens

Apskata kopu D, kuras elementi ir reālo skaitļu sakārtoti pāri (x, y). Katram kopas D elementam (x, y) tiek piekārtots noteikts reāls skaitlis. Šādos gadījumos saka, ka kopā D ir definēta divu argumentu x un y funkcija f. Funkcijas f vērtību punktā (x, y) apzīmē ar $f(x, y)$[1]. Kopu D sauc par **funkcijas f definīcijas apgabalu**, bet visu tās vērtību (ko tā iegūst kopā D) kopu sauc par **funkcijas f vērtību apgabalu**.

1.1. piezīme. Analoģiski rīkojoties, var apskatīt triju argumentu x, y un z funkciju $u = f(x, y, z)$. Šoreiz kopu D veido reālo skaitļu sakārtotas trijotnes (x, y, z). Visbeidzot var apskatīt n argumentu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ funkciju $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Visas apskatītās funkcijas sauc par **vairāku argumentu funkcijām**.

Ja apzīmē ar x, y, z taisnstūra paralēlskaldņa malu garumus, tad paralēlskaldņa tilpums $V = xyz$ ir triju argumentu funkcija.

Lai uzdotu funkciju, ir jānorāda kopa D un piekārtošanas likums saskaņā ar kuru katram šīs kopas elementam (punktam) tiek piekārtots noteikts reāls skaitlis.

Tāpat kā viena argumenta funkcijas, vairāku argumentu funkcijas visbiežāk uzdod analītiski, t.i., ar formulu. Ja funkcija ir uzdota analītiski, tad parasti tās definīcijas apgabalu īpaši nenorāda, bet ar D saprot pāru (x, y)

[1] Bieži ar $f(x, y)$ saprot pašu funkciju. Šoreiz (x, y) ir kopas D patvaļīgs elements.

(divu argumentu funkcijai), trijotņu (x, y, z) (triju argumentu funkcijai) utt. kopu, ar kuras elementiem formulai ir jēga.

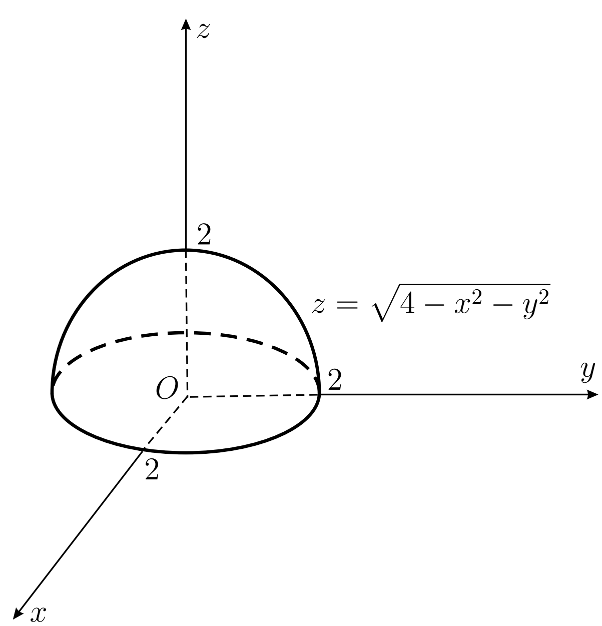
Piemēram, funkcijas $z = \frac{2x+y}{x-y}$ definīcijas apgabals ir divas pusplaknes, kas atrodas zem un virs taisnes $y = x$. Funkcijai $z = \sqrt[4]{1 - x^2 - y^2}$ par D ir riņķis $x^2 + y^2 \leq 1$. Visbeidzot funkcijai $u = \ln\left(x^2 + y^2 + z^2 - 4\right)$ par D ir kopa, kuras elementi (x, y, z) apmierina nevienādību $x^2 + y^2 + z^2 > 4$. Pēdējā gadījumā kopu D veido telpas tie punkti, kas atrodas ārpus sfēras ar centru punktā $O(0, 0, 0)$ un rādiusu 2.

1.2. piezīme. Divu argumentu funkcijas definīcijas apgabals ir plaknes kaut kāda apakškopa, bet triju argumentu funkcijas definīcijas apgabals ir telpas apakškopa.

1.2. Vairāku argumentu funkcijas ğeometriskā interpretācija

Ja divu argumentu funkcija ir uzdota ar formulu $z = f(x, y)$, tad par šīs **funkcijas grafiku** sauc trijotņu (x, y, z), kur $(x, y) \in D$ un $z = f(x, y)$, kopu. Šo kopu var attēlot koordinātu telpā.

Piemēram, funkcijas $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ grafiks ir sfēras $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ tā daļa, kas atrodas xOy plaknē un virs tās (1.1. zīm.).



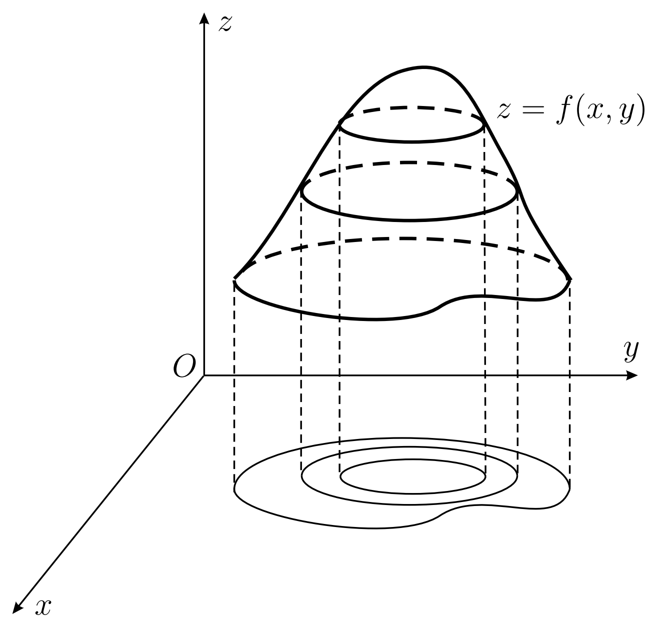
1.1. zīm.

1.3. piezīme. Triju, četru utt. argumentu funkciju grafikiem nevar sniegt uzskatāmu ğeometrisko interpretāciju.

Divu argumentu funkcijai $z = f(x, y)$ var sniegt vēl šādu ğeometrisko interpretāciju: aplikātai z piešķirot konstantas vērtības $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, xOy plaknē iegūst līnijas

$$f(x, y) = c_1, f(x, y) = c_2, \ldots, f(x, y) = c_n, \ldots .$$

Šīs līnijas sauc par **funkcijas** $z = f(x, y)$ **līmeņlīnijām**. Ģeometriski šīs līmeņlīnijas var iegūt, šķeļot virsmu $z = f(x, y)$ ar plaknei xOy paralēlām plaknēm $z = c_1$, $z = c_2$, ..., $z = c_n$, ... un pēc tam šķēluma līnijas projicējot xOy plaknē (1.2. zīm.).



1.2. zīm.

1.4. piezīme. Lai sniegtu triju argumentu funkcijām ğeometrisko interpretāciju, izmanto tā saucamās **līmeņvirsmas**[2].

1.1. piemērs. Konstruēt līmeņlīnijas funkcijai $z = x^2 + y^2 - 1$.

Izvēlas $c_1 = -1$; $x^2 + y^2 - 1 = -1$, $x^2 + y^2 = 0$. Iegūst punktu $O(0, 0)$.

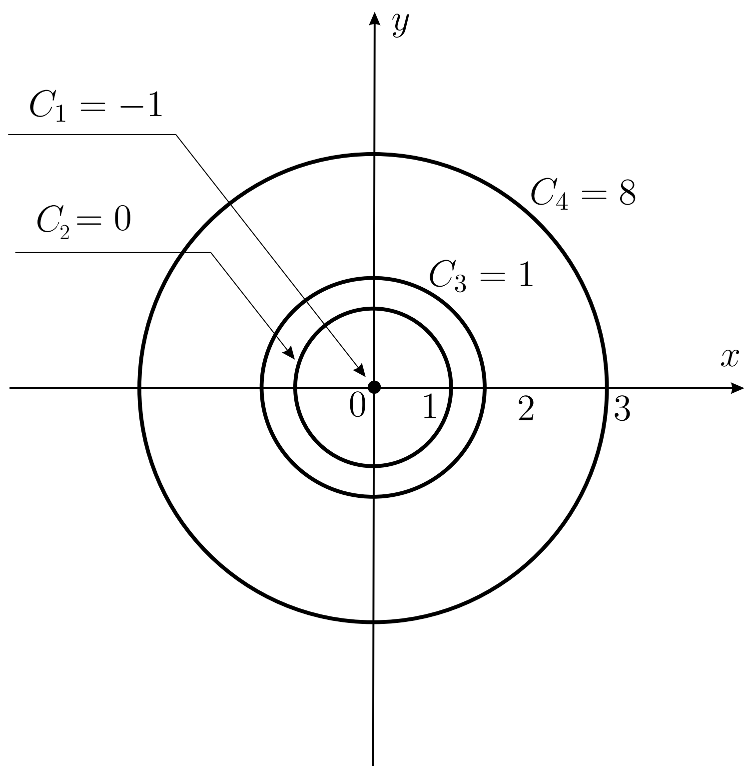
Izvēlas $c_2 = 0$; $x^2 + y^2 - 1 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$. Iegūst vienības riņķa līniju.

[2]Definē analoğiski kā līmeņlīnijas divu argumentu funkcijai $z = f(x, y)$. Funkcijai $u = f(x, y, z)$ līmeņvirsmu vienādojums ir $f(x, y, z) = c$.

Izvēlas $c_3 = 1$; $x^2 + y^2 - 1 = 1$, $x^2 + y^2 = 2$. Iegūst riņķa līniju ar rādiusu $\sqrt{2}$.

Izvēlas $c_4 = 8$; $x^2 + y^2 = 9$. Iegūst riņķa līniju ar rādiusu 3 utt.

Līmeņlīnijas attēlotas 1.3. zīm., bet funkcijas $z = x^2 + y^2 - 1$ grafiks - 1.4. zīm. Koordinātu telpā iegūst virsmu, kuru sauc par rotācijas paraboloīdu.

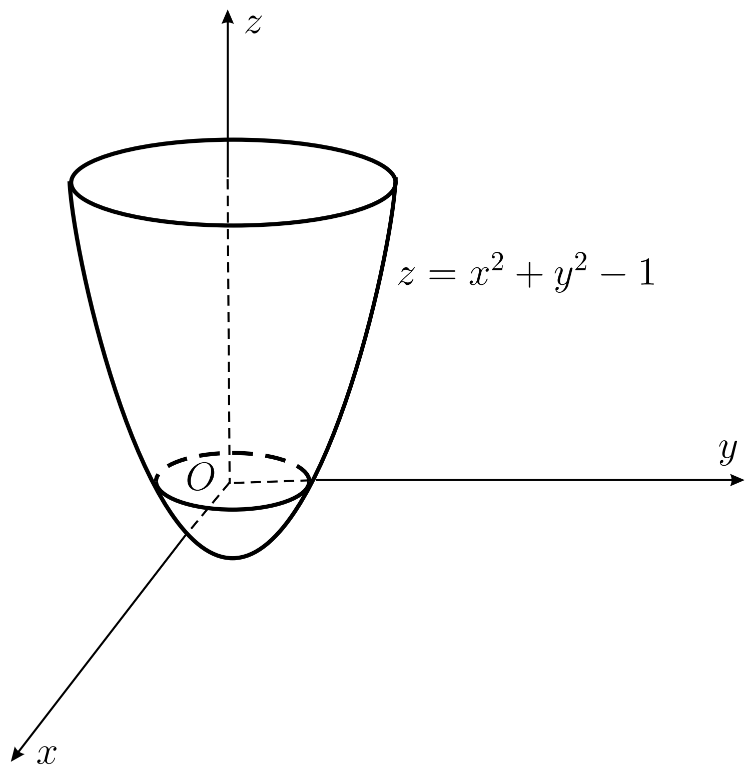


1.3. zīm.

1.1. definīcija. Kopā D definētu funkciju $z = f(x, y)$ sauc par **ierobežotu no augšas (no apakšas)**, ja no augšas (no apakšas) ir ierobežots tās vērtību apgabals, t.i., ja eksistē tāds reāls skaitlis M (attiecīgi m), ka visiem $(x; y) \in D$ izpildās nevienādība $f(x, y) \leq M$ (attiecīgi $f(x, y) \geq m$). Funkciju sauc par **ierobežotu**, ja tā ir ierobežota gan no augšas, gan no apakšas.

Piemēram, funkcija $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ir ierobežota, jo visiem (x, y) no tās definīcijas apgabala ir spēkā nevienādība $0 \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq 2$. (Skat. 1.1. zīm.).

Funkcija $z = x^2 + y^2 - 1$ ir ierobežota no apakšas, bet nav ierobežota no augšas. (Skat. 1.4. zīm.).



1.4. zīm.

Jautājumi

1. Definēt divu (triju) argumentu funkciju, tās definīcijas un vērtību apgabalu.
2. Paskaidrot, ko nozīmē analītiski uzdot vairāku argumentu funkciju.
3. Definēt divu argumentu funkcijas grafiku.
4. Definēt līmeņlīnijas un līmeņvirsmas.
5. Definēt ierobežotu no augšas, ierobežotu no apakšas un ierobežotu funkciju.

Vingrinājumi

1. Izteikt konusa tilpumu V kā veidules x un pamata rādiusa y funkciju.
2. $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2xy}$. Atrast $f(2, -3)$, $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$.
3. $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{2xy}$. Atrast $f(y, x)$, $f(-x, -y)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, $\frac{1}{f(x,y)}$.
4. Atrast funkcijas $f(x, y) = 1 + x - y$ vērtības parabolas $y = x^2$ punktos un konstruēt funkcijas $F(x) = f\left(x, x^2\right)$ grafiku.

5. Atrast $f(x)$, ja $f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}$ $(x, y > 0)$.
6. Atrast funkcijas $z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}$ definīcijas apgabalu un attēlot to koordinātu plaknē.
7. Atrast funkcijas $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2} + \arcsin z$ definīcijas apgabalu un sniegt tam ğeometrisko interpretāciju.
8. Konstruēt līmeņlīnijas funkcijai $z = x^2y$ un attēlot tās koordinātu plaknē.
9. Konstruēt līmeņlīnijas funkcijai $z = 4x^2+9y^2$ un attēlot tās koordinātu plaknē. Sniegt ğeometrisko interpretāciju dotās funkcijas grafikam.
10. Konstruēt līmeņvirsmas funkcijai $u = x^2 + y^2 + z^2$ un sniegt tām ğeometrisko interpretāciju.
11. Noskaidrot, kuras no funkcijām ierobežotas no augšas, ierobežotas no apakšas, ierobežotas:
    (a) $z = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$;
    (b) $z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}$;
    (c) $z = x + \arccos y$;
    (d) $z = \arcsin\frac{y}{x}$;
    (e) $u = \sqrt{1 - 4x^2 - 9y^2 - z^2}$.

II nodaļa

VAIRĀKU ARGUMENTU FUNKCIJAS ROBEŽA UN NEPĀRTRAUKTĪBA

2.1. Vairāku argumentu funkcijas robeža

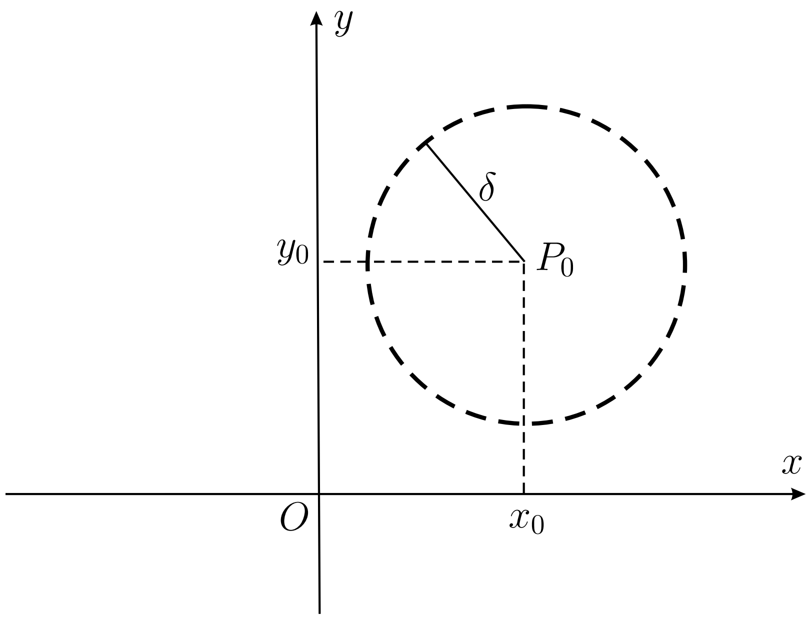
Vairāku argumentu funkciju $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ bieži pieraksta kā $u = f(P)$, kur $P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Šāds funkcijas pieraksts ir izdevīgs, definējot funkcijas $u = f(P)$ robežu punktā $P_0 = P_0\big(\mathring{x}_1, \mathring{x}_2, \ldots, \mathring{x}_n\big)$. (Definīcija atgādina viena argumenta funkcijas galīgās robežas definīciju punktā a, kur a - reāls skaitlis). Attālumu starp punktiem P un P_0 apzīmē ar $\rho(P, P_0)$[1]. Definējot funkcijas robežu punktā P_0, vienojas uzskatīt, ka funkcija ir definēta šī punkta kaut kādā apkārtnē, izņemot varbūt pašu punktu P_0.

2.1. definīcija. Skaitli b sauc par funkcijas $u = f(P)$ **robežu** punktā P_0, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$ (atkarīgs no ε), ka visiem P, kuriem $0 < \rho\big(P, P_0\big) < \delta$, izpildās nevienādība $|f(P) - b| < \varepsilon$. Pieraksta:

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = b \quad \text{jeb} \quad \lim_{\substack{x_1 \to \mathring{x}_1 \\ x_2 \to \mathring{x}_2 \\ \cdots \\ x_n \to \mathring{x}_n}} f\big(x_1, x_2, \ldots, x_n\big) = b.$$

[1]Attālumu starp punktiem $P, P_0 \in \mathbb{R}^n$ definē šādi:
$\rho(P, P_0) = \sqrt{\big(x_1 - \mathring{x}_1\big)^2 + \big(x_2 - \mathring{x}_2\big)^2 + \cdots + \big(x_n - \mathring{x}_n\big)^2}$.

Ja par taisnes punkta a δ - apkārtni sauc vaļēju intervālu $(a-\delta, a+\delta)$, tad par plaknes punkta $P_0\big(x_0, y_0\big)$ δ - apkārtni sauc vaļēju riņķi (bez riņķa līnijas punktiem) ar centru punktā $P_0\big(x_0, y_0\big)$ un rādiusu δ (2.1. zīm.). Analoģiski par telpas punkta $P_0\big(x_0, y_0, z_0\big)$ δ - apkārtni sauc vaļēju lodi (bez sfēras punktiem) ar centru šajā punktā un rādiusu δ (2.2. zīm.).



2.1. zīm.

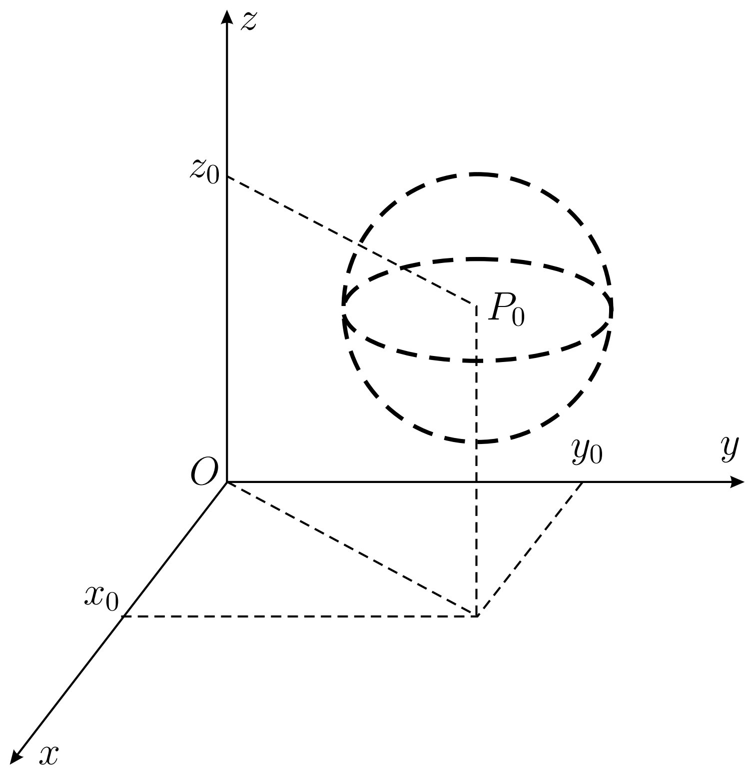
Ja no punkta P_0 apkārtnes ir izņemts punkts P_0, tad šādu kopu sauc par punkta P_0 **pārdurto apkārtni**. Punkta P_0 δ - apkārtni var uzdot ar nevienādību $\rho\big(P, P_0\big) < \delta$, bet šī punkta pārdurto δ - apkārtni var uzdot ar divkāršu nevienādību $0 < \rho\big(P, P_0\big) < \delta$.

