Daugavpils Universitāte

MATEMĀTISKĀS ANALĪZES KATEDRA

Vitolds GEDROICS

VIENA ARGUMENTA FUNKCIJU DIFERENCIĀLRĒĶINI

2002

ANOTĀCIJA

Mācību līdzeklis ir turpinājums V. Gedroica mācību līdzeklim "Ievads matemātiskajā analīzē". Mācību līdzeklī iekļautas četras tēmas: diferencējamas funkcijas, diferenciālrēķinu pamatteorēmas, atvasinājuma lietojumi funkciju pētīšanā, parametriski uzdotas funkcijas un vektorfunkcijas. Mācību līdzeklī iekļauti gan teorētiska, gan praktiska rakstura uzdevumi. Katras tēmas beigās sniegti jautājumi zināšanu kontrolei un vingrinājumi vielas nostiprināšanai. Pierādījuma sākums un beigas apzīmēti atbilstoši ar simboliem ▶ un ◀.

Priekšvārds

Matemātikas vēsturē 17. gs. uzskata par lūzuma gadsimtu. Dekarts[1] plaknes līkņu pētīšanai ieviesa koordinātu metodi. Dabaszinātņu attīstība radīja nepieciešmību pētīt funkcijas, it īpaši tādas funkcijas, kuras izsaka kustīgu ķermeņu koordinātu un citu fizikālu lielumu atkarību no laika. Matemātikā ieviesa atvasinājumu, kuru izmantoja, lai noteiktu funkcijas ekstrēmus, dažādu līniju pieskares utt. Dekarta, Paskāla[2] un Fermā[3] pirmie darbi jau saturēja būtībā jebkuru polinomu atvasinājumu aprēķināšanas likumus. Sistemātisku mācību par atvasinājumiem - diferenciālrēķiniem - attīstīja vācu matemātiķis un filozofs Gotfrīds Vilhelms Leibnics (1646-1716), kā arī angļu matemātiķis un moderno matemātisko dabaszinātņu pamatlicējs Izaks Ņūtons (1643-1727).

Tikai pēc Košī darbiem 19. gs. matemātiskās analīzes pamati tika loģiski pamatoti. Šim nolūkam bija vajadzīga stingra reālo skaitļu teorija. Taču to izveidoja tikai 19. gs. otrajā pusē Veierštrāss, Dedekinds un Kantors.

[1]Renē Dekarts (1596-1650) - franču matemātiķis un filozofs.
[2]Blēzs Paskāls (1623-1662) - franču matemātiķis, fiziķis un filozofs.
[3]Pjērs Fermā (1601-1665) - franču matemātiķis un jurists.

I nodaļa

DIFERENCĒJAMAS FUNKCIJAS

1.1. Funkcijas atvasinājums

Apskatīsim funkciju f, kas definēta punkta x_0 apkārtnē.

1.1. definīcija. Par funkcijas f **atvasinājumu punktā** x_0 sauc šādu robežu[1]:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Funkcijas f atvasinājumu punktā x_0 apzīmē ar $f'(x_0)$ (lasa: "ef prim no x_0"). Saskaņā ar šo definīciju $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.

1.2. definīcija. Funkciju, kurai punktā x_0 eksistē galīgs atvasinājums, sauc par **diferencējamu**[2] jeb atvasināmu šajā punktā.

Pieņemsim, ka D_1 ir punktu kopa[3], kurā funkcija f ir diferencējama. Katram skaitlim $x_0 \in D_1$ piekārtojot skaitli $f'(x_0)$, iegūsim funkciju, kas definēta kopā D_1. Šo funkciju sauc par funkcijas f atvasināto funkciju jeb **atvasinājumu** un apzīmē ar f' vai $\frac{df}{dx}$[4] (attiecīgi lasa: "ef prim", "de ef pēc de iks"). Lai, izmantojot atvasinājuma definīciju, noteiktu funkcijas f atvasinājumu punktā x_0, rīkojas šādi.

---

[1] Uzskata, ka šāda robeža eksistē.

[2] Šis nosaukums radies no latīņu valodas vārda "diferentia", kas nozīmē "starpība". Tiešām, nosakot atvasinājumu, ir jāsastāda argumentam un funkcijai vērtību starpības.

[3] Kopa D_1 iekļaujas šīs funkcijas definīcijas apgabalā $D(f)$.

[4] Leibnics atvasinājumu apzīmēja ar $\frac{df}{dx}$, bet vēlāk franču matemātiķis Ž ozefs Luī Lagranžs (1736 - 1813) ieteica to apzīmēt ar f'. Ņūtona atvasinājuma apzīmējumu $\dot{f}$ pašlaik matemātikā nelieto. Tomēr mehānikā arī šodien atvasinājumu pēc laika mēdz apzīmēt ar punktu.

1. Izvēlas tādu argumenta pieaugumu Δx, ka $x_0+\Delta x \in D(f)$ un sastāda tam atbilstošo funkcijas pieaugumu punktā x_0, t.i., $\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$;
2. Sastāda funkcijas pieauguma punktā x_0 attiecību pret argumenta pieaugumu, t.i., $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$.
3. Aprēķina attiecības $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ robežu, kad argumenta pieaugums $\Delta x \to 0$.

1.1. piezīme.

1. Ja šādai attiecībai $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ robeža neeksistē, tad punktā x_0 atvasinājums neeksistē (funkcija nav diferencējama punktā x_0).
2. Ja $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty$ vai $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -\infty$, tad saka, ka punktā x_0 funkcijai f ir bezgalīgs atvasinājums, un to pieraksta šādi: $f'(x_0) = +\infty$ vai $f'(x_0) = -\infty$ (arī šoreiz funkcija nav diferencējama punktā x_0).
3. Ja punkts nav dots (šoreiz ir jāatrod funkcijas atvasinājums, kas ir jauna kopā D_1 definēta funkcija), tad izvēlas funkcijas f definīcijas apgabala patvaļīgu iekšējo punktu x_0 un, rīkojoties pēc iepriekš minētās shēmas, atrod $f'(x_0)$. Visbeidzot, lai iegūtu atvasinājumu, x_0 vietā raksta x, un ar to saprot patvaļīgu kopas D_1 punktu.

1.1. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x) = x^2$ atvasinājumu punktā $x_0 = 1$.

Rīkosimies pēc iepriekš minētās shēmas.

1. $\Delta f(1) = f(1+\Delta x) - f(1) = (1+\Delta x)^2 - 1^2 = 2\Delta x + \Delta x^2$;
2. $\dfrac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \dfrac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x$;
3. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x) = 2.$

Tādējādi $f'(1) = 2$.

1.2. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x) = \sqrt{x}$, atvasinājumu punktā x_0 ($x_0 \neq 0$).

1. $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}$;

2. $$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \frac{\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}};$$

3. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Tādējādi $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

1.3. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x) = \sin 2x$ atvasinājumu.

1. Izvēlēsimies patvaļīgu $x_0 \in \mathbb{R}$ un atradīsim
$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \sin 2(x_0 + \Delta x) - \sin 2x_0 = 2\sin \Delta x \cos(2x_0 + \Delta x);$$

2. $$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{2\sin \Delta x \cos(2x_0 + \Delta x)}{\Delta x};$$

3. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = 2 \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cos(2x_0 + \Delta x)\right) = 2 \cdot 1 \cdot \cos 2x_0 = 2\cos 2x_0.$$

Tādējādi $f'(x_0) = 2\cos 2x_0$.

Visbeidzot $f'(x) = 2\cos 2x$.

1.4. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x) = |x|$ atvasinājumu.

Izvēlēsimies $x_0 < 0$ un tādu Δx, ka $x_0 + \Delta x < 0$.

1. $$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |x_0 + \Delta x| - |x_0| = -(x_0 + \Delta x) - (-x_0) = -\Delta x;$$

2. $$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1;$$

3. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-1) = -1$$

Tādējādi $f'(x) = -1$.

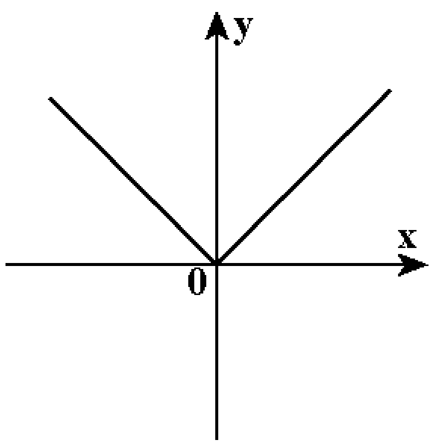
Visbeidzot $f'(x) = -1$, ja $x < 0$. Analogi $f'(x) = 1$, ja $x > 0$. Acīmredzami $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$ neeksistē, jo

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} \neq \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x}.$$

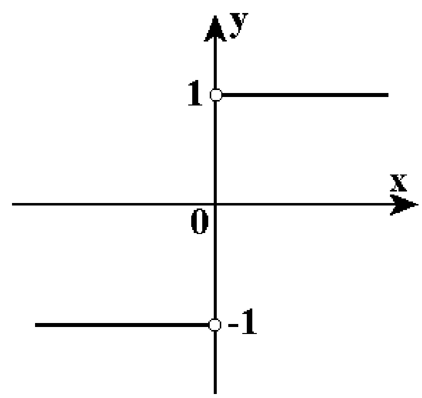
Tādējādi $f'(0)$ - neeksistē, citiem vārdiem, funkcija punktā $x_0 = 0$ nav diferencējama.

Tādējādi funkcijas $f(x) = |x|$ (1.1. zīm.) atvasinājums ir definēts ar formulu

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{ja} \quad x < 0, \\ 1, & \text{ja} \quad x > 0. \end{cases}$$



1.1. zīmējums



1.2. zīmējums

Pēc analoģijas ar funkcijas vienpusējām robežām tiek definēti arī funkcijas vienpusējie atvasinājumi.

1.3. definīcija. Par funkcijas f **atvasinājumu no labās (kreisās) puses punktā** x_0 sauc attiecības $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ robežu, kad Δx tiecas uz nulli no labās (kreisās) puses, pieņemot, ka šāda robeža eksistē.

Funkcijas atvasinājumu no labās puses punktā x_0 apzīmē ar simbolu $f'(x_0 + 0)$, bet no kreisās puses - ar simbolu $f'(x_0 - 0)$. Tādējādi

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

un

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

1.2. piezīme. No funkcijas robežas un tās vienpusējo robežu definīcijām izriet, ka atvasinājums $f'(x_0)$ eksistē tad un tikai tad, ja punktā x_0 eksistē vienādi funkcijas f vienpusējie atvasinājumi.

Piemēram, funkcijai $f(x) = |x|$ punktā $x_0 = 0$ eksistē vienpusējie atvasinājumi, t.i., $f'(0-0) = -1$, $f'(0+0) = 1$, bet tie nav vienādi. Tātad $f'(0)$ - neeksistē.

Sakaru starp diferencējamu un nepārtrauktu funkciju izsaka šāda teorēma.

1.1. teorēma. *Ja funkcija f ir diferencējama punktā x_0, tad tā ir nepārtraukta šajā punktā.*

▶ Saskaņā ar doto eksistē galīgs $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$. Uzrakstīsim acīmredzamu vienādību $\Delta f(x_0) = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \Delta x$ $(\Delta x \neq 0)$. Šajā vienādībā pāriesim pie robežas, kad Δx tiecas uz nulli. Iegūsim, ka

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \Delta x \right) = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

Seko, ka funkcija f ir nepārtraukta punktā x_0. ◀

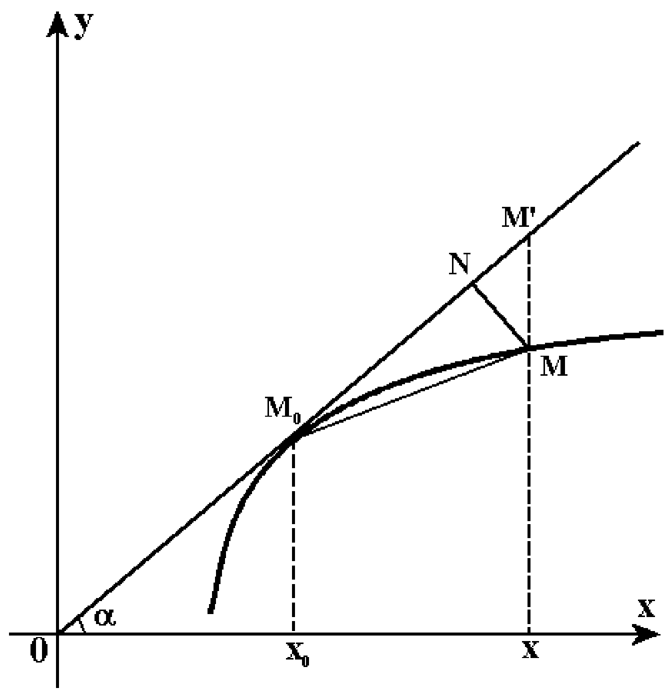
1.3. piezīme. Apgrieztā teorēma nav spēkā, t.i., vispārīgā gadījumā no funkcijas nepārtrauktības kādā punktā neseko tās diferencējamība šajā punktā. Piemēram, funkcija $f(x) = |x|$ ir nepārtraukta punktā $x_0 = 0$, bet atvasinājums šajā punktā neeksistē. Apskatīsim vēl vienu piemēru. Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ir nepārtraukta punktā $x_0 = 0$, bet šajā punktā tā nav diferencējama, jo punktā $x_0 = 0$ tai neeksistē galīgs atvasinājums. Šoreiz $f'(0) = +\infty$.

1.4. definīcija. Funkciju sauc par **diferencējamu kopā** D, ja tā ir diferencējama šīs kopas katrā punktā.

1.5. definīcija. Funkciju, kas ir diferencējama savā definīcijas apgabalā, sauc par **diferencējamu funkciju**.

1.2. Funkcijas atvasinājuma ğeometriskā un fizikālā interpretācija

Apskatīsim funkciju f, kas ir nepārtraukta punktā x_0. Šādas funkcijas grafiks attēlots 1.3. zīmējumā.



1.3. zīmējums

1.6. definīcija. Par funkcijas f **grafika pieskari punktā** $M_0(x_0; f(x_0))$ sauc taisni, kas iet caur šo punktu un kas apmierina šādu nosacījumu: attālums MN no grafika patvaļīga punkta $M(x; f(x))$ līdz šai taisnei ir pēc patikas mazs salīdzinot ar attālumu M_0M, kad x tiecas uz x_0, t.i., $\frac{MN}{M_0M} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$.

1.2. teorēma. *Ja funkcija f - diferencējama punktā x_0, tad tās grafikam atbilstošajā punktā $M_0(x_0; f(x_0))$ eksistē pieskare, kuras vienādojums ir*

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).} \tag{1.1}$$

► Tā kā funkcija f - diferencējama punktā x_0, tad tā ir nepārtraukta šajā punktā un eksistē galīgs

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Saskaņā ar funkcijas robežu īpašībām $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0$. Tas nozīmē, ka $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) = \alpha(\Delta x)$, kur α - bezgalīgi maza funkcija, kad

Δx tiecas uz nulli. No šīs vienādības iegūsim, ka

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

citiem vārdiem,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{1.2}$$

kur $x = x_0 + \Delta x$ un $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

Acīmredzami, (1.1) ir taisnes, kas iet caur punktu $M_0\,(x_0; f(x_0))$, vienādojums. Atliek pierādīt, ka šī taisne ir funkcijas f grafikam punktā M_0 konstruētā pieskare. Tam nolūkam ir jāparāda, ka izpildās nosacījums $\frac{MN}{M_0M} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$ (1.3. zīm.). No vienādības (1.2) atņemsim (1.1) un iegūsim:

$$f(x) - y = \alpha(\Delta x)\Delta x. \tag{1.3}$$

Apskatīsim attiecību

$$\frac{MN}{M_0M} \leq \frac{MM'}{M_0M} \leq \frac{MM'}{|x - x_0|} = \frac{MM'}{|\Delta x|}.$$

Var saskatīt, ka $MM' = |y - f(x)|$ (situācijā, kas attēlota 1.3. zīmējumā, $MM' = y - f(x)$, jo punkta M' ordināta ir y, bet punkta M ordināta ir $f(x)$). Atsaucoties uz vienādību (1.3), var rakstīt, ka

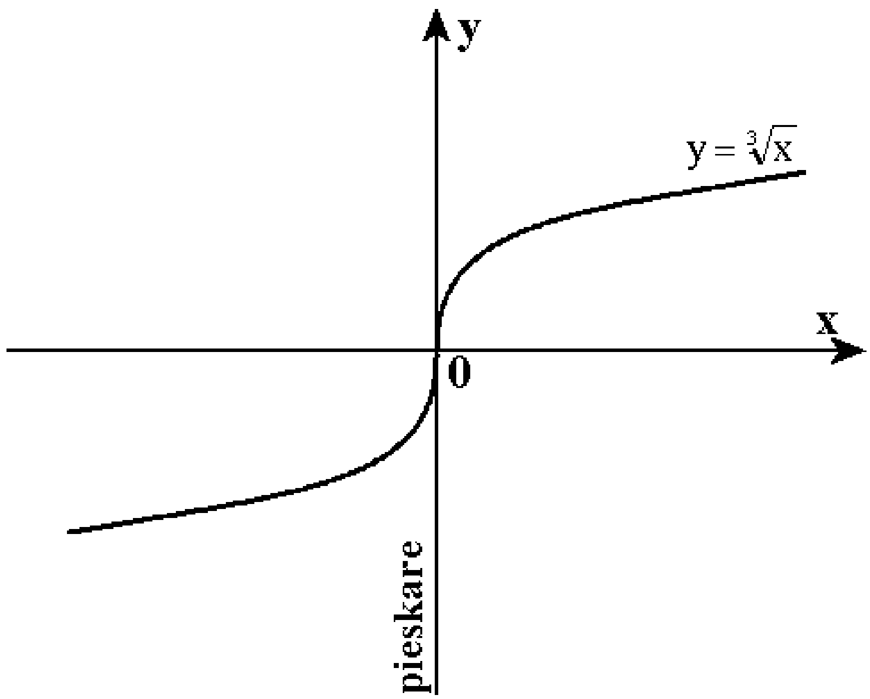
$$MM' = |\alpha(\Delta x)| \cdot |\Delta x|.$$

Tāpēc

$$\frac{MN}{M_0M} \leq \frac{|\alpha(\Delta x)| \cdot |\Delta x|}{|\Delta x|} = |\alpha(\Delta x)|.$$

Acīmredzami, $\frac{MN}{M_0M} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$, jo $\lim\limits_{\Delta x \to 0} |\alpha(\Delta x)| = 0$. Teorēma ir pierādīta. ◀

1.4. piezīme. Funkcijas f grafikam punktā $M_0\,(x_0, f(x_0))$ konstruētās pieskares virziena koeficients $k = \operatorname{tg}\alpha$ acīmredzami ir vienāds ar $f'(x_0)$, t.i., $k = f'(x_0)$. No šejienes arī izriet funkcijas **atvasinājuma ģeometriskā nozīme**. Funkcijas f atvasinājums punktā x_0 ir tās grafikam atbilstošajā punktā $M_0\,(x_0, f(x_0))$ konstruētās pieskares virziena koeficients (1.3. zīm.).



1.4. zīmējums

Ja funkcijai f punktā x_0 ir bezgalīgs atvasinājums, tad funkcijas grafikam atbilstošajā punktā $M_0\,(x_0, f(x_0))$ arī eksistē pieskare un tā ir paralēla ordinātu asij; tās vienādojums ir $x = x_0$. Piemēram, funkcijai $f(x) = \sqrt[3]{x}$ punktā $x_0 = 0$ atvasinājums ir bezgalīgs. Tās grafikam atbilstošajā punktā $O(0, 0)$ konstruētā pieskare ir ordinātu ass. Pieskares vienādojums ir $x = 0$ (1.4. zīm.).

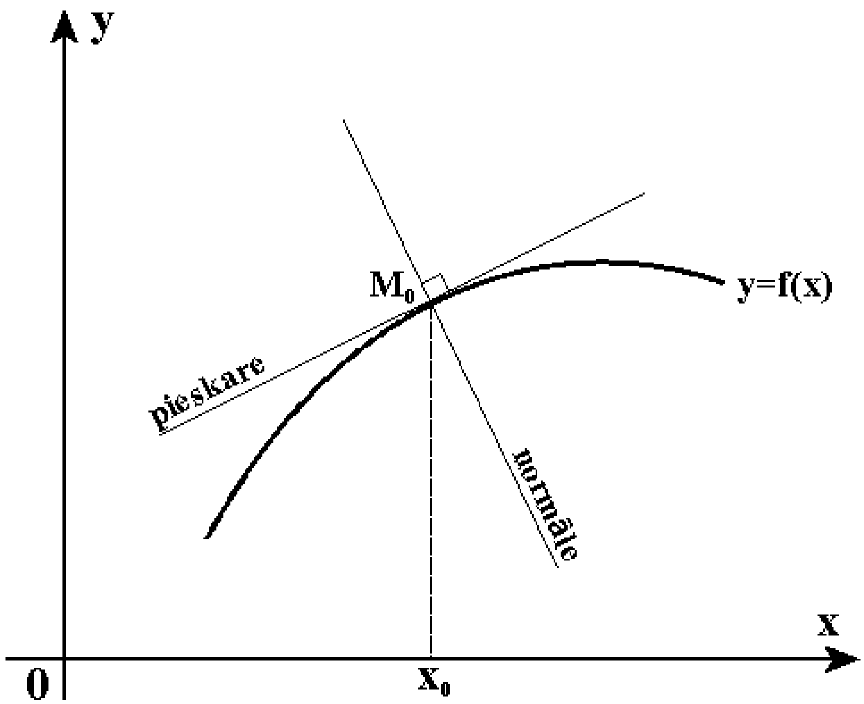
1.7. definīcija. Par funkcijas f **grafika normāli** punktā $M_0\,(x_0; f(x_0))$ sauc taisni, kas iet caur šo punktu un ir perpendikulāra šajā punktā konstruētajai pieskarei (1.5. zīm.).

Tātad punktā M_0 novilktā normāle un pieskare ir perpendikulāras un pēc divu taišņu perpendikularitātes nosacījuma

$$k_n = -\frac{1}{k_p} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Tādējādi normāles vienādojums ir

$$\boxed{y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).}$$



1.5. zīmējums

1.5. piemērs. Sastādīt funkcijas $f(x) = x^2$ grafikam punktā $M_0(1;1)$ novilktās pieskares un normāles vienādojumus.

Saskaņā ar rezultātu, kas tika iegūts 1.1. piemērā, $f'(1) = 2$. Tādējādi $k_p = 2$ un $k_n = -\frac{1}{2}$. Pieskares vienādojums ir $y-1 = 2(x-1)$ jeb $y = 2x-1$. Normāles vienādojums $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$ jeb $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

Noskaidrosim funkcijas atvasinājuma fizikālo interpretāciju. Pieņemsim, ka materiālais punkts kustas nevienmērīgi pa taisni. Kustības likums ir $x = x(t)$. Laika intervālā $[t; t + \Delta t]$ materiālā punkta pārvietojums ir $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$. Kustības **vidējo ātrumu** $v_{vid.}$ intervālā $[t; t + \Delta t]$ definē kā pārvietojuma attiecību pret kustības laiku, t.i.,

$$v_{vid.} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Lai raksturotu kustību laika momentā t, izmanto momentānā ātruma jēdzienu. Vidējā ātruma $v_{vid.}$ robežu, kad $\Delta t \to 0$, sauc par **momentāno ātrumu** laika momentā t, t.i.,

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{vid.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t).$$

Tādējādi funkcijas **atvasinājuma fizikālā (mehāniskā) interpretācija** ir momentānais ātrums taisnvirziena kustībā.