Izmantojot punkta P_0 δ - apkārtni, 2.1. definīciju var formulēt šādi.

2.2. definīcija. Skaitli b sauc par funkcijas $u = f(P)$ **robežu** punktā P_0, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda punkta P_0 pārdurtā δ - apkārtne, ka visiem P no šīs apkārtnes izpildās nevienādība $|f(P) - b| < \varepsilon$.

2.1. piezīme.

1. No 2.2. definīcijas seko, ka $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} C = C$ (robeža no konstantes ir pati konstante), $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} x = x_0$ un $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} y = y_0$.
2. Tā kā vairāku argumentu funkcijas robežas definīcija ir analoģiska viena argumenta funkcijas galīgās robežas definīcijai, tad ir spēkā teorēmas, kas analoģiskas teorēmām par viena argumenta funkciju galīgām robežām. Pierādījumi arī ir analoģiski.



2.2. zīm.

2.1. teorēma. *(Robežas vienīgums).*

Ja funkcijai $f(P)$ punktā P_0 eksistē robeža, tad vienīgā veidā.

2.2. teorēma. *Ja funkcijai $f(P)$ punktā P_0 eksistē robeža, tad funkcija ir ierobežota šī punkta kaut kādā apkārtnē.*

2.3. teorēma. *(Par robežpāreju nevienādībās).*

Ja eksistē $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = b$, $\lim\limits_{P \to P_0} g(P) = c$ un punkta P_0 kaut kādā pārdurtajā apkārtnē izpildās nevienādība $f(P) < g(P)$, tad $b \leq c$.

Sekas. Ja eksistē $\lim\limits_{P \to P_0} f(P)$ un punktā P_0 kaut kādā pārdurtajā apkārtnē $f(P) > 0$, tad $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) \geq 0$.

2.4. teorēma. *(Mainīgā starplieluma robeža).*

Ja eksistē $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = \lim\limits_{P \to P_0} g(P) = b$ un punkta P_0 kaut kādā pārdurtajā apkārtnē izpildās nevienādība $f(P) \leq h(P) \leq g(P)$, tad eksistē arī $\lim\limits_{P \to P_0} h(P)$ un tā ir vienāda ar b.

2.5. teorēma. *(Aritmētiskās darbības ar robežām).*

Ja eksistē $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = b$ *un* $\lim\limits_{P\to P_0} g(P) = c$*, tad eksistē arī robežas šo funkciju summai, starpībai, reizinājumam un dalījumam (dalījuma gadījumā* $c \neq 0$*), pie tam*

$$\lim_{P\to P_0}(f(P) \pm g(P)) = b \pm c, \ \lim_{P\to P_0}(f(P)\cdot g(P)) = bc, \ \lim_{P\to P_0}\frac{f(P)}{g(P)} = \frac{b}{c}.$$

2.3. definīcija. Funkciju $u = f(P)$ sauc par **bezgalīgi mazu**, kad $P \to P_0$, ja $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = 0$.

2.1. piemērs. Izskaitļot

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x^2+y^3}{2x-3y}$;
2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1+2xy)}{\sin 3xy}$.

1. Izmanto 2.5. teorēmu, robežu no konstantes un to, ka $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} x = 2$, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} y = 1$.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \frac{x^2+y^3}{2x-3y} = \frac{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(x^2+y^3)}{\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(2x-3y)} = \frac{\left(\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} x\right)^2 + \left(\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} y\right)^3}{2\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} x - 3\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} y} =$$

$$= \frac{2^2+1^3}{2\cdot 2 - 3\cdot 1} = 5.$$

2. Apzīmē $t = xy$. Ja $x \to 0$ un $y \to 0$, tad $t \to 0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\ln(1+2xy)}{\sin 3xy} = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+2t)}{\sin 3t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\ln(1+2t)}{2t}\cdot 2t}{\frac{\sin 3t}{3t}\cdot 3t} =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(1+2t)}{2t}}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 3t}{3t}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1} = \frac{2}{3}.$$

2.2. piezīme. Vairāku argumentu funkcijas robeža (protams, ja tā eksistē) nav atkarīga no virziena, kādā punkts $P \to P_0$ (nav svarīga arī līknes, pa kuru $P \to P_0$, forma). Ja punktam P tiecoties uz punktu P_0 no dažādām pusēm, funkcijas $f(P)$ vērtības tiecas uz dažādiem skaitļiem, tad robeža punktā P_0 neeksistē.

2.2. piemērs. Parādīt, ka neeksistē $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Lai punkts $P(x,y)$ tuvojas uz $O(0,0)$ pa taisni $y = kx$. Ja $y = kx$, tad $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$. Acīmredzami šī vērtība $\frac{k}{1+k^2}$ ir atkarīga no taisnes $y = kx$ virziena koeficienta k. Tādējādi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{x^2+y^2}$ neeksistē.

2.3. piemērs. Izskaitļot $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

Apzīmē $x = \rho\cos\varphi$ un $y = \rho\sin\varphi$, kur $\rho > 0$. Tā kā $x^2 + y^2 = \rho^2$, tad $\rho \to 0$, kad $x \to 0$ un $y \to 0$. Neatkarīgi no leņķa $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ izvēles

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho^2\sin^2\varphi}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^4\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi}{\rho^2} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \rho^2\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi = 0.$$

Tādējādi $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = 0$. (Šoreiz 2.5. teorēmu pielietot nedrīkst, jo $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2+y^2\right) = 0$).

2.3. piezīme. Paņēmienu, kurš izmantots 2.3. piemērā, bieži izmanto divu argumentu funkciju robežu izskaitļošanai.

2.2. Punktā nepārtraukta funkcija

Uzskata, ka vairāku argumentu funkcija $f(P)$ ir definēta punkta P_0 kaut kādā apkārtnē, ieskaitot arī pašu punktu P_0.

2.4. definīcija. Funkciju $f(P)$ sauc par **nepārtrauktu punktā** P_0, ja $\lim\limits_{P\to P_0} f(P) = f(P_0)$.

Izmantojot funkcijas robežas definīcijas (2.1. un 2.2. definīcija), var iegūt vēl divas punktā nepārtrauktas funkcijas definīcijas.

2.5. definīcija. Funkciju $f(P)$ sauc par **nepārtrauktu punktā** P_0, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem P, kuriem $\rho\big(P, P_0\big) < \delta$, izpildās nevienādība $\big|f(P) - f\big(P_0\big)\big| < \varepsilon$.

2.6. definīcija. Funkciju $f(P)$ sauc par **nepārtrauktu punktā** P_0, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem P, kas pieder punkta P_0 δ - apkārtnei, ir spēkā nevienādība $\big|f(P) - f\big(P_0\big)\big| < \varepsilon$.

Tāpat kā viena argumenta funkcijām, arī vairāku argumentu nepārtrauktām funkcijām ir spēkā šādas teorēmas (pierādījumi arī ir analoģiski).

2.6. teorēma. *Ja funkcija ir nepārtraukta punktā, tad tā ir ierobežota šī punkta kaut kādā apkārtnē.*

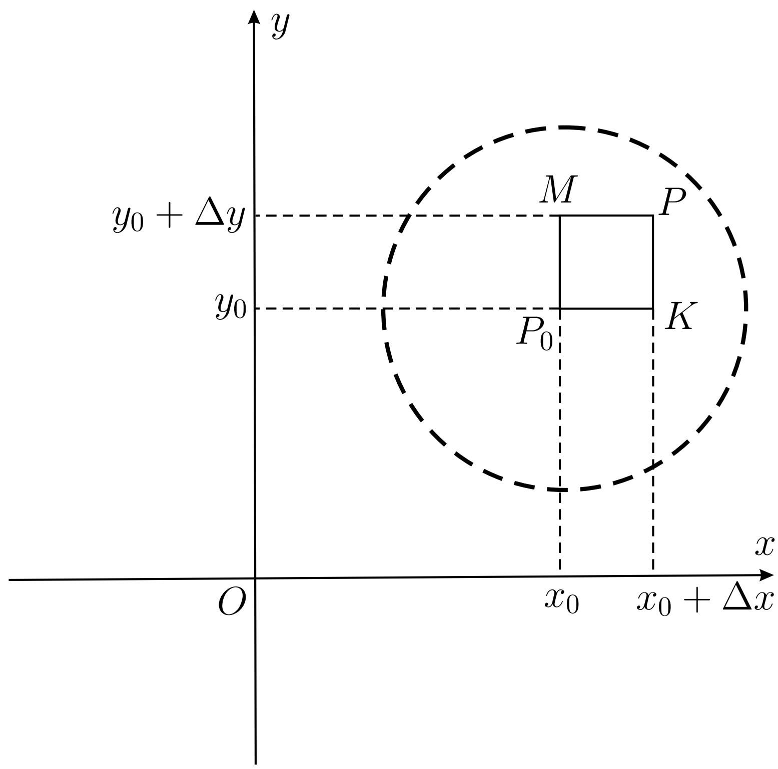
2.7. teorēma. *Ja funkcija $f(P)$ ir nepārtraukta punktā P_0 un $f\big(P_0\big) > 0$ $\big(f\big(P_0\big) < 0\big)$, tad eksistē šī punkta tāda apkārtne, kurā $f(P) > 0$ $(f(P) < 0)$.*

2.8. teorēma. *Ja funkcijas $f(P)$, $g(P)$ ir nepārtrauktas punktā P_0, tad šo funkciju summa, starpība, reizinājums un dalījums ir nepārtrauktas šajā punktā funkcijas.*

Lai izveidotu vēl vienu punktā nepārtrauktas funkcijas definīciju, izmanto funkcijas pieaugumus.

Apskata, piemēram, divu argumentu funkciju $z = f(x, y)$, kas definēta punkta $P_0\big(x_0, y_0\big)$ kaut kādā apkārtnē. Argumentiem x un y izvēlas patvaļīgus pieaugumus Δx un Δy, bet tādus, lai punkts $P\big(x_0{+}\Delta x, y_0{+}\Delta y\big)$ arī piederētu šai apkārtnei (2.3. zīm.).

Starpību $f\big(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\big) - f\big(x_0, y_0\big)$ sauc par **funkcijas** $f(x, y)$ **pilno pieaugumu** punktā $P_0\big(x_0, y_0\big)$, kas atbilst argumentu pieaugumiem



2.3. zīm.

Δx un Δy, un apzīmē ar $\Delta f\big(x_0, y_0\big)$ jeb $\Delta f\big(P_0\big)$ (īsāk Δz). Starpību $f\big(x_0+\Delta x, y_0\big) - f\big(x_0, y_0\big)$ sauc par funkcijas $f(x, y)$ **parciālo pieaugumu** punktā $P_0\big(x_0, y_0\big)$ **pēc x**, bet $f\big(x_0, y_0 + \Delta y\big) - f\big(x_0, y_0\big)$ - funkcijas $f(x, y)$ **parciālo pieaugumu** punktā $P_0\big(x_0, y_0\big)$ **pēc y**. Šos parciālos pieaugumus apzīmē atbilstoši ar $\Delta_x f\big(x_0, y_0\big)$ un $\Delta_y f\big(x_0, y_0\big)$ (īsāk $\Delta_x z$, $\Delta_y z$).

Tādējādi (skat. 2.3. zīm.)

$$\begin{aligned}\Delta z &= f\big(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y\big) - f\big(x_0, y_0\big) = f(P) - f\big(P_0\big);\\ \Delta_x z &= f\big(x_0 + \Delta x, y_0\big) - f\big(x_0, y_0\big) = f(K) - f\big(P_0\big);\\ \Delta_y z &= f\big(x_0, y_0 + \Delta y\big) - f\big(x_0, y_0\big) = f(M) - f\big(P_0\big).\end{aligned}$$

2.4. piezīme. Analoģiski definē triju argumentu funkcijas $u = f(x, y, z)$ pilno pieaugumu Δu un parciālos pieaugumus $\Delta_x u$, $\Delta_y u$ un $\Delta_z u$.

2.7. definīcija. Divu argumentu funkciju $z = f(P)$ sauc par **nepārtrauktu punktā** P_0, ja funkcijas pilnais pieaugums Δz punktā P_0 ir bezgalīgi maza funkcija, kad $P \to P_0$ ($\Delta x \to 0$ un $\Delta y \to 0$), t.i., $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0\\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

2.5. piezīme. Ja $\Delta z \to 0$, tad acīmredzami, $\Delta_x z \to 0$. Apgrieztais apgalvojums nav spēkā (skat. 12. vingr.).

2.3. Saliktas funkcijas nepārtrauktība

Apskata kopā E definētu funkciju $z = f(u, v)$, kur $u = u(x, y)$ un $v = v(x, y)$ ir kopā D definētas funkcijas. Ja visiem $(x, y) \in D$ vērtības $u = u(x, y)$ un $v = v(x, y)$ ir tādas, ka $(u, v) \in E$, tad saka, ka kopā D ir definēta **salikta funkcija** $z = f(u, v)$, kur $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Šo salikto funkciju var uzrakstīt $z = f\big(u(x, y), v(x, y)\big)$.

Piemēram, $z = \sin^2(x+y)+\cos^3(x-y)$ var uzskatīt par saliktu funkciju, jo to var uzrakstīt kā $z = u^2 + v^3$, kur $u = \sin(x + y)$, $v = \cos(x - y)$. Funkcija ir definēta visā koordinātu plaknē.

2.6. piezīme.

1. Argumentus x un y sauc par **neatkarīgiem argumentiem**, bet u un v - par **starpargumentiem**.
2. Starpargumentu un neatkarīgo argumentu skaits var būt patvaļīgs un dažāds.

Piemēram, $w = f(u, v)$, kur $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, t)$ ir salikta funkcija. Starpargumenti ir u un v, bet neatkarīgie mainīgie - x, y, z, t.

2.9. teorēma. (*Par saliktas funkcijas nepārtrauktību*).

Ja kopā D ir definēta salikta funkcija $z = f(u, v)$, kur $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, funkcijas $u(x, y)$, $v(x, y)$ - nepārtrauktas punktā $\big(x_0, y_0\big) \in D$ un $f(u, v)$ - nepārtraukta atbilstošajā punktā $\big(u_0, v_0\big)$, kur $u_0 = u\big(x_0, y_0\big)$, $v_0 = v\big(x_0, y_0\big)$, tad salikta funkcija

$$z = f\big(u(x, y), v(x, y)\big)$$

ir nepārtraukta punktā $\big(x_0, y_0\big)$.

► Apzīmē ar $\rho\big(S, S_0\big)$ attālumu starp punktiem $S(u, v)$ un $S_0\big(u_0, v_0\big)$. Ir zināms, ka $\rho\big(S, S_0\big) = \sqrt{\big(u - u_0\big)^2 + \big(v - v_0\big)^2}$. Tā kā funkcija $f(u, v)$ ir nepārtraukta punktā $\big(u_0, v_0\big)$, tad saskaņā ar definīciju jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\lambda > 0$, ka no nevienādības $\rho\big(S, S_0\big) < \lambda$ seko nevienādība $|f(S) - f(S_0)| < \varepsilon$. Tā kā funkcijas $u(x, y)$ un $v(x, y)$ ir nepārtrauktas punktā $\big(x_0, y_0\big)$, tad dotajam λ eksistē tādi δ_1 un δ_2 pozitīvi, ka no nevienādībām $\rho\big(P, P_0\big) < \delta_1$ un $\rho\big(P, P_0\big) < \delta_2$ seko atbilstošas nevienādības

$$\big|u(P) - u(P_0)\big| < \frac{\lambda}{2};$$
$$\big|v(P) - v(P_0)\big| < \frac{\lambda}{2}.$$

(Punkta P koordinātas ir x un y, bet P_0 koordinātas ir x_0 un y_0).

Apzīmē ar $\delta = \min\big(\delta_1; \delta_2\big)$. Tagad no nevienādības $\rho\big(P, P_0\big) < \delta$ seko divas nevienādības $\big|u(P) - u(P_0)\big| < \frac{\lambda}{2}$ un $\big|v(P) - v(P_0)\big| < \frac{\lambda}{2}$.

Izmantojot šīs nevienādības, var iegūt, ka attālums

$$\rho\big(S, S_0\big) = \sqrt{\big(u(P) - u(P_0)\big)^2 + \big(v(P) - v(P_0)\big)^2} \leq$$
$$\leq \big|u(P) - u(P_0)\big| + \big|v(P) - v(P_0)\big| < \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{2} = \lambda.$$

Tādējādi no nevienādības $\rho(P, P_0) < \delta$ seko nevienādība $\rho(S, S_0) < \lambda$, bet no tās seko nevienādība $\big|f(S) - f(S_0)\big| < \varepsilon$ jeb

$$\Big|f\big(u(P), v(P)\big) - f\big(u\big(P_0\big), v\big(P_0\big)\big)\Big| < \varepsilon.$$

Šī nevienādība norāda, ka salikta funkcija $z = f\big(u(x, y), v(x, y)\big)$ ir nepārtraukta punktā $P_0\big(x_0, y_0\big)$. ◀

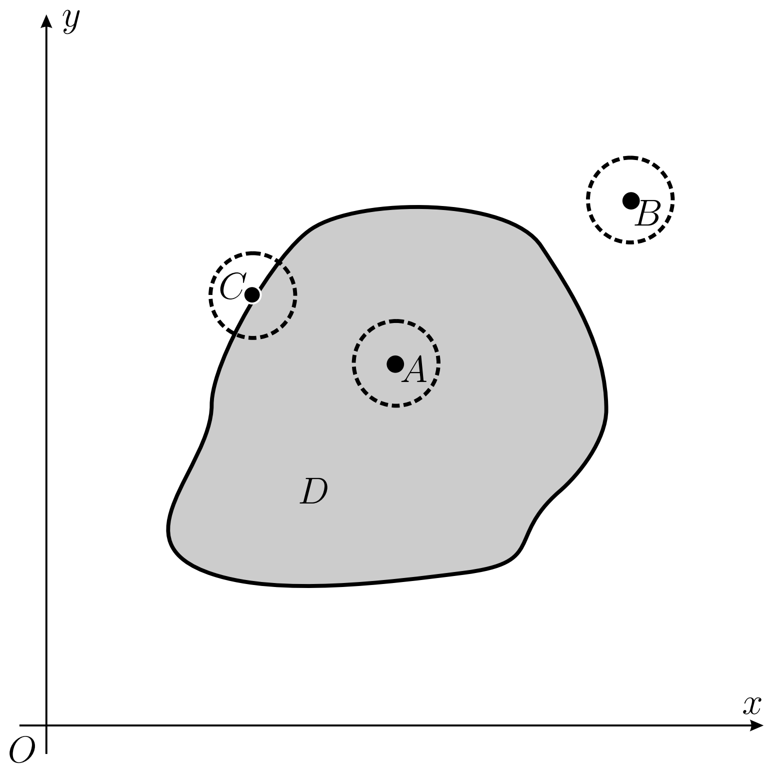
2.7. piezīme. Teorēmā tika apskatīta situācija, kad ir divi neatkarīgie mainīgie un divi starpargumenti, jo saliktas funkcijas vispārīgo gadījumu apskatīt praktiski nav iespējams.

2.4. Slēgtas un vaļējas kopas. Kopā nepārtrauktas funkcijas

2.8. definīcija. Punktu P_0 sauc par **kopas D iekšējo punktu**, ja eksistē šī punkta tāda apkārtne, kas iekļaujas kopā D.

2.9. definīcija. Punktu P_0 sauc par **kopas D ārējo punktu**, ja eksistē šī punkta tāda apkārtne, kas nesatur nevienu kopas D punktu.

2.10. definīcija. Punktu P_0 sauc par **kopas D robežas punktu**, ja šī punkta jebkura apkārtne satur gan kopai D piederošos, gan kopai D nepiederošos punktus.



2.4. zīm.

2.8. piezīme.

1. 2.4. zīmējumā punkts A ir kopas D iekšējais, B - kopas D ārējais, bet C - kopas D robežas punkts.
2. Acīmredzami katrs kopas iekšējais punkts pieder šai kopai, bet kopas robežas punkts var gan piederēt, gan nepiederēt šai kopai (skat. 2.4., 2.5. zīm.).

Piemēram, kopu D veido koordinātu plaknes tie punkti, kuri apmierina nevienādību $x^2+y^2 \leq 4$. Šīs kopas robežas punkti ir riņķa līnijas $x^2+y^2 = 4$ punkti, kas pieder D.

2.11. definīcija. Kopu D sauc par **slēgtu kopu**, ja tā satur visus savus robežas punktus.