Pēc analoģijas ar kustībā esošā materiālā punkta vidējo un momentāno ātrumu funkcijas f pieauguma punktā x_0 un argumenta pieauguma attiecību $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ sauc par šīs **funkcijas maiņas vidējo ātrumu** intervālā $[x_0; x_0+\Delta x]$. Funkcijas maiņas vidējā ātruma robežu, argumenta pieaugumam tiecoties uz nulli, t.i., $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, vēl sauc par **funkcijas maiņas ātrumu punktā** x_0. Tādējādi funkcijas f atvasinājums punktā x_0 izsaka funkcijas maiņas ātrumu šajā punktā.

1.3. Funkcijas diferenciālis un tā ģeometriskā interpretācija

Apskatīsim funkciju f, kas ir diferencējama punktā x_0. Kā tika noskaidrots 1.2. teorēmas pierādījumā, funkcijas pieaugumu šajā punktā var uzrakstīt šādi:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$ [5]

kur $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0$.

Kā redzams, funkcijas pieaugums ir divu saskaitāmo summa. Pirmais saskaitāmais $f'(x_0)\Delta x$ ir lineārs attiecībā pret Δx. Otrais saskaitāmais $\alpha(\Delta x)\Delta x$ ir augstākas kārtas bezgalīgi maza funkcija salīdzinājumā ar Δx, kad $\Delta x \to 0$. Funkcijas pieaugumā noteicošā loma ir pirmajam saskaitāmajam, tāpēc to uzskata par funkcijas pieauguma galveno daļu.

1.8. definīcija. Punktā x_0 diferencējamas funkcijas f pieauguma šajā punktā galveno daļu, kas ir lineāra attiecībā pret Δx, sauc par šīs **funkcijas diferenciāli** punktā x_0 un apzīmē ar $df(x_0)$, t.i.,

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Mazām Δx vērtībām funkcijas pieaugums $\Delta f(x_0)$ ir aptuveni vienāds ar funkcijas pieauguma galveno daļu $f'(x_0)\Delta x$, t.i., funkcijas diferenciāli $df(x_0)$. Tādējādi var rakstīt

$$\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

[5] Šo vienādību var uzskatīt par punktā diferencējamas funkcijas definīciju.

jeb

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0).$$

Šo aptuveno vienādību praktiski izmanto funkcijas vērtību tuvinātā aprēķināšanā.

1.5. piezīme.

1. Ja funkcijas diferenciāļa definīcijā x_0 vietā raksta x un ar to saprot funkcijas definīcijas apgabala patvaļīgu punktu, kurā šī funkcija ir diferencējama (kopas D_1 punkts), tad iegūst funkcijas diferenciāli $df(x)$, kas ir atkarīgs gan no x, gan no Δx. Šoreiz $df(x) = f'(x)\Delta x$.
2. Argumenta pieauguma Δx vietā parasti raksta dx (argumenta diferenciālis). Šādos apzīmējumos $df(x) = f'(x)dx$. Tātad $f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$, kas ir gan funkcijas atvasinājuma apzīmējums, gan funkcijas diferenciāļa un argumenta diferenciāļa attiecība.

Apskatīsim dažus piemērus.

1.6. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x) = x^2$ diferenciāli un izskaitļot tā vērtību punktā $x_0 = 1$.

Sastādīsim šīs funkcijas pieaugumu

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2.$$

Acīmredzami, funkcijas pieauguma galvenā daļa ir $2x\Delta x$. Seko, ka $df(x) = 2x\Delta x$. (Vienlaicīgi esam sameklējuši arī šīs funkcijas atvasinājumu, kas ir vienāds ar $2x$).

Visbeidzot $df(1) = 2 \cdot 1 \cdot dx = 2dx$.

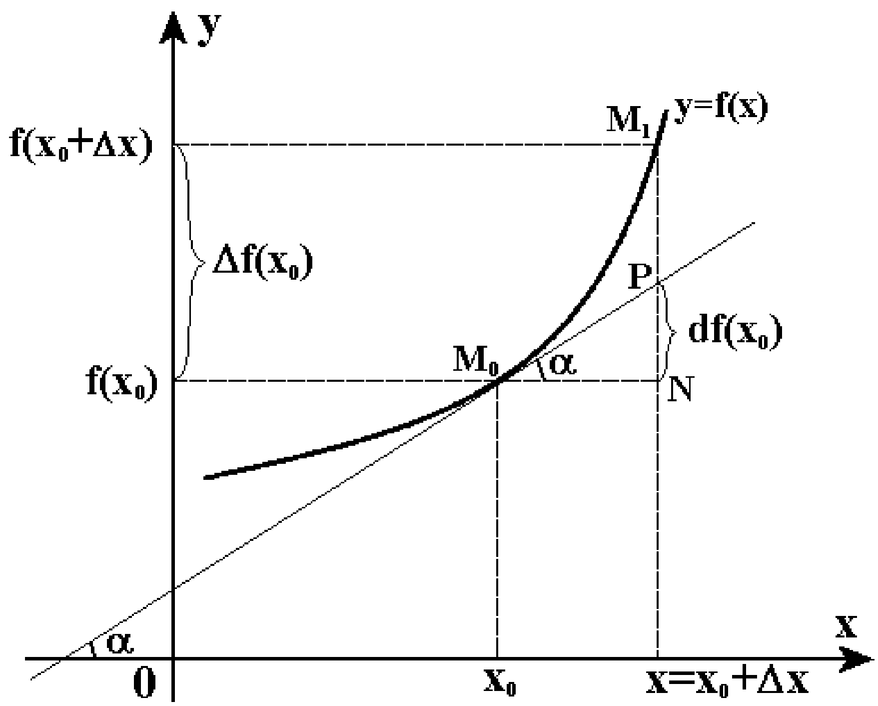
1.7. piemērs. Izmantojot funkcijas diferenciāli, izskaitļot $\sqrt{16,8}$.

Izvēlēsimies funkciju $f(x) = \sqrt{x}$ un $x_0 = 16$, šoreiz $\Delta x = 0,8$.

Izmantosim aptuveno vienādību $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$ jeb $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$. Funkcijas diferenciāli atradīsim kā funkcijas atvasinājuma un argumenta pieauguma reizinājumu, t.i., $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$. Tā kā $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$ (skat. 1.2. piemēru), tad $f'(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} = \frac{1}{2\cdot 4} = \frac{1}{8}$ un

$df(16) = \frac{1}{8} \cdot 0,8 = 0,1$. Tātad $\sqrt{16,8} \approx \sqrt{16} + 0,1$ jeb $\sqrt{16,8} \approx 4,1$ (skat. [6]).

Lai noskaidrotu funkcijas f diferenciāļa $df(x_0)$ ģeometrisko interpretāciju, koordinātu plaknē attēlosim šīs funkcijas grafiku (1.6. zīm.).



1.6. zīmējums

Punktā $M_0\,(x_0; f(x_0))$ novilksim funkcijas grafikam pieskari. Apzīmēsim ar α leņķi, ko veido pieskare ar abscisu ass pozitīvo virzienu. Pieskares virziena koeficients $k_p = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. Tā kā $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$, tad varam rakstīt

$$df(x_0) = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = \operatorname{tg}\alpha \cdot NM_0 = NP.$$

Tādējādi funkcijas f diferenciālis punktā x_0 ir vienāds ar šīs funkcijas grafikam punktā $M_0\,(x_0; f(x_0))$ novilktās pieskares ordinātas pieaugumu ($df(x_0) = NP$). Tā arī ir funkcijas diferenciāļa **ģeometriskā interpretācija**.

Šajā zīmējumā funkcijas pieaugums punktā x_0 $\Delta f(x_0) = NM_1$ atšķiras no tās diferenciāļa $df(x_0) = NP$ par PM_1.

[6]Izmantojot skaitļotāju, iegūsim, ka $\sqrt{16,8} = 4,0987803...$

1.4. Diferencēšanas likumi

1.3. teorēma. *Ja funkcija f ir konstanta kādā intervālā $(a;b)$, tad tās atvasinājums šajā intervālā ir nulle.*

▶ Tā kā visiem $x \in (a;b)$ ir spēkā $f(x) = C$, tad $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = C - C = 0$ un $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = 0$. ◀

1.4. teorēma. *Ja funkcijas u un v ir diferencējamas punktā x, tad $(u \pm v)$ arī ir diferencējama šajā punktā, pie tam*

$$\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'.}$$

▶ Sastādīsim funkcijas $(u \pm v)$ pieaugumu punktā x

$$\begin{aligned}\Delta(u \pm v)(x) &= (u \pm v)(x+\Delta x) - (u \pm v)(x) = \\ &= (u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)) - (u(x) \pm v(x)) = \\ &= (u(x+\Delta x) - u(x)) \pm (v(x+\Delta x) - v(x)) = \\ &= \Delta u(x) \pm \Delta v(x).\end{aligned}$$

Sastādīsim attiecību

$$\frac{\Delta(u \pm v)(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u(x) \pm \Delta v(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v(x)}{\Delta x}.$$

Šīs vienādības labajai pusei eksistē galīga robeža, kad $\Delta x \to 0$ (jo funkcijas u un v ir diferencējamas punktā x), un tā ir vienāda ar $u'(x) \pm v'(x)$. Tas nozīmē, ka kreisajai pusei eksistē galīga robeža, kas arī ir vienāda ar $u'(x) \pm v'(x)$. Tādējādi $(u \pm v)$ ir diferencējama punktā x, pie tam $(u \pm v)' = u' \pm v'$. ◀

1.6. piezīme. Ar matemātiskās indukcijas metodi summas un starpības atvasināšanas formulas var vispārināt jebkuram galīgam funkciju skaitam.

1.5. teorēma. *Ja funkcijas u un v ir diferencējamas punktā x, tad (uv) arī ir diferencējama šajā punktā, pie tam*

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'.}$$

▶ Sastādīsim funkcijas (uv) pieaugumu punktā x

$$\begin{aligned}\Delta(uv)(x) = (uv)(x+\Delta x) - (uv)(x) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x) = \\ = (u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)) + (u(x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)) = \\ = (u(x+\Delta x) - u(x))\, v(x+\Delta x) + u(x)\,(v(x+\Delta x) - v(x)) = \\ = \Delta u(x)v(x+\Delta x) + u(x)\Delta v(x).\end{aligned}$$

Sastādīsim attiecību

$$\frac{\Delta(uv)(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x) + u(x)\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}.$$

Šīs vienādības labajai pusei eksistē galīga robeža, kad $\Delta x \to 0$ (jo u un v ir diferencējamas punktā x un v ir nepārtraukta šajā punktā kā diferencējama funkcija), un tā ir vienāda ar $u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$. Tas nozīmē, ka kreisajai pusei eksistē galīga robeža, kas arī ir vienāda ar $u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Tādējādi (uv) ir diferencējama punktā x, pie tam

$$(uv)' = u'v + uv'. \blacktriangleleft$$

1.7. piezīme.

1. Ar matemātiskās indukcijas metodi reizinājuma atvasināšanas formulu var vispārināt jebkuram galīgam funkciju skaitam. Piemēram,
$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.$$
2. Apvienojot šo triju teorēmu rezultātus, var teikt, ka jebkura galīga skaita diferencējamu funkciju lineārā kombinācija ir diferencējama funkcija, pie tam tās atvasinājums ir vienāds ar funkciju atvasinājumu lineāro kombināciju. Piemēram, divu funkciju gadījumā $(C_1u + C_2v)' = C_1u' + C_2v'$. Ja $C_2 = 0$, tad iegūsim, ka $(C_1u)' = C_1u'$, t.i., ka konstantu reizinātāju var iznest pirms atvasinājuma zīmes.

1.6. teorēma. *Ja funkcijas u un v ir diferencējamas punktā x un $v(x) \neq 0$, tad $\left(\frac{u}{v}\right)$ arī ir diferencējama šajā punktā, pie tam*

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}.$$

Pierādīt patstāvīgi[7].

1.8. piemērs. Atvasināt šādas funkcijas:

1. $f(x) = \sin 2x - 3\sqrt{x} + 2$;
2. $f(x) = (x^2 - 1)\sin 2x$;
3. $f(x) = \frac{x^2+1}{\sqrt{x}}$.

1. $$f'(x) = (\sin 2x - 3\sqrt{x} + 2)' = (\sin 2x)' - 3(\sqrt{x})' + 2' = \\ = 2\cos 2x - 3\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 = 2\cos 2x - \frac{3}{2\sqrt{x}};$$

2. $$f'(x) = ((x^2 - 1)\sin 2x)' = (x^2 - 1)'\sin 2x + (x^2 - 1)(\sin 2x)' = \\ = 2x\sin 2x + (x^2 - 1)2\cos 2x = 2(x\sin 2x + (x^2 - 1)\cos 2x);$$

3. $$f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{(x^2+1)'\sqrt{x} - (x^2+1)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2x\sqrt{x} - \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}}{x} = \\ = \frac{4x^2 - x^2 - 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{3x^2 - 1}{2x\sqrt{x}}.$$

1.8. piezīme. Izmantojot diferencēšanas likumus un funkcijas diferenciāļa definīciju, iegūst šādas formulas:

$$d(u \pm v) = du \pm dv,$$

$$d(uv) = vdu + udv,$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

kur u un v ir diferencējamas funkcijas.

Piemēram,

$$d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = vdu + udv.$$

[7]Pierāda, izmantojot atvasinājuma definīciju.

1.5. Saliktas funkcijas atvasinājums

Apskatīsim saliktu funkciju $f(\varphi(x)) = F(x)$.

1.7. teorēma. *Ja funkcija φ ir diferencējama punktā x un funkcija f ir diferencējama atbilstošajā punktā $u = \varphi(x)$, tad salikta funkcija F ir diferencējama punktā x, pie tam*

$$\boxed{F'(x) = f'(u)\varphi'(x).}$$

► Tā kā funkcija f ir diferencējama punktā u, tad tās pieaugumu šajā punktā var uzrakstīt šādi:

$$\Delta f(u) = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u,$$

kur $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = 0$.

Izdalīsim vienādības abas puses ar $\Delta x \neq 0$.

$$\frac{\Delta f(u)}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Tā kā $u = \varphi(x)$ un $f(\varphi(x)) = F(x)$, tad šīs vienādības kreisajā pusē var rakstīt $\frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$.

Iegūsim

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{1.4}$$

Tā kā funkcija φ ir diferencējama punktā x, tad eksistē galīga robeža

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \varphi'(x)$$

un funkcija φ ir nepārtraukta punktā x. Tāpēc $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$ jeb $\Delta u \to 0$, ja $\Delta x \to 0$.

Vienādības (1.4) labajai pusei eksistē galīga robeža, kad $\Delta u \to 0$, un tā ir vienāda ar

$$f'(u) \cdot \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to o} \alpha(\Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to o} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)\varphi'(x) + 0 \cdot \varphi'(x) = f'(u)\varphi'(x).$$

Tātad vienādības (1.4) kreisajai pusei eksistē galīga robeža un tā ir vienāda ar $f'(u)\varphi'(x)$. Seko, ka funkcija F ir diferencējama punktā x, pie tam $F'(x) = f'(u)\varphi'(x)$. ◄

1.9. piemērs. Atvasināt funkciju $f(x) = (\sqrt{x} - 2)^2$.

$$f'(x) = \left((\sqrt{x} - 2)^2\right)' = 2(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} - 2)' =$$

$$= 2(\sqrt{x} - 2)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 0\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}}.$$

1.9. piezīme.

1. Teorēmā minēto formulu bieži nākas izmantot atkārtoti (ja starpargumentu skaits ir lielāks).
2. Lietderīgi ievērot, ka saliktas funkcijas atvasināšana notiek pretējā virzienā nekā šīs funkcijas vērtības aprēķināšana. Piemēram, aplūkotajā piemērā aprēķinot funkcijas vērtību, vispirms atrod $\sqrt{x} - 2$ un tad iegūto skaitli kāpina kvadrātā. Turpretī, atvasinot funkciju, rīkojas pretējā secībā - vispirms atvasina pakāpi, ņemot vērā to, kādu izteiksmi kāpina, un tikai tad atvasina pakāpes bāzi $\sqrt{x} - 2$.
3. Ja f ir neatkarīgā mainīgā x funkcija, tad tās diferenciālis $df(x) = f'(x)dx$, kur $dx = \Delta x$. Turpretī, ja x ir neatkarīgā mainīgā t funkcija, t.i., $x = \varphi(t)$, tad

   $$df\big(\varphi(t)\big) = \Big[f\big(\varphi(t)\big)\Big]'dt = f'(x)\varphi'(t)dt.$$

   Tā kā $\varphi(t) = x$ un $\varphi'(t)dt = dx$, tad var rakstīt, ka arī šoreiz $df(x) = f'(x)dx$. Tādējādi funkcijas diferenciālim ir tāda pati forma kā gadījumā, kad x ir neatkarīgais mainīgais. Citiem vārdiem, funkcijas diferenciāļa forma nav atkarīga no tā, vai funkcijas arguments ir neatkarīgais mainīgais vai cita argumenta funkcija. Šo īpašību sauc par **diferenciāļa formas invarianci** (nemainīgumu).

1.6. Apvērstas funkcijas diferencēšana

1.8. teorēma. *Ja funkcija f ir stingri monotona un nepārtraukta intervālā (a, b), ir diferencējama šī intervāla punktā x_0, pie tam $f'(x_0) \neq 0$, tad tās apvērstā funkcija g ir diferencējama atbilstošajā punktā $y_0 = f(x_0)$, pie tam*

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}\ .}$$

► Tā kā funkcija f ir stingri monotona un nepārtraukta intervālā (a, b), tad tai eksistē apvērstā funkcija g, kas arī ir nepārtraukta atbilstošajā intervālā.

Izvēlēsimies argumenta x pieaugumu Δx un tam atbilstošo funkcijas f pieaugumu punktā x_0 apzīmēsim ar $\Delta y = \Delta f(x_0)$. Sastādīsim funkcijas $x = g(y)$ pieaugumu atbilstošajā punktā $y_0 = f(x_0)$, kas atbilst argumenta y pieaugumam Δy: $\Delta g(y_0) = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0)$.

Izveidosim šādu attiecību

$$\frac{\Delta g(y_0)}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta g(y_0)}} = \frac{1}{\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}}.$$

Šīs vienādības labajai pusei eksistē galīga robeža, kad $\Delta x \to 0$ (jo funkcija f ir diferencējama punktā x_0 un $f'(x_0) \neq 0$), un šī robeža ir vienāda ar $\frac{1}{f'(x_0)}$. Tas nozīmē, ka arī kreisajai pusei eksistē galīga robeža, kas ir vienāda ar $\frac{1}{f'(x_0)}$. Tādējādi funkcija g ir diferencējama atbilstošajā punktā y_0, pie tam $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ (Tā kā funkcijas f un g ir nepārtrauktas atbilstoši punktos x_0 un y_0, tad $\Delta y \to 0$, kad $\Delta x \to 0$, un otrādi). ◄

1.10. piemērs. Atvasināt funkciju $f(x) = \arcsin x$.

$$f'(x) = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(Izmantojām, ka $\cos y > 0$, jo šoreiz $y = \arcsin x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$).

1.7. Elementāro pamatfunkciju atvasinājumi

Sastādīsim elementāro pamatfunkciju atvasinājumu tabulu.

1) $(C)' = 0$;
2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$;
3) $(\sin x)' = \cos x$;
4) $(\cos x)' = -\sin x$;
5) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
7) $(a^x)' = a^x \ln a$;
   $(e^x)' = e^x$;
8) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;
   $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
12) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
13) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;
14) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
15) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;
16) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Formulas 1. - 4. un 7. var pierādīt, izmantojot atvasinājuma definīciju, piemēram,

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} =$$

$$= a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Formulas 5. un 6. var pierādīt, izmantojot atvasinājuma definīciju vai uzrakstot šīs funkcijas attiecīgi kā $\frac{\sin x}{\cos x}$ un $\frac{\cos x}{\sin x}$ un pēc tam atvasinot kā dalījumu. Piemēram,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Formulu 8. var pierādīt, izmantojot atvasinājuma definīciju vai apvērstas funkcijas diferencēšanas formulu.

Formulas 9. - 12. pierāda, izmantojot apvērstas funkcijas diferencēšanas formulu.

Lai pierādītu formulas 13.-16., katru no šīm funkcijām uzraksta attiecīgi kā
$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$
un pēc tam atvasina, izmantojot diferencēšanas likumus.

Lai atvasinātu funkciju $f(x) = u(x)^{v(x)}$, ir lietderīgi vispirms to uzrakstīt formā $e^{v(x)\ln u(x)}$ un atvasināt kā saliktu funkciju vai arī izmantot tā saucamo **logaritmisko diferencēšanu**. Logaritmiskās atvasināšanas algoritms ir šāds: vispirms logaritmē doto funkciju, piemēram, pie bāzes e, un tad atvasina iegūto vienādību.

1.11. piemērs. Atvasināt funkciju $f(x) = (x+1)^{\sin x}$.

1. paņēmiens.
$$f(x) = e^{\sin x \ln(x+1)}.$$
$$f'(x) = \left(e^{\sin x \ln(x+1)}\right)' = e^{\sin x \ln(x+1)} \left(\sin x \ln(x+1)\right)' =$$
$$= (x+1)^{\sin x} \left((\sin x)' \ln(x+1) + \sin x (\ln(x+1))'\right) =$$
$$= (x+1)^{\sin x} \left(\cos x \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1}\right);$$

2. paņēmiens.
$$\ln f(x) = \sin x \ln(x+1);$$
$$(\ln f(x))' = (\sin x \ln(x+1))';$$
$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \cos x \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1};$$
$$f'(x) = f(x)\left(\cos x \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1}\right) =$$
$$= (x+1)^{\sin x} \left(\cos x \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1}\right).$$

Logaritmisko atvasināšanu ir lietderīgi lietot arī tad, ja funkcijas izteiksmē ir vairāki reizinātāji vai dalītāji. Logaritmējot iegūst summu, kuras atvasinājumu var viegli atrast.

1.12. piemērs. Atvasināt funkciju $f(x) = \frac{\left(x^2+1\right)^4 e^{\sin x}}{\sqrt{x(x-1)}}$.