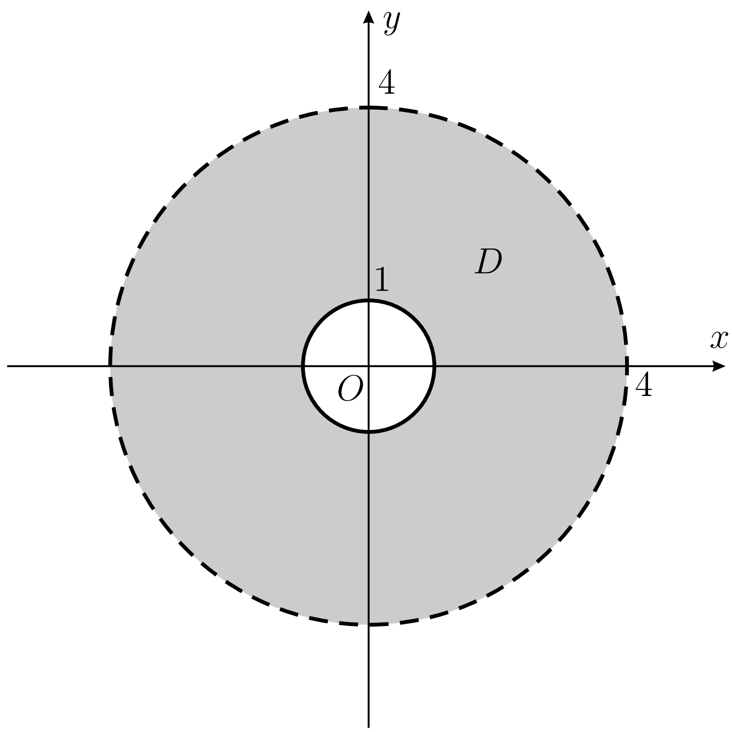
2.9. piezīme. Kopa D, kas apskatīta iepriekšējā piemērā, ir slēgta kopa.

2.12. definīcija. Kopu D sauc par **vaļēju kopu**, ja tā nesatur nevienu savu robežas punktu.

2.10. piezīme. Vaļēja kopa sastāv tikai no saviem iekšējiem punktiem.

Piemēram, kopa D, kuru veido koordinātu plaknes tie punkti, kuri apmierina nevienādību $x^2 + y^2 < 4$, ir vaļēja kopa.

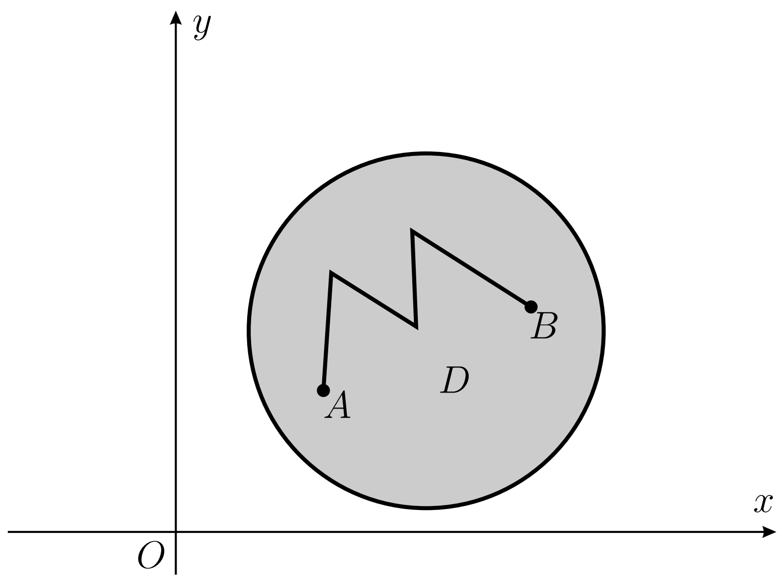
2.11. piezīme. Eksistē tādas kopas, kuras nav ne vaļējas, ne slēgtas kopas.



2.5. zīm.

Piemēram, kopa D, kuru veido koordinātu plaknes tie punkti, kas apmierina nevienādību $1 \leq x^2 + y^2 < 16$ (2.5. zīm.) nav ne vaļēja, ne slēgta kopa.

2.13. definīcija. Kopu D sauc par **sakarīgu kopu**, ja šīs kopas jebkurus divus punktus var savienot ar lauztu līniju (šai lauztai līnijai posmu skaits ir galīgs), kas iekļaujas kopā D.



2.6. zīm.

2.12. piezīme. 2.6. un 2.7. zīmējumā ir attēlotas sakarīgas kopas koordinātu plaknē.

2.14. definīcija. Kopu D sauc par **ierobežotu kopu**, ja eksistē tāds skaitlis $M > 0$, ka visiem $P \in D$ izpildās nevienādība $\rho\big(P, P_0\big) < M$, kur P_0 - kopas D fiksēts punkts.

2.13. piezīme. Ja ierobežota kopa D atrodas plaknē (telpā), tad, acīmredzami, eksistē tāds vaļējs riņķis (vaļēja lode) ar centru punktā P_0 un rādiusu M, kas satur kopu D.

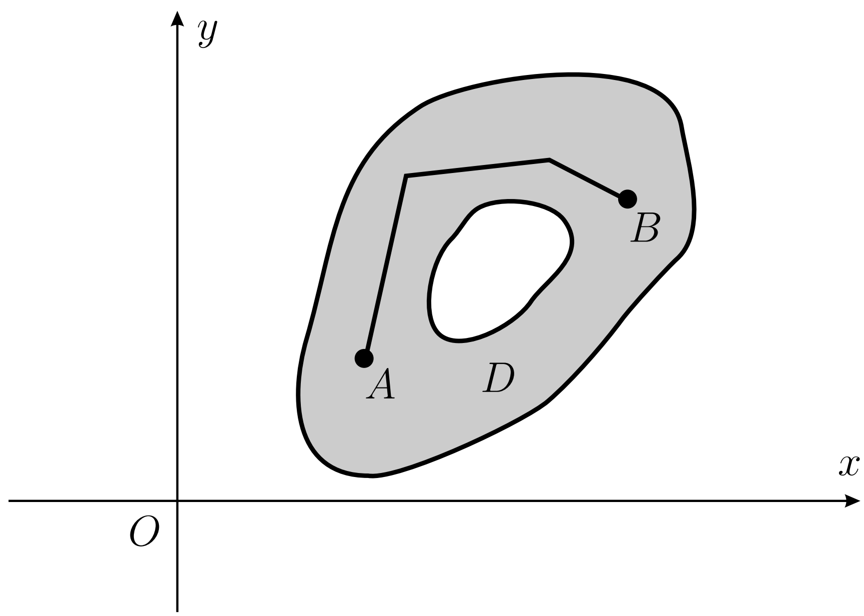
Definējot punktā P_0 nepārtrauktu funkciju, uzskatīja, ka P_0 ir funkcijas definīcijas apgabala iekšējais punkts.

Atliek definēt punktā P_0 nepārtrauktu funkciju, ja P_0 ir funkcijas definīcijas apgabala D robežas punkts, pie tam $P_0 \in D$.

2.15. definīcija. Funkciju $f(P)$ sauc par **nepārtrauktu tās definīcijas apgabala D robežas punktā** $P_0 \in D$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $P \in D$, kuriem izpildās nevienādība $\rho\big(P, P_0\big) < \delta$, ir spēkā nevienādība $\big|f(P) - f(P_0)\big| < \varepsilon$.

2.16. definīcija. Funkciju $f(P)$, kas nepārtraukta kopas katrā punktā, sauc par **kopā D nepārtrauktu funkciju**.

Slēgtā un ierobežotā kopā nepārtrauktu vairāku argumentu funkciju īpašības ir analogas slēgtā intervālā nepārtrauktu viena argumenta funkciju īpašībām.



2.7. zīm.

1. īpašība. *(Veierštrāsa 1. teorēma).*

Ja funkcija $f(P)$ ir nepārtraukta slēgtā un ierobežotā kopā D, tad tā ir ierobežota šajā kopā.

2. īpašība. *(Veierštrāsa 2. teorēma).*

Ja funkcija $f(P)$ ir nepārtraukta slēgtā un ierobežotā kopā D, tad tā sasniedz šajā kopā savu vismazāko un vislielāko vērtību.

Ja D - sakarīga kopa un $f(P)$ - nepārtraukta funkcija šajā kopā, tad ir spēkā Bolcano teorēma par nepārtrauktas funkcijas starpvērtībām.

2.10. teorēma. *(Bolcano teorēma).*

Ja sakarīgā kopā D nepārtraukta funkcija $f(P)$ šīs kopas divos punktos A un B pieņem dažādas vērtības, $f(A) \neq f(B)$, tad kāds arī nebūtu skaitlis μ starp $f(A)$ un $f(B)$ eksistē $C \in D$, ka $f(C) = \mu$.

Sekas. (Par nepārtrauktas funkcijas nullēm).

Ja sakarīgā kopā D nepārtraukta funkcija $f(P)$ šīs kopas divos punktos A un B pieņem vērtības $f(A)$ un $f(B)$, kurām ir pretējas zīmes, tad eksistē tāds punkts $C \in D$, ka $f(C) = 0$.

Jautājumi

1. Definēt funkcijas robežu.
2. Definēt punkta P_0 δ - apkārtni un pārdurto apkārtni.
3. Formulēt teorēmu par funkcijas robežas vienīgumu un teorēmu par funkcijas ierobežotību.
4. Formulēt teorēmu par robežpāreju nevienādībās.
5. Formulēt teorēmu par mainīgā starplieluma robežu.
6. Formulēt teorēmas par funkciju summas, reizinājuma un dalījuma robežām.
7. Definēt bezgalīgi mazu funkciju.
8. Definēt punktā nepārtrauktu funkciju.
9. Definēt funkcijas pilno un parciālos pieaugumus.
10. Definēt saliktas funkcijas neatkarīgos argumentus un starpargumentus.
11. Definēt saliktu funkciju.
12. Formulēt teorēmu par saliktas funkcijas nepārtrauktību.
13. Definēt
    (a) kopas iekšējo punktu;
    (b) kopas ārējo punktu;
    (c) kopas robežas punktu.

    Sniegt ģeometrisko interpretāciju.
14. Definēt
    (a) slēgtu kopu;
    (b) vaļēju kopu;
    (c) sakarīgu kopu.

    Sniegt ģeometrisko interpretāciju.
15. Definēt ierobežotu kopu.

16. Definēt kopā nepārtrauktu funkciju.
17. Formulēt Veierštrāsa teorēmas par nepārtrauktas funkcijas ierobežotību, vislielāko un vismazāko vērtību.
18. Formulēt Bolcano teorēmu par nepārtrauktas funkcijas starpvērtībām.
19. Formulēt teorēmu par nepārtrauktas funkcijas nullēm.

Vingrinājumi

1. Pierādīt, ka $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} C = C$ (C - konstante) un $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} x = x_0$.
2. Formulēt apkārtņu svarīgākās īpašības.
3. Pierādīt funkcijas $z = f(x, y)$ robežas vienīgumu.
4. Pierādīt, ka funkcija, kurai eksistē robeža, ir ierobežota funkcija.
5. Pierādīt teorēmu par robežpāreju nevienādībās.
6. Pierādīt teorēmu par mainīgā starplieluma robežu.
7. Pierādīt teorēmu par divu funkciju summas robežu.
8. Izskaitļot robežas:
   (a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}} \frac{\sin xy}{x}$;
   (b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \left(x^2 + y^2\right) \sin \frac{1}{xy}$;
   (c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+y}{x^2+y^2}$;
   (d) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x}{x+y}$;
   (e) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
9. Definēt triju argumentu funkcijas pilno un parciālos pieaugumus.
10. Atrast funkciju pilno un parciālos pieaugumus punktā P_0.
   (a) $f(x, y) = x^2 + xy - y^2 + 1, \quad P_0(1, -2)$;
   (b) $u = xy + yz + xz, \quad P_0(1, 0, -1)$.

11. Kā izmainīsies taisnstūra diagonāle, ja vienu taisnstūra malu $a = 10$ cm pagarināt par 4 mm, bet otru - $b = 12$ cm saīsināt par 1 mm?

12. Parādīt, ka funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ja} \quad x^2+y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{ja} \quad x = y = 0, \end{cases}$$

ir nepārtraukta punktā $(0,0)$ pēc katra no mainīgiem x un y, apskatot tos atsevišķi, bet nav nepārtraukta šajā punktā kā divu mainīgo funkcija.

13. Atrast funkcijas $z = \sqrt{x} + \ln y$ definīcijas apgabalu. Norādīt tā iekšējos, ārējos un robežas punktus.

14. Atrast funkciju definīcijas apgabalus un noskaidrot, vai iegūtās kopas ir slēgtas, vaļējas, sakarīgas, ierobežotas.

    (a) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

    (b) $z = \ln(x + y)$;

    (c) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$;

    (d) $z = x + \arcsin y$;

    (e) $z = \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{xy}$;

    (f) $z = \arccos \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$.

III nodaļa

VAIRĀKU ARGUMENTU DIFERENCĒJAMAS FUNKCIJAS

3.1. Punktā diferencējama funkcija. Diferenciālis. Parciālie atvasinājumi

3.1. definīcija. Funkciju $z = f(x, y)$ sauc par **diferencējamu punktā** $\big(x_0, y_0\big)$, ja tās pilno pieaugumu Δz var izteikt šādi:

$$\boxed{\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,}$$

kur A, B - skaitļi, bet α, β - bezgalīgi mazas funkcijas, kad $\Delta x \to 0$ un $\Delta y \to 0$. Funkcijas pieauguma Δz galveno sastāvdaļu, t.i., $A\Delta x + B\Delta y$, sauc par šīs funkcijas **diferenciāli punktā** (x_0, y_0) un apzīmē ar dz jeb $df(x_0, y_0)$. Tādējādi

$$\boxed{dz = A\Delta x + B\Delta y.}$$

3.1. piezīme. Funkcijas pieauguma Δz otru sastāvdaļu $\alpha\Delta x + \beta\Delta y$ var pārveidot šādi:

$$\alpha\Delta x + \beta\Delta y = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \cdot \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \gamma\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

kur $\gamma = \frac{\alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \alpha\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} + \beta\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$ - bezgalīgi maza funkcija, kad $\Delta x \to 0$ un $\Delta y \to 0$. $\left(\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leq 1, \quad \frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leq 1\right)$.

Tādējādi funkciju $z = f(x, y)$ sauc par **diferencējamu punktā** $\big(x_0, y_0\big)$, ja tās pilno pieaugumu Δz var izteikt šādi:

$$\boxed{\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \gamma\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2},}$$

kur A, B - skaitļi, bet γ - bezgalīgi maza funkcija, kad $\Delta x \to 0$ un $\Delta y \to 0$.

3.1. teorēma. (*Punktā diferencējamas funkcijas nepieciešamais nosacījums*).

Ja funkcija $z = f(x, y)$ - diferencējama punktā (x_0, y_0), tad eksistē robežas $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ un $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

▶ No Δz var iegūt $\Delta_x z$, ja izvēlas $\Delta y = 0$. Tādējādi

$$\Delta_x z = A\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Seko, ka $\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A + \alpha$ un eksistē $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = A$. Analoģiski eksistē $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = B$. ◀

3.2. definīcija. Ja funkcija $z = f(x, y)$ ir definēta punktā (x_0, y_0) un tā apkārtnē, eksistē $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, tad šo robežu sauc par šīs funkcijas **parciālo atvasinājumu pēc x punktā** (x_0, y_0) un apzīmē $\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, $f'_x(x_0, y_0)$. Tādējādi $\frac{\partial z}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$. Analoģiski definē $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$.

3.2. piezīme.

1. 3.1. teorēmu var formulēt šādi.

   Ja funkcija $z = f(x, y)$ - diferencējama punktā (x_0, y_0), tad šajā punktā tai eksistē parciālie atvasinājumi $\frac{\partial z}{\partial x}$ un $\frac{\partial z}{\partial y}$.
2. Funkcijas $z = f(x, y)$ diferenciāli dz var izteikt šādi:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.}$$

3. Parasti argumentu pieaugumus Δx un Δy apzīmē atbilstoši dx un dy, tāpēc

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\ .}$$

4. 3.1. teorēmai apgrieztais apgalvojums nav spēkā.

3.2. teorēma. (*Punktā diferencējamas funkcijas nepieciešamais nosacījums*).

Ja funkcija $z = f(x, y)$ - diferencējama punktā (x_0, y_0), tad šajā punktā tā ir nepārtraukta.

(Pierādīt patstāvīgi).

3.3. piezīme.

1. Arī šoreiz apgrieztā teorēma nav spēkā. Piemēram, funkcija $z = \sqrt{x^2+y^2}$ ir nepārtraukta punktā $(0,0)$, tomēr šajā punktā tai neeksistē parciālie atvasinājumi un, proti, tā nav diferencējama punktā $(0,0)$. (Pamatot patstāvīgi!).
2. Tā kā parciālo atvasinājumu definīcijas ir analoģiskas viena argumenta funkcijas atvasinājuma definīcijai, tad parciālos atvasinājumus atrod pēc tām pašām formulām un tiem pašiem likumiem, kādi tika apskatīti viena argumenta funkcijām. Svarīgi atzīmēt, ka atrodot $\frac{\partial z}{\partial x}$, y uzskata ne par mainīgo, bet par konstanti. Analoģiski, kad atrod $\frac{\partial z}{\partial y}$, x uzskata par konstanti.

3.1. piemērs. Atrast funkcijas $z = x^3 y + \sin\left(x^2 + \sqrt{y}\right) + \operatorname{tg} x + \ln y$ parciālos atvasinājumus.

Vispirms y uzskata par konstanti un atrod

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + 2x\cos\left(x^2+\sqrt{y}\right) + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Analoģiski

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cos\left(x^2+\sqrt{y}\right) + \frac{1}{y}.$$

3.2. piemērs. Atrast funkcijas $z = \frac{x}{y}$ diferenciāli dz punktā $(2,1)$, ja $\Delta x = 0,1$; $\Delta y = -0,2$.

Atrod $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}$ un $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}$. Izskaitļo parciālo atvasinājumu vērtības punktā $(2,1)$. $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2$. Funkcijas diferenciālis

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Tādējādi

$$dz = 1 \cdot 0,1 - 2(-0,2) = 0,5.$$

Apskata funkciju $z = f(x, y)$, kurai punktā (x_0, y_0) eksistē parciālie atvasinājumi pie fiksētas vērtības $y = y_0$. Ģeometriski tas nozīmē, ka virsma $z = f(x, y)$ tiek šķelta ar plakni $y = y_0$ (šī plakne paralēla koordinātu plaknei xOz). Šķēlumā iegūst līniju, kas iet caur doto punktu. Virziena koeficients pieskarei, kas konstruēta šai līnijai punktā (x_0, y_0), būs vienāds ar $f'_x(x_0, y_0)$. Analoģiski $f'_y(x_0, y_0)$ ir virziena koeficients pieskarei, kas konstruēta punktā (x_0, y_0) līnija, pa kuru virsma $z = f(x, y)$ šķeļas ar plakni $x = x_0$.

3.4. piezīme. Analoģiski rīkojoties, var definēt punktā diferencējamu triju, četru utt. argumentu funkciju, tās parciālos atvasinājumus un diferenciāli. Atrodot šādas funkcijas parciālo atvasinājumu pēc kāda mainīgā, pārējos argumentus uzskata par konstantēm.

3.3. piemērs. Atrast funkcijas $u = x^2y^3z^4 + e^x + 2^y + \operatorname{arctg} z$ parciālos atvasinājumus.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^3z^4 + e^x;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x^2y^2z^4 + 2^y \ln 2;$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = 4x^2y^3z^3 + \frac{1}{1+z^2}.$$

3.2. Punktā diferencējamas funkcijas pietiekamais nosacījums

Viena argumenta funkcijai punktā diferencējama funkcija ir tas pats, kas funkcija, kurai eksistē šajā punktā atvasinājums. Vairāku argumentu funkcijai parciālo atvasinājumu eksistence ir šīs funkcijas diferencējamības tikai nepieciešamais nosacījums.