Logaritmējam doto funkciju:

$$\ln f(x) = 4\ln(x^2+1) + \sin x - \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{2}\ln(x-1).$$

Atvasinām doto izteiksmi pēc x:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{8x}{x^2+1} + \cos x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x-1)}.$$

No šīs sakarības atrodam, ka

$$f'(x) = f(x)\left(\frac{8x}{x^2+1} + \cos x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x-1)}\right) =$$
$$= \frac{(x^2+1)^4 e^{\sin x}}{\sqrt{x(x-1)}}\left(\frac{8x}{x^2+1} + \cos x - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2(x-1)}\right).$$

1.8. Funkcijas augstāku kārtu atvasinājumi un diferenciāļi

Pieņemsim, ka kopā D_1 funkcijai f eksistē atvasinājums f', kuru turpmāk sauksim arī par **pirmās kārtas atvasinājumu**. Tas savukārt ir x funkcija, tāpēc tam var eksistēt atvasinājums, kuru sauksim par dotās funkcijas f **otrās kārtas atvasinājumu**. Otrās kārtas atvasinājumu apzīmē ar vienu no simboliem f'' vai $\frac{d^2f}{dx^2}$ (attiecīgi lasa: "ef divi prim", "de divi ef pēc de iks kvadrātā").

Analogi definē funkcijas trešās, ceturtās utt. kārtu atvasinājumus, kurus attiecīgi apzīmē:

$$f''' \quad \text{vai} \quad \frac{d^3f}{dx^3}; \qquad f^{IV}, \quad f^{(4)} \quad \text{vai} \quad \frac{d^4f}{dx^4}; \quad \text{utt.}$$

Vispār, par funkcijas **n-tās kārtas atvasinājumu** sauc atvasinājumu no šīs funkcijas $(n-1)$-ās kārtas atvasinājuma. Tādējādi

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$$

jeb

$$\frac{d^n f}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right).$$

1.9. definīcija. Atvasinājums, kuru kārta ir lielāka par pirmo, sauc par **augstāku kārtu atvasinājumiem**.

1.13. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x) = x^4 - 6x + 5$ piektās kārtas atvasinājumu.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^4 - 6x + 5)' = 4x^3 - 6;\\
f''(x) &= (4x^3 - 6)' = 12x^2;\\
f'''(x) &= (12x^2)' = 24x;\\
f^{IV}(x) &= (24x)' = 24;\\
f^{V}(x) &= (24)' = 0.
\end{aligned}$$

1.14. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x) = \sin x$ n-tās kārtas atvasinājumu.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x);\\
f''(x) &= -\sin x = \sin(2 \cdot \frac{\pi}{2} + x);\\
f'''(x) &= -\cos x = \sin(3 \cdot \frac{\pi}{2} + x);\\
f^{IV}(x) &= \sin x = \sin(4 \cdot \frac{\pi}{2} + x);\\
&\dots\\
f^{(n)}(x) &= \sin(n \cdot \frac{\pi}{2} + x);
\end{aligned}$$

Noskaidrosim funkcijas otrās kārtas atvasinājuma mehānisko interpretāciju. Ja $x = x(t)$ ir materiālā punkta taisnvirziena kustības likums, tad $x'(t) = v(t)$ ir punkta momentānais ātrums. Acīmredzot $\Delta v = v(t + \Delta t) - v(t)$ ir momentānā ātruma pieaugums laika intervālā Δt. Attiecību $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a_{vid.}$ sauc par materiālā punkta **vidējo paātrinājumu** intervālā Δt.

1.10. definīcija. Par materiālā punkta **paātrinājumu** a laika momentā t sauc vidējā paātrinājuma robežu, kad $\Delta t \to 0$, t.i.,

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} a_{vid.} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t).$$

Tādējādi otrās kārtas atvasinājuma **mehāniskā interpretācija** ir taisnvirziena kustībā esoša materiālā punkta momentānais paātrinājums.

1.15. piemērs. Noteikt materiālā punkta ātrumu un paātrinājumu laika momentā $t_0 = 2$, ja kustības likums ir $x(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t$.

Momentānais ātrums $v(t)$ laika momentā t:

$$v(t) = x'(t) = \frac{1}{3} \cdot 3t^2 - 2 = t^2 - 2.$$

Laika momentā $t_0 = 2 : \quad v = v(2) = 2^2 - 2 = 2.$

Momentānais paātrinājums $a(t)$ laika momentā t:

$$a(t) = x''(t) = v'(t) = (t^2 - 2)' = 2t.$$

Laika momentā $t_0 = 2 \quad a = a(2) = 2 \cdot 2 = 4.$

Pieņemsim, ka f ir kopā D_1 diferencējama funkcija un $df(x) = f'(x)dx$ ir tās diferenciālis, kuru turpmāk sauksim par **pirmās kārtas diferenciāli**.

Pirmās kārtas diferenciālis ir atkarīgs gan no x, gan no dx. Ja dx uzskata par nemainīgu, tad var teikt, ka pirmās kārtas diferenciālis ir kopā D_1 definēta x funkcija. Tāpēc tam var eksistēt diferenciālis, kuru sauksim par dotās funkcijas f **otrās kārtas diferenciāli**. Otrās kārtas diferenciāli apzīmē ar d^2f. Tādējādi $d^2f = d(df)$.

Vispār, par funkcijas **n-tās kārtas diferenciāli** sauc diferenciāli no šīs funkcijas $(n-1)$-ās kārtas diferenciāļa. Tādējādi $d^nf = d(d^{n-1}f)$.

1.11. definīcija. Diferenciāļus, kuru kārta ir lielāka par pirmo, sauc par **augstāku kārtu diferenciāļiem**.

Ja x ir neatkarīgais mainīgais un funkcijai f eksistē n-tās kārtas atvasinājums, tad, ievērojot, ka $dx = const$, iegūsim šādas formulas:

$$\begin{aligned}
df(x) &= f'(x)dx;\\
d^2f(x) &= d(df(x)) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2;\\
d^3f(x) &= d(d^2f(x)) = d(f''(x)dx^2) = (f''(x)dx^2)'dx = f'''(x)dx^3;\\
&\dots\\
d^nf(x) &= d(d^{n-1}f(x)) = d(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}) = (f^{(n-1)}(x)dx^{n-1})'dx =\\
&\qquad = f^{(n)}(x)dx^n,
\end{aligned}$$

kur $dx^n = (dx)^n$.

Izmantojot iegūtās formulas, rodas iespēja augstāku kārtu atvasinājumus uzrakstīt kā diferenciāļu attiecības:

$$f''(x) = \frac{d^2f(x)}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3f(x)}{dx^3}, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^nf(x)}{dx^n}.$$

Ja x nav neatkarīgais mainīgais, tad saskaņā ar diferenciāļa formas invarianci formula $df(x) = f'(x)dx$ paliek spēkā. Atrodot otrās kārtas diferenciāli, dx vairs nevar uzskatīt par konstantu un ir jāizmanto reizinājuma diferenciāļa formula. Šoreiz

$$d^2f(x) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx + f'(x)d(dx) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Analogi var atrast arī pārējos diferenciāļus.

1.10. piezīme. Augstāko kārtu diferenciāļiem vairs nepiemīt to formas invariance.

1.16. piemērs. Noteikt funkcijas $f(x) = x^2\ln x$ trešās kārtas diferenciāli un izskaitļot to punktā $x_0 = 1$.

Izmantosim formulu $d^3f(x) = f'''(x)dx^3$.

Atradīsim

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (x^2\ln x)' = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln x + x;\\
f''(x) &= (2x\ln x + x)' = 2\ln x + 2x\frac{1}{x} + 1 = 2\ln x + 3;\\
f'''(x) &= (2\ln x + 3)' = 2\frac{1}{x} = \frac{2}{x}.
\end{aligned}$$

Tādējādi $d^3f(x) = \frac{2}{x}dx^3$ un $d^3f(1) = 2dx^3$.

Jautājumi

1. Definēt funkcijas atvasinājumu punktā.
2. Definēt punktā diferencējamu funkciju.
3. Definēt funkcijas atvasinājumu.
4. Sniegt funkcijas atvasinājuma atrašanas kārtulu, izmantojot tā definīciju.
5. Kādos gadījumos funkcija nav diferencējama punktā?
6. Definēt funkcijas atvasinājumu punktā no kreisās (labās) puses.
7. Ko var pateikt par funkcijas vienpusējiem atvasinājumiem punktā, kurā funkcija ir diferencējama?
8. Ko var pateikt par funkcijas vienpusējiem atvasinājumiem punktā, kurā funkcija nav diferencējama?
9. Kāds sakars pastāv starp nepārtrauktu un diferencējamu punktā funkciju?
10. Definēt kopā diferencējamu funkciju un definēt diferencējamu funkciju.
11. Definēt funkcijas grafika pieskari.
12. Kādai ir jābūt funkcijai, lai tās grafikam eksistētu pieskare?
13. Uzrakstīt diferencējamas funkcijas grafika pieskares vienādojumu.
14. Sniegt funkcijas atvasinājuma ģeometrisko interpretāciju.
15. Ko var pateikt par funkcijas grafika pieskari, ja funkcijai atbilstošajā punktā eksistē bezgalīgs atvasinājums?
16. Definēt funkcijas grafika normāli un uzrakstīt tās vienādojumu.
17. Sniegt funkcijas atvasinājuma fizikālo interpretāciju.
18. Definēt funkcijas diferenciāli punktā.
19. Uzrakstīt funkcijas vērtības tuvinātās aprēķināšanas formulu.
20. Sniegt funkcijas diferenciāļa ģeometrisko interpretāciju.
21. Formulēt summas, reizinājuma un dalījuma diferencēšanas likumus.

22. Uzrakstīt saliktas funkcijas atvasināšanas formulu.
23. Formulēt funkcijas diferenciāļa invariances īpašību.
24. Uzrakstīt apvērstas funkcijas atvasināšanas formulu.
25. Nosaukt elementāro pamatfunkciju atvasinājumus.
26. Formulēt logaritmiskās diferencēšanas algoritmu.
27. Definēt funkcijas otrās kārtas un n-tās kārtas atvasinājumus.
28. Sniegt funkcijas otrās kārtas atvasinājuma mehānisko interpretāciju.
29. Definēt funkcijas otrās kārtas un n-tās kārtas diferenciāļus.
30. Uzrakstīt augstāku kārtu diferenciāļu izskaitļošanas formulas.
31. Vai augstāku kārtu diferenciāļiem piemīt to formas invariance?

Vingrinājumi

1. Izmantojot atvasinājuma definīciju, atrast šādu funkciju atvasinājumus:
   (a) $f(x) = x^3$ punktā $x_0 = 2$;
   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ punktā $x_0 = 1$;
   (c) $f(x) = \ln x$ punktā x_0;
   (d) $f(x) = x^\alpha$;
   (e) $f(x) = \sin x$;
   (f) $f(x) = \cos x$;
   (g) $f(x) = \operatorname{tg} x$;
   (h) $f(x) = \operatorname{ctg} x$;
   (i) $f(x) = e^x$;
   (j) $f(x) = \log_a x$.
2. Konstruēt funkciju, kurai punktā eksistē bezgalīgs atvasinājums.
3. Konstruēt funkciju, kurai punktā eksistē galīgi vienpusējie atvasinājumi, bet kas nav diferencējama šajā punktā.

4. Konstruēt funkciju, kas ir nepārtraukta, bet nav diferencējama šajā punktā.

5. Minēt diferencējamu funkciju piemērus.

6. Sastādīt funkcijas $f(x) = x^3$ grafikam punktā, kura abscisa ir $x_0 = -1$, novilktās pieskares un normāles vienādojumus.

7. Sastādīt funkcijas $f(x) = x^3$ pieaugumu punktā $x_0 = 1$ un noteikt tās diferenciāli šajā punktā.

8. Izmantojot funkcijas diferenciāli, izskaitļot $\ln 1,2$.

9. Sniegt funkcijas $f(x) = x^2$ diferenciāļa punktā $x_0 = 1$ ģeometrisko interpretāciju.

10. Pierādīt 1.6. teorēmu.

11. Izmantojot diferencēšanas likumus, noteikt šādu funkciju atvasinājumus:

    (a) $f(x) = \operatorname{ctg} x$;
    (b) $f(x) = \operatorname{sh} x$;
    (c) $f(x) = \operatorname{ch} x$;
    (d) $f(x) = \operatorname{th} x$;
    (e) $f(x) = \operatorname{cth} x$.

12. Pierādīt, ka $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.

13. Pierādīt, ka $d(u \pm v) = du \pm dv$; $\quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

14. Izmantojot apvērstas funkcijas atvasināšanas formulu, noteikt šādu funkciju atvasinājumus:

    (a) $f(x) = \log_a x$;
    (b) $f(x) = \arccos x$;
    (c) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;
    (d) $f(x) = \operatorname{arcctg} x$.

15. Sastādīt elementāro pamatfunkciju atvasinājumu tabulu pēc starpargumenta $u = u(x)$.

16. Atvasināt šādas funkcijas:

(a) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1+x^2}$;

(b) $f(x) = e^x \sin x - \frac{\ln x}{\operatorname{tg} x} + 2$;

(c) $f(x) = x^{x^3}$;

(d) $f(x) = \frac{(x+1)(2x-1)\sqrt{3x+2}}{\sqrt[3]{x}}$.

17. Noteikt šādu funkciju n-tās kārtas atvasinājumus:

(a) $f(x) = \ln x$;

(b) $f(x) = \cos x$;

(c) $f(x) = a^x$;

(d) $f(x) = e^{2x}$;

(e) $f(x) = (1+x)^\alpha$;

(f) $f(x) = u(x) \pm v(x)$;

(g) $f(x) = u(x)v(x)$.

18. Noteikt materiālā punkta ātrumu un paātrinājumu laika momentā $t_0 = 2$, ja kustības likums ir $x(t) = \frac{1}{8}t^3 + 3t^2 + 1$.

19. Izmantojot definīciju vai aprēķināšanas formulas, noteikt funkcijas $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ otrās kārtas diferenciāli un izskaitļot to punktā $x_0 = 2$.

II nodaļa

DIFERENCIĀLRĒĶINU PAMATTEORĒMAS

2.1. Fermā teorēma

2.1. teorēma. *Ja intervālā $\langle a; b\rangle$ definētā funkcija šī intervāla iekšējā punktā c sasniedz savu vismazāko vai vislielāko vērtību un ir diferencējama šajā punktā, tad $f'(c) = 0$.*

▶ Pieņemsim, ka punktā c funkcija f sasniedz savu vislielāko vērtību, t.i., visiem $x \in \langle a; b\rangle$ izpildās $f(x) \leq f(c)$. Sastādīsim attiecību $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ un novērtēsim tās zīmi.

Ja $x < c$, tad

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

ja $x > c$, tad

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

(Skaitītājs abos gadījumos ir nepozitīvs, t.i., $f(x) - f(c) \leq 0$).

Atradīsim šai attiecībai vienpusējās robežas punktā c. Robeža no kreisās puses būs vienāda ar funkcijas atvasinājumu no kreisās puses punktā c, pie tam $f'(c - 0) \geq 0$.

Analogi

$$f'(c + 0) = \lim_{\substack{x \to c \\ x > c}} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

(Vienpusējie atvasinājumi eksistē un tie ir vienādi ar $f'(c)$, jo funkcija ir diferencējama šajā punktā).

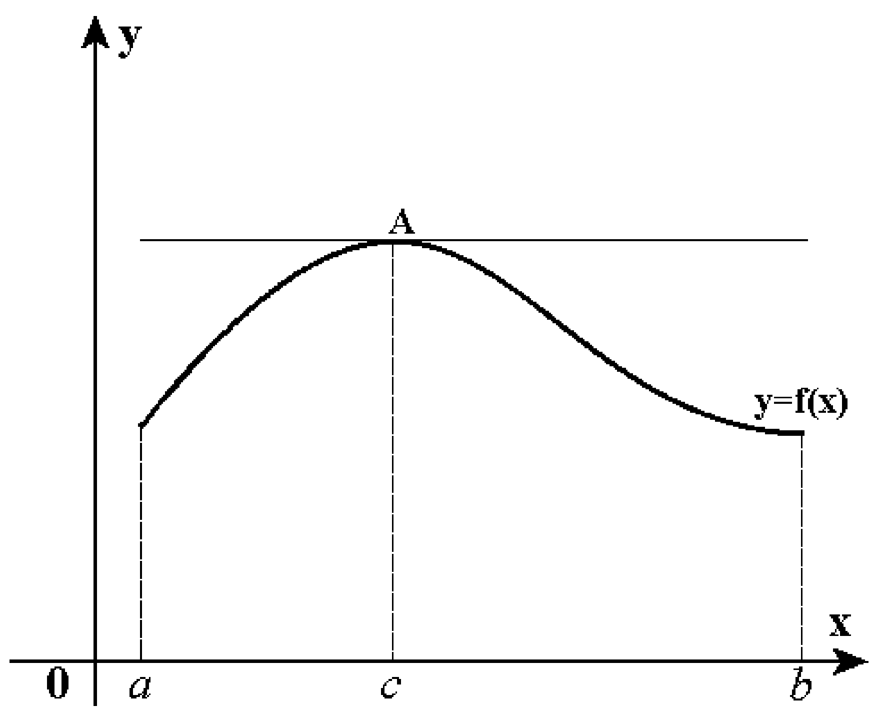
Esam ieguvuši, ka

$$\begin{cases} f'(c-0) \geq 0, \\ f'(c+0) \leq 0. \end{cases}$$

Tādējādi $f'(c) = 0$. ◄

2.1. piezīme.

1. Analogi apskata otru gadījumu, kad funkcija punktā c sasniedz savu vismazāko vērtību.
2. Funkcijas grafikam atbilstošajā punktā $A(c; f(c))$novilktā pieskare ir horizontāla (2.1. zīm.).



2.1. zīmējums

2.2. Rolla teorēma (Teorēma par atvasinājuma nullēm)

2.2. teorēma. **[Rolla[1] teorēma]** *Ja funkcija f nepārtraukta slēgtā intervālā $[a;b]$, diferencējama šī intervāla iekšējos punktos un šī intervāla galapunktos funkcijas vērtības ir vienādas, t.i., $f(a) = f(b)$, tad eksistē vismaz viens tāds intervāla iekšējais punkts c, kurā $f'(c) = 0$.*

► Apzīmēsim ar m un M attiecīgi funkcijas vismazāko un vislielāko vērtību intervālā $[a;b]$. (Šādas vērtības eksistē, jo funkcija ir nepārtraukta šajā intervālā).

Ja $m = M$, tad intervālā $[a;b]$ f ir konstanta funkcija un jebkurā tā punktā $f'(x) = 0$.

Ja $m < M$, tad vismaz viens no šiem skaitļiem m, M atšķiras no skaitļa $f(a) = f(b)$, piemēram, $M \neq f(a)$. Seko, ka funkcija f savu vislielāko vērtību M sasniedz šī intervāla kādā iekšējā punktā c, t.i., eksistē tāds $c \in (a;b)$, ka $f(c) = M$. Saskaņā ar Fermā teorēmu $f'(c) = 0$. ◄

2.2. piezīme.

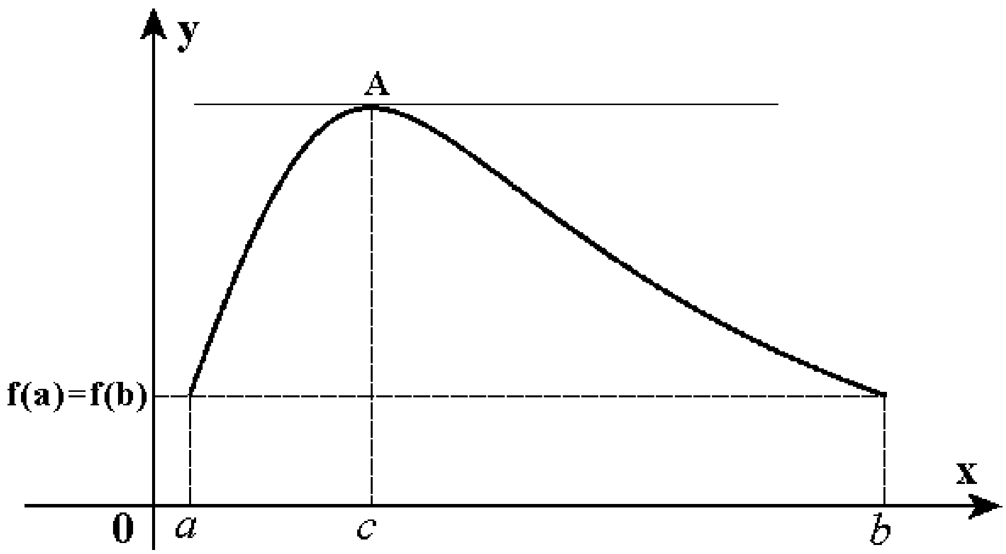
1. Rolla teorēmai ir šāda ģeometriska interpretācija: uz funkcijas grafika eksistē tāds punkts $A(c; f(c))$, kurā novilktā pieskare ir horizontāla (2.2. zīm.).
2. Tādi punkti, kuros atvasinājums ir nulle, var būt vairāki (2.3. zīm.).
3. Ja $f(a) = f(b) = 0$, tad Rolla teorēma apgalvo, ka starp divām funkcijas nullēm[2] eksistē vismaz viena atvasinājuma nulle.
4. Visi teorēmas nosacījumi ir būtiski, piemēram, funkcijai $f(x) = |x|$ intervālā $[-1, 1]$ teorēma nav spēkā, jo punktā $x = 0$ šī funkcija nav diferencējama.

2.3. Lagranža teorēma

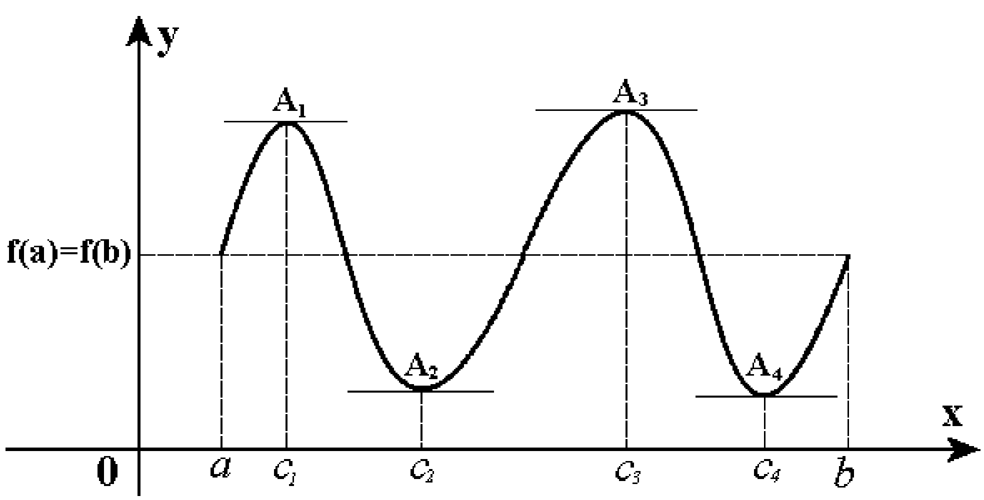
2.3. teorēma. *Ja funkcija f nepārtraukta slēgtā intervālā $[a;b]$ un ir diferencējama šī intervāla iekšējos punktos, tad eksistē vismaz viens*

[1] Mišels Rolls (1652-1719) - franču matemātiķis.

[2] Par **funkcijas nulli** sauc argumenta vērtību, kurai atbilstošā funkcijas vērtība ir vienāda ar nulli.



2.2. zīmējums



2.3. zīmējums

tāds intervāla iekšējais punkts c, kurā

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

► Izveidosim palīgfunkciju $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. Šī funkcija F apmierina visus Rolla teorēmas nosacījumus: nepārtraukta intervālā $[a; b]$, diferencējama tā iekšējos punktos (jo šādas īpašības piemīt funkcijai f) un $F(a) = F(b)$, jo $F(a) = 0$ un $F(b) = 0$. Saskaņā ar Rolla teorēmu eksistē tāds $c \in (a; b)$, ka $F'(c) = 0$.

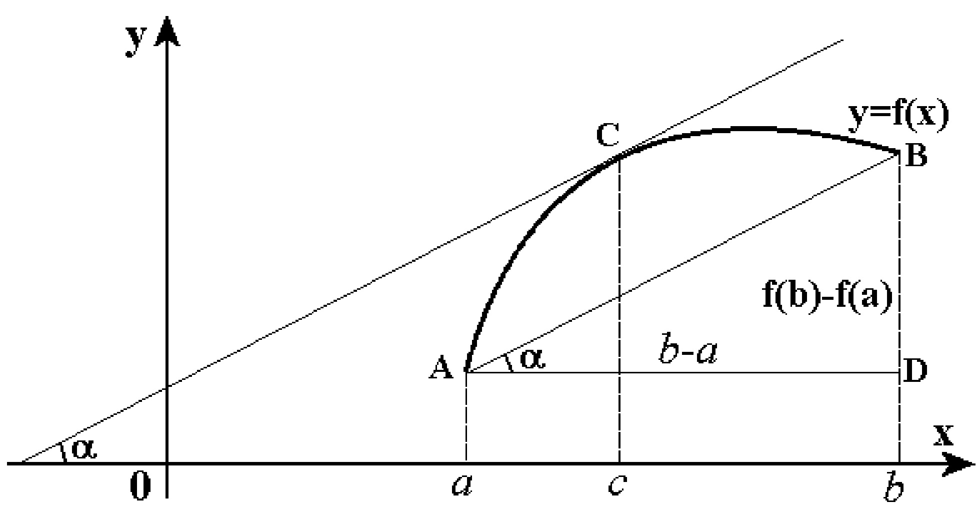
Tā kā

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{un} \quad F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

tad

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \text{jeb} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. ◄$$

Lai sniegtu Lagranža teorēmai ģeometrisko interpretāciju, izveidosim šādu zīmējumu (2.4. zīm.).



2.4. zīmējums

No taisnleņķa trijstūra ADB: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Šī attiecība no ğ eometriskā viedokļa izsaka hordas AB virziena koeficientu. Tā kā $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ un $k = f'(c)$ ir funkcijas grafikam punktā $C(c; f(c))$ novilktās pieskares virziena koeficients, tad var teikt, ka saskaņā ar Lagranža teorēmu uz grafika eksistē tāds punkts, kurā novilktā pieskare ir paralēla hordai AB.

2.3. piezīme. Arī šoreiz tādi punkti c var būt vairāki un visi Lagranža teorēmas nosacījumi ir būtiski.

Pieņemsim, ka visi Lagranža teorēmas nosacījumi izpildās intervālā $[b;a]$ (šoreiz $b < a$).

Saskaņā ar teorēmu eksistē tāds $c \in (b;a)$, kurā

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

jeb

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tātad Lagranža teorēmas formula ir spēkā gan $a < b$, gan $a > b$. Starpvērtību c ir izdevīgi pierakstīt formā $c = a + \Theta(b - a)$, kur $0 < \Theta < 1$. Ja šajā formulā ievieto $a = x$, $b - a = \Delta x$ un $b = x + \Delta x$, tad iegūst formulu

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x + \Theta \Delta x)$$

jeb

$$\boxed{f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \Theta \Delta x)\Delta x, \quad \text{kur} \quad 0 < \Theta < 1.}$$

Šo formulu sauc par **Lagranža galīgo pieaugumu formulu** (turpmāk: Lagranža formulu).

2.4. Košī teorēma (Teorēma par funkciju diferenču attiecību)

2.4. teorēma. *Ja funkcijas f un g ir nepārtrauktas slēgtā intervālā $[a;b]$ un diferencējamas šī intervāla iekšējos punktos, pie tam $g'(x) \neq 0$, tad eksistē vismaz viens tāds intervāla iekšējais punkts c, kurā*

$$\boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}.$$

Pierādīt patstāvīgi.[3]

[3] Izveido palīgfunkciju $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x) - g(a))$ un šai funkcijai pielieto Rolla teorēmu. Starpība $g(b) - g(a) \neq 0$, jo citādi atrastos tāds $c \in (a;b)$, ka $g'(c) = 0$.

2.4. piezīme.

1. Pierādot Košī teorēmu, starpības $f(b) - f(a)$ un $g(b) - g(a)$ nedrīkst pārveidot saskaņā ar Lagranža formulu, jo, tā rīkojoties, iegūtu
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)},$$
kur $c_1,\ c_2 \in (a; b)$.
2. Ja $g(x) = x$, tad kā Košī teorēmas secinājums ir Lagranža teorēma.

2.5. Lopitāla kārtula

2.5. teorēma. *Ja funkcijas f un g ir definētas un diferencējamas punkta $a \in \mathbb{R}$ apkārtnē, izņemot varbūt šo punktu, pie tam $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ vai $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |g(x)| = +\infty$; eksistē $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$, tad attiecībai $\frac{f(x)}{g(x)}$ eksistē robeža, kad $x \to a$, kas arī ir vienāda ar k.*

▶ Teorēmu pierādīsim tikai nenoteiktībai $\frac{0}{0}$. Punkta a apkārtnē uzdosim šādas divas funkcijas
$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ja} \quad x \neq a, \\ 0, & \text{ja} \quad x = a, \end{cases}$$
un
$$g_1(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ja} \quad x \neq a, \\ 0, & \text{ja} \quad x = a. \end{cases}$$
Funkcijas f_1 un g_1 ir nepārtrauktas punktā a un tā apkārtnē. Izvēlēsimies patvaļīgu $x > a$ no punkta a apkārtnes. Funkcijas f_1 un g_1 intervālā $[a; x]$ apmierina Košī teorēmas nosacījumus, tāpēc
$$\frac{f_1(x) - f_1(a)}{g_1(x) - g_1(a)} = \frac{f_1'(c)}{g_1'(c)},$$
kur $a < c < x$.

Ņemot vērā to, kā ir uzdotas funkcijas f_1 un g_1, iegūsim $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, kur $a < c < x$.

Tā kā $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$, tad šīs vienādības labajai, tātad arī kreisajai pusei eksistē robeža no labās puses punktā a, pie tam

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

(Acīmredzot, ja $x\to a$, tad arī $c\to a$).

Ja tagad izvēlētos patvaļīgu $x<a$ no punkta a apkārtnes un rīkotos analogi, tad iegūtu:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)}{g(x)}=k.$$

Tātad eksistē

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=k. \blacktriangleleft$$

2.5. piezīme. Izmantojot iegūtos rezultātus, ar substitūciju $x=\frac{1}{u}$ var pierādīt, ka teorēma ir pareiza arī tad, kad $x\to+\infty$ vai $x\to-\infty$.

No teorēmas izriet šāds paņēmiens (**Lopitāla**[4] **kārtula**) nenoteiktību $\frac{0}{0}$ vai $\frac{\infty}{\infty}$ atklāšanai: lai aprēķinātu $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, kad skaitītājs un saucējs reizē tiecas uz nulli vai bezgalību, ir atsevišķi jāatvasina skaitītājs un saucējs un jāaprēķina atvasinājumu attiecības robeža, kad $x\to a$. Ja iegūtā robeža atkal ir nenoteiktība $\frac{0}{0}$ vai $\frac{\infty}{\infty}$, tad paņēmienu drīkst atkārtot.

2.1. piemērs. Aprēķināt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x-\sin 3x}$.

Lietojot Lopitāla kārtulu vienu reizi, iegūsim

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x-\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 4x)'}{(2x-\sin 3x)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\cos 4x}{2-3\cos 3x}=\frac{4}{2-3}=-4.$$

2.2. piemērs. Aprēķināt $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}$.

[4]Gijoms Lopitāls (1661-1704) - franču matemātiķis, pirmās iespiestās diferenciālrēķinu mācību grāmatas autors. Šo kārtulu (metodi) atklāja šveiciešu matemātiķis Johans Bernulli (1667-1748), bet 1696. gadā publicēja G. Lopitāls

Lietojot Lopitāla kārtulu trīs reizes, iegūsim

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3\right)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(3x^2\right)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(6x)'}{(\sin x)'}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{6}{\cos x}=\frac{6}{1}=6.$$

2.3. piemērs. Aprēķināt $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}$ (n - naturāls skaitlis).

Lietojot Lopitāla kārtulu n reizes, iegūsim

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^n)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(nx^{n-1}\right)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\cdots=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)\cdots 1}{e^x}=0.$$

Lai, izmantojot Lopitāla kārtulu, atklātu nenoteiktības $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0, tās vispirms jāreducē uz nenoteiktībām $\frac{0}{0}$ vai $\frac{\infty}{\infty}$.

Nenoteiktību $0\cdot\infty$ var reducēt uz nenoteiktību $\frac{0}{0}$ šādi:

$$f\cdot g=\frac{f}{\frac{1}{g}}.$$

Nenoteiktības $\infty-\infty$ gadījumā $f-g$ pārveido šādi:

$$\frac{\frac{1}{g}-\frac{1}{f}}{\frac{1}{f\cdot g}}.$$

Iegūst nenoteiktību $\frac{0}{0}$.

Pārējās nenoteiktības (0^0, 1^∞, ∞^0) reducē uz nenoteiktību $0\cdot\infty$, uzrakstot f^g izskatā $e^{g\ln f}$.

2.4. piemērs. Aprēķināt $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)'}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}x\right)'} = \lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{2}x}} = \frac{2}{\pi}.$$

2.5. piemērs. Aprēķināt $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = (\infty-\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\sin x + x\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0.$$

2.6. piemērs. Aprēķināt $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = (1^\infty) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln\cos 2x}{x^2}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln\cos 2x)'}{(x^2)'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-2\sin 2x}{\cos 2x}}{2x}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$
$$= e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\operatorname{tg}2x)'}{(x)'}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{2}{\cos^2 2x}}{1}} = e^{-2}.$$

2.6. piezīme. Saskaņā ar Lopitāla kārtulu, ja eksistē funkciju atvasinājumu attiecības robeža, tad eksistē arī šo funkciju attiecības robeža. Turpretī, ja atvasinājumu attiecības robeža neeksistē, tad tas vēl nenozīmē, ka neeksistē funkciju attiecības robeža.

Piemēram, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$ eksistē, lai gan atvasinājumu attiecības $\frac{(x+\sin x)'}{x'} = 1+\cos x$ robeža, kad $x\to+\infty$, neeksistē.

2.6. Teilora formula

Teilora [5] formulā funkcija tiek aproksimēta (tuvināti izteikta) ar polinomiem, kurus sauc par Teilora polinomiem. Teilora formulu lieto gan diferencējamas funkcijas vērtību tuvinātai aprēķināšanai, gan teorētisku jautājumu apskatā. Pieņemsim, ka funkcija f ir $(n+1)$ reizi diferencējama punkta x_0 apkārtnē. Noteiksim tādu n-tās pakāpes polinomu $P_n(x)$, lai tas aproksimētu doto funkciju f punkta x_0 apkārtnē. Par šo aproksimācijas polinomu izraudzīsimies šādu polinomu

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n. \quad (2.1)$$

(Acīmredzot, $P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n'(x_0) = f'(x_0), \cdots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$).

2.1. definīcija. Polinomu $P_n(x)$, kas ir definēts ar formulu (2.1), sauc par funkcijas f n-tās pakāpes **Teilora polinomu** pēc $(x-x_0)$ pakāpēm. Polinoma koeficientus

$$f(x_0),\ \frac{f'(x_0)}{1!},\ \frac{f''(x_0)}{2!},\ \cdots,\ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

sauc par **Teilora koeficientiem**.

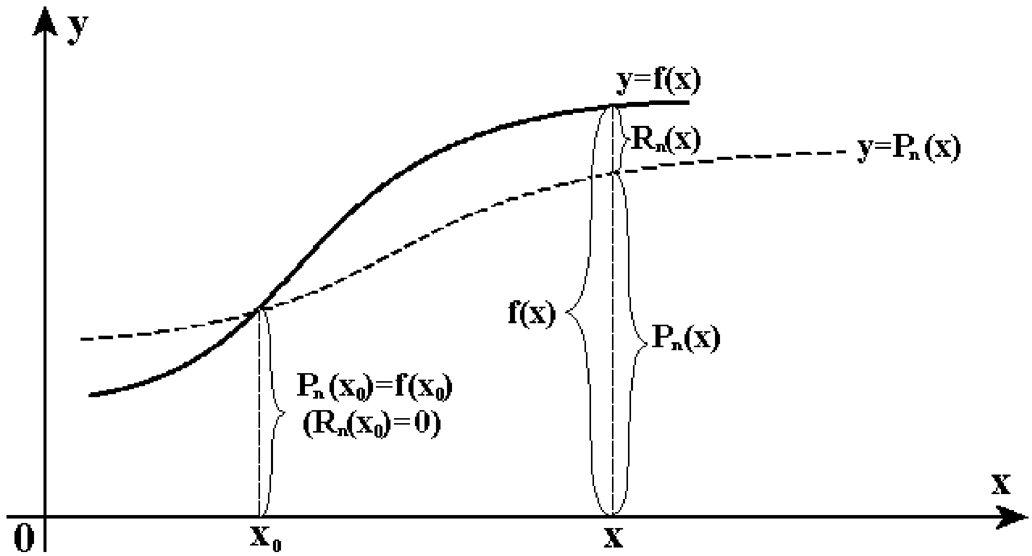
Starpību $f(x) - P_n(x)$ apzīmēsim ar $R_n(x)$, kas ir aptuvenās vienādības $f(x) \approx P_n(x)$ kļūda.

Tātad $f(x) - P_n(x) = R_n(x)$ jeb

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x). \quad (2.2)$$

2.2. definīcija. Vienādību (2.2) sauc par funkcijas f **Teilora formulu** punkta x_0 apkārtnē (jeb pēc $(x-x_0)$ pakāpēm), bet $R_n(x)$ - par tās **atlikuma locekli**.

[5] Bruks Teilors (1685-1731) - angļu matemātiķis.



2.5. zīmējums

Izmantojot n reizes Lopitāla kārtulu, var parādīt, ka atlikuma loceklis $R_n(x)$ ir augstākas kārtas bezgalīgi maza funkcija salīdzinājumā ar $(x-x_0)^n$, kad $x \to x_0$, t.i.,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

$R_n(x) = 0\left((x-x_0)^n\right)$, kad $x \to x_0$.

Bez šīs formas atlikuma loceklim var būt arī citas formas. Aplūkosim, kā tas izskatās Lagranža formā vai Koši formā.

Izveidosim šādu funkciju

$$\varphi(z) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n,$$

kur z atrodas starp x_0 un x (x - fiksēts punkts no x_0 apkārtnes).

Kā otru funkciju izvēlēsimies

$$\psi(z) = (x-z)^{n+1}.$$

Abas šīs funkcijas slēgtajā intervālā, kura galapunkti ir x_0 un x, apmierina Koši teorēmas nosacījumus, tāpēc

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)},$$

kur $c = x_0 + \theta(x - x_0) \quad (0 < \theta < 1)$.

Ņemot vērā formulas, kas uzdod šīs funkcijas, iegūsim, ka

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 0; \qquad & \varphi(x_0) &= R_n(x); \\ \psi(x) &= 0; \qquad & \psi(x_0) &= (x - x_0)^{n+1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(z) = f'(z) - \left(\frac{f''(z)}{1!}(x - z) - f'(z)\right) - \\ - \left(\frac{f'''(z)}{2!}(x - z)^2 - \frac{f''(z)}{1!}(x - z)\right) - \ldots - \\ - \left(\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x - z)^{n-1}\right) = \\ = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x - z)^n; \end{aligned}$$

$\psi'(z) = -(n + 1)(x - z)^n$.

Tātad

$$\varphi'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

un

$$\psi'(c) = -(n + 1)(x - c)^n.$$

Košī teorēmas formula iegūs šādu izskatu

$$\frac{0 - R_n(x)}{0 - (x - x_0)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x - c)^n}{-(n + 1)(x - c)^n}$$

jeb

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1},}$$

kur $c = x_0 + \theta(x - x_0); \quad (0 < \theta < 1)$.

Šādi izsakās Teilora formulas atlikuma loceklis **Lagranža formā**. Parasti precīza c vērtība nav zināma: var apgalvot tikai to, ka c atrodas starp x_0 un x.

Teilora formula ar atlikuma locekli Lagranža formā izskatās šādi:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \\ + \frac{f'^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

kur $c = x_0 + \theta(x - x_0) \quad (0 < \theta < 1)$.

Apzīmējot $\Delta x = x - x_0, \quad \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$,

$$df(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),\ \ldots,\ d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n, \\ d^{n+1} f(c) = f^{(n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1},$$

šī formula pārrakstās šādi:

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \cdots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + \frac{d^{n+1} f(c)}{(n+1)!},$$

kur $c = x_0 + \theta(x - x_0) \quad (0 < \theta < 1)$.

2.7. piezīme. Ievietojot $n = 0$, iegūsim Teilora formulas atsevišķu gadījumu, kas ir Lagranža formula.

Tagad funkciju ψ izvēlēsimies šādu: $\psi(x) = x - z$. Arī šoreiz funkcijām φ un ψ pielietosim Košī teorēmu. Iegūsim Teilora formulas atlikuma locekli Košī formā:

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))(1 - \theta)^n}{n!}(x - x_0)^{n+1},}$$

kur $0 < \theta < 1$.

2.7. piemērs. Funkcijai $f(x) = e^x$ uzrakstīt Teilora formulu ar atlikuma locekli Lagranža formā.

Uzrakstīsim Teilora formulu pēc x pakāpēm (jeb punkta $x_0 = 0$ apkārtnē). Šai funkcijai

$$f'(x) = f''(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = f^{(n+1)}(x) = e^x.$$

Tātad $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$ un $f^{(n+1)}(c) = e^c$, kur $c = \theta x \quad (0 < \theta < 1)$.

Teilora formula ar atlikuma locekli Lagranža formā šai funkcijai izskatās:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1},$$

kur $0 < \theta < 1$.

2.8. piemērs. Funkcijai $f(x) = \ln(1+x)$ uzrakstīt Teilora formulu ar atlikuma locekli Košī formā.

Šai funkcijai uzrakstīsim Teilora formulu punkta $x_0 = 0$ apkārtnē. Šoreiz

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2},\ \ldots,\ f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$
$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Tātad

$$f(0) = \ln 1 = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = -1,\ \ldots\ ,$$
$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,, f^{(n+1)}(c) = (-1)^n \frac{n!}{(1+c)^{n+1}},$$

kur $c = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

Teilora formula ar atlikuma locekli Košī formā šai funkcijai izskatās:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} - \frac{(-1)^n(1-\theta)^n}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1},$$

kur $0 < \theta < 1$.

Jautājumi

1. Formulēt Fermā teorēmu.
2. Formulēt Rolla teorēmu un sniegt tās ģeometrisko interpretāciju.
3. Formulēt Lagranža teorēmu un sniegt tās ģeometrisko interpretāciju.
4. Uzrakstīt Lagranža formulu.

5. Formulēt Košī teorēmu.

6. Formulēt Lopitāla kārtulu.

7. Kā pielietot Lopitāla kārtulu nenoteiktību $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0 atklāšanai?

8. Definēt funkcijas f n - tās pakāpes Teilora polinomu un Teilora koeficientus.

9. Definēt funkcijas f Teilora formulu punkta x_0 apkārtnē.

10. Definēt Teilora formulas atlikuma locekli.

11. Uzrakstīt funkcijas f Teilora formulu ar atlikuma locekli Lagranža formā.

12. Uzrakstīt funkcijas f Teilora formulu ar atlikuma locekli Košī formā.

Vingrinājumi

1. Pierādīt Fermā teorēmu gadījumā, kad punktā c funkcija sasniedz savu vismazāko vērtību. Sniegt ğ eometrisko interpretāciju.

2. Ar konkrētiem piemēriem parādīt, ka visi Rolla teorēmas nosacījumi ir būtiski.

3. Ar konkrētiem piemēriem parādīt, ka visi Lagranža teorēmas nosacījumi ir būtiski.

4. Šādām funkcijām uzrakstīt Lagranža formulu:

   (a) $f(x) = e^x$;

   (b) $f(x) = \ln x$;

   (c) $f(x) = \frac{1}{x}$.

5. Pierādīt Košī teorēmu par funkciju diferenču attiecību.

6. Parādīt, ka Lagranža teorēma ir Košī teorēmas secinājums.

7. Pierādīt, ka Lopitāla teorēma ir spēkā, ja $x \to +\infty$ vai $x \to -\infty$.

8. Izmantojot Lopitāla kārtulu, aprēķināt šādas robežas:

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$;

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$;

(c) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$;

(d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x}\right)$;

(f) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$;

(g) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

9. Iegūt Teilora formulu n - tās pakāpes polinomam.

10. Parādīt, ka Teilora formulas atlikuma loceklis ir augstākās kārtas bezgalīgi maza funkcija salīdzinājumā ar $(x-x_0)^n$, kad $x \to x_0$.

11. Iegūt Teilora formulas atlikuma locekļa Koši formu.

12. Šādām funkcijām uzrakstīt Teilora formulu pēc x pakāpēm ar atlikuma locekli Lagranža formā:

(a) $f(x) = 2^x$;

(b) $f(x) = \sin x$;

(c) $f(x) = \cos x$;

(d) $f(x) = \operatorname{sh} x$;

(e) $f(x) = \operatorname{ch} x$;

(f) $f(x) = \ln(1+x)$;

(g) $f(x) = (1+x)^\alpha \quad (\alpha \neq 0,\ x > -1)$.

13. Šādām funkcijām uzrakstīt Teilora formulu pēc x pakāpēm ar atlikuma locekli Koši formā:

(a) $f(x) = e^x$;

(b) $f(x) = (1+x)^\alpha \quad (\alpha \neq 0,\ x > -1)$.

14. Aprēķināt ar precizitāti $0,001$ skaitli e.

III nodaļa

ATVASINĀJUMA LIETOJUMI FUNKCIJU PĒTĪŠANĀ

3.1. Konstantas funkcijas nosacījums

3.1. teorēma. *Lai funkcija f būtu konstanta intervālā $(a;b)$, ir nepieciešami un pietiekami, lai tai šajā intervālā eksistētu atvasinājums, kas ir vienāds ar nulli.*

▶ **Nepieciešamība**. Izriet no 1.3. teorēmas.

Pietiekamība. Jebkuriem diviem šī intervāla punktiem x_0 un x, kur x_0 - fiksēts, bet x - patvaļīgs punkts, ir spēkā Lagranža formula: $f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0)$, kur c atrodas starp x_0 un x.