Piemēram, funkcijai

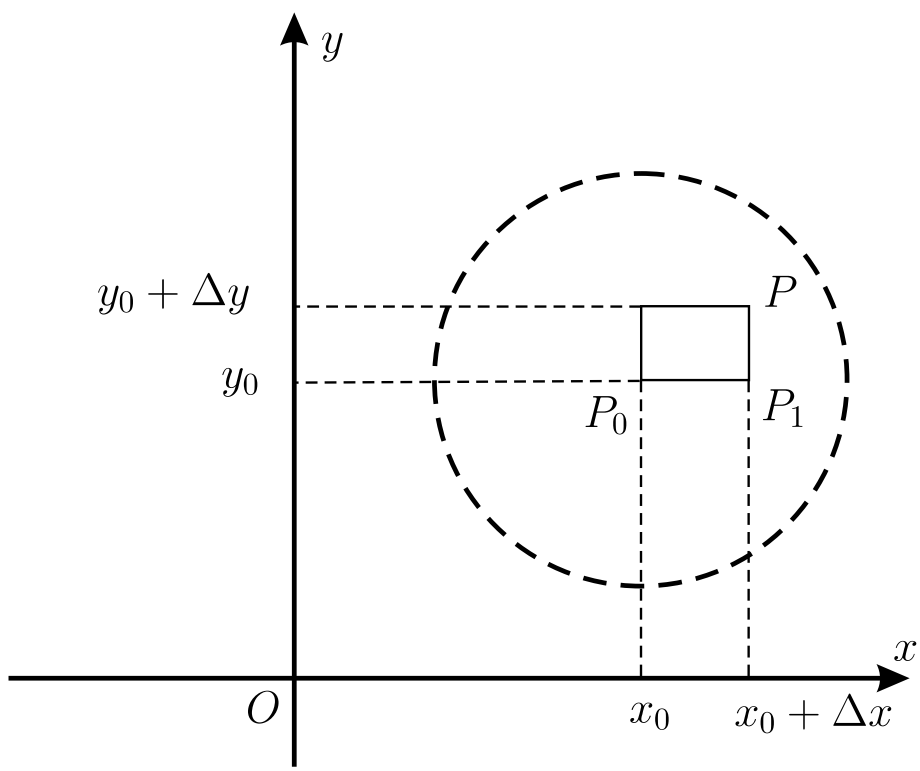
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ja} \quad x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{ja} \quad x = y = 0, \end{cases}$$

punktā $(0, 0)$ eksistē parciālie atvasinājumi, pie tam $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, jo $\Delta_x f(0, 0) = \Delta_y f(0, 0) = 0$. Punktā $(0, 0)$ šī funkcija nav nepārtraukta, tāpēc nav arī diferencējama.

Lai funkcija būtu diferencējama punktā (x_0, y_0), ar parciālo atvasinājumu eksistenci vien nepietiek, bet vajag, lai šie parciālie atvasinājumi būtu nepārtraukti šajā punktā.

3.3. teorēma. *Punktā diferencējamas funkcijas pietiekamais nosacījums.*

Ja funkcijai $z = f(x, y)$ punkta $P_0(x_0, y_0)$ apkārtnē eksistē parciālie atvasinājumi $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ un tie ir nepārtraukti šajā punktā, tad tā ir diferencējama punktā $P_0(x_0, y_0)$.



3.1. zīm.

► Izvēlas argumentu x un y tādus pieaugumus Δx un Δy, lai punkts $P(x_0 + \Delta x, y + \Delta y)$ piederētu teorēmā minētajai apkārtnei (3.1. zīm.).

Pārveido funkcijas pieaugumu punktā P_0.

$$\Delta z = f(P) - f(P_0) = \big(f(P) - f(P_1)\big) + \big(f(P_1) - f(P_0)\big) =$$
$$= \big(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)\big) + \big(f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)\big) =$$
$$= \frac{\partial f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Theta_1 \Delta y)}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f(x_0 + \Theta_2 \Delta x, y_0)}{\partial x}\Delta x,$$

kur $0 < \Theta_1 < 1$, $0 < \Theta_2 < 1$. (Starpībām, kas atradās iekavās, tika pielietota Lagranža formula atbilstošajos intervālos).

Tā kā parciālie atvasinājumi ir nepārtraukti punktā $P_0(x_0, y_0)$, tad

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Theta_1 \Delta y)}{\partial y} \Delta y = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = B$$

un

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x_0 + \Theta_2 \Delta x, y_0)}{\partial x} \Delta x = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = A.$$

Tāpēc

$$\frac{\partial f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Theta_1 \Delta y)}{\partial y} = B + \beta$$

un

$$\frac{\partial f(x_0 + \Theta_2 \Delta x, y_0)}{\partial x} = A + \alpha,$$

kur α un β - bezgalīgi mazas funkcijas, kad $\Delta x \to 0$ un $\Delta y \to 0$, bet A un B - skaitļi. Tātad

$$\Delta z = (B + \beta)\Delta y + (A + \alpha)\Delta x = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Tādējādi funkcija $z = f(x, y)$ ir diferencējama punktā $P_0(x_0, y_0)$. ◀

3.3. Funkcijas diferenciāļa lietojumi tuvinātos aprēķinos

Punktā (x_0, y_0) diferencējamai funkcijai $z = f(x, y)$ ir spēkā vienādība $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$, kur A, B - skaitļi un α, β - bezgalīgi mazas funkcijas, kad $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Tāpēc $\Delta z \approx dz$, kur $dz = A\Delta x + B\Delta y$. Pārveidojot šo aptuveno vienādību, iegūst, ka

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Šīs aptuvenās vienādības lietošanas shēma ir šāda.

1. Lielumu Q, kuram ir jāatrod tuvināta vērtība, uzraksta kā funkcijas $z = f(x, y)$ vērtību punktā $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, t.i., $Q = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, kur punktu (x_0, y_0) izvēlas tā, lai šajā punktā funkcijas vērtību varētu viegli aprēķināt.

2. Atrod z'_x, z'_y un izskaitļo funkcijas un tās parciālo atvasinājumu vērtības punktā (x_0, y_0).

3. No aptuvenās vienādības atrod $f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

3.5. piezīme. Tuvinājums būs jo labāks, jo mazāki pēc moduļa būs Δx un Δy.

3.4. piemērs. Aprēķināt izteiksmes $\sqrt{1,03^2 + 1,98^3}$ tuvinātu vērtību.

Šoreiz $Q = \sqrt{1,03^2 + 1,98^3}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^3}$ un $Q = f(1 + 0,03, 2 - 0,02)$. Tādējādi $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\Delta x = 0,03$, $\Delta y = -0,02$.

Atrod
$$z'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^3}}, \quad z'_y = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^2 + y^3}}.$$

Izskaitļo $f(1, 2) = \sqrt{1^2 + 2^3} = 3$; $f'_x(1, 2) = \frac{1}{3}$, $f'_y(1, 2) = 2$.

Pielieto aptuveno vienādību
$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$
un izskaitļo Q tuvinātu vērtību $Q \approx 3 + \frac{1}{3} \cdot 0,03 + 2(-0,02) = 2,97$.

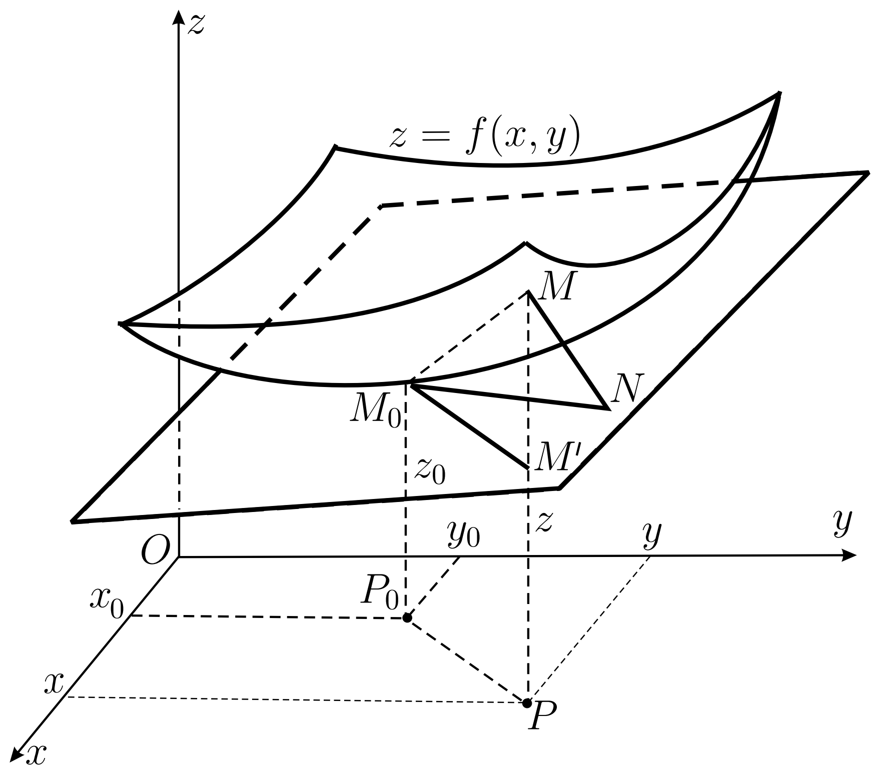
Tādējādi $\sqrt{1,03^2 + 1,98^3} \approx 2,97$.

3.4. Pieskarplakne

Apskata funkciju $f(x, y)$, kas ir nepārtraukta punktā $P_0(x_0, y_0)$.

3.3. definīcija. Par funkcijas grafika **pieskarplakni** punktā $M_0\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ sauc plakni, kas iet caur šo punktu un kas apmierina šādu nosacījumu: attālums MN no grafika patvaļīga punkta $M\big(x, y, f(x, y)\big)$ līdz šai plaknei ir pēc patikas mazs, salīdzinot ar attālumu M_0M, kad $x \to x_0$ un $y \to y_0$, citiem vārdiem, $\frac{MN}{M_0M} \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}]{} 0$ (skat. 3.2. zīm.).

3.4. teorēma. *Ja funkcija $f(x, y)$ ir diferencējama punktā $P_0(x_0, y_0)$, tad tās grafikam atbilstošajā punktā $M_0\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ eksistē pieskarplakne, kuras vienādojums ir*
$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) \qquad (3.1)$$



3.2. zīm.

► Tā kā funkcija $f(x, y)$ ir diferencējama punktā $P_0(x_0, y_0)$, tad tā ir nepārtraukta šajā punktā un izpildās sakarība

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \gamma\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}, \quad (3.2)$$

kur $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ un $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to o \\ \Delta y \to 0}} \gamma = 0$. Acīmredzami (3.1) ir plaknes, kas iet caur punktu $M_0\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$, vienādojums. Atliek pierādīt, ka šī plakne ir funkcijas $f(x, y)$ grafikam punktā M_0 konstruētā pieskarplakne. Tam nolūkam ir jāparāda, ka $\frac{MN}{M_0M} \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}]{} 0$ (3.2. zīm.). No vienādības (3.2) atņem (3.1) un iegūst

$$f(x, y) - z = \gamma\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}. \quad (3.3)$$

Apskata attiecību

$$\frac{MN}{M_0M} \le \frac{MM'}{M_0M} \le \frac{MM'}{P_0P},$$

kur $P_0P = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Var saskatīt, ka $MM' = |z - f(x, y)|$ (situācijā, kas attēlota 3.2. zīmējumā, $MM' = -z + f(x, y)$, jo punkta M' aplikāta ir z, bet punkta M aplikāta ir $f(x, y)$).

Atsaucoties uz vienādību (3.3), var rakstīt, ka $MM' = |\gamma| \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Tāpēc

$$\frac{MN}{M_0M} \le \frac{|\gamma| \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = |\gamma| \ .$$

Acīmredzami $\frac{MN}{M_0M} \xrightarrow[\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}]{} 0$, jo $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} |\gamma| = 0$. ◄

3.4. definīcija. Par funkcijas grafika **normāli** punktā $M_0\big(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\big)$ sauc taisni, kas iet caur šo punktu un ir perpendikulāra šajā punktā konkrētajai pieskarplaknei.

3.5. piemērs. Sastādīt pieskarplaknes un normāles vienādojumu funkcijas $z = x^2 + y^2$ grafikam punktā, kura abscisa ir 1 un ordināta -1.

Atrod $z_0 = f(x_0, y_0) = f(1, -1) = 1^2 + (-1)^2 = 2$, $z'_x = 2x$; $z'_y = 2y$.

Izskaitļo

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_x(1, -1) = 2 \cdot 1 = 2;$$
$$f'_y(x_0, y_0) = f'_y(1, -1) = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Pieskarplaknes vienādojums

$$z - 2 = 2(x - 1) - 2(y + 1) \quad \text{jeb} \quad 2x - 2y - z - 2 = 0.$$

Tā kā normāle ir perpendikulāra pieskarplaknei, tad šīs taisnes virziena vektors ir $(2, -2, -1)$. Tādējādi normāles vienādojums ir

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{-2} = \frac{z - 2}{-1} \ .$$

3.5. Saliktas funkcijas diferencēšana

3.5. teorēma. *Ja kopā D definēta salikta funkcija $z = f(u, v)$, kur $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, funkcijām $u(x, y)$, $v(x, y)$ punkta $(x_0, y_0) \in D$ apkārtnē eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi un funkcijai $z = f(u, v)$ atbilstoša punkta (u_0, v_0) apkārtnē eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi, tad salikta funkcija $z = f\big(u(x, y), v(x, y)\big)$ ir diferencējama punktā (x_0, y_0), pie tam*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

► Tā kā funkcijām $u(x, y)$, $v(x, y)$ punkta (x_0, y_0) apkārtnē eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi, tad funkcijas ir diferencējamas šajā punktā, t.i.,

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y$$

un

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \alpha_2 \Delta x + \beta_2 \Delta y,$$

kur α_1, β_1, α_2, β_2 - bezgalīgi mazas funkcijas, kad $\Delta x \to 0$ un $\Delta y \to 0$.

Ja uzskata, ka $\Delta y = 0$, tad iegūst šo funkciju parciālos pieaugumus.

$$\Delta_x u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \alpha_1 \Delta x \quad \text{un} \quad \Delta_x v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \alpha_2 \Delta x \tag{3.4}$$

Šiem pieaugumiem atbilst funkcijas $z = f(u, v)$ pieaugums, kuru ir lietderīgi apzīmēt $\Delta_x z$.

Tā kā funkcijai $z = f(u, v)$ punkta (u_0, v_0) apkārtnē eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi, tad tā ir diferencējama šajā punktā.
Tāpēc

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u + \frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v + \alpha \Delta_x u + \beta \Delta_x v, \tag{3.5}$$

kur $\lim\limits_{\substack{\Delta_x u \to 0 \\ \Delta_x v \to 0}} \alpha = \lim\limits_{\substack{\Delta_x u \to 0 \\ \Delta_x v \to 0}} \beta = 0.$

Vienādībā (3.5) $\Delta_x u$ un $\Delta_x v$ aizstāj ar atbilstošajām izteiksmēm (3.4)

$$\Delta_x z = \frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \alpha_1 \Delta x\right) + \frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \alpha_2 \Delta x\right) +$$
$$+ \alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \alpha_1 \Delta x\right) + \beta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \alpha_2 \Delta x\right) =$$
$$= \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x + \gamma \Delta x,$$

kur

$$\gamma = \alpha_1 \frac{\partial z}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial z}{\partial v} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \cdot \alpha_1 + \beta \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \alpha_2$$

ir bezgalīgi maza funkcija, kad $\Delta x \to 0$ $(\Delta y = 0)$.

Atrod $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$. Tādējādi eksistē $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$, kas acīmredzami ir nepārtraukts punkta (x_0, y_0) apkārtnē. Analoģiski pierāda, ka šī punkta apkārtnē eksistē nepārtraukts $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$. Saskaņā ar funkcijas diferencējamības pietiekamo nosacījumu (3.3. teorēma) funkcija $z = f\big(u(x, y), v(x, y)\big)$ diferencējama punktā (x_0, y_0). ◄

3.6. piemērs. Atrast funkcijas $z = u^2 + v^3$, kur $u = \sqrt[3]{xy}$, $v = \sqrt[5]{\frac{x}{y}}$, parciālos atvasinājumus $\frac{\partial z}{\partial x}$ un $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Atrod

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2u,$$
$$\frac{\partial z}{\partial v} = 3v^2,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt[3]{y} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sqrt[3]{x} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{y^2}},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt[5]{y}} \cdot \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt[5]{x}\left(y^{-\frac{1}{5}}\right)'_y = -\frac{1}{5}\sqrt[5]{x} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{y^6}}.$$

Tādējādi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2u}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{y}{x^2}} + 3v^2 \cdot \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4 y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2u}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} - \frac{3v^2}{5} \cdot \sqrt[5]{\frac{x}{y^6}},$$

kur $u = \sqrt[3]{xy}$, $v = \sqrt[5]{\frac{x}{y}}$.

3.7. piemērs. Atrast funkcijas $z = \ln t$, kur $t = \sin x + \cos y$, parciālos atvasinājumus $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$.

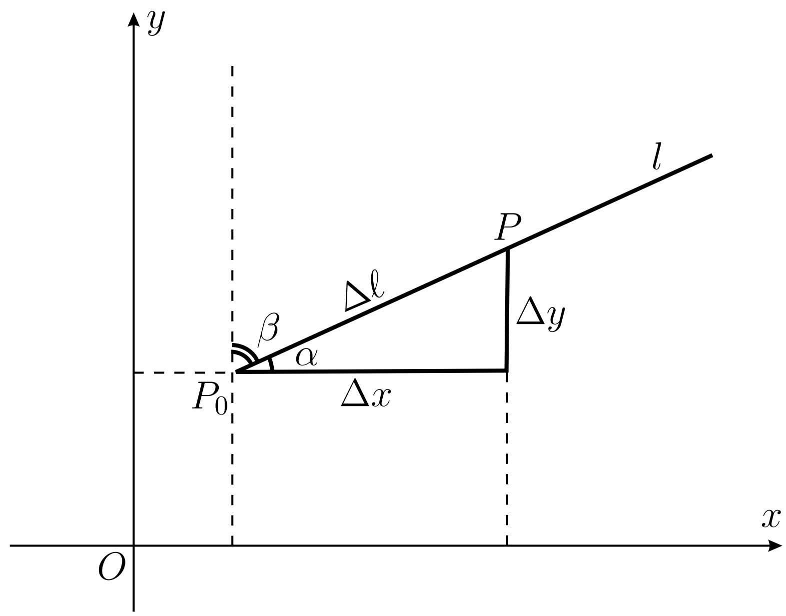
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial y}$. Atrod $\frac{dz}{dt} = \frac{1}{t}$; $\frac{\partial t}{\partial x} = \cos x$, $\frac{\partial t}{\partial y} = -\sin y$.

Tādējādi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{t}\cos x = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{t}(-\sin y) = \frac{-\sin y}{\sin x + \cos y}.$$

3.6. Atvasinājums norādītajā virzienā. Gradients

Apskata punkta $P_0(x_0, y_0)$ apkārtnē definētu funkciju $f(x, y)$ un staru ℓ ar sākumu punktā P_0. Uz stara ℓ punkta P_0 apkārtnē izvēlas punktu $P(x, y)$ (3.3. zīm.).



3.3. zīm.

3.5. definīcija. Ja attiecībai $\frac{f(P)-f(P_0)}{\Delta\ell}$, kur $\Delta\ell$ - nogriežņa PP_0 garums, eksistē robeža, kad $\Delta\ell \to 0$, tad šo robežu sauc par **funkcijas** $z = f(x, y)$ **atvasinājumu punktā** P_0 **norādītajā virzienā** ℓ un apzīmē $\frac{\partial z}{\partial \ell}$, tādējādi $\frac{\partial z}{\partial \ell} = \lim\limits_{\Delta\ell\to 0} \frac{f(P)-f(P_0)}{\Delta\ell}$.

3.6. piezīme. Parasti uz stara izvēlas kādu vektoru $\overrightarrow{\ell}$, kura virziens sakrīt ar šī stara virzienu.