Tā kā $f'(c) = 0$, tad $f(x) - f(x_0) = 0$ jeb $f(x) = f(x_0) = \text{const}$. Tādējādi funkcija f ir konstanta intervālā $(a;b)$. ◀

Sekas. Ja divām intervālā $(a;b)$ diferencējamām funkcijām ir vienādi atvasinājumi, tad šīs funkcijas var atšķirties tikai par konstanti.

Pierādīt patstāvīgi[1].

3.1. piemērs. Pierādīt, ka $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Izveidosim divas funkcijas $f(x) = \arcsin x$ un $g(x) = -\arccos x$. Acīmredzami, visiem $x \in (-1;1)$ ir spēkā $f'(x) = g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Saskaņā ar sekām $f(x)-g(x) = C$ jeb $\arcsin x + \arccos x = C$. Lai atrastu konstantes vērtību, ievietosim šajā identitātē $x = 0$. Iegūsim $\arcsin 0 + \arccos 0 = C$ jeb

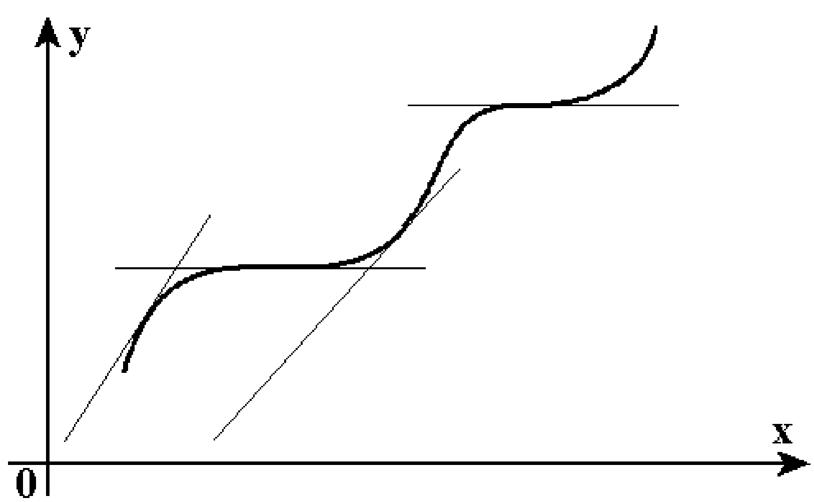
[1] Sastādīt funkciju, kas ir doto funkciju starpība, un tai pielietot 3.1. teorēmu

$0 + \frac{\pi}{2} = C$. Tādējādi $C = \frac{\pi}{2}$ un $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Ar tiešo pārbaudi var pārliecināties, ka vienādība ir spēkā arī šī intervāla galapunktos.

3.2. Funkcijas monotonitātes nosacījumi

3.2. teorēma. *(Intervālā augošas funkcijas nepieciešamais nosacījums). Ja intervālā $(a;b)$ diferencējama funkcija f ir augoša, tad jebkurā šī intervāla punktā $f'(x) \geq 0$.*

▶ Izvēlēsimies intervāla $(a;b)$ patvaļīgu punktu x un sastādīsim funkcijas f pieaugumu šajā punktā $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$, kur $x+\Delta x \in (a;b)$. Intervālā augošai funkcijai tās pieauguma zīme sakrīt ar argumenta pieauguma zīmi, tāpēc $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} > 0$. Tā kā f ir diferencējama funkcija, tad šādai attiecībai eksistē robeža, kad $\Delta x \to 0$. Nevienādībā pārejot pie robežas, iegūsim $f'(x) \geq 0$. ◀



3.1. zīmējums

3.1. piezīme.

1. Augošai funkcijai intervāla atsevišķos punktos atvasinājums var būt nulle. Piemēram, $f(x) = x^3$ ir augoša funkcija, bet $f'(0) = 0$.
2. Augošai funkcijai tie punkti, kuros atvasinājums ir nulle, nedrīkst veidot nekādu intervālu. (Pretējā gadījumā šajā intervālā funkcija būtu konstanta).

3. Intervālā augošas funkcijas grafikam pieskares veido ar abscisu ass pozitīvo virzienu šaurus leņķus vai atsevišķos punktos ir paralēlas abscisu asij (3.1. zīm.).

Analogi var formulēt un pierādīt intervālā $(a;b)$ dilstošas funkcijas nepieciešamo nosacījumu.

3.3. teorēma. *(Intervālā augošas funkcijas pietiekamais nosacījums). Ja intervālā $(a;b)$ diferencējamai funkcijai katrā šī intervāla punktā $f'(x) > 0$, tad f ir augoša funkcija šajā intervālā.*

▶ Izvēlēsimies šī intervāla divus patvaļīgus punktus x_1, x_2, pie tam $x_2 > x_1$. Saskaņā ar Lagranža formulu $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$, kur $x_1 < c < x_2$. Tā kā visos intervāla $(a;b)$ punktos $f'(x) > 0$, tad arī $f'(c) > 0$. Tā kā $x_2 - x_1 > 0$, tad arī $f'(c)(x_1 - x_1) > 0$. Seko, ka $f(x_2) - f(x_1) > 0$ jeb $f(x_2) > f(x_1)$, t.i., f ir augoša funkcija intervālā $(a;b)$. ◀

3.2. piezīme. Ja intervāla atsevišķos punktos atvasinājums ir nulle, bet pārējos - pozitīvs, tad f ir augoša funkcija šajā intervālā.

Analogi var formulēt un pierādīt intervālā $(a;b)$ dilstošas funkcijas pietiekamo nosacījumu.

3.1. definīcija. Intervālus, kuros funkcija aug (vai dilst), sauc par tās **augšanas (vai dilšanas) intervāliem**. Augšanas vai dilšanas intervālus nešķirojot sauc par funkcijas **monotonitātes intervāliem**.

Lai atrastu funkcijas monotonitātes intervālus, rīkojas šādi.

1. Atrod funkcijas atvasinājumu $f'(x)$.

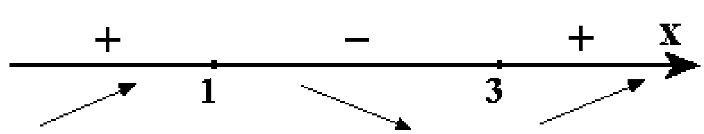
2. Atrod tos intervālus, kuros atvasinājums saglabā zīmi[2]. Ja kādā intervālā $f'(x) > 0$, tad tas ir funkcijas augšanas intervāls, ja turpretim $f'(x) < 0$, tad - dilšanas intervāls.

3.2. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ monotonitātes intervālus.

1. Atrodam $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$.

[2]Bieži ir noderīga tā saucamā intervālu metode.

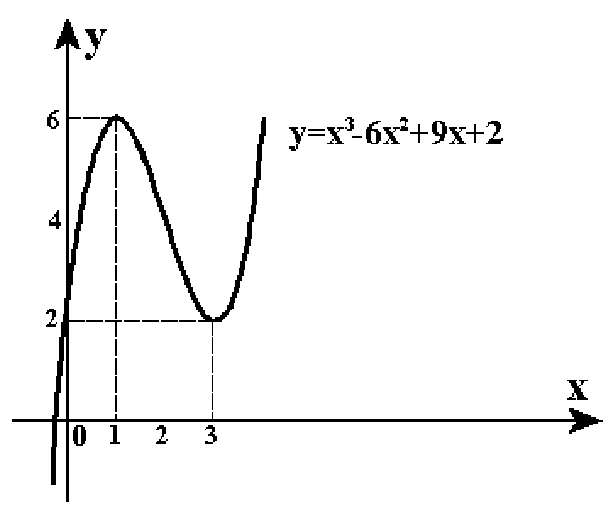
2. Atvasinājums ir nulle punktos $x = 1$ un $x = 3$. Šie punkti funkcijas definīcijas apgabalu sadala trijos intervālos. Katrā no šiem intervāliem atvasinājums saglabā savu zīmi (lai noteiktu atvasinājuma zīmi kādā no šiem intervāliem, pietiek aprēķināt tā vērtību intervāla jebkurā vienā punktā). Atvasinājuma vērtību zīmes ir lietderīgi atzīmēt uz skaitļu taisnes (3.2. zīm.).



3.2. zīmējums

Tādējādi funkcijas augšanas intervāli ir $(-\infty; 1)$ un $(3; +\infty)$, bet dilšanas intervāls - $(1; 3)$.

(Bultiņa uz augšu norāda, ka funkcija ir augoša, bet bultiņa uz leju - ka funkcija ir dilstoša atbilstošajā intervālā). Funkcijas grafiks attēlots 3.3. zīmējumā.



3.3. zīmējums

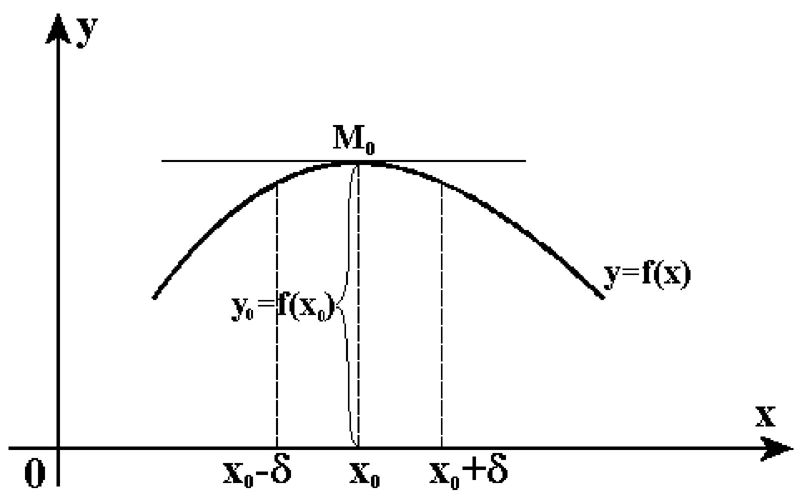
3.3. Funkcijas ekstrēmi un to nepieciešamais nosacījums

Apskatīsim funkciju f, definētu punkta x_0 apkārtnē.

3.2. definīcija. Punktu x_0 sauc par funkcijas f **maksimuma**[3]**punktu**, ja visiem $x \neq x_0$ no šī punkta kaut kādas apkārtnes ir pareiza nevienādība

$$f(x) < f(x_0)$$

(3.4. zīm.).



3.4. zīmējums

3.3. definīcija. Funkcijas f vērtību tās maksimuma punktā sauc par funkcijas **maksimumu** un apzīmē $y_0 = f(x_0) = \max f(x)$.

Analogi definē funkcijas minimuma[4] punktu un funkcijas minimumu (apzīmē: $\min f(x)$).

3.4. definīcija. Maksimuma un minimuma punktus nešķirojot sauc par **ekstrēma**[5] **punktiem**, bet funkcijas vērtības šajos punktos - par funkcijas **ekstrēmiem**.

[3] [lat. maximum - pats lielākais]
[4] [lat. minimum - pats mazākais]
[5] [lat. extremum - galējs]

3.4. teorēma. *(Diferencējamas funkcijas ekstrēma nepieciešamais nosacījums).*

Ja funkcija f ir diferencējama tās ekstrēma punktā x_0, tad $f'(x_0) = 0$.

▶ Pieņemsim, ka x_0 ir funkcijas maksimuma punkts. Tad saskaņā ar maksimuma punkta definīciju $y_0 = f(x_0)$ ir vislielākā funkcijas vērtība punkta x_0 kaut kādā apkārtnē. Saskaņā ar Fermā teorēmu $f'(x_0) = 0$. Minimuma punkta gadījumā pierādījums ir analogs. ◀

3.5. definīcija. Punktu x_0 sauc par funkcijas **stacionāro**[6] **punktu**, ja $f'(x_0) = 0$.

Funkcijas stacionārajam punktam x_0 ir šāda ģeometriskā interpretācija: funkcijas grafikam atbilstošajā punktā $M_0(x_0; f(x_0))$ konstruētā pieskare ir horizontāla (3.4. zīm.).

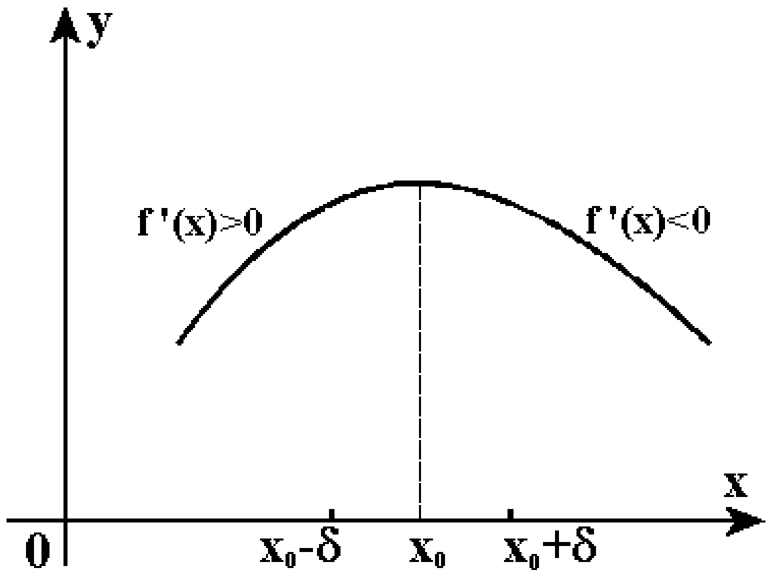
Acīmredzami, funkcijai var būt ekstrēms arī tajā definīcijas apgabala iekšējā punktā, kurā tā nav diferencējama. Piemēram, funkcijai $f(x) = |x|$ punkts $x_0 = 0$ ir tās minimuma punkts (1.1. zīm.).

3.6. definīcija. Funkcijas stacionāros punktus un tos definīcijas apgabala iekšējos punktus, kuros funkcija nav diferencējama, sauc par tās **kritiskajiem**[7] **punktiem**.

No visa teiktā izriet, ka tikai kritiskie punkti var būt par funkcijas ekstrēma punktiem. Citiem vārdiem, ekstrēmi var būt tikai funkcijas kritiskajos punktos. Svarīgi ir atzīmēt, ka ne katrā funkcijas kritiskajā punktā ir ekstrēms. Piemēram, funkcijai $f(x) = x^3$ punkts $x_0 = 0$ ir kritiskais punkts (konkrēti stacionārais punkts), bet šajā punktā funkcijai nav ne maksimuma, ne minimuma. Apskatīsim vēl vienu piemēru. Funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x}$ nav diferencējama punktā $x_0 = 0$. Tomēr šajā kritiskajā punktā funkcijai arī nav ekstrēma (1.4. zīm.).

Lai no kritiskajiem punktiem izdalītu funkcijas ekstrēma punktus, formulēsim ekstrēma pietiekamos nosacījumus.

[6] [lat. stationarius - stāvošs, nekustīgs]
[7] izšķirošs, lūzuma.



3.5. zīmējums

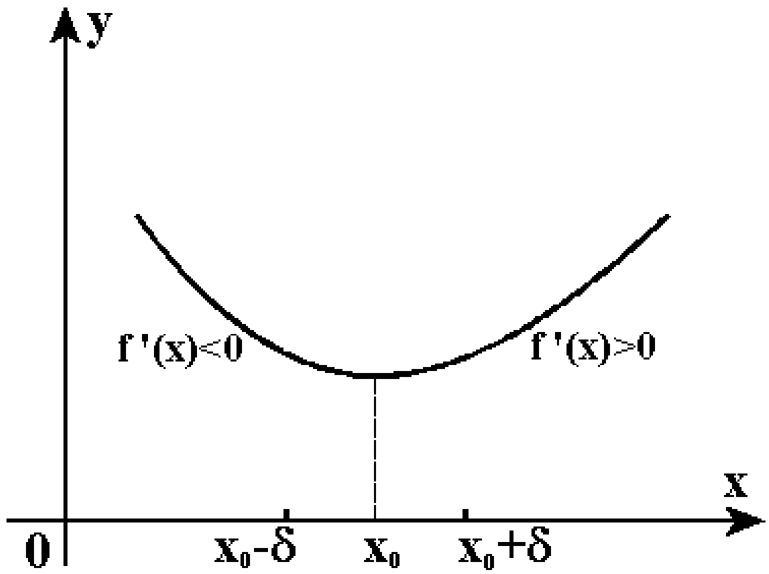
3.4. Funkcijas ekstrēma pietiekamie nosacījumi

3.5. teorēma. *(Funkcijas ekstrēma pietiekamais nosacījums, izmantojot pirmās kārtas atvasinājumu).*

Ja funkcija f ir nepārtraukta punktā x_0, ir diferencējama šī punkta kaut kādā apkārtnē, izņemot varbūt pašu šo punktu, un tās atvasinājums, argumentam ejot caur punktu x_0, maina savu zīmi, tad x_0 ir funkcijas ekstrēma punkts. Pie tam, ja atvasinājums pa kreisi no x_0 ir pozitīvs, pa labi - negatīvs, tad x_0 ir funkcijas maksimuma punkts, bet, ja atvasinājums pa kreisi no x_0 ir negatīvs, pa labi - pozitīvs, tad x_0 ir funkcijas minimuma punkts.

▶ Pieņemsim, ka funkcijas atvasinājums pa kreisi no x_0 ir pozitīvs. Tas nozīmē, ka pa kreisi no x_0 funkcija ir augoša. Tāpēc visiem $x < x_0$ (un kas pieder x_0 minētajai apkārtnei) $f(x) < f(x_0)$. Pa labi no x_0 funkcijas atvasinājums ir negatīvs. Tāpēc šeit funkcija ir dilstoša un $x > x_0$ (un kas pieder x_0 minētajai apkārtnei) $f(x) < f(x_0)$. Tādējādi x_0 ir funkcijas maksimuma punkts (3.5. zīm.). Analogi apskata otru gadījumu, kad argumentam ejot caur x_0 (argumenta augšanas "virzienā"), atvasinājums maina zīmi no " $-$ " uz " $+$ " (3.6. zīm.). ◀

3.3. piezīme. Ja, argumentam ejot caur kritisko punktu x_0, atvasinājums zīmi nemaina, tad x_0 nav funkcijas ekstrēma punkts.



3.6. zīmējums

Formulēsim šādu kārtulu (funkcijas ekstrēma noteikšanas **pirmā kārtula**).

Lai atrastu funkcijas ekstrēmus, ir jāveic šādas darbības.

1. Jāatrod funkcijas kritiskie punkti.

2. Jāizpēta atvasinājuma zīme kritisko punktu apkārtnēs. Ja, argumentam ejot caur kādu kritisko punktu, atvasinājuma zīme mainās no "+" uz "$-$", tad šajā punktā funkcijai ir maksimums, bet, ja atvasinājuma zīme mainās no "$-$" uz "+", tad - minimums. Ja atvasinājuma zīme nemainās, tad funkcijai šajā punktā ekstrēma nav.

3. Jāprēķina funkcijas vērtības ekstrēmu punktos.

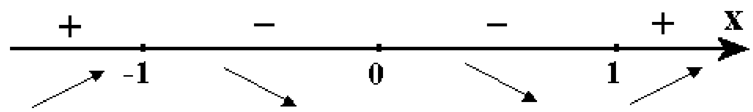
3.3. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 5$ ekstrēmus.

1. Lai atrastu funkcijas kritiskos punktus, atradīsim

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x-1)(x+1).$$

   Kritiskie punkti (šoreiz stacionārie punkti) ir $-1, 0$ un 1.

2. Atvasinājuma vērtību zīmes atzīmēsim uz skaitļu taisnes (3.7. zīm.). Funkcijas maksimuma punkts ir $x = -1$, bet minimuma punkts ir $x = 1$. Punktā $x = 0$ ekstrēma nav.

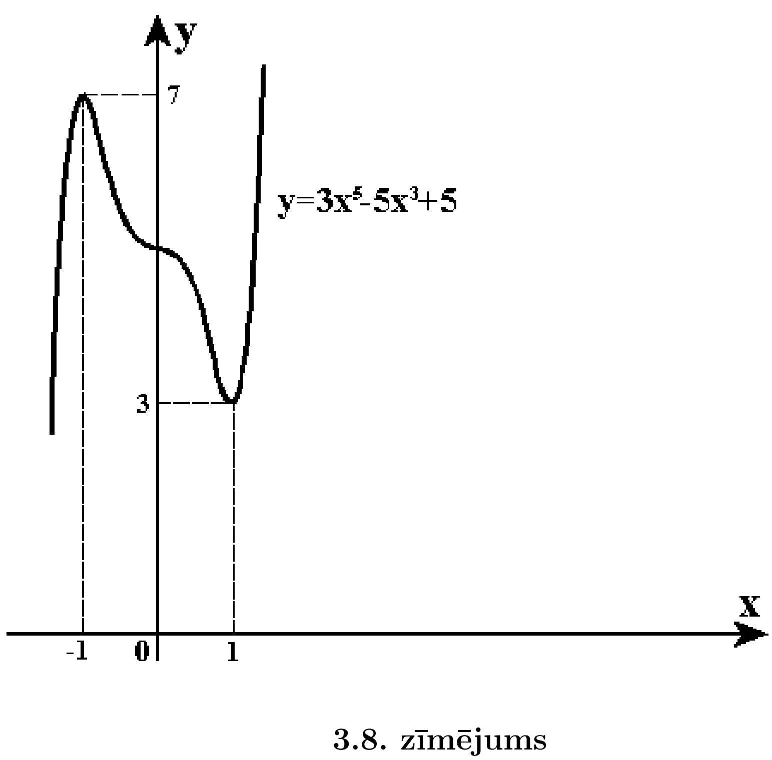


3.7. zīmējums

3. Aprēķināsim funkcijas vērtības ekstrēmu punktos.

$$\max f(x) = f(-1) = 7; \quad \min f(x) = f(1) = 3.$$

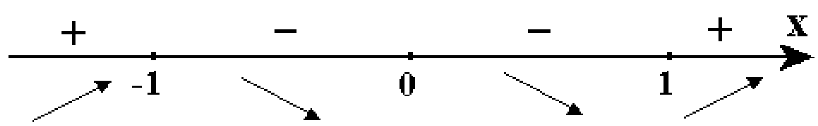
Vienlaicīgi esam noteikuši arī funkcijas monotonitātes intervālus. Augšanas intervāli ir $(-\infty; -1)$ un $(1; +\infty)$, bet dilšanas intervāls - $(-1; 1)$. Funkcijas grafiks attēlots 3.8. zīmējumā.



3.8. zīmējums

3.4. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$ ekstrēmus.

1. $f'(x) = 1 - 3 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}}$. Kritiskie punkti ir $-1, 0$ un 1.
2. Atvasinājuma vērtību zīmes atzīmēsim uz skaitļu taisnes (3.9. zīm.). Punktā $x = 0$ funkcija nav diferencējama.

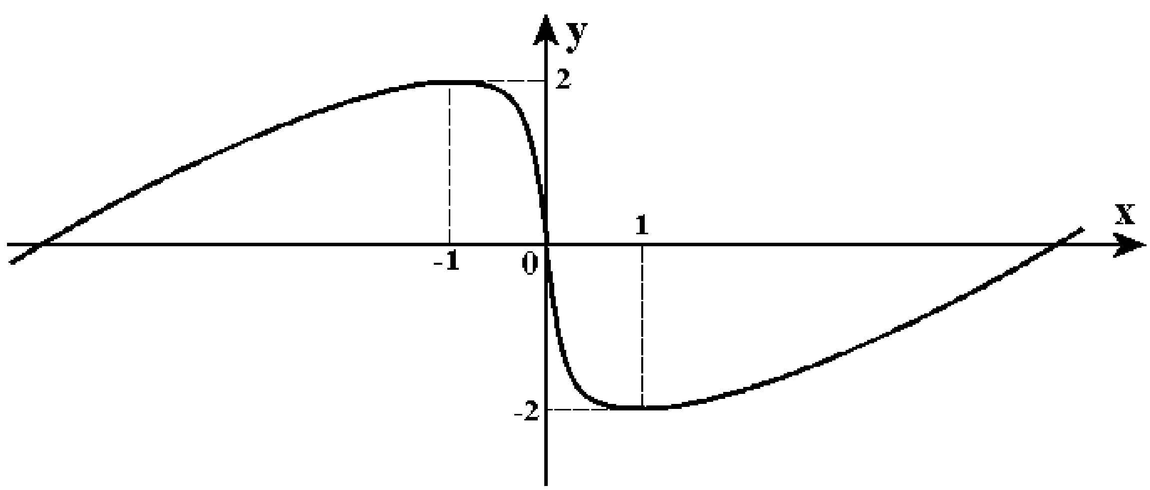


3.9. zīmējums

Funkcijas maksimuma punkts ir $x = -1$, bet minimuma punkts ir $x = 1$. Punktā $x = 0$ ekstrēma nav.

3. $\max f(x) = f(-1) = 2; \quad \min f(x) = f(1) = -2.$

Funkcija aug intervālos $(-\infty; -1)$ un $(1; +\infty)$, bet dilst intervālā $(-1, 1)$. Funkcijas grafiks attēlots 3.10. zīmējumā.



3.10. zīmējums

3.5. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ ekstrēmus.

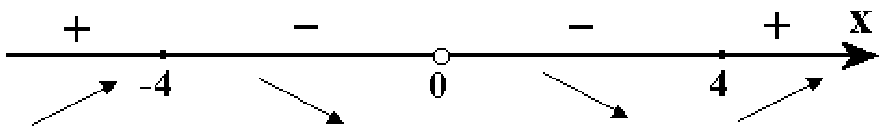
Funkcija nav definēta punktā $x = 0$.

1. $f'(x) = \frac{1}{8} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-16}{8x^2} = \frac{(x+4)(x-4)}{8x^2}$.

   Kritiskie punkti ir -4 un 4. (Punkts $x = 0$ nevar būt par kritisko punktu, jo tas nepieder funkcijas definīcijas apgabalam).

2. Uz skaitļu taisnes atzīmēsim atvasinājumu vērtību zīmes (uz skaitļu taisnes ir jātzīmē arī punkts $x = 0$) (3.11. zīm.).

   Funkcijas maksimuma punkts ir $x = -4$, bet minimuma punkts ir $x = 4$.



3.11. zīmējums

3. $\max f(x) = f(-4) = -1; \quad \min f(x) = f(4) = 1.$

   Funkcija aug intervālos $(-\infty; -4)$ un $(4; +\infty)$, bet dilst intervālos $(-4; 0)$ un $(0; 4)$.

3.6. teorēma. *(Funkcijas ekstrēma pietiekamais nosacījums, izmantojot otrās kārtas atvasinājumu).*

Ja funkcija f ir diferencējama stacionāra punkta x_0 apkārtnē un šajā punktā eksistē galīgs $f''(x_0) \neq 0$, tad x_0 ir funkcijas ekstrēma punkts. Pie tam, ja $f''(x_0) < 0$, tad x_0 ir maksimuma punkts, bet, ja $f''(x_0) > 0$, tad - minimuma punkts.

► Tā kā x_0 ir funkcijas stacionārais punkts, tad $f'(x_0) = 0$. Punktā x_0 eksistē

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} \neq 0.$$

Pieņemsim, ka $f''(x_0) < 0$ jeb

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

Punkta x_0 kaut kādā apkārtnē funkcija saglabā savas robežas zīmi, t.i.,

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} < 0.$$

No šīs nevienādības seko, ka visiem $x < x_0$ (un kas pieder minētajai apkārtnei) $f'(x) > 0$, bet $x > x_0$ izpildās $f'(x) < 0$. Tādējādi, argumentam ejot caur punktu x_0, atvasinājums maina zīmi no " + " uz " − ". Punkts x_0 ir funkcijas maksimuma punkts.

Analogi apskata gadījumu, kad $f''(x_0) > 0$. ◄

3.4. piezīme. Izmantojot otrās kārtas atvasinājumu, uz ekstrēmu drīkst pētīt tikai funkcijas stacionāros punktus. Pie tam šis nosacījums nav pielietojams tajos stacionārajos punktos, kuros otrās kārtas atvasinājums ir nulle, bezgalība vai vispār neeksistē. Šādos gadījumos ir jālieto pirmā kārtula.

Formulēsim funkcijas ekstrēma noteikšanas **otro kārtulu**.

Lai atrastu funkcijas ekstrēmus, ir jāveic šādas darbības.

1. Jāatrod funkcijas stacionārie punkti.
2. Jāatrod $f''(x)$ un jānosaka tā skaitliskā vērtība katrā stacionārajā punktā x_0 (protams, ja tāda eksistē). Ja $f''(x_0) < 0$, tad x_0 ir maksimuma punkts, bet ja $f''(x_0) > 0$, tad x_0 - minimuma punkts.
3. Jāaprēķina funkcijas vērtības ekstrēma punktos.

3.6. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 5$ ekstrēmus.

1. $f'(x) = 15x^2(x^2 - 1)$. Stacionārie punkti ir $-1, 0$ un 1.
2. $f''(x) = 60x^3 - 30x$; $f''(-1) = -30 < 0$. Punkts $x = -1$ ir funkcijas maksimuma punkts. $f''(0) = 0$. Otrā kārtula šī punkta raksturu nenosaka. Punkts $x = 0$ nav funkcijas ekstrēma punkts (skat. 3.3. piemēru). $f''(1) = 30 > 0$. Punkts $x = 1$ ir funkcijas minimuma punkts.
3. $\max f(x) = f(-1) = 7$; $\min f(x) = f(-1) = 3$.

Funkcijas grafiks attēlots 3.8. zīmējumā.

3.5. Funkcijas vislielākās un vismazākās vērtības atrašana

Apskatīsim slēgtā intervālā $[a; b]$ nepārtrauktu funkciju f. Saskaņā ar Veierštrāsa II teorēmu tā sasniedz šajā intervālā savu vismazāko un vislielāko vērtību. Šīs vērtības funkcija sasniedz ekstrēma punktos vai intervāla galapunktos. Lai atrastu funkcijas vismazāko un vislielāko vērtību, nav obligāti noteikt ekstrēma punktus, pietiek atrast funkcijas kritiskos punktus.

Lai slēgtā intervālā $[a;b]$ atrastu nepārtrauktas funkcijas f vislielāko un vismazāko vērtību, ir jāizdara šādas darbības.

1. Jāatrod šīs funkcijas visi kritiskie punkti, kas atrodas intervālā $[a;b]$.

2. Jāaprēķina funkcijas vērtības kritiskajos punktos.

3. Jāaprēķina funkcijas vērtības intervāla galapunktos.

4. No iegūtajām vērtībām jāizraugās vislielākais un vismazākais skaitlis.

3.5. piezīme. Funkcijas vislielāko vērtību intervālā $[a;b]$ apzīmē $\max\limits_{[a;b]} f(x)$, bet vismazāko vērtību - $\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

3.7. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = x^3 - 3x + 3$ vislielāko un vismazāko vērtību intervālā $[0;2]$.

1. Atrodam $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.

   Kritiskie punkti ir -1 un 1. Intervālam $[0;2]$ pieder tikai viens kritiskais punkts 1.

2. Izskaitļojam $f(1) = 1$.

3. Izskaitļojam $f(0) = 3$ un $f(2) = 5$.

4. $\min\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = 1, \quad \max\limits_{[0;2]} f(x) = f(2) = 5.$

3.6. piezīme.

1. Ja funkcija ir nepārtraukta vaļējā intervālā, tad vismazāko vai vislielāko vērtību tā šajā intervālā var arī nesasniegt.
2. Ja funkcija ir nepārtraukta vaļējā intervālā un šajā intervālā tai ir vienīgais ekstrēma punkts, tad šajā punktā funkcija sasniedz vismazāko vērtību, ja tas ir minimuma punkts, un vislielāko vērtību, ja tas ir maksimuma punkts.

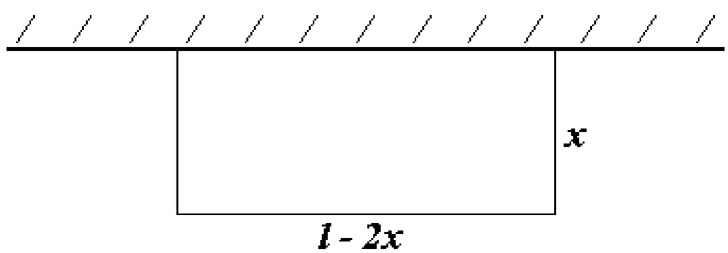
3.8. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ vislielāko un vismazāko vērtību intervālā $[1;3)$.

$f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$.

Kritiskie punkti 0 un -1 nepieder šim intervālam. Atliek izskaitļot tikai $f(1) = 4$. Acīmredzami funkcija ir augoša intervālā, jo $f'(x) > 0$.

Tāpēc $\min\limits_{[1;3)} f(x) = f(1) = 4$. Vislielāko vērtību funkcija šajā intervālā nesasniedz.

3.9. piemērs. Taisnstūrveida zemes gabala viena mala piekļaujas fabrikas sienai (3.12. zīm.). Ar l metru garu stieples gabalu ir jānorobežo šis zemes gabals tā, lai norobežotajam taisnstūrim būtu iespējami lielāks laukums.



3.12. zīmējums

Ja taisnstūra vienas malas garumu apzīmē ar x $\left(0 \le x \le \frac{l}{2}\right)$, tad otras malas garums ir $l - 2x$. Taisnstūra laukums $S = x(l-2x) = xl - 2x^2$. Jāatrod funkcijas $S(x) = xl - 2x^2$ vislielākā vērtība intervālā $\left[0; \frac{l}{2}\right]$.

1. $S'(x) = l - 4x$. Kritiskais punkts ir $x = \frac{l}{4}$ un tas pieder intervālam $\left[0; \frac{l}{2}\right]$.
2. Izskaitļojam $S\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{l^2}{8}$.
3. Izskaitļojam $S(0) = 0$; $\quad S\left(\frac{l}{2}\right) = 0$.
4. $\max\limits_{\left[0;\frac{l}{2}\right]} S(x) = S\left(\frac{l}{4}\right) = \frac{l^2}{8}$.

Taisnstūra malas ir $x = \frac{l}{4}$ un $l - 2 \cdot \frac{l}{4} = \frac{l}{2}$ metrus garas.

3.10. piemērs. Jāizgatavo cilindriskas formas slēgta tvertne, kuras tilpums ir V. Jānosaka tvertnes izmēri, lai materiāla patēriņš būtu mazākais.

Apzīmēsim tvertnes rādiusu ar R un augstumu ar H. Tā kā cilindra tilpums ir $V = \pi R^2 H$, tad varam izteikt $H = \frac{V}{\pi R^2}$ un ievietot cilindra pilnās virsmas formulā

$$S = 2\pi RH + 2\pi R^2.$$

Iegūsim

$$S = 2\pi R\frac{V}{\pi R^2} + 2\pi R^2 = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2.$$

Jāatrod funkcijas $S(R) = \frac{2V}{R} + 2\pi R^2$ vismazākā vērtība intervālā $0 < R < +\infty$.

$$S'(R) = -\frac{2V}{R^2} + 4\pi R = \frac{4\pi R^3 - 2V}{R^2}.$$

Vienīgais kritiskais punkts $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ pieder šim intervālam. Atrodam $S''(R) = \frac{4V}{R^3} + 4\pi$ un novērtējam tā zīmi kritiskajā punktā $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Acīmredzami $S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0$, tāpēc punktā $S = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ funkcijai $S(R)$ ir minimums. Šis punkts ir vienīgais ekstrēma punkts vaļējā intervālā $(0; +\infty)$, tāpēc funkcija šajā punktā sasniedz vismazāko vērtību.

Atrodam

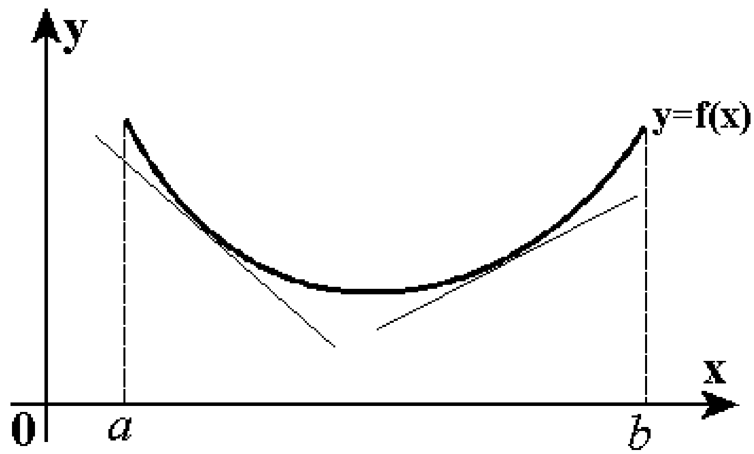
$$H = \frac{V}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Tvertnei ir jābūt tādai, lai izpildītos nosacījums $H = 2R$.

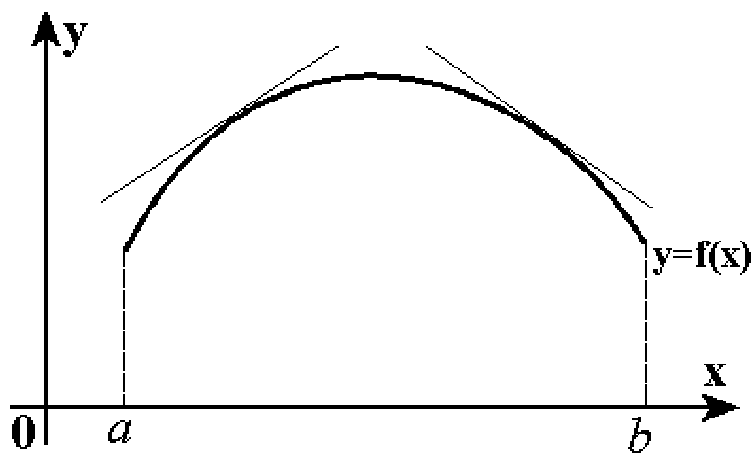
3.6. Funkcijas grafika ieliekums un izliekums

3.7. definīcija. Diferencējamas funkcijas f grafiku intervālā $(a; b)$ sauc par **ieliektu** (vai **izliektu**), ja tas atrodas virs (vai zem) pieskares, kas konstruēta grafika jebkurā punktā.

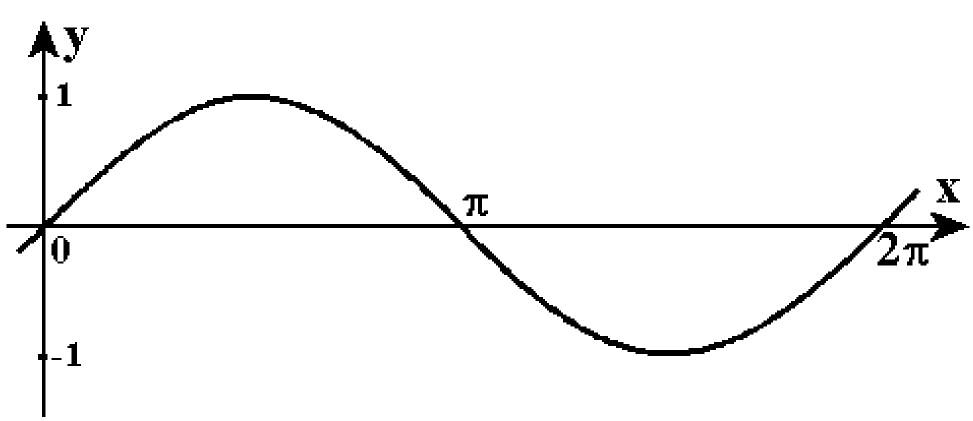
Intervālā $(a; b)$ ieliektas funkcijas grafiks attēlots 3.13. zīm., bet izliektas - 3.14. zīm.



3.13. zīmējums



3.14. zīmējums



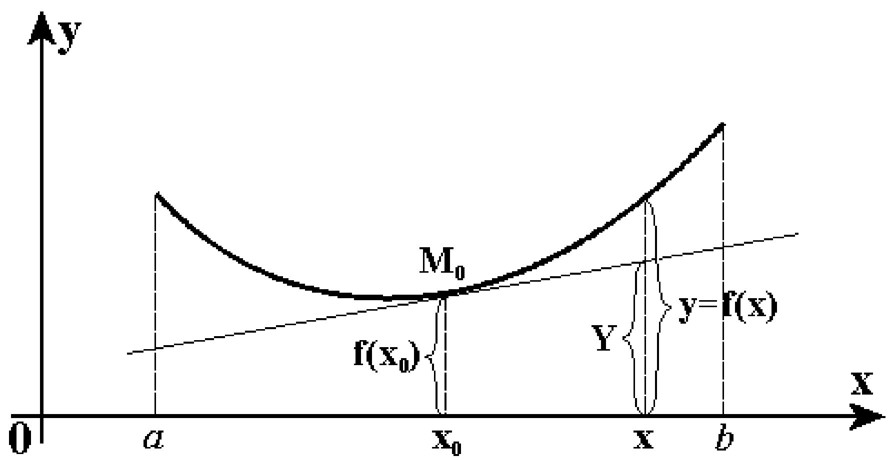
3.15. zīmējums

3.7. piezīme. Vienas un tās pašas funkcijas grafiks kādā intervālā var būt izliekts, bet citā intervālā - ieliekts. Piemēram, funkcijas $f(x) = \sin x$ grafiks ir izliekts intervālā $(0; \pi)$ un ieliekts intervālā $(\pi; 2\pi)$ (3.15. zīm.).

3.7. teorēma. *(Funkcijas grafika ieliekuma pietiekamais nosacījums).*

Ja funkcijai f intervālā $(a; b)$ eksistē otrās kārtas atvasinājums un visos intervāla punktos $f''(x) > 0$, tad funkcijas grafiks šajā intervālā ir ieliekts.

▶ Tā kā funkcija ir divas reizes diferencējama intervālā $(a; b)$, tad šajā intervālā tā ir diferencējama un tāpēc funkcijas grafika katrā punktā eksistē pieskare.



3.16. zīmējums

Izvēlēsimies patvaļīgu $x_0 \in (a; b)$ (3.16. zīm.) un grafika atbilstošajā punktā $M_0(x_0; f(x_0))$ konstruēsim pieskari, kuras vienādojums ir

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \tag{3.1}$$

($(x; Y)$ - pieskares punktu koordinātas).

Funkcijai f punkta x_0 apkārtnē uzrakstīsim Teilora formulu ar atlikuma locekli Lagranža formā, izvēloties $n = 1$. Iegūsim

$$y = f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2, \tag{3.2}$$

kur c atrodas starp x_0 un x. ($(x; y)$ - funkcijas grafika punktu koordinātas).

No vienādības (3.2) atņemsim vienādību (3.1). Iegūsim

$$y - Y = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0). \tag{3.3}$$

Tā kā intervālā $(a;b)$ ir spēkā $f''(x) > 0$, tad arī $f''(c) > 0$. Tātad visiem $x \neq x_0$ ir spēkā $y - Y > 0$ jeb $y > Y$. Tas nozīmē, ka funkcijas grafiks atrodas virs tā patvaļīgajā punktā konstruētās pieskares. Tādējādi funkcijas f grafiks intervālā $(a;b)$ ir ieliekts. ◀

Analogi var formulēt un pierādīt funkcijas grafika izliekuma pietiekamo nosacījumu.

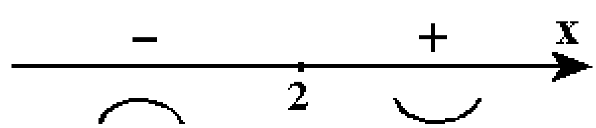
3.8. piezīme. Ja atsevišķos punktos $f''(x) = 0$, bet pārējos intervāla $(a;b)$ punktos $f''(x) > 0$, tad funkcijas grafiks šajā intervālā ir ieliekts.

Lai atrastu funkcijas grafika ieliekuma un izliekuma intervālus, rīkojas šādi.

1. Atrod funkcijas otrās kārtas atvasinājumu $f''(x)$.
2. Atrod tos intervālus, kuros $f''(x)$ saglabā zīmi. Ja kādā intervālā $f''(x) > 0$, tad šajā intervālā funkcijas grafiks ir ieliekts, ja turpretim $f''(x) < 0$, tad - izliekts.

3.11. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ grafika ieliekuma un izliekuma intervālus.

1. Atrodam $f''(x) = 6x - 12$.
2. Otrās kārtas atvasinājums, acīmredzot, ir nulle punktā $x = 2$. Šis punkts funkcijas definīcijas apgabalu sadala divos intervālos. Katrā no šiem intervāliem $f''(x)$ saglabā savu zīmi. Otrās kārtas atvasinājuma zīmes ir lietderīgi atzīmēt uz skaitļu taisnes (3.17. zīm.).



3.17. zīmējums

Tādējādi funkcijas grafiks intervālā $(-\infty; 2)$ ir izliekts, bet intervālā $(2; +\infty)$ - ieliekts. (Izliekts funkcijas grafiks apzīmēts ar simbolu “ $\frown$ ”, bet ieliekts - ar “ $\smile$ ”).

Funkcijas grafiks attēlots 3.3. zīmējumā.

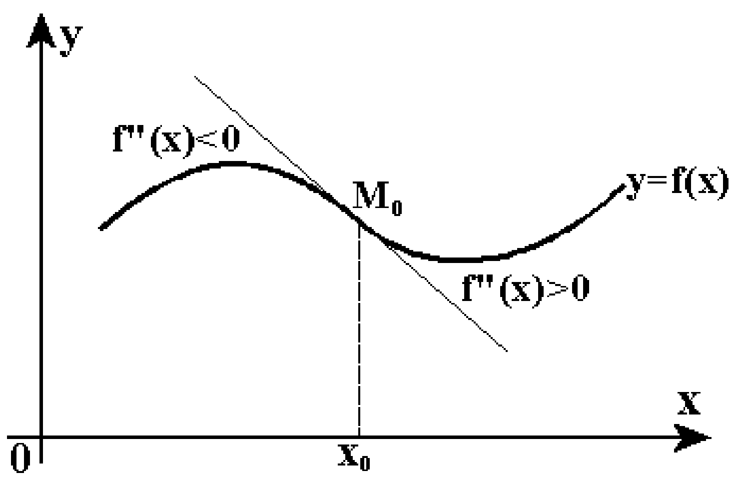
3.7. Funkcijas grafika pārliekuma punkti un to nosacījumi

3.8. definīcija. Funkcijas f grafika punktu $M_0(x_0; y_0)$ sauc par tās grafika **pārliekuma** (infleksijas) **punktu**, ja tas atdala grafika izliekto daļu no ieliektās daļas un funkcija punktā x_0 ir nepārtraukta.