1. Acīmredzami $\frac{\partial z}{\partial x}$ ir funkcijas $z = f(x, y)$ atvasinājums Ox ass pozitīvajā virzienā, bet $\frac{\partial z}{\partial y}$ - Oy ass pozitīvajā virzienā.
2. Atvasinājums $\frac{\partial z}{\partial \ell}$ raksturo funkcijas $z = f(x, y)$ izmaiņas ātrumu punktā $P_0(x_0, y_0)$ virzienā $\overrightarrow{\ell}$.
3. Turpmāk var uzskatīt, ka $\overrightarrow{\ell}$ - vienības vektors, tāpēc tā koordinātas ir $\cos\alpha$ un $\cos\beta$, kur α, β - leņķi, kurus veido $\overrightarrow{\ell}$ ar Ox un Oy asu pozitīvajiem virzieniem (3.3. zīm.). Acīmredzami $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, tāpēc $\cos\beta = \sin\alpha$ un $\overrightarrow{\ell} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

3.6. teorēma. *Ja funkcijai $z = f(x, y)$ punktā $P_0(x_0, y_0)$ eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi, tad tai eksistē šajā punktā atvasinājums $\frac{\partial z}{\partial \ell}$ jebkurā virzienā $\overrightarrow{\ell} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, pie tam*

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta} \quad \textit{jeb} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha.}$$

▶ Saskaņā ar punktā diferencējamas funkcijas pietiekamo nosacījumu funkcija $z = f(x, y)$ diferencējama punktā $P_0(x_0, y_0)$. Tāpēc

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \gamma_1 \Delta x + \gamma_2 \Delta y,$$

kur γ_1, γ_2 - bezgalīgi mazas funkcijas, kad $\Delta x \to 0$ un $\Delta y \to 0$. Iegūst, ka

$$\frac{\Delta z}{\Delta \ell} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta \ell} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta \ell} + \gamma_1 \frac{\Delta x}{\Delta \ell} + \gamma_2 \frac{\Delta y}{\Delta \ell},$$

kur $\frac{\Delta x}{\Delta \ell} = \cos\alpha$, $\frac{\Delta y}{\Delta \ell} = \sin\alpha = \cos\beta$. Tāpēc

$$\frac{\Delta z}{\Delta \ell} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta + \gamma_1 \cos\alpha + \gamma_2 \cos\beta.$$

Acīmredzami, ja $\Delta \ell \to 0$, tad arī $\Delta x \to 0$ un $\Delta y \to 0$. Tāpēc eksistē

$$\lim_{\Delta \ell \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta \ell} = \lim_{\Delta \ell \to 0} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta + \gamma_1 \cos\alpha + \gamma_2 \cos\beta \right) = \\ = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

Tādējādi eksistē $\frac{\partial z}{\partial \ell} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$. ◀

Apskata vektorus $\overrightarrow{a} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ un $\overrightarrow{\ell} = (\cos\alpha, \cos\beta)$. Šo vektoru skalārais reizinājums $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{\ell} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$ acīmredzami ir $\frac{\partial z}{\partial \ell}$. Tādējādi $\frac{\partial z}{\partial \ell} = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{\ell}$. Šo vektoru skalāro reizinājumu var uzrakstīt arī citā formā - vektoriālajā formā: $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{\ell} = |\overrightarrow{a}| \cdot \left|\overrightarrow{\ell}\right| \cos\varphi$, kur φ - leņķis starp vektoriem $\overrightarrow{a}$ un $\overrightarrow{\ell}$. Šo vektoru skalārais reizinājums sasniedz maksimālo vērtību, ja $\cos\varphi = 1$, t.i., ja $\varphi = 0$. Seko, ka funkcijai $z = f(x, y)$ vislielākais izmaiņas ātrums ir virzienā $\overrightarrow{a} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

3.6. definīcija. Vektoru $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$, kas raksturo funkcijas $z = f(x, y)$ vislielākās izmaiņas ātrumu punktā $P_0(x_0, y_0)$, sauc par šīs **funkcijas gradientu**[1] **punktā** P_0 un apzīmē $\operatorname{grad} z$ jeb $\operatorname{grad} f(P_0)$. Tādējādi $\operatorname{grad} z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$ un

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial \ell} = \operatorname{grad} z \cdot \overrightarrow{\ell}.}$$

[1] Gradienta vektors raksturo funkcijas vislielākās izmaiņas ātrumu gan pēc virziena, gan skaitliski.

3.7. piezīme. Triju argumentu funkcijai $u = f(x, y, z)$

$$\frac{\partial u}{\partial \ell} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\ ,$$

kur α, β, γ - leņķi atbilstoši ar asīm Ox, Oy, Oz,
$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$.

3.7. Augstāku kārtu atvasinājumi

Apskata kopā D diferencējamu funkciju $z = f(x, y)$. Šīs kopas katrā punktā $P(x, y)$ eksistē parciālie atvasinājumi $\frac{\partial z}{\partial x}$ un $\frac{\partial z}{\partial y}$. Šie parciālie atvasinājumi ir kopā D definētas argumentu x un y funkcijas, kurām var eksistēt parciālie atvasinājumi, t.i., $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ un $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$. Ja šie parciālie atvasinājumi (no parciālajiem atvasinājumiem) eksistē, tad tos sauc par funkcijas $z = f(x, y)$ **otrās kārtas parciālajiem atvasinājumiem** un apzīmē atbilstoši $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$. (Lasa: "de divi zet pēc de iks kvadrātā"; "de divi zet pēc de igrek de iks" utt.). Šos otrās kārtas parciālos atvasinājumus vēl apzīmē z''_{x^2}, z''_{yx}, z''_{xy}, z''_{y^2}. Tādējādi eksistē četri funkcijas $z = f(x, y)$ otrās kārtas parciālie atvasinājumi. Analoģiski spriežot, var runāt par astoņiem šīs funkcijas trešās kārtas parciālajiem atvasinājumiem utt.

3.7. definīcija. Funkcijas parciālos atvasinājumus, kuriem kārta ir divi un lielāka, sauc par **funkcijas augstāku kārtu parciālajiem atvasinājumiem**.

3.8. piemērs. Atrast funkcijas $z = x^2y^3$ visus otrās kārtas parciālos atvasinājumus.

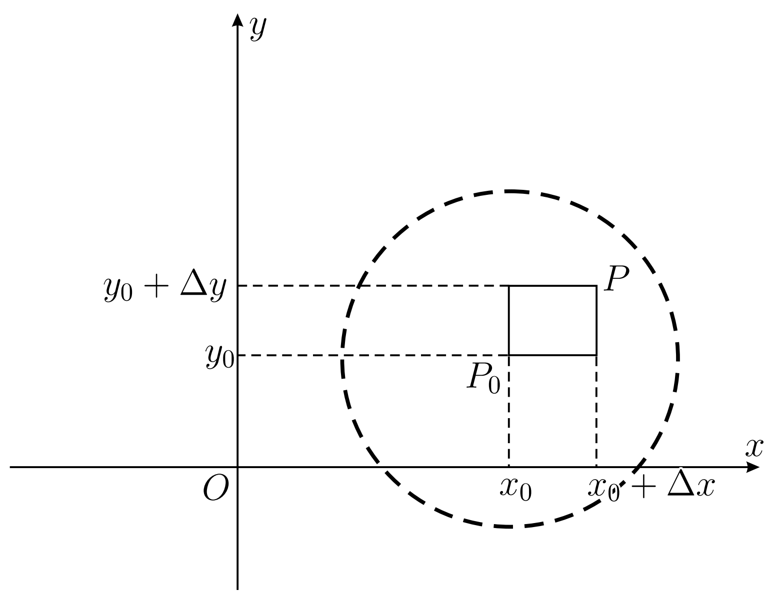
Atrod

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= 2xy^3;\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= 3x^2y^2;\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\big(2xy^3\big) = 2y^3;\\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\big(2xy^3\big) = 6xy^2;
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\big(3x^2y^2\big) = 6xy^2;$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\big(3x^2y^2\big) = 6x^2y.$$

3.8. piezīme. Šajā piemērā tika iegūts, ka $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$. Daudzām funkcijām ir spēkā šāda vienādība.

3.7. teorēma. *Ja funkcijai $z = f(x, y)$ punkta $P_0(x_0, y_0)$apkārtnē eksistē otrās kārtas parciālie atvasinājumi un tie ir nepārtraukti šajā punktā, tad punktā $P_0(x_0, y_0)$ izpildās sakarība $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.*



3.4. zīm.

▶ Izvēlas tādus argumentu patvaļīgus pieaugumus $\Delta x \neq 0$ un $\Delta y \neq 0$, ka punkts $P(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ pieder punkta $P_0(x_0, y_0)$ apkārtnei (3.4. zīm.). Apskata

$$A = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0).$$

Izveido funkciju

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0).$$

Tā kā funkcijai $f(x, y)$ punkta $P_0(x_0, y_0)$ apkārtnē eksistē atvasinājums $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, tad funkcijai $\varphi(x)$ eksistē atvasinājums intervālā $[x_0, x_0 + \Delta x]$ un $\varphi'(x) = f'_x(x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x, y_0)$.

Tā kā

$$\varphi(x_0 + \Delta x) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

un

$$\varphi(x_0) = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0),$$

tad

$$A = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0).$$

Šai starpībai pielieto Lagranža formulu intervālā $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Iegūst $A = \varphi'(x_0 + \Theta_1 \Delta x)\Delta x$, kur $0 < \Theta_1 < 1$ jeb

$$A = \big(f'_x(x_0 + \Theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f'_x(x_0 + \Theta_1 \Delta x, y_0)\big)\Delta x.$$

Starpībai pielieto Lagranža formulu intervālā $[y_0, y_0 + \Delta y]$

$$A = f''_{xy}(x_0 + \Theta_1 \Delta x, y_0 + \Theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y, \tag{3.6}$$

kur $0 < \Theta_2 < 1$ (funkcijai $f(x, y)$ punkta $P_0(x_0, y_0)$ apkārtnē eksistē parciālais atvasinājums f''_{xy}).

Ja izveidotu otru funkciju $\psi(y) = f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)$ un rīkotos analoģiski, tad iegūtu, ka

$$A = f''_{yx}(x_0 + \Theta_4 \Delta x, y_0 + \Theta_3 \Delta y)\Delta x \Delta y, \tag{3.7}$$

kur $0 < \Theta_3 < 1$ un arī $0 < \Theta_4 < 1$. No vienādībām (3.6), (3.7) seko:

$$f''_{xy}(x_0 + \Theta_1 \Delta x, y_0 + \Theta_2 \Delta y)\Delta x \Delta y = f''_{yx}(x_0 + \Theta_4 \Delta x, y_0 + \Theta_3 \Delta y)\Delta x \Delta y.$$

Vienādības abas puses izdala ar $\Delta x \Delta y \neq 0$.

$$f''_{xy}(x_0 + \Theta_1 \Delta x, y_0 + \Theta_2 \Delta y) = f''_{yx}(x_0 + \Theta_4 \Delta x, y_0 + \Theta_3 \Delta y).$$

Šajā vienādībā pāriet pie robežas, kad $\Delta x \to 0$ un $\Delta y \to 0$ (robežas punktā $P_0(x_0, y_0)$ eksistē, jo parciālie atvasinājumi f''_{xy} un f''_{yx} ir nepārtrauktas šajā punktā funkcijas). Iegūst $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$. ◀

3.9. piezīme. Analoģiska teorēma ir spēkā arī n argumentu funkcijai. Nepārtrauktie k - tās kārtas parciālie atvasinājumi vienādi, ja pēc katra no mainīgajiem atvasināts tikpat daudz reižu.

Piemēram, $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial x}$, kur $u = u(x, y, z)$ un parciālie atvasinājumi ir nepārtraukti.

3.8. Augstāku kārtu diferenciāļi

Apskata kopā D diferencējamu funkciju $f(x,y)$. Par šādas funkcijas **diferenciāli** sauc $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dy$. Ja dx un dy ir fiksēti, tad $df(x,y)$ var uzskatīt par mainīgo x un y funkciju. Pie tam, ja šī funkcija ir diferencējama, tad var runāt par tās diferenciāli, t.i., $d\big(df(x,y)\big)$, kuru attiecībā pret $f(x,y)$ sauc par **otrās kārtas diferenciāli** un apzīmē $d^2f(x,y)$. Tātad

$$d^2f(x,y) = d\big(df(x,y)\big) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy =$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2.$$

(Izmantoja, ka $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$).

Analoģiski definē $d^3f(x,y)$ un vispārīgi $d^nf(x,y) = d\big(d^{n-1}f(x,y)\big)$. Simboliski var rakstīt

$$\boxed{d^nf(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y).}$$

Analoģiski var apskatīt augstāku kārtu diferenciāļus n argumentu funkcijai.

3.10. piezīme. Ja x un y nav neatkarīgie argumenti, bet starpargumenti, t.i., $z = f(x,y)$, kur x un y ir viena vai vairāku neatkarīgo argumentu funkcijas, tad, piemēram,

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial^2 y}dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}d^2y$$

utt.

3.9. piemērs. Atrast funkcijas $z = 2x^2 - 3xy - y^2$ otrās kārtas diferenciāli.

Atrod

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -3; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Tādējādi

$$d^2z = 4dx^2 + 2(-3)dxdy - 2dy^2 = 4dx^2 - 6dxdy - 2dy^2.$$

3.9. Teilora formula divu argumentu funkcijai

Teilora formulu divu argumentu funkcijai var iegūt, izmantojot Teilora formulu viena argumenta funkcijai. Ja funkcijai $f(x)$ punkta x_0 apkārtnē eksistē visi atvasinājumi līdz $(n+1)$ kārtai ieskaitot, tad visiem x, kas pieder šai apkārtnei, ir spēkā vienādība

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

kur $c = x_0 + \Theta(x-x_0)$ un $0 < \Theta < 1$. Ja apzīmē $x - x_0 = \Delta x$ un izmanto funkcijas $f(x)$ diferenciāļu aprēķināšanas formulas, tad Teilora formulu var uzrakstīt šādi:

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(c)}{(n+1)!},$$

kur $c = x_0 + \Theta\Delta x$ un $0 < \Theta < 1$ jeb

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \cdots + \\ + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0+\Theta\Delta x)}{(n+1)!},$$

kur $0 < \Theta < 1$.

Tagad apskata funkciju $f(x,y)$, kurai punkta (x_0, y_0) apkārtnē eksistē visi diferenciāļi līdz $(n+1)$ kārtai ieskaitot.

Izvēlas tādus patvaļīgus argumentu pieaugumus Δx un Δy, lai punkts $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ piederētu šai apkārtnei. Apskata $f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$, kur $0 \le t \le 1$. Šo izteiksmi fiksētiem Δx un Δy var uzskatīt par mainīgā t funkciju $F(t)$. Tādējādi $F(t) = f(x_0+t\Delta x, y_0+t\Delta y)$, kur $0 \le t \le 1$. Funkcijai $F(t)$ intervālā $[0,1]$ eksistē visi atvasinājumi līdz $(n+1)$ kārtai ieskaitot. Tiešām, ja $F(t)$ uzskata par saliktu funkciju $F(t) = f(x,y)$, kur $x = x_0 + t\Delta x$, $y = y_0 + t\Delta y$, tad $F(t)$ ir diferencējama funkcija kā salikta funkcija, pie tam

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = df(x,y).$$

Funkcija $F'(t)$ arī ir diferencējama. (Pamatot patstāvīgi!)

Tāpēc eksistē

$$
\begin{aligned}
F''(t) = \big(F'(t)\big)' = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right) = \\
= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y\right)\frac{dy}{dt} = \\
= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\Delta y\right)\Delta x + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y\right)\Delta y = \\
= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\Delta y^2 = d^2 f(x,y) \quad \text{utt.}
\end{aligned}
$$

Beidzot, eksistē $F^{(n+1)}(t) = d^{n+1}f(x,y)$.

Funkcijai $F(t)$ uzraksta Teilora formulu (izvēlas $t_0 = 0$ un $t = 1$):

$$
F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{n+1}(\Theta)}{(n+1)!},
$$

kur $0 < \Theta < 1$. Funkcijas $F(t)$ un tās atvasinājumu vērtības aizstāj ar atbilstošajām izteiksmēm. Iegūst, ka

$$
\begin{aligned}
f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{df(x_0,y_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_0,y_0)}{2!} + \cdots + \\
+ \frac{d^n f(x_0,y_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y)}{(n+1)!},
\end{aligned}
$$

kur $0 < \Theta < 1$.

Iegūtā formula ir **funkcijas** $f(x, y)$ **Teilora formula punkta** (x_0, y_0) **apkārtnē**.

Ja $n = 0$, tad iegūst Teilora formulas atsevišķo gadījumu - Lagranža formulu:

$$
f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + df(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y)
$$

jeb

$$
\begin{aligned}
f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \\
+ \frac{\partial f(x_0 + \Theta\Delta x, y_0 + \Theta\Delta y)}{\partial y}\Delta y,
\end{aligned}
$$

kur $0 < \Theta < 1$.

Ja $n = 1$, tad iegūst

$$
\begin{aligned}
&f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) = \\
&\quad = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)}{\partial y}\Delta y + \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_0+\Theta\Delta x, y_0+\Theta\Delta y)}{\partial x^2}\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_0+\Theta\Delta x, y_0+\Theta\Delta y)}{\partial x\partial y}\Delta x\Delta y + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \frac{\partial^2 f(x_0+\Theta\Delta x, y_0+\Theta\Delta y)}{\partial y^2}\Delta y^2\right).
\end{aligned}
$$

Jautājumi

1. Definēt punktā diferencējamu funkciju un tās diferenciāli šajā punktā.
2. Formulēt punktā diferencējamas funkcijas nepieciešamos nosacījumus.
3. Definēt funkcijas parciālos atvasinājumus un sniegt tiem ģeometrisko interpretāciju.
4. Formulēt punktā diferencējamas funkcijas pietiekamo nosacījumu.
5. Paskaidrot, kā lieto diferenciāli, lai aprēķinātu tuvinātu funkcijas vērtību.
6. Definēt funkcijas $f(x, y)$ grafika pieskarplakni un normāli.
7. Uzrakstīt funkcijas $f(x, y)$ grafika pieskarplaknes un normāles vienādojumus.
8. Kādai ir jābūt funkcijai $f(x, y)$, lai tās grafikam eksistētu pieskarplakne.
9. Formulēt teorēmu par saliktas funkcijas diferencēšanu.
10. Definēt funkcijas $f(x, y)$ atvasinājumu norādītajā virzienā.
11. Uzrakstīt funkcijai $f(x, y)$ atvasinājuma norādītajā virzienā atrašanas formulu.
12. Kāds sakars pastāv starp funkcijas parciālajiem atvasinājumiem un atvasinājumu norādītajā virzienā?
13. Definēt divu argumentu funkcijas gradientu.

14. Uzrakstīt formulu, kas saista funkcijas atvasinājumu norādītajā virzienā ar funkcijas gradientu.

15. Definēt divu argumentu funkcijas otrās kārtas parciālos atvasinājumus.

16. Definēt triju argumentu funkcijas n - tās kārtas parciālos atvasinājumus.

17. Formulēt tos nosacījumus, kad parciālie atvasinājumi nav atkarīgi no atvasināšanas secības.

18. Definēt otrās kārtas diferenciāli divu argumentu funkcijai.

19. Uzrakstīt n - tās kārtas diferenciāļa aprēķināšanas simbolisko formulu un paskaidrot tās pielietošanu.

20. Uzrakstīt Teilora formulu divu un triju argumentu funkcijām.

21. Paskaidrot, kā Teilora formulu var pielietot funkcijas aptuveno vērtību izskaitļošanā.

Vingrinājumi

1. Definēt punktā $P_0(x_0, y_0, z_0)$ diferencējamu funkciju $u = f(x, y, z)$ un tās diferenciāli šajā punktā.

2. Pierādīt, ka punktā diferencējamai funkcijai $u = f(x, y, z)$ eksistē parciālie atvasinājumi un tā ir nepārtraukta funkcija šajā punktā.

3. Atrast funkciju parciālos atvasinājumus

   (a) $z = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$;

   (b) $u = x^3 y^2 z + 2x - 3y + z + 5$.

4. Pierādīt, ka funkcija $z = \ln\left(x^2 + xy + y^2\right)$ apmierina nosacījumu $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$.

5. Izskaitļot $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$, ja $x = \rho \cos \varphi$ un $y = \rho \sin \varphi$.

6. Pierādīt, ka funkcijai $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ punktā $(0, 0)$ neeksistē parciālie atvasinājumi.

7. Atrast funkciju $z = f(x, y)$, ja

(a) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}$;

(b) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2+y^2}{x}$ un $f(1,y) = \sin y$.

(c) $\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^5y^2 + \frac{1}{x}$ un $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^6y + \cos y$.

8. Caur virsmas $z = 2x^2+y^2$ punktu $M(1,2,6)$ konstruētas divas plaknes, kas paralēlas koordinātu plaknēm xOz un yOz. Aprēķināt leņķus, kādus veido punktā M konstruētās pieskares līnijām, pa kurām šīs plaknes šķeļ virsmu, ar atbilstošajām koordinātu asīm.

9. Atrast funkcijas $f(x,y) = x^2+xy-y^2$ pilno pieaugumu un diferenciāli.

10. Funkcijai $f(x,y) = x^2y$ atrast pilno pieaugumu un diferenciāli punktā $(1,2)$. Iegūtos rezultātus salīdzināt, ja

    (a) $\Delta x = 1,\ \Delta y = 2$;

    (b) $\Delta x = 0,1,\ \Delta y = 0,2$;

    (c) $\Delta x = 0,01,\ \Delta y = 0,02$.

11. Pierādīt, ka funkcijām $u = u(x,y)$ un $v = v(x,y)$ izpildās

    (a) $d(u+v) = du + dv$;

    (b) $d(uv) = vdu + udv$;

    (c) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu-udv}{v^2}$.

12. Atrast $df(1,1)$, ja $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$.

13. Atrast $df(3,4,5)$, ja $f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

14. Sniegt ģeometrisko interpretāciju funkcijas $S = xy$ pilnajam pieaugumam un diferenciālim. (Apskatīt taisnstūri, kura malas ir x un y).

15. Uzrakstīt aptuveno vienādību triju argumentu funkcijas vērtību izskaitļošanai.

16. Noslēgta kaste, kuras ārējie izmēri ir 10 cm, 8 cm un 6 cm, izgatavota no skārda, kura biezums 2 mm. Aprēķināt tuvinātu patērētā metāla tilpuma vērtību.