Saskaņā ar šo definīciju punkts $M_0(2; 4)$ ir funkcijas $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ grafika pārliekuma punkts (skat. 3.11. piemēru).

Funkcijas grafiks attēlots 3.3. zīmējumā.

3.9. piezīme. Pārliekuma punktā M_0 funkcijas grafika pieskarei no vienas puses jāatrodas virs grafika, bet no otras puses - zem grafika, t.i., šajā punktā pieskarei ir jākrusto funkcijas grafiks (3.18. zīm.).



3.18. zīmējums

No funkcijas grafika izliekuma un ieliekuma pietiekamā nosacījuma izriet **pārliekuma punkta eksistences nepieciešamais nosacījums**:

ja punkts $M_0(x_0; f(x_0))$ ir funkcijas f grafika pārliekuma punkts, tad $f''(x_0) = 0$ vai arī punktā x_0 funkcija nav divreiz diferencējama.

Formulētais nosacījums nevar būt par funkcijas grafika pārliekuma punkta pietiekamo nosacījumu. Piemēram, funkcijai $f(x) = x^4$ punktā $x_0 = 0$ $f''(x_0) = 0$, bet grafika punkts $O(0; 0)$ nav tā pārliekuma punkts.

3.8. teorēma. *(Funkcijas grafika pārliekuma punkta eksistences pietiekamais nosacījums).*

Ja funkcija f ir nepārtraukta punktā x_0 un, argumentam ejot caur punktu x_0, otrās kārtas atvasinājums $f''(x)$ maina zīmi, tad punkts $M_0(x_0; f(x_0))$ ir funkcijas grafika pārliekuma punkts.

Pierādīt patstāvīgi[8].

3.10. piezīme. Ja, argumentam ejot caur x_0, $f''(x)$ zīme nemainās, tad punkts ar abscisu x_0 nav funkcijas grafika pārliekuma punkts.

Lai atrastu funkcijas grafika pārliekuma punktus, rīkojas šādi.

1. Atrod funkcijas otrās kārtas atvasinājumu $f''(x)$.
2. Atrod tos punktus, kuros otrās kārtas atvasinājums ir nulle un arī tos funkcijas f nepārtrauktības punktus, kuros šī funkcija nav divreiz diferencējama.
3. Izpēta otrās kārtas atvasinājuma zīmi šādu punktu apkārtnēs. Ja, argumentam ejot caur kādu no šiem punktiem x_0, $f''(x)$ zīme izmainās, tad punkts $M_0(x_0; f(x_0))$ ir funkcijas grafika pārliekuma punkts.

3.12. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{x^2}{9}$ grafika pārliekuma punktus.

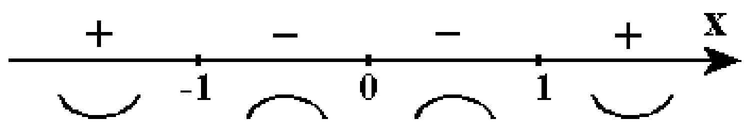
1. Atradīsim $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{9}x$;

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} + \frac{2}{9} = \frac{2}{9}\frac{\sqrt[3]{x^4} - 1}{\sqrt[3]{x^4}}.$$

2. Otrās kārtas atvasinājums ir nulle punktos -1 un 1; punktā 0 otrās kārtas atvasinājums ir bezgalīgs (šajā punktā funkcija ir nepārtraukta, bet nav divreiz diferencējama).
3. Punkti $-1, 0$ un 1 funkcijas definīcijas apgabalu sadala četros intervālos. Katrā no šiem intervāliem noteiksim $f''(x)$ zīmi (3.19. zīm.).

$$f(\pm 1) = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9}.$$

[8] Izmantojot funkcijas grafika pārliekuma punkta definīciju; funkcijas grafika ieliekuma un izliekuma pietiekamo nosacījumu.



3.19. zīmējums

Funkcijas grafika pārliekuma punkti ir $M_1\left(-1; \frac{10}{9}\right)$ un $M_2\left(1; \frac{10}{9}\right)$. Funkcijas grafika punktā, kura abscisa ir 0, pārliekuma nav.

Vienlaicīgi ir atrasti arī funkcijas grafika ieliekuma un izliekuma intervāli. Funkcijas grafiks ir ieliekts intervālos $(-\infty; -1)$ un $(1; +\infty)$, bet izliekts - intervālā $(-1; 1)$.

3.8. Funkcijas grafika asimptotas

3.9. definīcija. Taisni $x = a$ sauc par funkcijas f grafika **vertikālo asimptotu**, ja vismaz viena no vienpusējām robežām

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{vai} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{ir} \quad +\infty \quad \text{vai} \quad -\infty.$$

Piemēram, funkcijas $f(x) = \frac{1}{x-2}$ grafikam taisne $x = 2$ ir vertikālā asimptota, jo

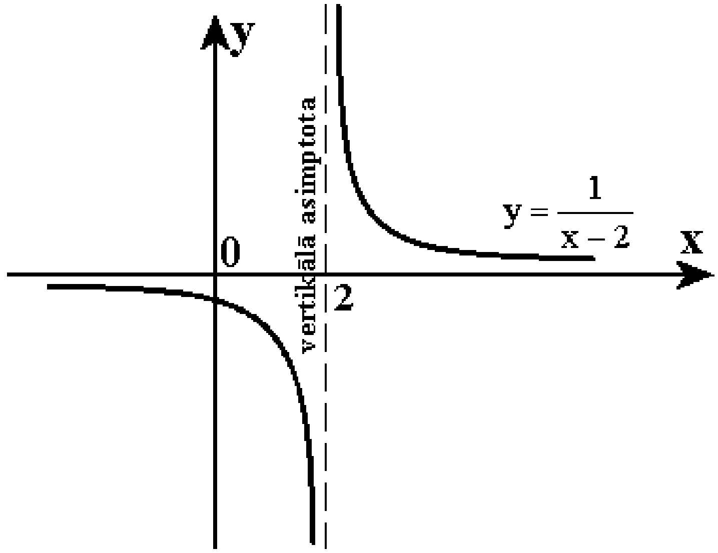
$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x-2} = -\infty; \quad \lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x-2} = +\infty. \quad \text{(3.20. zīm.)}$$

3.11. piezīme. Ja punkts $a \in D(f)$ un taisne $x = a$ ir funkcijas f grafika vertikālā asimptota, tad acīmredzami a ir šīs funkcijas otrā veida pārtraukuma punkts.

3.10. definīcija. Taisni $y = kx + b$ sauc par funkcijas f grafika **slīpo asimptotu**, kad $x \to +\infty$, ja funkciju var uzrakstīt šādā izskatā:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

kur $\alpha(x) \to 0$, kad $x \to +\infty$.



3.20. zīmējums

Piemēram, taisne $y = x+2$ ir funkcijas $f(x) = \frac{x^2+x}{x-1}$ grafika slīpā asimptota, kad $x \to +\infty$, jo

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 1} = x + 2 + \underbrace{\frac{2}{x - 1}}_{\alpha(x)}$$

un

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x - 1} = 0 \quad \text{(3.22. zīm.).}$$

3.9. teorēma. *(Funkcijas grafika slīpās asimptotas eksistences nepieciešamais un pietiekamais nosacījums)*

Lai taisne $y = kx + b$ būtu funkcijas f grafika slīpā asimptota, kad $x \to +\infty$, ir nepieciešami un pietiekami, lai eksistētu galīgas robežas

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b.$$

▶ **Nepieciešamība**. Tā kā taisne $y = kx + b$ ir funkcijas grafika slīpā asimptota, kad $x \to +\infty$, tad šo funkciju var uzrakstīt izskatā: $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, kur $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$.

Savukārt no šīs vienādības izriet šādas divas vienādības:

$$\frac{f(x)}{x} = k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}; \quad f(x) - kx = b + \alpha(x).$$

Šo divu vienādību labajām pusēm eksistē galīgas robežas, kad $x \to +\infty$, kas atbilstoši ir k un b. Tāpēc eksistē galīgas robežas arī kreisajām pusēm un tās ir vienādas atbilstoši ar k un b, t.i.,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{un} \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Pietiekamība. Tā kā eksistē galīgas robežas

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \quad \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b,$$

tad saskaņā ar robežas īpašībām funkcija $f(x) - kx$ atšķiras no savas robežas b par bezgalīgi mazu funkciju $\alpha(x)$, kad $x \to +\infty$.

Tātad

$$(f(x) - kx) - b = \alpha(x)$$

jeb

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

kur $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$.

Tādējādi taisne $y = kx + b$ ir funkcijas f grafika slīpā asimptota, kad $x \to +\infty$. ◀

Analogi definē funkcijas f grafika slīpo asimptotu, kad $x \to -\infty$, analogi formulē un pierāda funkcijas grafika slīpās asimptotas, kad $x \to -\infty$, eksistences nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu.

3.12. piezīme.

1. Atsevišķām funkcijām taisne $y = kx + b$ ir grafika slīpā asimptota gan, kad $x \to +\infty$, gan, kad $x \to -\infty$.
2. Ja $k = 0$, tad iegūstam funkcijas grafika **horizontālo** asimptotu, kad $x \to +\infty$, vai $x \to -\infty$.
3. Ja vismaz viena no 3.9. teorēmā minētajām robežām neeksistē vai ir bezgalīga, tad funkcijas grafikam slīpās asimptotas, kad $x \to +\infty$, nav.

3.13. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 2x$ grafika asimptotas.

$D(f) = \mathbb{R}$, vertikālo asimptotu funkcijas grafikam nav. Vispirms atradīsim grafika slīpo asimptotu, kad $x \to +\infty$.

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{x} = \\ = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 2 \right) = 1+2 = 3;$$

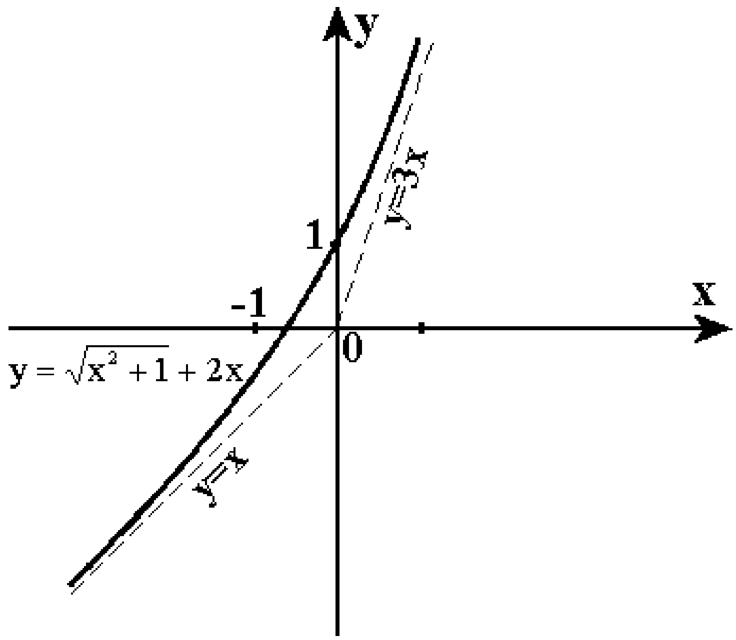
$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - k_1 x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + 2x - 3x \right) = \\ = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \\ = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

Tādējādi taisne $y = 3x$ ir funkcijas grafika slīpā asimptota, kad $x \to +\infty$.
Analogi atradīsim grafika slīpo asimptotu, kad $x \to -\infty$.
Šoreiz

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{x} = \\ = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{(-x)(-1)} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{-1} + 2 \right) = -1+2 = 1;$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + 2x - x \right) = \\ = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \\ = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0.$$

Tādējādi taisne $y = x$ ir funkcijas grafika slīpā asimptota, kad $x \to -\infty$.
Funkcijas $f(x) = \sqrt{x^2+1} + 2x$ grafiks un tā slīpās asimptotas, kad $x \to +\infty$ un kad $x \to -\infty$, ir attēloti 3.21. zīmējumā.



3.21. zīmējums

3.14. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = \frac{x^2+x}{x-1}$ grafika asimptotas.

Funkcija nav definēta punktā $x = 1$. Taisne $x = 1$ ir šīs funkcijas grafika vertikālā asimptota, jo

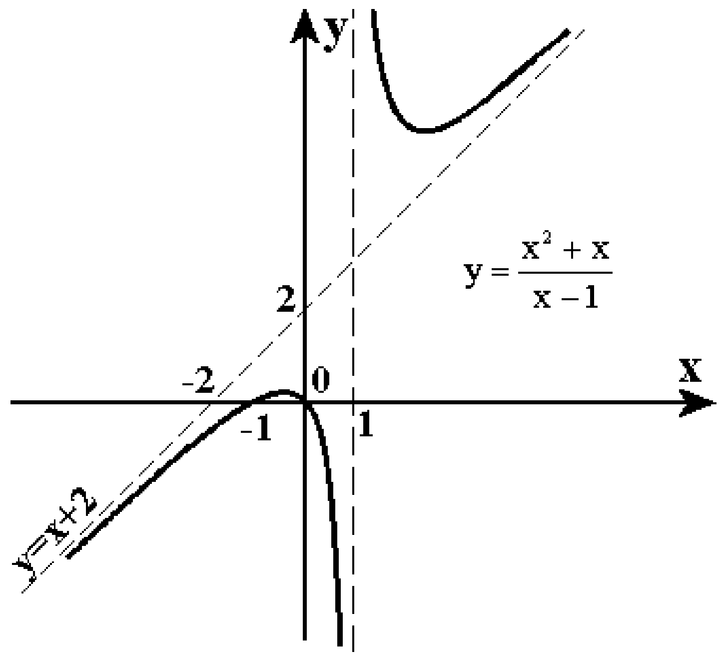
$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2+x}{x-1} = -\infty; \quad \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2+x}{x-1} = +\infty.$$

Šoreiz

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x^2+x}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2+x}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x-x^2+x}{x-1} = 2.$$

Tādējādi taisne $y = x+2$ ir funkcijas grafika slīpā asimptota, kad $x \to \pm\infty$ (3.22. zīm.).



3.22. zīmējums

3.15. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = e^{\frac{1}{1-x}}$ grafika asimptotas.

Funkcija nav definēta punktā $x = 1$. Taisne $x = 1$ ir šīs funkcijas grafika vertikālā asimptota, jo

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} e^{\frac{1}{1-x}} = +\infty.$$

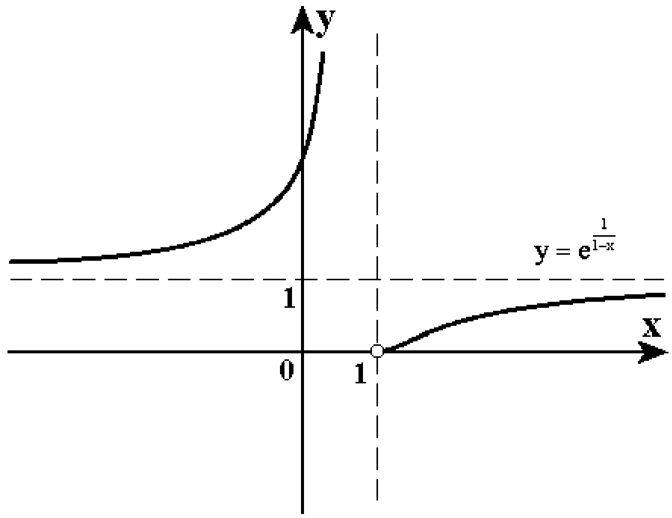
Starp citu,

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} e^{\frac{1}{1-x}} = 0.$$

Šoreiz

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{x} = 0;$$
$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(e^{\frac{1}{1-x}} - 0\right) = 1.$$

Tādējādi taisne $y = 1$ ir šīs funkcijas grafika horizontālā asimptota, kad $x \to \pm\infty$ (3.23. zīm.).



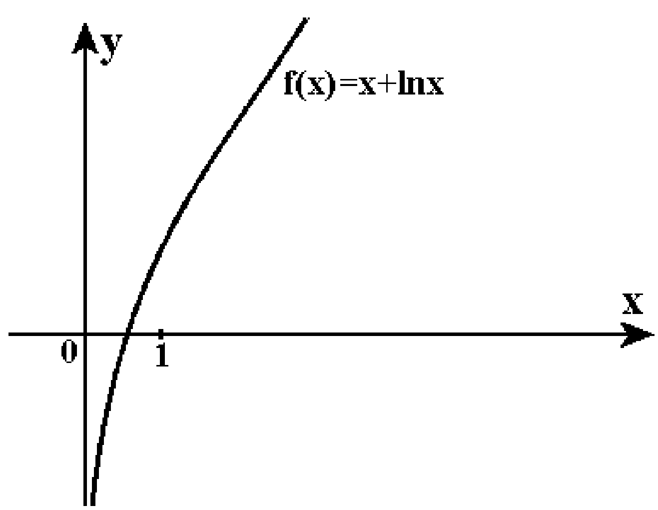
3.23. zīmējums

3.16. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = x + \ln x$ grafika asimptotas.

$D(f) = (0; +\infty)$. Taisne $x = 0$ ir funkcijas grafika vertikālā asimptota, jo $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x + \ln x) = -\infty$.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x}\right) = 1;$$
$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (x + \ln x - x) = \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

Tādējādi grafikam slīpā asimptota, kad $x \to +\infty$, neeksistē (3.24. zīm.).



3.24. zīmējums

3.9. Funkcijas pilnā pētīšana

Izpētīt funkciju nozīmē noskaidrot, kā mainās tās raksturs, mainoties argumentam. Ņemot vērā funkcijas pētīšanā iegūtos rezultātus, konstruē tās grafiku.

Funkciju ar atvasinājuma palīdzību parasti pēta pēc šādas shēmas.

1. Atrod funkcijas definīcijas apgabalu $D(f)$, nosaka pārtraukuma punktus un to veidu, norāda funkcijas nepārtrauktības intervālus.
2. Noskaidro, vai f ir pāra funkcija, nepāra funkcija, periodiska funkcija.
3. Atrod funkcijas grafika krustpunktus ar koordinātu asīm un nosaka intervālus, kuros tā ir negatīva, un intervālus, kuros funkcija ir pozitīva.
4. Nosaka funkcijas monotonitātes intervālus un ekstrēmus.
5. Nosaka funkcijas grafika izliekuma un ieliekuma intervālus, kā arī grafika pārliekuma punktus.
6. Atrod funkcijas grafika asimptotas.

3.13. piezīme.

1. Funkcijas grafika precizēšanai vajadzības gadījumā vēl var atrast funkcijas vērtības izraudzītajos papildpunktos.
2. Pāra vai nepāra funkciju vienkāršības labad var pētīt tikai pozitīvajām argumenta vērtībām. Izmantojot pāra (vai nepāra) funkciju īpašības, izdara secinājumus par tās raksturu visā tās definīcijas apgabalā. Savukārt periodiskas funkcijas var pētīt tikai intervālā, kura garums ir vienāds ar tās periodu.
3. Pirms uzzīmē funkcijas grafiku, koordinātu plaknē atzīmē visus funkcijai raksturīgos[9] punktus un grafika asimptotas.

3.17. piemērs. Izpētīt funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x^2} \cdot e^x$ un uzzīmēt tās grafiku.

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$. Funkcijai pārtraukuma punktu nav, f - nepārtraukta funkcija.
2. Funkcija nav ne pāra, ne nepāra, tā ir neperiodiska.

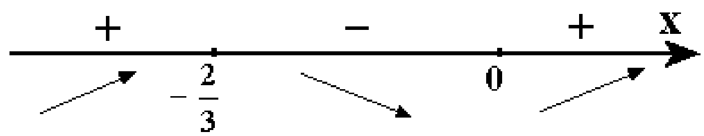
[9]grafika krustpunkti ar asīm, ekstrēma un grafika pārliekuma punkti, papildpunkti.

3. Argumenta vērtībai $x = 0$ atbilst funkcijas vērtība $y = 0$. Funkcija ir nenegatīva visā savā definīcijas apgabalā.

4. Atradīsim
$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}e^x + \sqrt[3]{x^2}e^x = \frac{(2+3x)e^x}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Funkcijas kritiskie punkti ir $-\frac{2}{3}$ un 0.

Atvasinājuma zīmes atzīmēsim uz skaitļu taisnes (3.25. zīm.).



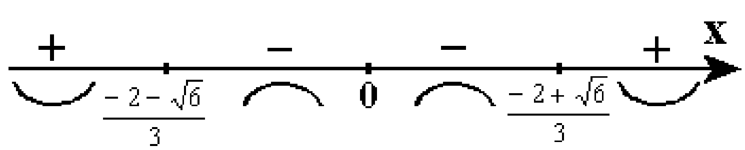
3.25. zīmējums

Funkcija aug intervālos $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$ un $(0; +\infty)$, dilst intervālā $\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$.
$$\max f(x) = f\left(-\frac{2}{3}\right) = \sqrt[3]{\frac{4}{9}} \cdot e^{-\frac{2}{3}} \approx 0,39; \quad \min f(x) = f(0) = 0.$$

5. Atradīsim
$$f''(x) = \frac{9x^2 + 12x - 2}{9x\sqrt[3]{x}}e^x.$$

Otrās kārtas atvasinājums ir nulle punktos $\frac{-2-\sqrt{6}}{3} \approx 1,48$ un $\frac{-2+\sqrt{6}}{3} \approx 0,15$; bezgalīgs punktā $x = 0$.

Otrās kārtas atvasinājuma zīmes atzīmēsim uz skaitļu taisnes (3.26. zīm.).



3.26. zīmējums

Funkcijas grafiks ir ieliekts intervālos $\left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{6}}{3}\right)$ un $\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{3}; +\infty\right)$, izliekts intervālā $\left(\frac{-2-\sqrt{6}}{3}; \frac{-2+\sqrt{6}}{3}\right)$.
$$f\left(\frac{-2-\sqrt{6}}{3}\right) \approx f(-1,48) \approx 0,30;$$

$$f\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{3}\right) \approx f(0,15) \approx 0,32.$$

Funkcijas grafika punkti, kuru abscisas ir $\frac{-2-\sqrt{6}}{3}$ un $\frac{-2+\sqrt{6}}{3}$, ir grafika pārliekuma punkti.

6. Vertikālo asimptotu grafikam nav.

Atradīsim

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}} = +\infty.$$

Tādējādi grafikam slīpās asimptotas, kad $x \to +\infty$, nav.