17. Tuvināti izskaitļot

    (a) $1,02^{3,01}$;

(b) $\sqrt{4,05^2 + 2,93^2}$.

18. $z = e^{3x+2y}$, kur $x = \cos t$, $y = t^2$. Atrast $\frac{dz}{dt}$.

19. $z = e^{xy}$, kur $y = \ln x$. Atrast $\frac{\partial z}{\partial x}$un $\frac{dz}{dx}$.

20. Parādīt, ka funkcija $z = \varphi\big(x^2 + y^2\big)$ apmierina vienādojumu $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

21. $u = f(x, y, z)$, kur $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x, y)$. Atrast $\frac{du}{dx}$.

22. Atrast funkcijas $z = 2x^2 - 3y^2$ atvasinājumu punktā $P(1, 0)$ virzienā, kas veido ar Ox asi leņķi $120°$.

23. Atrast funkcijas $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ atvasinājumu punktā $M(1, 2)$ virzienā no šī punkta uz punktu $N(4, 6)$.

24. Atrast funkcijas $u = x^2 - 3yz + 5$ atvasinājumu punktā $M(1, 2, -1)$ virzienā, kas veido ar koordinātu asīm vienādus leņķus.

25. Atrast un ilustrēt ģeometriski funkcijas $z = x^2y$ gradientu punktā $P(1, 1)$.

26. Atrast funkcijas $u = x^2 + y^2 + z^2$ gradienta punktā $(2, -2, 1)$ moduli un virzienu.

27. Atrast leņķi starp funkcijas $z = \ln\frac{y}{x}$ gradientiem punktos $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ un $B(1, 1)$.

28. Atrast funkcijas $z = x^2 + 4y^2$ vislielāko izmaiņas ātrumu punktā $(2, 1)$.

29. Atrast funkcijas $u = xy + yz + zx$ visus otrās kārtas parciālos atvasinājumus.

30. Parādīt, ka funkcijai $z = x^y$ izpildās $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

31. Atrast $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, ja $z = f(u, v)$, kur $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

32. Atrast d^2z, ja $z = e^x y$.

33. Uzrakstīt funkcijas $u = f(x, y, z)$ otrās kārtas diferenciāļa aprēķināšanas formulas (apskatīt gadījumu, kad x, y, z - neatkarīgie argumenti, un gadījumu, kad x, y, z - starpargumenti).

34. Atrast d^3z, ja $z = e^x \cos y$.

35. Funkcijai $f(x,y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$ uzrakstīt Teilora formulu punkta $(-2,1)$ apkārtnē.

36. Funkcijai $f(x,y) = e^{x+y}$ uzrakstīt Teilora formulu punkta $(1,-1)$ apkārtnē. Iegūt arī atsevišķus gadījumus, kad $n = 0$ un $n = 1$.

37. Izmantojot Teilora formulu, tuvināti izskaitļot $(0,95)^{2,01}$. Aprēķinos izmantot tikai tos formulas locekļus, kas pēc moduļa nav mazāki par $0,01$.

IV nodaļa

VAIRĀKU ARGUMENTU FUNKCIJU PĒTĪŠANA UZ EKSTRĒMU

4.1. Vairāku argumentu funkcijas maksimums un minimums

Apskata punkta $P_0(x_0, y_0)$ apkārtnē definētu funkciju $f(x, y)$, kas nepārtraukta šajā punktā.

4.1. definīcija. Ja visiem punktiem $P(x, y)$, kas pieder punkta $P_0(x_0, y_0)$ apkārtnei un kas ir atšķirīgi no šī punkta, ir spēkā nevienādība $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, tad $P_0(x_0, y_0)$ sauc par šīs **funkcijas maksimuma punktu**, bet funkcijas vērtību šajā punktā sauc par **funkcijas maksimumu** un apzīmē $\max f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Analoģiski definē funkcijas minimuma punktu un tās minimumu.

4.2. definīcija. Funkcijas maksimuma vai minimuma punktu sauc par **funkcijas ekstrēma punktu**, bet funkcijas maksimumu vai minimumu sauc par **funkcijas ekstrēmu**.

Piemēram, funkcijai $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 - 1$ punkts $P_0(0, 1)$ ir tās minimuma punkts un $\min f(x, y) = f(0, 1) = -1$.

4.1. teorēma. (*Funkcijas ekstrēma nepieciešamais nosacījums*).

Ja $P_0(x_0, y_0)$ ir funkcijas $f(x, y)$ ekstrēma punkts, tad šajā punktā funkcijas parciālie atvasinājumi $\frac{\partial f}{\partial x}$ un $\frac{\partial f}{\partial y}$ ir nulles (protams, ja tie eksistē), vai arī šajā punktā neeksistē vismaz viens no šiem parciālajiem atvasinājumiem (tas parciālais atvasinājums, kurš eksistē, ir nulle).

► Pieņem, ka $P_0(x_0, y_0)$ ir funkcijas maksimuma punkts. Tātad šī punkta pārdurtajā apkārtnē izpildās nevienādība $f(x, y) < f(x_0, y_0)$. Izpildās arī nevienādība $f(x, y_0) < f(x_0, y_0)$. Tas nozīmē, ka x_0 ir funkcijas $f(x, y_0)$ maksimuma punkts. ($f(x, y_0)$ var uzskatīt kā viena argumenta x funkciju). Seko, ka šīs funkcijas atvasinājums, t.i., $\frac{\partial f}{\partial x}$ vai nu ir nulle (ja tas eksistē), vai arī neeksistē. Analoģiski pamato, ka $\frac{\partial f}{\partial y}$ ir vai nu nulle, vai arī neeksistē. ◄

4.1. piezīme. 4.1. teorēma ir funkcijas ekstrēma tikai nepieciešamais nosacījums. Piemēram, funkcijai $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 - 1$ parciālie atvasinājumi $\frac{\partial f}{\partial x}$ un $\frac{\partial f}{\partial y}$ punktā $P(0, 1)$ ir nulles, pie tam punkts P_0 ir šīs funkcijas minimuma punkts. Funkcijai $f(x, y) = x^2 - y^2$ parciālie atvasinājumi $\frac{\partial f}{\partial x}$ un $\frac{\partial f}{\partial y}$ punktā $P_0(0, 0)$ arī ir nulles, bet P_0 nav šīs funkcijas ekstrēma punkts. (Izmantojot ekstrēma punkta definīciju, pamatot patstāvīgi!).

4.2. piezīme. Analoģiski definē triju un vairāku mainīgo funkcijas ekstrēma punktu un ekstrēmu, formulē un pierāda ekstrēma nepieciešamo nosacījumu.

4.2. teorēma. (*Divu argumentu funkcijas ekstrēma pietiekamais nosacījums*).

Ja funkcijai $f(x, y)$ punkta $P_0(x_0, y_0)$ apkārtnē eksistē nepārtraukti pirmās un otrās kārtas parciālie atvasinājumi, pie tam

$$f'_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$$

un $AC - B^2 > 0$, kur $A = f''_{x^2}(x_0, y_0)$, $C = f''_{y^2}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, tad $P_0(x_0, y_0)$ ir šīs funkcijas ekstrēma punkts. Pie tam $P_0(x_0, y_0)$ ir funkcijas maksimuma punkts, ja $A < 0$, un minimuma punkts, ja $A > 0$. Ja $AC - B^2 < 0$, tad $P_0(x_0, y_0)$ nav šīs funkcijas ekstrēma punkts.

▶ Funkcijai $f(x, y)$ uzraksta Teilora formulu ar $n = 1$ punkta $P_0(x_0, y_0)$ apkārtnē. Argumentu pieaugumus apzīmē ar h un k.

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = hf'_x(x_0, y_0) + kf'_y(x_0, y_0) + \\ + \frac{1}{2}\big(h^2 f''_{x^2}(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k) + 2hkf''_{xy}(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k) + \\ + k^2 f''_{y^2}(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k)\big),$$

kur $0 < \Theta < 1$.

Tā kā $P_0(x_0, y_0)$ ir funkcijas stacionārais punkts, tad

$$f'_x(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Apzīmē $A = f''_{x^2}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$ un $C = f''_{y^2}(x_0, y_0)$. Saskaņā ar otrās kārtas parciālo atvasinājumu nepārtrauktību punktā $P_0(x_0, y_0)$ var rakstīt, ka

$$f''_{x^2}(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k) = A + \alpha,$$
$$f''_{xy}(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k) = B + \beta,$$
$$f''_{y^2}(x_0 + \Theta h, y_0 + \Theta k) = C + \gamma,$$

kur α, β, γ ir bezgalīgi mazas funkcijas, kad $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} \to 0$. Teilora formulu var uzrakstīt šādi:

$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{1}{2}\left(Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 + \alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2\right).$$

No 4.1. zīm. redzams, ka $k = \rho \sin\varphi$ un $h = \rho\cos\varphi$. Tāpēc

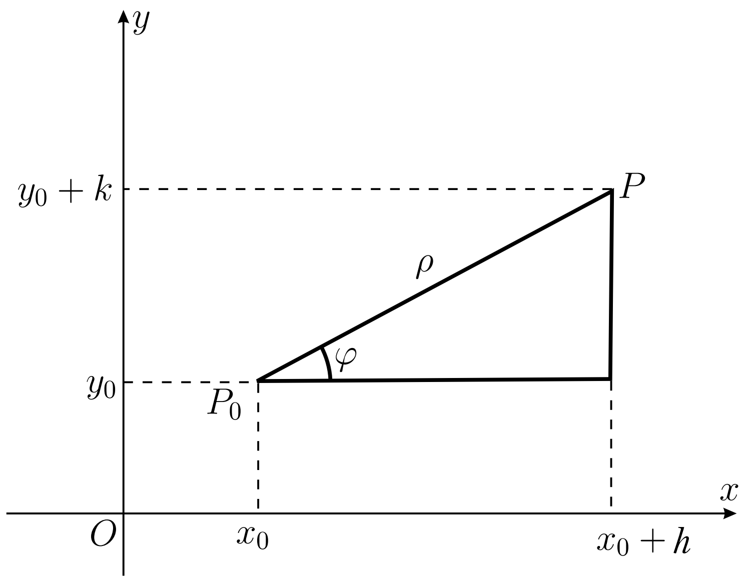
$$\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\rho^2}{2}\Big(A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi + \\ + \alpha\cos^2\varphi + 2\beta\sin\varphi\cos\varphi + \gamma\sin^2\varphi\Big).$$

Apzīmē

$$P(\varphi) = A\cos^2\varphi + 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi,$$
$$w(\rho, \varphi) = \alpha\cos^2\varphi + 2\beta\sin\varphi\cos\varphi + \gamma\sin^2\varphi$$

(α, β, γ - atkarīgi no ρ).

$$\boxed{\Delta f(x_0, y_0) = \frac{\rho^2}{2}(P(\varphi) + w(\rho, \varphi)).}$$



4.1. zīm.

Funkcija $|P(\varphi)|$ - nepārtraukta intervālā $[-\pi, \pi]$, tāpēc tā sasniedz šajā intervālā savu vismazāko vērtību $m = \min\limits_{[-\pi,\pi]} |P(\varphi)|$. Tāpēc visiem $\varphi \in [-\pi, \pi]$ izpildās $|P(\varphi)| \geq m$.

Funkcijai $w(\rho, \varphi)$ izpildās $|w(\rho, \varphi)| \leq |\alpha| + 2\,|\beta| + |\gamma|$. Ja $\rho \to 0$, tad $\alpha, \beta, \gamma \to 0$ un $w(\rho, \varphi) \to 0$. Tāpēc pietiekoši maziem ρ (neatkarīgi no φ) izpildās $|w| < m$.

Punkta $P_0(x_0, y_0)$ kaut kādā apkārtnē (pietiekoši mazam ρ) izpildās vienlaicīgi $|P(\varphi)| \geq m$ un $|w| < m$, tāpēc šajā apkārtnē funkcijas pieauguma $\Delta f(x_0, y_0)$ zīmi nosaka $P(\varphi)$ zīme. Konkrēti $\Delta f(x_0, y_0)$ zīme sakrīt ar $P(\varphi)$ zīmi.

Apskata vairākus gadījumus.

1. $\Delta = AC - B^2 > 0$.
   Pieņem, ka $\sin\varphi \neq 0$. Tātad $P(\varphi) = \sin^2\varphi(A\operatorname{ctg}^2\varphi + 2B\operatorname{ctg}\varphi + C)$.
   Kvadrāttrinoma $A\operatorname{ctg}^2\varphi + 2B\operatorname{ctg}\varphi + C$ diskriminants ir

$$D = 4B^2 - 4AC = -4\Delta < 0,$$

   tāpēc kvadrāttrinoms, kā arī $P(\varphi)$un $\Delta f(x_0, y_0)$ saglabā A zīmi.

   Ja $\sin\varphi = 0$, tad $\cos^2\varphi = 1$ un $P(\varphi) = A$. Arī šoreiz $\Delta f(x_0, y_0)$ zīme sakrīt ar A zīmi.

   (a) Ja $A > 0$, tad $\Delta f(x_0, y_0) > 0$ un $P_0(x_0, y_0)$ - funkcijas minimuma punkts (skat. 4.1. definīciju);

(b) Ja $A < 0$, tad $\Delta f(x_0, y_0) < 0$ un $P_0(x_0, y_0)$ - funkcijas maksimuma punkts.

Jāatzīmē, ka šoreiz $A \neq 0$ un tā zīme sakrīt ar C zīmi, jo pretējā gadījumā būtu $\Delta \leq 0$.

2. $\Delta = AC - B^2 < 0$.

Pieņem, ka $A \neq 0$ un, piemēram, $A > 0$. Tādā gadījumā

$$P(\varphi) = \frac{1}{A}\left((A\cos\varphi + B\sin\varphi)^2 + (AC - B^2)\sin^2\varphi\right).$$

Punkta $P_0(x_0, y_0)$ apkārtnē apskata divus virzienus $\varphi = \varphi_1 = 0$ un $\varphi = \varphi_2$, kur φ_2 nosaka no vienādojuma $A\cos\varphi + B\sin\varphi = 0$ jeb $\operatorname{ctg}\varphi = -\frac{B}{A}(A \neq 0)$. $P(\varphi_1) = A > 0$, $P(\varphi_2) = \frac{1}{A}(AC - B^2)\sin^2\varphi < 0$.

Punkta $P_0(x_0, y_0)$ apkārtnē $\Delta f(x_0, y_0)$ zīmi nesaglabā. Tādējādi $P_0(x_0, y_0)$ nav funkcijas ekstrēma punkts.

Analoģiski apskata gadījumu, kad $A < 0$.
Beidzot pieņem, ka $A = 0$.
Iegūst

$$P(\varphi) = 2B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi = \sin\varphi(2B\cos\varphi + C\sin\varphi).$$

Šoreiz $B \neq 0$, jo pretējā gadījumā būtu $\Delta = 0$.

Izteiksmes $2B\cos\varphi + C\sin\varphi$ zīme pietiekoši maziem φ ir atkarīga no $2B\cos\varphi$ zīmes, jo šādiem φ spēkā $|C\sin\varphi| < 2|B\cos\varphi|$.

Starp šādiem φ izvēlas φ_1 un apskata divus virzienus $\varphi = \varphi_1$ un $\varphi = -\varphi_1$. Acīmredzami $P(\varphi_1)$ un $P(-\varphi_1)$ zīmes ir pretējas. Tādējādi $\Delta f(x_0, y_0)$ nesaglabā zīmi un $P_0(x_0, y_0)$ nav funkcijas ekstrēma punkts.◀

4.3. piezīme. Ja $AC - B^2 = 0$, tad jautājums par punktu $P_0(x_0, y_0)$ paliek atklāts.

Funkcijas $f(x, y)$ pētīšanas uz ekstrēmu shēma.

1. Atrod $\frac{\partial f}{\partial x}$ un $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2. Atrod funkcijas **stacionāros punktus**, t.i., punktus, kuros $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ un $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

3. Atrod $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ un $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

4. Izskaitļo otrās kārtas parciālo atvasinājumu vērtības stacionārajos punktos, t.i., atrod atbilstošās vērtības A, B un C.
5. Katram stacionāram punktam izskaitļo vērtību $\Delta = AC - B^2$.
6. Atkarība no Δ zīmes (nepieciešamības gadījumā arī pēc A zīmes) izdara secinājumus par punktu $P_0(x_0, y_0)$.

4.1. piemērs. Izpētīt uz ekstrēmu funkciju

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Atrod $f'_x = 3x^2 - 3y$; $f'_y = 3y^2 - 3x$. Atrisina sistēmu

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

un iegūst funkcijas divus stacionāros punktus $(0, 0)$ un $(1, 1)$. Atrod $f''_{x^2} = 6x$, $f''_{xy} = -3$, $f''_{y^2} = 6y$. Katrā no stacionārajiem punktiem izskaitļo A, B, C un $\Delta = AC - B^2$.

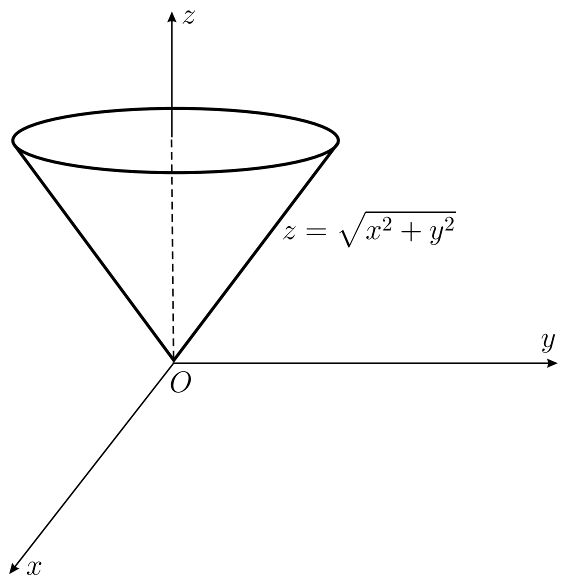
1. Punktā $(0, 0)$:
   $A = 0$; $B = -3$; $C = 0$; $\Delta = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$. Punkts $(0, 0)$ nav funkcijas ekstrēma punkts.
2. Punktā $(1, 1)$:
   $A = 6$; $B = -3$; $C = 6$; $\Delta = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 27 > 0$. Punkts $(1, 1)$ ir funkcijas ekstrēma punkts, pie tam minimuma punkts, jo $A = 6 > 0$. Tādējādi $\min f(x, y) = f(1, 1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$.

4.4. piezīme. 4.2. teorēma sniedz atbildi tikai par tiem funkcijas stacionārajiem punktiem, kuros $\Delta \neq 0$. Funkcijas tie stacionārie punkti, kuros $\Delta = 0$, un punkti, kuros izpildās ekstrēma nepieciešamais nosacījums, bet kas nav funkcijas stacionārie punkti, ir jāpēta īpaši. Tam nolūkam var lietot, piemēram, ekstrēma definīciju.

4.2. piemērs. Izpētīt uz ekstrēmu funkciju

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ekstrēma nepieciešamais nosacījums izpildās punktā $(0, 0)$. Šajā punktā funkcija nav diferencējama ($\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ - neeksistē). Acīmredzami $(0, 0)$ ir šīs funkcijas minimuma punkts, $\min f(x, y) = f(0, 0) = 0$ (4.2. zīm.).



4.2. zīm.

4.3. piemērs. Izpētīt uz ekstrēmu funkciju

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Atrisina sistēmu

$$\begin{cases} 4x^3 - 2x - 2y = 0, \\ 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

un iegūst funkcijas trīs stacionāros punktus $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. Atrod $f''_{x^2} = 12x^2 - 2$, $f''_{xy} = -2$, $f''_{y^2} = 12y^2 - 2$. Katrā no stacionārajiem punktiem izskaitļo A, B, C un Δ.

Punktā $(1, 1)$:
$A = 10$; $B = -2$; $C = 10$; $\Delta = 10 \cdot 10 - (-2)^2 = 96 > 0$. Punkts $(1, 1)$ ir funkcijas minimuma punkts, $\min f(x, y) = f(1, 1) = -2$. Analoģiski punkts $(-1, -1)$ ir arī funkcijas minimuma punkts,

$$\min f(x, y) = f(-1, -1) = -2.$$

Punktā $(0, 0)$:
$A = -2$; $B = -2$; $C = -2$; $\Delta = 0$. 4.2. teorēma nav pielietojama. Ja $x \neq 0$, tad $f(x, -x) = 2x^4 > 0$. Ja $0 < |x| < \sqrt{2}$, tad $f(x, x) = 2x^4 - 4x^2 < 0$. Punktā $(0, 0)$ funkcijas vērtība $f(0, 0) = 0$. Tātad punkta $(0, 0)$ apkārtnē funkcija var pieņemt gan pozitīvas, gan negatīvas vērtības un $f(0, 0) = 0$. Tādējādi $(0, 0)$ nav funkcijas ekstrēma punkts.

4.4. piemērs. Izpētīt uz ekstrēmu funkciju

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + 2e^{-x^2}.$$

Atrod $f'_x = 2x - 4xe^{-x^2} = 2x\left(1 - 2e^{-x^2}\right)$, $f'_y = -2y$. Atrisina sistēmu

$$\begin{cases} 2x\left(1 - 2e^{-x^2}\right) = 0, \\ -2y = 0. \end{cases}$$

Funkcijas stacionārie punkti ir $(0,0)$, $(-\sqrt{\ln 2}, 0)$, $(\sqrt{\ln 2}, 0)$. Atrod $f''_{x^2} = 2 - 4e^{-x^2} + 8x^2e^{-x^2}$; $f''_{xy} = 0$; $f''_{y^2} = -2$. Atrod A, B, C un $\Delta = AC - B^2$ katrā no stacionārajiem punktiem.

Punktā $(0,0)$:
$A = -2$, $B = 0$, $C = -2$, $\Delta = 4 > 0$. Tādējādi

$$\max f(x,y) = f(0,0) = 2.$$

Punktos $(\pm\sqrt{\ln 2}, 0)$:
$A = 4\ln 2$, $B = 0$, $C = -2$, $\Delta = -8\ln 2 < 0$. Tādējādi tie nav ekstrēma punkti.

Punkts $(0,0)$ ir funkcijas vienīgais ekstrēma punkts (konkrēti - maksimuma punkts). Šajā punktā funkcija nesasniedz ne vislielāko, ne vismazāko vērtību, jo funkcijai $f(0,y) = -y^2 + 2 \xrightarrow[y\to\infty]{} -\infty$ un funkcijai $f(x,0) = x^2 + 2e^{-x^2} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$. (Viena argumenta diferencējamai funkcijai vienīgā ekstrēma punkta gadījumā šajā punktā funkcija sasniedza savu vismazāko vērtību, ja tas bija minimuma punkts un vislielāko vērtību, ja tas bija maksimuma punkts).

4.5. piemērs. Izpētīt uz ekstrēmu funkciju

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z.$$

Atrod $f'_x = 2x - y + 1$, $f'_y = 2y - x$, $f'_z = 2z - 2$. Atrisina sistēmu

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2y - x = 0, \\ 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Punkts $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ir vienīgais šīs funkcijas stacionārais punkts.

Ekstrēma pietiekamais nosacījums triju argumentu funkcijai netika apskatīts. Šoreiz izpēta funkcijas pieauguma zīmi šajā punktā.

$$\Delta f\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)=\left(-\frac{2}{3}+\Delta x\right)^2+\left(-\frac{1}{3}+\Delta y\right)^2+(1+\Delta z)^2-$$
$$-\left(-\frac{2}{3}+\Delta x\right)\left(-\frac{1}{3}+\Delta y\right)+\left(-\frac{2}{3}+\Delta x\right)-2(1+\Delta z)-$$
$$-\left(-\frac{2}{3}\right)^2-\left(-\frac{1}{3}\right)^2-1^2+\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)+2\cdot 1=$$
$$=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2-\Delta x\Delta y=\left(\Delta x-\frac{1}{2}\Delta y\right)^2+\frac{3}{4}\Delta y^2+\Delta z^2>0$$

(jebkuriem Δx, Δy, Δz, kas vienlaicīgi nav nulles). Tādējādi punkts $\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},1\right)$ ir funkcijas minimuma punkts.

4.2. Divu argumentu funkcijas vismazākās un vislielākās vērtības atrašana

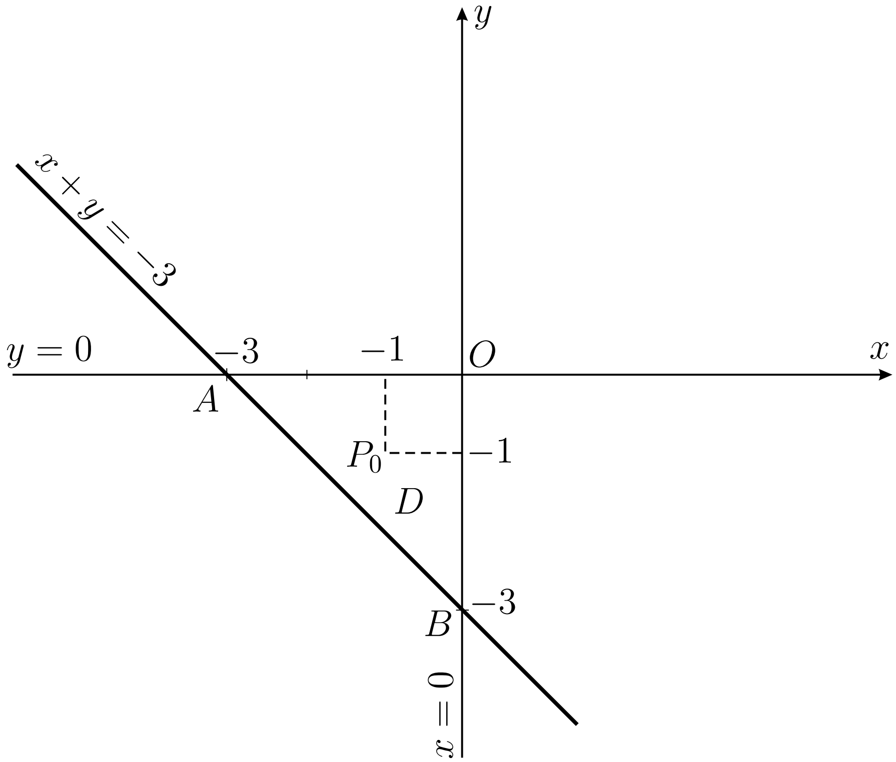
Iepriekš tika atzīmēts, ka slēgtā un ierobežotā kopā D nepārtraukta funkcija ir ierobežota un sasniedz kopā D vismazāko un vislielāko vērtību.

Skaidrs, ka šīs vērtības funkcija var sasniegt D iekšējos punktos (acīmredzami šie punkti ir funkcijas ekstrēma punkti) vai arī D robežas punktos.

Tāpēc, lai atrastu slēgtā un ierobežotā kopā D nepārtrauktas funkcijas vislielāko un vismazāko vērtību, atrod kopas D tos iekšējos punktus, kuros izpildās ekstrēma nepieciešamais nosacījums un izskaitļo funkcijas vērtības šajos punktos. Atrod arī funkcijas vislielāko un vismazāko vērtību uz D robežas (kopas D punktos iegūst viena argumenta funkciju).

Visbeidzot no visām iegūtajām funkcijas vērtībām izvēlas mazāko (apzīmē $\min\limits_D f(x,y)$) un lielāko vērtību (apzīmē $\max\limits_D f(x,y)$).

4.5. piezīme. Ja kopa D nav slēgta vai nav ierobežota, vai funkcija nav nepārtraukta kopā D, tad funkcijai vislielākā vai vismazākā vērtība var neeksistēt.



4.3. zīm.

4.6. piemērs. Atrast funkcijas

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

vismazāko un vislielāko vērtību kopā, kuru ierobežo taisnes $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -3$.

Vispirms kopu D attēlo grafiski (4.3. zīm.). Atrod $f'_x = 2x - y + 1$, $f'_y = 2y - x + 1$. Atrisina sistēmu

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0, \\ 2y - x + 1 = 0. \end{cases}$$

Funkcijas stacionārais punkts $P_0(-1, -1)$ ir kopas D iekšējais punkts. Izskaitļo $f(-1, -1) = -1$.

Pēta funkciju uz D robežas. (D robeža sastāv no 3 nogriežņiem).

1. Uz nogriežņa $OA(y = 0,\ -3 \leq x \leq 0)$ $z = x^2 + x$, $-3 \leq x \leq 0$. Atrod $z' = 2x + 1$. Punkts $x = -\frac{1}{2}$ ir intervāla $[-3, 0]$ iekšējais punkts, tāpēc izskaitļo $f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

2. Uz nogriežņa $OB(x = 0,\ -3 \leq y \leq 0)$ $z = y^2 + y,\ -3 \leq y \leq 0$. Atrod $z' = 2y + 1$. Punkts $y = -\frac{1}{2}$ ir intervāla $[-3, 0]$ iekšējais punkts, tāpēc izskaitļo $f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.
3. Uz nogriežņa $AB(y = -x - 3,\ -3 \leq x \leq 0)$

$$z = x^2 + (-x-3)^2 - x(-x-3) + x + (-x-3) = 3x^2 + 9x + 6,$$

$-3 \leq y \leq 0$. Atrod $z' = 6x + 9$. Punkts $x = -\frac{3}{2}$ ir intervāla $[-3, 0]$ iekšējais punkts, tāpēc izskaitļo $f\left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4}$.

Visbeidzot izskaitļo funkcijas vērtības trijstūra ABO (kopas D) virsotnēs.
$f(A) = f(-3, 0) = 9 - 3 = 6$;
$f(O) = f(0, 0) = 0$;
$f(B) = f(0, -3) = 9 - 3 = 6$.
Tādējādi

$$\min_D f(x, y) = f(-1, -1) = -1$$

un

$$\max_D f(x, y) = f(-3, 0) = f(0, -3) = 6.$$

Jautājumi

1. Definēt divu argumentu funkcijas maksimuma un minimuma punktu.
2. Definēt divu argumentu funkcijas maksimumu un minimumu.
3. Formulēt divu argumentu funkcijas ekstrēma nepieciešamo nosacījumu.
4. Formulēt divu argumentu funkcijas ekstrēma pietiekamo nosacījumu.
5. Formulēt divu argumentu funkcijas pētīšanas uz ekstrēmu shēmu.
6. Vai divu argumentu diferencējamai funkcijai var būt tikai divi maksimuma punkti? (Viena argumenta diferencējamai funkcijai starp diviem maksimuma punktiem vienmēr ir vismaz viens minimuma punkts).
7. Vai divu argumentu diferencējama funkcija vienīgajā ekstrēma punktā vienmēr sasniedz vislielāko vai vismazāko vērtību?
8. Kā atrast divu argumentu funkcijas vislielāko un vismazāko vērtību kopā D? Vai vienmēr šādas vērtības eksistē?

Vingrinājumi

1. Formulēt un pierādīt ekstrēma nepieciešamo nosacījumu triju argumentu funkcijai.

2. Atrast funkcijas $f(x, y, z)$ gradientu tās stacionārajā punktā.

3. Uzrakstīt pieskares vienādojumu diferencējamas funkcijas $f(x, y)$ grafikam punktā $M_0(x_0, y_0, z_0)$, kur $P_0(x_0, y_0)$ šīs funkcijas ekstrēma punkts.

4. Izmantojot definīciju, pierādīt, ka funkcijai $f(x, y) = x^2 - y^2$ punkts $(0, 0)$ nav ekstrēma punkts.

5. Izmantojot definīciju un izmantojot ekstrēma pietiekamo nosacījumu, pierādīt, ka funkcijai $f(x, y) = xy$ punkts $(0, 0)$ nav ekstrēma punkts.

6. Izpētīt uz ekstrēmu funkcijas:

   (a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y$;

   (b) $f(x, y) = (x - y)^n + y^n$, kur n - naturāls skaitlis, kurš lielāks par 2.

7. Parādīt, ka funkcijai $f(x, y) = x^2 - y^2 + e^{1-x^2}$ eksistē vienīgais ekstrēma punkts, bet šajā punktā funkcija nesasniedz ne vismazāko, ne vislielāko vērtību.

8. Paskaidrot, kā pēta uz ekstrēmu triju argumentu funkciju.

9. Atrast funkcijas $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ vismazāko un vislielāko vērtību kopā D, kuru ierobežo taisnes $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 3 - x$.

10. Atrast funkcijas $f(x, y) = x^2 y$ vislielāko un vismazāko vērtību kopā D, kuru ierobežo parabola $y = x^2$ un taisne $y = 1$.

11. Atrast funkcijas $f(x, y) = x^2 - y^2$ vismazāko un vislielāko vērtību kopā, kuru nosaka nevienādība $x^2 + y^2 \leq 1$.

V nodaļa

PIELIKUMS

5.1. Nosacītie ekstrēmi

Kā zināms, vienādojums $x^2 + y^2 = 1$ plaknē nosaka vienības riņķa līniju ar centru koordinātu sākuma punktā. Šis pats vienādojums telpā nosaka cilindrisku virsmu ar veiduli, kas ir paralēla aplikātu asij.

Vispārīgi, vienādojums $\varphi(x, y) = 0$ plaknē nosaka kaut kādu līniju, bet telpā - cilindrisku virsmu. Funkcija $f(x, y)$ telpā nosaka kaut kādu virsmu $z = f(x, y)$, kas šķeļas ar cilindrisku virsmu $\varphi(x, y) = 0$ pa telpisku līniju. Uz šīs līnijas telpā var būt minimuma un maksimuma punkti, kurus sauc par **nosacītā ekstrēma punktiem**.

Izvēlas punktu (x_0, y_0), kas apmierina vienādojumu $\varphi(x, y) = 0$ un apskata šī punkta apkārtnē definētu funkciju $f(x, y)$, kas ir nepārtraukta punktā (x_0, y_0).

5.1. definīcija. Ja visiem (x, y), kas apmierina vienādojumu $\varphi(x, y) = 0$ un pieder punkta (x_0, y_0) pārdurtai apkārtnei, izpildās nevienādība $f(x, y) < f(x_0, y_0)$, tad (x_0, y_0) sauc funkcijas $f(x, y)$ **nosacītā maksimuma punktu**. Vienādojumu $\varphi(x, y) = 0$ sauc par **saites vienādojumu**.

Analoģiski definē funkcijas $f(x, y)$ nosacītā minimuma punktu.

5.1. piezīme. Funkcijas $f(x, y)$ nosacītā maksimuma punkta definīcija ir līdzīga tās maksimuma punkta definīcijai. Atšķirība ir tikai tā, ka no (x_0, y_0) pārdurtās apkārtnes ir jāņem tikai tie punkti (x, y), kas apmierina saites vienādojumu.

Piemēram, funkcijai $f(x,y) = xy$ ekstrēma punktu nav. Ja izvēlas saites vienādojumu $y = x$, tad $(0,0)$ ir šīs funkcijas nosacītā minimuma punkts. Ja saites vienādojums ir $y = -x$, tad $(0,0)$ ir funkcijas $f(x,y) = xy$ nosacītā maksimuma punkts.

Funkcijas nosacītā ekstrēma punktu atrašanai lieto **Lagranža reizinātāju metodi**, kura izriet no šādas teorēmas.

5.1. teorēma. (*Nosacītā ekstrēma punkta eksistences nepieciešamais nosacījums.*)

Ja (x_0, y_0) ir funkcijas $f(x,y)$ nosacītā ekstrēma punkts ar saites vienādojumu $\varphi(x,y) = 0$, tad eksistē tāds skaitlis λ, ka punkts (x_0, y_0, λ) apmierina vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} F'_x(x,y) = 0, \\ F'_y(x,y) = 0, \\ \varphi(x,y) = 0, \end{cases}$$

*kur $F(x,y) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$. Funkciju $F(x,y)$ sauc par **Lagranža funkciju**.*

5.2. piezīme. Analoģiski definē triju argumentu funkcijas $f(x,y,z)$ ar saites vienādojumu $\varphi(x,y,z) = 0$ nosacītos ekstrēmus. Lagranža funkcija šoreiz $F(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z)$, bet sistēma nosacītā ekstrēma punkta atrašanai ir

$$\begin{cases} F'_x(x,y,z) = 0, \\ F'_y(x,y,z) = 0, \\ F'_z(x,y,z) = 0, \\ \varphi(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

5.1. piemērs. Lodē, kuras rādiuss ir r, ievilkt vislielākā tilpuma paralēlskaldni.

Apzīmē ar x, y, z paralēlskaldņa šķautņu garumus. Tā tilpums $V = xyz$, bet diagonāle $2r$, pie tam $x^2 + y^2 + z^2 = 4r^2$. Lai atrastu funkcijas $V = xyz$ nosacītā maksimuma punktu ar saites vienādojumu $x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2 = 0$, sastāda Lagranža funkciju

$$F(x,y,z) = xyz + \lambda\bigl(x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2\bigr).$$

Atrod $F'_x = yz + 2\lambda x$, $F'_y = xz + 2\lambda y$, $F'_z = xy + 2\lambda z$. Iegūst sistēmu

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x = 0, \\ xz + 2\lambda y = 0, \\ xy + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4r^2 = 0. \end{cases}$$

Šīs sistēmas atrisinājums $\lambda = 0$, $x = y = z = 2r\frac{\sqrt{3}}{3}$. Acīmredzami, kad $x = y = z = 2r\frac{\sqrt{3}}{3}$, funkcija $V = xyz$ sasniedz vislielāko vērtību. Šī vērtība ir $V = \left(2r\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9}r^3$, bet paralēlskaldnis ir kubs ar šķautni $2r\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Jautājumi

1. Definēt divu argumentu funkcijas nosacītā maksimuma (minimuma) punktu.
2. Divu argumentu funkcijai uzrakstīt Lagranža funkciju.
3. Formulēt divu argumentu funkcijas nosacītā ekstrēma punkta nepieciešamo nosacījumu.

Vingrinājumi

1. Definēt četru argumentu funkcijas nosacītā ekstrēma punktu.
2. Četru argumentu funkcijai uzrakstīt Lagranža funkciju un sistēmu nosacītā ekstrēma punkta atrašanai.
3. Pozitīvu skaitli a sadalīt trijos pozitīvajos saskaitāmos tā, lai to kvadrātu summa būtu vismazākā.

5.2. Netieši uzdotās funkcijas

Apskata divu argumentu funkciju $F(x, y)$ un vienādojumu

$$F(x, y) = 0. \tag{5.1}$$

Plaknes apakškopu G_F sauc par **vienādojuma grafiku**, ja šīs kopas punkti apmierina vienādojumu (5.1). Apzīmē ar A_F grafika G_F projekciju uz abscisu asi. Turpmāk apskata tādus vienādojumus (5.1), kuru grafiks nav tukša kopa.

Piemēram, vienādojuma $x^2 + y^2 - 1 = 0$ grafiks ir riņķa līnija, bet vienādojuma $(x-1)(x+y-1) = 0$ grafiks ir taisnes $x = 1$ un $x+y-1 = 0$.

Ja vienādojuma (5.1) grafiks G_F savstarpēji viennozīmīgi projicējas uz A_F, tad eksistē tāda vienīgā reālā mainīgā x funkcija f ar definīcijas apgabalu A_F, kuras grafiks sakrīt ar vienādojuma (5.1) grafiku. Funkcija f katram $x \in A_F$ piekārto to vienīgo y, kuram $F(x, y) = 0$. Tādos gadījumos saka, ka vienādojums (5.1) netieši (apslēptā veidā) uzdod mainīgā x funkciju f.

Bieži vienādojuma (5.1) grafiks G_F neprojicējas viennozīmīgi uz A_F. Tādos gadījumos kopā A_F ir uzdotas bezgalīgi daudzas x funkcijas, kuru grafiki sakrīt ar vienādojuma (5.1) grafika G_F kaut kādu apakškopu. Piemēram, ja intervālu $[-1, 1]$ sasmalcina ar starppunktiem

$$-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$$

un katrā no intervāliem $[x_{i-1}, x_i]$ funkciju $f(x)$ uzskata vienādu ar $\sqrt{1-x^2}$ vai $-\sqrt{1-x^2}$, tad iegūst funkcijas f grafiku, kas ir vienādojuma

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

grafika kaut kāda apakškopa, jo $x^2 + (f(x))^2 - 1 = 0$.

Pieņem, ka vienādojuma (5.1) grafiks G_F neprojicējas viennozīmīgi uz A_F, bet eksistē tāds taisnstūris

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \ a \leq x \leq b, \ c \leq y \leq d\right\},$$

ka grafika G_F tā daļa, kas atrodas šajā taisnstūrī, viennozīmīgi projicējas uz $[a, b]$. Tad eksistē vienīgā reālā mainīgā x funkcija f, kas uzdota intervālā $[a, b]$, kura katram $x \in [a, b]$ piekārto tādu vienīgo $y \in [c, d]$, ka $(x, y) \in G_F$. Acīmredzami $F(x, f(x)) \equiv 0$.

Saka, ka **funkcija $f(x)$ netieši uzdota taisnstūrī K ar vienādojumu** (5.1).

Piemēram, vienādojums $x^2 + y^2 - 1 = 0$ taisnstūrī

$$-1 \leq x \leq 1, \ \ 0 \leq y \leq 1$$

netieši uzdod funkciju $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, bet taisnstūrī

$$-1 \leq x \leq 1, \ \ -1 \leq y \leq 0$$

uzdod funkciju $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$.