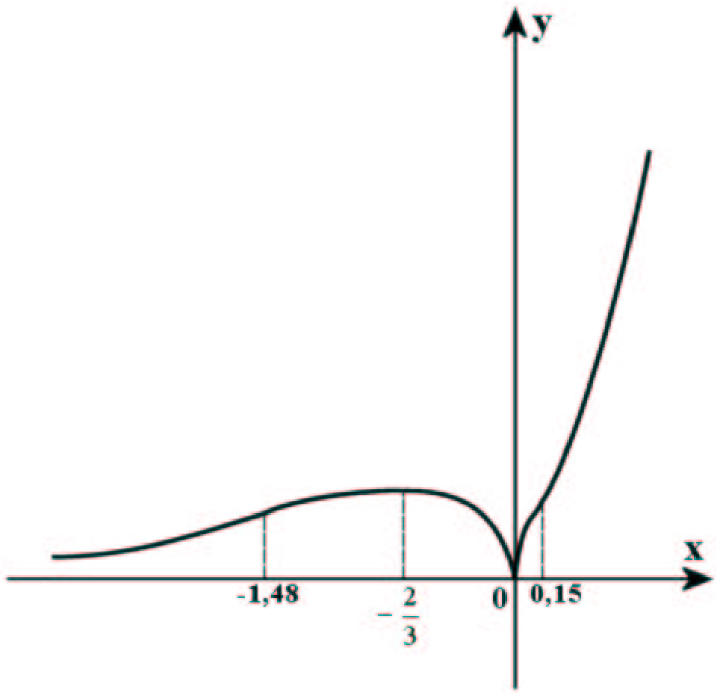
$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+-\infty} \frac{e^x}{\sqrt[3]{x}} = 0;$$
$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - k_2 x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\sqrt[3]{x^2} \cdot e^x\right) = 0.$$

Tādējādi taisne $y = 0$ ir grafika horizontālā asimptota, kad $x \to -\infty$.

Funkcijas pētīšanā iegūtos rezultātus **ir lietderīgi** apkopot šādā tabulā:

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$\left(-\infty; \frac{-2-\sqrt{6}}{3}\right)$	$+$	$+$ $\nearrow$	$+$ $\smile$
$\frac{-2-\sqrt{6}}{3}$	$\approx 0,30$	$+$ $\nearrow$	0
$\left(\frac{-2-\sqrt{6}}{3}; -\frac{2}{3}\right)$	$+$	$+$ $\nearrow$	$-$ $\frown$
$-\frac{2}{3}$	$\approx 0,39$ max	0	$-$ $\frown$
$\left(-\frac{2}{3}; 0\right)$	$+$	$-$ $\searrow$	$-$ $\frown$
0	0 min	neeks.	neeks.
$\left(0; \frac{-2+\sqrt{6}}{3}\right)$	$+$	$+$ $\nearrow$	$-$ $\frown$
$\frac{-2+\sqrt{6}}{3}$	$\approx 0,32$	$+$ $\nearrow$	0
$\left(\frac{-2+\sqrt{6}}{3}; +\infty\right)$	$+$	$+$ $\nearrow$	$+$ $\smile$

Funkcijas grafiks attēlots 3.27. zīmējumā.



3.27. zīmējums

Jautājumi

1. Formulēt intervālā konstantas funkcijas nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu.

2. Ko var pateikt par divām funkcijām, kurām intervālā eksistē vienādi atvasinājumi?

3. Formulēt intervālā augošas (vai dilstošas) funkcijas nepieciešamo nosacījumu.

4. Sniegt intervālā augošas (vai dilstošas) funkcijas ģeometrisko interpretāciju.

5. Vai ir spēkā 3.2. teorēmai apgrieztā teorēma?

6. Formulēt intervālā augošas (vai dilstošas) funkcijas pietiekamo nosacījumu.

7. Vai ir spēkā 3.3. teorēmai apgrieztā teorēma?

8. Definēt funkcijas monotonitātes intervālus un sniegt to atrašanas kārtulu.

9. Definēt funkcijas ekstrēma punktus un ekstrēmus.

10. Formulēt funkcijas ekstrēma nepieciešamo nosacījumu.

11. Vai ir spēkā 3.4. teorēmai apgrieztā teorēma?

12. Definēt funkcijas stacionāro punktu un sniegt tā ģeometrisko interpretāciju.

13. Definēt funkcijas kritiskos punktus un sniegt to ģeometrisko interpretāciju.

14. Formulēt funkcijas ekstrēma pietiekamo nosacījumu, izmantojot pirmās kārtas atvasinājumu.

15. Formulēt funkcijas ekstrēma noteikšanas pirmo kārtulu.

16. Formulēt funkcijas ekstrēma pietiekamo nosacījumu, izmantojot otrās kārtas atvasinājumu.

17. Formulēt funkcijas ekstrēma noteikšanas otro kārtulu.

18. Kad drīkst pielietot funkcijas ekstrēma noteikšanas pirmo kārtulu un kad - otro?

19. Formulēt funkcijas vismazākās un vislielākās vērtības atrašanas kārtulu.

20. Definēt intervālā izliektu (vai ieliektu) grafiku.

21. Formulēt funkcijas grafika ieliekuma (vai izliekuma) pietiekamo nosacījumu.

22. Sniegt funkcijas grafika ieliekuma un izliekuma intervālu atrašanas kārtulu.

23. Definēt funkcijas grafika pārliekuma punktu un sniegt tā ģeometrisko interpretāciju.

24. Formulēt funkcijas grafika pārliekuma punkta eksistences nepieciešamo nosacījumu.

25. Formulēt funkcijas grafika pārliekuma punkta eksistences pietiekamo nosacījumu.

26. Sniegt funkcijas grafika pārliekuma punkta atrašanas kārtulu.
27. Definēt funkcijas grafika vertikālo asimptotu.
28. Definēt funkcijas grafika slīpo asimptotu.
29. Formulēt funkcijas grafika slīpās asimptotas eksistences nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu.
30. Definēt funkcijas grafika horizontālo asimptotu.
31. Sniegt funkcijas pilnās pētīšanas shēmu.

Vingrinājumi

1. Pierādīt 3.1. teorēmas sekas.
2. Pierādīt, ka $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$.
3. Formulēt un pierādīt intervālā dilstošas funkcijas nepieciešamo nosacījumu.
4. Formulēt un pierādīt intervālā dilstošas funkcijas pietiekamo nosacījumu.
5. Lai intervālā $(a; b)$ diferencējama funkcija f būtu nedilstoša šajā intervālā, ir nepieciešami un pietiekami, lai visiem $x \in (a; b)$ izpildītos $f'(x) \geq 0$. Pierādīt to!
6. Atrast šādu funkciju monotonitātes intervālus:
   (a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$;
   (b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
   (c) $f(x) = x \cdot \ln x$;
   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.
7. Pierādīt 3.4. teorēmu minimuma punkta gadījumā.
8. Pierādīt 3.5. teorēmu gadījumam, kad, argumentam ejot caur x_0, atvasinājums maina zīmi no “ $-$ ” uz “ $+$ ”.
9. Pierādīt 3.6. teorēmu gadījumam, kad $f''(x_0) > 0$.

10. Atrast šādu funkciju ekstrēmus (izmantot gan pirmo, gan otro ekstrēmu noteikšanas kārtulu):

    (a) $f(x) = x^2 - 6x$;
    (b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^4$;
    (c) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$;
    (d) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

11. Atrast šādu funkciju vismazāko un vislielāko vērtību norādītajā intervālā:

    (a) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9, \quad [-1; 1]$;
    (b) $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9, \quad [0; 3]$;
    (c) $f(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 1, \quad [-2; 0]$;
    (d) $f(x) = x + \sqrt{x}, \quad [0; 4]$.

12. Pierādīt, ka no visiem taisnleņķa trijstūriem, kuriem ir dotā garuma hipotenūza, vislielākais laukums ir vienādsānu trijstūrim.

13. Doto pozitīvo skaitli izteikt kā divu saskaitāmo summu, kuru reizinājums ir vislielākais.

14. Taisnstūra paralēlskaldņa vaļējas tvertnes tilpumam jābūt $13,5$ l. Kā ir jāizvēlas tvertnes lineārie izmēri, lai tās pagatavošanai tiktu izlietots vismazāk materiāla?

15. Formulēt un pierādīt funkcijas grafika izliekuma pietiekamo nosacījumu.

16. Atrast šādu funkciju grafiku izliekuma un ieliekuma intervālus:

    (a) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$;
    (b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$;
    (c) $f(x) = 2x^2 + \ln x$;
    (d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

17. Pierādīt 3.8. teorēmu.

18. Atrast šādu funkciju grafiku pārliekuma punktus:

    (a) $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$;

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$;

(c) $f(x) = \ln(1+x^3)$;

(d) $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$.

19. Atrast šādu funkciju grafiku asimptotas:

(a) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$;

(b) $f(x) = \frac{x}{2x-1} + x$;

(c) $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$;

(d) $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$.

20. Izpētīt šādas funkcijas un uzzīmēt to grafikus:

(a) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$;

(b) $d(x) = x^4 + 2x^2 + 3$;

(c) $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$;

(d) $f(x) = x^2 \ln x$;

(e) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$;

(f) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 5$;

(g) $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$.

21. Pierādīt nevienādības, pētot funkciju monotonitāti ar atvasinājumu palīdzību:

(a) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x \neq 0)$;

(b) $x > \ln(1+x) \quad (x > 0)$;

(c) $\arcsin x > x \quad (0 < x < 1)$;

(d) $e^x > 1 + x \quad (x \neq 0)$.

IV nodaļa

PARAMETRISKI UZDOTAS FUNKCIJAS UN VEKTORFUNKCIJAS

4.1. Parametriski uzdotas funkcijas un to atvasināšana

Apskatīsim divas funkcijas $x = \varphi(t)$ un $x = \psi(t)$, kas definētas kaut kādā intervālā I. Ja, piemēram, funkcija $x = \varphi(t)$ ir **stingri monotona** šajā intervālā, tad tai eksistē apvērstā funkcija $t = \lambda(x)$, kas definēta atbilstošajā kopā $\varphi(I)$. Izveidosim saliktu funkciju $y = \psi(\lambda(x))$, kas definēta kopā $\varphi(I)$ un kas izsaka y kā argumenta x funkciju.

Pāreju no vienādojumiem

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

uz vienādojumu $y = \psi(\lambda(x))$ sauc par **parametra t izslēgšanu**.

Parametra izslēgšana ne tik vien nav nepieciešama, bet bieži vien praktiski nav iespējama. Tāpēc parasti parametru neizslēdz un saka, ka argumenta x funkcija $y = \psi(\lambda(x)) = f(x)$ ir uzdota parametriski ar vienādojumiem

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

(parametrs $t \in I$).

Noskaidrosim, kā, neizslēdzot parametru, atrast parametriski uzdotas funkcijas atvasinājumus.

4.1. teorēma. Ja funkcijas $x = \varphi(t)$ un $y = \psi(t)$ ir definētas intervālā $(a; b)$, ir diferencējamas punktā $t_0 \in (a; b)$, pie tam $\varphi'(t_0) \neq 0$; funkcija $x = \varphi(t)$ ir stingri monotona un nepārtraukta, tad funkcija $y = \psi(\lambda(x))$ ir diferencējama punktā $x_0 = \varphi(t_0)$, pie tam

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}.}$$

▶ Saskaņā ar 1.8. teorēmu (par apvērstas funkcijas atvasināšanu) funkcija $t = \lambda(x)$ ir diferencējama punktā $x_0 = \varphi(t_0)$, pie tam $\lambda'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(t_0)}$.

Saskaņā ar 1.7. teorēmu (par saliktas funkcijas atvasināšanu) funkcija $y = \psi(\lambda(x)) = f(x)$ ir diferencējama punktā x_0, pie tam

$$f'(x_0) = \psi'(\lambda(x_0))\lambda'(x_0) = \psi'(t_0)\lambda'(x_0) = \psi'(t_0)\frac{1}{\varphi'(t_0)} = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)} . \blacktriangleleft$$

4.1. piezīme. Ja 4.1. teorēmas nosacījumi ir izpildīti intervāla $(a; b)$ katrā punktā t, tad pēc formulas

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

atrastais atvasinājums, acīmredzot, ir t funkcija, kas definēta šajā intervālā. Šo formulu pieraksta vēl šādā izskatā:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} .$$

Izmantojot 4.1. teorēmu atkārtoti, var atrast arī augstāku kārtu atvasinājumus parametriski uzdotām funkcijām. Parādīsim, kā atrod otrās kārtas atvasinājumu $\frac{d^2y}{dx^2}$. Var uzskatīt, ka funkcija $\frac{dy}{dx}$ arī ir uzdota parametriski ar vienādojumiem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} , \quad x = \varphi(t).$$

Šai parametriski uzdotai funkcijai pielietojot 4.1. teorēmu,[1] iegūstam

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)}{\dfrac{dx}{dt}} = \frac{\dfrac{\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}{\dfrac{dx}{dt}} =$$

$$= \frac{\dfrac{d^2y}{dt^2}\cdot\dfrac{dx}{dt} - \dfrac{dy}{dt}\cdot\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^3} .$$

4.2. piezīme. Praktiski $\frac{d^2y}{dx^2}$ atrašanai šo formulu lieto reti, bet lieto to paņēmienu, ar kuru tika iegūta šī formula.

4.1. piemērs. Atrast $\frac{dy}{dx}$ un $\frac{d^2y}{dx^2}$ parametriski uzdotai funkcijai

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

Šīs funkcijas apmierina 4.1. teorēmas nosacījumus katrā no intervāliem $\frac{\pi}{2}k < t < \frac{\pi}{2}(k+1)$, kur $k \in \mathbb{Z}$.

Katrā no šiem intervāliem var atrast $\frac{dy}{dx}$ un $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Tā kā $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{dy}{dt} = \cos t$, tad

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t .$$

Uzrakstīsim sistēmu:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\operatorname{ctg} t, \\ x = \cos t. \end{cases}$$

Atrodam

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{\sin^2 t} , \qquad \frac{dx}{dt} = -\sin t .$$

Tādējādi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{1}{\sin^2 t}}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t} .$$

[1]Uzskata, ka papildus funkcijas $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ ir divreiz diferencējamas intervālā $(a; b)$.

4.2. Līniju parametriskie vienādojumi

Pieņemsim, ka punkta stāvoklis telpā mainās atkarībā no laika t. Punkta koordinātas x, y, z atkarībā no laika izmainās šādi:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

kur $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ir kaut kādā intervālā I nepārtrauktas funkcijas.

Kustīgais punkts telpā apraksta kaut kādu nepārtrauktu līniju l, kuru sauc vēl par **Žordano loku**.[2]

4.1. definīcija. Līniju l, kuras parametriskais vienādojums ir

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \quad t \in I, \end{cases}$$

sauc par **gludu**, ja funkcijām $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ šajā intervālā eksistē nepārtraukti atvasinājumi.

Piemēram, skrūves līnijas parametriskais vienādojums ir

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = a \cdot \sin t, \\ z = b \cdot t, \end{cases}$$

(a un b - pozitīvi skaitļi).

Plaknes līnijas parametriskais vienādojums ir:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in I. \end{cases}$$

Piemēram, elipses parametriskais vienādojums ir

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t, \\ y = a \cdot \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

[2]Parametrs t var būt ne vien laiks, bet arī kāds cits fizikāls vai ģeometrisks lielums.

4.3. Reālā argumenta vektorfunkcijas

Apskatīsim reālā argumenta t tādu funkciju, kas katrai t vērtībai no kādas kopas T pēc noteikta likuma piekārto telpas $\mathbb{R}^n$ vienu vektoru.

Šādu funkciju sauc par **reālā argumenta** t **vektorfunkciju** un apzīmē $\overline{f}(t)$. Šī mainīgā vektora $\overline{f}(t)$ koordinātas ir argumenta t reālas funkcijas: $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$ (visas šīs koordinātu funkcijas ir definētas kopā T).

Kā zināms, vektoru pilnīgi nosaka tā koordinātas. Tāpēc uzdot vektorfunkciju $\overline{f}(t)$ nozīmē uzdot n reālas funkcijas $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., $f_n(t)$. Vektorfunkciju $\overline{f}(t)$ parasti pieraksta šādi:

$$\overline{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots , f_n(t))$$

jeb

$$\overline{f}(t) = f_1(t)\overline{e}_1 + f_2(t)\overline{e}_2 + \cdots + f_n(t)\overline{e}_n \ ,$$

kur $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_n$ - koordinātu asu vienības vektori jeb **orti**.

Ja izvēlamies noteiktu argumenta vērtību t_0, tad šai vērtībai atbilst noteikts pastāvīgs (konstants) vektors

$$\overline{f}(t_0) = (f_1(t_0), f_2(t_0), \dots, f_n(t_0)) \ .$$

(Šī vektora koordinātas ir reālie skaitļi).

4.2. definīcija. Par divu vektorfunkciju

$$\overline{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$$

un

$$\overline{g}(t) = (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$$

summu sauc šādu vektorfunkciju

$$(f_1(t) + g_1(t), f_2(t) + g_2(t), \dots, f_n(t) + g_n(t))$$

un apzīmē:

$$\overline{f}(t) + \overline{g}(t) \ .$$

4.3. definīcija. Par vektorfunkcijas $\overline{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$ **reizinājumu ar** reālu **skaitli** c sauc šādu vektorfunkciju

$$(cf_1(t), cf_2(t), \ldots, cf_n(t))$$

un apzīmē $c\overline{f}(t)$.

4.3. piezīme. Analogi var definēt n vektorfunkciju lineāro kombināciju.

Apskatīsim vektorfunkciju $\overline{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t))$, kas definēta punkta t_0 kaut kādā apkārtnē, izņemot varbūt pašu šo punktu.

4.4. definīcija. Pastāvīgu vektoru $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sauc par vektorfunkcijas $\overline{f}(t)$ **robežu** punktā t_0, ja $\lim\limits_{t\to t_0} \left|\overline{f}(t) - \overline{a}\right| = 0$.

Pieraksta $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{f}(t) = \overline{a}$.

No divkāršām nevienādībām

$$|f_i(t) - a_i| \leq \sqrt{(f_1(t) - a_1)^2 + (f_2(t) - a_2)^2 + \cdots + (f_n(t) - a_n)^2} =$$
$$= \left|\overline{f}(t) - \overline{a}\right| \leq |f_1(t) - a_1| + |f_2(t) - a_2| + \cdots + |f_n(t) - a_n|$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

seko, ka

$$\lim_{t\to t_0} \overline{f}(t) = \overline{a} \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to t_0} f_1(t) = a_1, \\ \lim\limits_{t\to t_0} f_2(t) = a_2, \\ \cdots \\ \lim\limits_{t\to t_0} f_n(t) = a_n. \end{cases}$$

4.5. definīcija. Vektorfunkciju $\overline{f}(t)$ sauc par **nepārtrauktu** punktā $t_0 \in T$, ja $\lim\limits_{t\to t_0} \overline{f}(t) = \overline{f}(t_0)$.

Ņemot vērā sakarību, kas pastāv starp vektorfunkcijas robežu un tās koordinātu funkciju robežām, seko, ka vektorfunkcija ir nepārtraukta punktā t_0 tad un tikai tad, kad šajā punktā ir nepārtrauktas tās koordinātu funkcijas.

Apskatīsim punkta t_0 apkārtnē definētu vektorfunkciju $\overline{f}(t)$. Punkta t_0 apkārtnē izvēlēsimies patvaļīgu punktu $t \neq t_0$ un sastādīsim šādu attiecību

$$\frac{\overline{f}(t) - \overline{f}(t_0)}{t - t_0}.$$

Ja šādai attiecībai punktā t_0 eksistē robeža, tad šo vektoru, kuru apzīmē $\overline{f'}(t_0)$, sauc par vektorfunkcijas **atvasinājumu** punktā t_0. Pie tam vektorfunkciju $\overline{f}(t)$ sauc par **diferencējamu** punktā t_0.

Tādējādi

$$\boxed{\overline{f'}(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\overline{f}(t) - \overline{f}(t_0)}{t - t_0}\ .}$$

Tā kā

$$\frac{\overline{f}(t) - \overline{f}(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{f_1(t) - f_1(t_0)}{t - t_0}, \frac{f_2(t) - f_2(t_0)}{t - t_0}, \ldots, \frac{f_n(t) - f_n(t_0)}{t - t_0} \right),$$

tad acīmredzami

$$\overline{f'}(t_0) = (f_1'(t_0), f_2'(t_0), \ldots, f_n'(t_0))$$

jeb

$$\overline{f'}(t_0) = f_1'(t_0)\overline{e}_1 + f_2'(t_0)\overline{e}_2 + \cdots + f_n'(t_0)\overline{e}_n\ .$$

Jautājumi

1. Kā funkciju var uzdot parametriski?
2. Vai jebkura vienādojumu sistēma $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ uzdod funkciju $y = f(x)$ parametriski?
3. Formulēt teorēmu par parametriski uzdotas funkcijas atvasināšanu?
4. Kā parametriski telpā var uzdot nepārtrauktu līniju?
5. Kā parametriski plaknē var uzdot nepārtrauktu līniju?
6. Definēt gludu parametriski uzdotu līniju.
7. Definēt reālā argumenta vektorfunkciju.

8. Definēt vektorfunkciju summu un reizinājumu ar konstanti.
9. Definēt n vektorfunkciju lineāro kombināciju.
10. Definēt vektorfunkcijas robežu punktā t_0.
11. Kāda sakarība pastāv starp vektorfunkcijas un tās koordinātu funkciju robežām?
12. Definēt punktā nepārtrauktu vektorfunkciju.
13. Definēt vektorfunkcijas atvasinājumu punktā t_0.
14. Kāda sakarība pastāv starp vektorfunkcijas un tās koordinātu funkciju atvasinājumiem?

Vingrinājumi

1. Pierādīt, ka vienādojumi $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t \quad (0 \le t \le \pi)$ parametriski definē funkciju.
2. Atrast $\frac{dy}{dx}$ un $\frac{d^2y}{dx^2}$ šādām parametriski uzdotām funkcijām:

   (a) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t; \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x = e^{2t}, \\ y = 1 - e^{-t}. \end{cases}$

3. Noskaidrot, kādu līniju telpā (vai plaknē) uzdod šādi vienādojumi:

   (a) $\begin{cases} x = 5\cos t, \\ y = 5\sin t, \\ z = 2, \qquad 0 \le t \le 2\pi; \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} x = a\,\mathrm{ch}\, t, \\ y = b\,\mathrm{sh}\, t, \qquad -\infty < t < +\infty; \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3\cos t, \\ z = \sin t, \qquad 0 \le t \le \pi; \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \qquad -\infty < t < +\infty. \end{cases}$

4. Atvasināt šādas vektorfunkcijas un izskaitļot atvasinājumu vērtības punktā t_0:

   (a) $\overline{r}(t) = (t - \sin t)\overline{i} + (1 - \cos t)\overline{j} + 2\sin t\overline{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$;

   (b) $\overline{r}(t) = e^{-t}\overline{i} + e^{t}\overline{j} + t\overline{k}, \quad t_0 = 0$;

   (c) $\overline{r}(t) = (t^2 - 3)\overline{i} + (t^3 + 2)\overline{j} + \ln t\overline{k}, \quad t_0 = 1$;

   (d) $\overline{r}(t) = (2 - t)\overline{i} + \sqrt{25 - t^2}\,\overline{j} + t^3\overline{k}, \quad t_0 = 4$.

SATURS