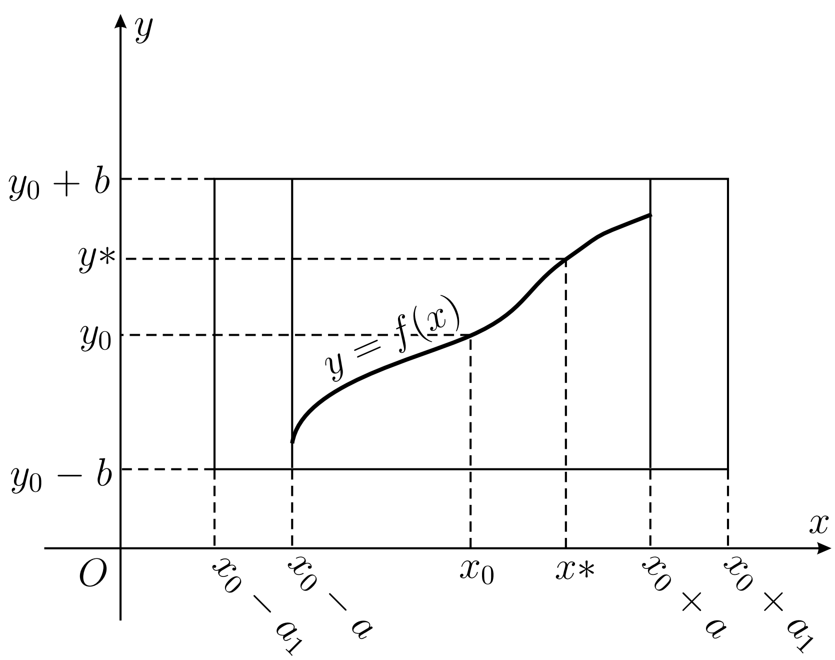
5.2. teorēma. (*Netieši uzdotas funkcijas eksistence un diferencējamība*).

Ja funkcijai $F(x,y)$ *punkta* (x_0,y_0) *kaut kādā apkārtnē eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi* $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ *un* $F(x_0,y_0)=0$, $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$, *tad eksistē tāds taisnstūris*

$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_0-a\le x\le x_0+a,\ y_0-b\le y\le y_0+b\right\},$$

kurā vienādojums $F(x,y)=0$ *netieši uzdod argumenta* x *funkciju* $f(x)$. *Funkcija* $y=f(x)$ *ir nepārtraukti diferencējama intervālā* (x_0-a,x_0+a), *pie tam*

$$f'(x)=-\frac{F'_x\big(x,f(x)\big)}{F'_y\big(x,f(x)\big)}. \tag{5.2}$$



5.1. zīm.

▶ Vispirms pierāda netiešā veidā uzdotas funkcijas eksistenci. No dotā seko, ka $F'_y(x_0,y_0)>0$ vai $F'_y(x_0,y_0)<0$. Pieņem, piemēram, ka

$$F'_y(x_0,y_0)>0. \tag{5.3}$$

Tā kā funkcija $F'_y(x,y)$ ir nepārtraukta punktā (x_0,y_0) un $F'_y(x_0,y_0)>0$, tad eksistē tāds taisnstūris (5.1. zīm.)

$$K_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x-x_0|\le a_1,\ |y-y_0|\le b\right\},$$

kurā $F'_y(x,y) > 0$.

Apskata viena argumenta funkciju $\psi(y) = f(x_0, y)$, $y_0 - b \le y \le y_0 + b$. Funkcija $\psi(y)$ aug intervālā $[y_0 - b, y_0 + b]$, jo $\psi'(y) = f'_y(x_0, y) > 0$, pie tam $\psi(y_0) = f(x_0, y_0) = 0$. Tāpēc

$$\psi(y_0 - b) = F(x_0, y_0 - b) < 0,\ \psi(y_0 + b) = F(x_0, y_0 + b) > 0. \tag{5.4}$$

Tā kā funkcija $F(x,y)$ ir nepārtraukta, tad vienādības (5.4) ir spēkā punktu $(x_0, y_0 - b)$ un $(x_0, y_0 + b)$ kaut kādās apkārtnēs. Tāpēc eksistē tāds $a \in (0, a_1)$, ka visiem $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ izpildās nevienādības

$$F(x, x_0 - b) < 0 \quad \text{un} \quad F(x, y_0 + b) > 0. \tag{5.5}$$

Parāda, ka taisnstūrī $K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\right\}$ vienādojums $F(x,y) = 0$ netieši uzdod x funkciju f. Izvēlas patvaļīgu punktu $x^* \in [x_0 - a,\ x_0 + a]$ un apskata intervālā $[y_0 - b,\ y_0 + b]$ nepārtrauktu viena argumenta funkciju $\varphi(y) = F(x^*, y)$. Saskaņā ar nevienādībām (5.5) funkcijai $\varphi(y)$ intervāla $[y_0 - b, y_0 + b]$ galapunktos vērtību zīmes ir pretējas, t.i.,

$$\varphi(y_0 - b) = F(x^*, y_0 - b) < 0,\ \varphi(y_0 + b) = F(x^*, y_0 + b) > 0.$$

Saskaņā ar Bolcano teorēmu par nepārtrauktas funkcijas starpvērtībām eksistē tāds $y^* \in [y_0 - b, y_0 + b]$, ka $\varphi(y^*) = F(x^*, y^*) = 0$. Tā kā $\varphi'(y) = F'_y(x^*, y) > 0$, tad funkcija $\varphi(y)$ aug intervālā $[y_0 - b, y_0 + b]$ un vērtību nulle tā var iegūt tikai vienā šī intervāla punktā.

Tādējādi katram $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ eksistē tāds vienīgais $y \in [y_0 - b, y_0 + b]$, ka $F(x,y) = 0$. Tas nozīmē, ka taisnstūrī K vienādojums $F(x,y) = 0$ netieši uzdod x funkciju f.

Tagad pierāda netiešā veidā uzdotas funkcijas diferencējamību.

Saskaņā ar Veierštrāsa 2. teorēmu slēgtā taisnstūrī K nepārtraukta funkcija $F'_y(x,y)$ sasniedz šajā taisnstūrī savu vismazāko vērtību α. Taisnstūrī K $F'_y(x,y) > 0$, tāpēc visiem $(x,y) \in K$ izpildās nevienādība

$$F'_y(x,y) \ge \alpha > 0. \tag{5.6}$$

Saskaņā ar Veierštrāsa 1. teorēmu taisnstūrī K nepārtraukta funkcija $F'_x(x,y)$ ir ierobežota šajā taisnstūrī. Tāpēc visiem $(x,y) \in K$ izpildās nevienādība

$$|F'_x(x,y)| < \beta. \tag{5.7}$$

Tātad funkcija $y = f(x)$ ir netieši uzdota taisnstūrī K ar vienādojumu $F(x,y) = 0$. Uz funkcijas $f(x)$ grafika izvēlas divus punktus (x,y) un $(x+\Delta x, y+\Delta y)$. Skaidrs, ka $F(x,y) = 0$ un $F(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$. Saskaņā ar Lagranža formulu pārveido starpību $F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y)$ (acīmredzami šī starpība ir nulle). Iegūst, ka

$$F'_x(x+\Theta\Delta x, y+\Theta\Delta y)\Delta x + F'_y(x+\Theta\Delta x, y+\Theta\Delta y)\Delta y = 0.$$

No šejienes

$$\Delta y = -\frac{F'_x(x+\Theta\Delta x, y+\Theta\Delta y)}{F'_y(x+\Theta\Delta x, y+\Theta\Delta y)}\Delta x, \quad 0 < \Theta < 1. \tag{5.8}$$

Ja izmanto nevienādības (5.6), (5.7), tad no (5.8) iegūst, ka

$$|\Delta y| \leq \frac{\beta}{\alpha}|\Delta x|. \tag{5.9}$$

Acīmredzami, ja $\Delta x \to 0$, tad arī $|\Delta y| \to 0$, tas nozīmē, ka netieši uzdotā funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta patvaļīgajā punktā $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. Ja vienādību (5.8) izdala ar Δx, izmanto parciālo atvasinājumu nepārtrauktību un pāriet pie robežas, kad $\Delta x \to 0$, tad iegūst, ka eksistē $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, kas vienāda ar $-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$. Tādējādi $f'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}$, kur $y = f(x)$. No šīs vienādības seko, ka atvasinājums $f'(x)$ ne tikai eksistē intervālā $[x_0 - a, x_0 + a]$, bet arī ir nepārtraukts šajā intervālā, kā nepārtrauktu funkciju dalījums. ◀

5.3. piezīme. Ja vienādojums $F(x,y) = 0$ taisnstūrī

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d$$

netieši uzdot funkciju $f(x)$, tad formulu (5.2) var iegūt formāli atvasinot pēc x identitāti $F\big(x, f(x)\big) \equiv 0$.

5.2. definīcija. Par kopu A un B **tiešo** jeb **Dekarta reizinājumu** $A \times B$ sauc tādu pāru (x,y) kopu, kur $x \in A$ un $y \in B$.

Piemēram, Dekarta reizinājumu $[a,b] \times [c,d]$ veido tādu reālu skaitļu x un y pāri (x,y), kur $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$. Tika iegūts slēgts taisnstūris telpā $\mathbb{R}^2$.

5.3. definīcija. Par punkta $P_0\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n\right) \in \mathbb{R}^n$ **kubveida apkārtni** $K(P_0)$ sauc telpas $\mathbb{R}^n$ tādu punktu $P((x_1, x_2, \ldots, x_n))$ kopu, kur $\left|x_i - \overset{\circ}{x}_i\right| < \varepsilon$ (i=1,…,n).

Acīmredzami, ja K_1, K_2 ir atbilstoši punktu $\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n\right) \in \mathbb{R}^n$ un $\left(\overset{\circ}{y}_1, \overset{\circ}{y}_2, \ldots, \overset{\circ}{y}_m\right) \in \mathbb{R}^m$ kubveida apkārtnes, tad $K_1 \times K_2$ ir punkta $\left(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{y}_1, \overset{\circ}{y}_2, \ldots, \overset{\circ}{y}_m\right) \in \mathbb{R}^{n+m}$ kubveida apkārtne. Apskata m vienādojumu sistēmu ar $(n+m)$ nezināmiem:

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \qquad\qquad \ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

Uzskata, ka funkcijas F_i $(i = 1, \ldots, m)$ definētas punkta $(\overset{\circ}{x}_1, \overset{\circ}{x}_2, \ldots, \overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{y}_1, \overset{\circ}{y}_2, \ldots, \overset{\circ}{y}_m)$ kaut kādā kubveida apkārtnē.

5.4. definīcija. Ja K_1, K_2 ir atbilstoši punktu $\left(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n\right) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\overset{\circ}{y}_1, \ldots, \overset{\circ}{y}_m\right) \in \mathbb{R}^m$ kubveida apkārtnes un jebkuram punktam $(x_1, \ldots, x_n) \in K_1$ eksistē tāds vienīgais punkts $(y_1, \ldots, y_m) \in K_2$, ka

$$\begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \qquad\qquad \ldots \\ F_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \end{cases}$$

tad saka, ka **kubveida apkārtnē $K_1 \times K_2$ šī sistēma netieši definē $y_1, \ldots, y_m$ kā mainīgo $x_1, \ldots, x_n$ funkcijas**.

5.3. teorēma. *Ja izpildās šādi nosacījumi:*

1. *funkcijas $F_i(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots, y_m)$ $(i = 1, \ldots, m)$ ir nepārtraukti diferencējamas punkta $\left(\overset{\circ}{x}_1, \ldots \overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{y}_1, \ldots, \overset{\circ}{y}_m\right)$ kubveida apkārtnē,*
2. *$F_i\left(\overset{\circ}{x}_1, \ldots \overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{y}_1, \ldots, \overset{\circ}{y}_m\right) = 0$ $(i = 1, \ldots, m)$,*
3. *punktā $\left(\overset{\circ}{x}_1, \ldots \overset{\circ}{x}_n, \overset{\circ}{y}_1, \ldots, \overset{\circ}{y}_m\right)$ determinante*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ & \ldots & \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

tad eksistē punktu $\left(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_n\right) \in \mathbb{R}^n$ un $\left(\overset{\circ}{y}_1, \ldots, \overset{\circ}{y}_m\right) \in \mathbb{R}^m$ tādas kubveida apkārtnes K_1 un K_2, ka kubveida apkārtnē $K_1 \times K_2$ sistēma

(5.10) *netieši definē* $y_1, \dots, y_m$ *kā mainīgo* $x_1, \dots, x_n$ *funkcijas. Funkcijas* $y_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_n)$ *ir nepārtraukti diferencējamas kubveida apkārtnē* K_1 *un* $\overset{\circ}{y}_j = \varphi_j(\overset{\circ}{x}_1, \dots, \overset{\circ}{x}_n) \quad (j = 1, \dots, m)$.

5.4. piezīme. Šo teorēmu var pierādīt, piemēram, ar matemātiskās indukcijas metodi.

5.2. piemērs. Noskaidrot, vai vienādojums $e^y + y\sin x - x^3 + 7 = 0$ netieši uzdod diferencējamu funkciju.

Funkcija $F(x,y) = e^y + y\sin x - x^3 + 7$ definēta visā xOy plaknē. Visā plaknē eksistē nepārtraukti parciālie atvasinājumi $F'_x = y\cos x - 3x^2$ un $F'_y = e^y + \sin x$. Piemēram, punktā $(2,0)$ funkcijas $F(x,y)$ vērtība ir nulle, t.i., $F(2,0) = 0$, bet parciālais atvasinājums

$$F'_y(2,0) = 1 + \sin 2 \neq 0$$

(starp citu arī $F'_x(2,0) = -12 \neq 0$). Saskaņā ar 5.2. teorēmu dotais vienādojums punkta $x = 2$ kaut kādā apkārtnē netieši definē y kā x funkciju. (Šis vienādojums punkta $y = 0$ kaut kādā apkārtnē netieši definē x kā y funkciju). No vienādojuma nav iespējams caur galīga skaita elementārām funkcijām izteikt y caur x (nevar izteikt arī x caur y). Atrod, piemēram, $y'(x)$. Tam nolūkam izmanto formulu $y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}$. Tādējādi

$$y'(x) = -\frac{y\cos x - 3x^2}{e^y + \sin x} = \frac{3x^2 - y\cos x}{e^y + \sin x}.$$

Atvasinājumu var atrast arī neizmantojot minēto formulu, bet diferencējot pēc x vienādojumu $e^y + y\sin x - x^3 + 7 = 0$. Uz mainīgo y skatās kā uz x funkciju. Iegūst $e^y y' + y'\sin x + y\cos x - 3x^2 = 0$. Izsaka $y' = \frac{3x^2 - y\cos x}{e^y + \sin x}$.

5.3. piemērs. Parādīt, ka vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} x^2 - 2y^3 - z^3 = 0, \\ x^3 - y^5 + z^2 = 1 \end{cases}$$

punkta $x = 1$ kaut kādā apkārtnē netieši uzdod y un z kā x diferencējamas funkcijas. Izskaitļot y' un z' punktā $x = 1$, ja $y(1) = 1$ un $z(1) = -1$.

Funkcijas $F_1(x,y,z) = x^2 - 2y^3 - z^3$ un $F_2(x,y,z) = x^3 - y^5 + z^2 - 1$ definētas patvaļīgām x, y un z vērtībām. Parciālie atvasinājumi

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 3x^2,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -6y^2, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial y} = -5y^4,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = -3z^2, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = 2z$$

ir nepārtraukti patvaļīgām x, y un z vērtībām. Punktā $(1, 1, -1)$ funkciju $F_1(x,y,z)$ un $F_2(x,y,z)$ vērtības ir nulle, t.i.,

$$F_1(1,1,-1) = F_2(1,1,-1) = 0,$$

bet atbilstošā funkcionāldeterminante (skat.5.3. teorēmu) nav nulle. Tiešām

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -6y^2 & -3z^2 \\ -5y^4 & 2z \end{vmatrix}$$

un punktā $y = 1$, $z = -1$ tās vērtība

$$\begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

Saskaņā ar 5.3. teorēmu dotā vienādojumu sistēma punkta $x = 1$ kaut kādā apkārtnē netieši uzdod y un z kā x diferencējamas funkcijas. Lai izskaitļotu šo funkciju atvasinājumu vērtības punktā $x = 1$, vispirms diferencē pēc x sistēmas abus vienādojumus

$$\begin{cases} 2x - 6y^2y' - 3z^2z' = 0, \\ 3x^2 - 5y^4y' + 2zz' = 0. \end{cases}$$

Tagad ievieto $x = 1$, $y = 1$ un $z = -1$. Iegūst sistēmu

$$\begin{cases} 2 - y' - 3z' = 0, \\ 3 - 5y' + 2z' = 0, \end{cases}$$

kuras atrisinājums ir $y' = \frac{5}{3}$, $z' = -\frac{8}{3}$.

5.4. piemērs. Noskaidrot, vai vienādojums $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ kaut kāda punkta apkārtnē netieši uzdod, piemēram, z kā x un y diferencējamu funkciju.

Funkcija $F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ definēta patvaļīgām x, y un z vērtībām. Parciālie atvasinājumi $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = -2z$ nepārtraukti jebkurā punktā (x,y,z). Piemēram, punktā $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ funkcijas $F(x,y,z)$ vērtība ir nulle, t.i., $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = 0$, bet parciālais atvasinājums $F'_z\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right) = -2 \neq 0$. Tāpēc punkta $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ kaut kādā apkārtnē dotais vienādojums netieši uzdod z kā argumentu x un y diferencējamu funkciju. Funkcijas $z = f(x,y)$ parciālos atvasinājumus var atrast pēc formulām: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$. Tādējādi $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}$. Parciālos atvasinājumus $\frac{\partial z}{\partial x}$ un $\frac{\partial z}{\partial y}$ var atrast, diferencējot vienādojumu $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ vienreiz pēc x un otrreiz pēc y. Iegūst vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 2x - 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \\ 2y - 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

Tās atrisinājums ir $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}$.

Jautājumi

1. Kā netieši (apslēptā veidā) var uzdot viena mainīgā funkciju? Vai vienādojums $F(x,y) = 0$ vienmēr netieši uzdod y kā mainīgā x funkciju?
2. Formulēt teorēmu par netieši uzdotās viena mainīgā funkcijas eksistenci un diferencējamību.
3. Definēt divu patvaļīgu kopu Dekarta reizinājumu.
4. Definēt telpas $\mathbb{R}^n$ punkta kubveida apkārtni.
5. Kā netieši var uzdot n mainīgo funkcijas?
6. Formulēt teorēmu par netieši uzdotu n mainīgo funkciju eksistenci un diferencējamību.

Vingrinājumi

1. Kā netieši var uzdot divu, triju un n argumentu funkciju?
2. Formulēt teorēmas par netieši uzdotas divu, triju un n - argumentu funkcijas eksistenci un diferencējamību.

3. Noskaidrot, vai vienādojumi netieši uzdod y kā mainīgā x diferencējamu funkciju. Diferencējamai funkcijai atrast atvasinājumu:

   (a) $\left(x^2+y^2\right)^3 - 3\left(x^2+y^2\right) + 1 = 0$;

   (b) $y = 1 + y^x$;

   (c) $\ln\sqrt{x^2+y^2} = a \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $(a \neq 0)$;

   (d) $1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) = 0$.

4. Parādīt, ka vienādojumi netieši uzdod z kā mainīgo x un y diferencējamu funkciju. Atrast šīs funkcijas parciālos atvasinājumus:

   (a) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$;

   (b) $x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1$;

   (c) $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$, ja $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

5. Parādīt, ka vienādojumu sistēmas netieši uzdod u un v kā mainīgo x un y diferencējamas funkcijas. Atrast šo funkciju parciālos atvasinājumus:

   (a) $\begin{cases} u + v = x + y, \\ xu + yv = 1; \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} u = x + y, \\ uv = y. \end{cases}$

LITERATŪRA

[1] S. Nikoļskis. Matemātiskā analīze. 1. daļa. - R.: Zvaigzne, 1976.

[2] Б.Ф. Бутузов, Н.Ч. Крутицкая, Г.Н. Медведев, А.А. Шишкин. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных. - М.: Высшая школа, 1988.

[3] В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. Основы математического анализа. Часть 1. - М.: Наука, 1982.

[4] В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. Математический анализ. - М.: Наука, 1979.

[5] А.П. Карташев, Б.Л. Рождественский. Математический анализ. - М.: Наука, 1984.

[6] С.В. Мантуров, Н.М. Матвеев. Курс высшей математики. - М.: Высшая школа, 1986.

[7] А.Г. Мордкович, А.С. Солодовников. Математический анализ. - М.: Высшая школа, 1990.

[8] А.М. Тер-крикоров, М.И. Шабунин. Курс математического анализа. - М.: Наука, 1988.

[9] И.М. Уваренков, М.З. Маллер. Курс математического анализа. Часть 2. - М.: Просвещение, 1976.

SATURS