DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

Matemātikas katedra

Armands Gricāns
Vjačeslavs Starcevs

Pamatelementāro funkciju definēšanas paņēmieni

Pamatelementārās funkcijas kā Koši uzdevuma atrisinājumi

2008

Pamatelementārās funkcijas kā Košī uzdevuma atrisinājumi

Tiks apskatīts pamatelementāro funkciju definēšanas paņēmiens, kas balstās uz teorēmu par n-tās kārtas lineāra homogēna diferenciālvienādojuma ar konstantiem koeficientiem atrisinājuma eksistenci un vienīgumu.

1. Ievads

Atgadināsim dažus ar šo teorēmu saistītos jēdzienus, kā arī pašu teorēmu.

Pieņemsim, ka

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{1.1}$$

ir n-tās kārtas parastais diferenciālvienādojums. Funkciju $y = g(x)$, $x \in (a; b)$, kurai eksistē atvasinājumi līdz n-tajai kārtai ieskaitot, sauc par **vienādojuma (1.1) atrisinājumu**, ja tā šo vienādojumu pārvērš identitātē, t.i., jebkuram $x \in (a; b)$ ir spēkā

$$F\left(x, g(x), g'(x), \ldots, g^{(n)}(x)\right) = 0.$$

Uzdevumu, kurā ir jāatrod n-tās kārtas parastā diferenciālvienādojuma (1.1) atrisinājumu, kas apmierina sākumnosacījumus

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_1, \;\; y''(x_0) = y_2, \;\; \ldots \;, \;\; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \tag{1.2}$$

sauc par **Košī uzdevumu**.

Apskatīsim n-tās kārtas lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{1.3}$$

ar konstantiem koeficientiem $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

1.1. teorēma. *Jebkuriem reāliem skaitļiem y_0, $y_1, \ldots,$ y_{n-1} Košī uzdevumam (1.3), (1.2) eksistē vienīgs atrisinājums, kurš ir definēts uz visas skaitļu taisnes un kuram eksistē nepārtraukti visu kārtu atvasinājumi.*

1.1. piezīme. Ja sākumnosacījumiem (1.2) ir veids $y_0 = y_1 = \cdots = y_{n-1} = 0$, tad nulles funkcija $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$, ir vienīgais Košī uzdevuma (1.3), (1.2) atrisinājums.

1.2. piezīme. Ja $n = 1$, tad vienādojumam (1.3) ir veids $y' + a_0 y = 0$, bet sākumnosacījumiem (1.2) ir veids $y\,(x_0) = y_0$.

2. Eksponentfunkcija

Apskatīsim Košī uzdevumu

$$\boxed{y' - y = 0, \quad y(0) = 1.} \tag{2.1}$$

No 1.1. teorēmas seko, ka šim uzdevumam eksistē vienīgs atrisinājums $e(x)$, kurš ir definēts un diferencējams (tātad arī nepārtraukts) uz visas skaitļu taisnes $\mathbb{R}$.

No (2.1) izriet, ka $e'(x) - e(x) = 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, t.i., $e'(x) = e(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Tātad funkcija $e(x)$ ir bezgalīgi diferencējama uz skaitļu taisnes $\mathbb{R}$, pie tam $e^{(n)}(x) = e(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$ un $e^{(n)}(0) = e(0) = 1$.

Apskatīsim funkcijas $e(x)$ citas īpašības.

2.1. *Jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā $e(x) > 0$.*

► Vispirms pierādīsim, ka $e(x) \neq 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Tiešām, ja pieņemt pretējo, ka eksistē tāds $x_0 \in \mathbb{R}$, ka $e(x_0) = 0$, tad funkcija $e(x)$ būtu Košī uzdevuma

$$y'(x) - y(x) = 0, \; y(x_0) = 0 \tag{2.2}$$

atrisinājums. Taču 1.1. piezīmē tika atzīmēts, ka šī uzdevuma vienīgais atrisinājums ir nulles funkcija, t.i., $e(x) = 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, kas ir pretrunā ar to, ka $e(0) = 1$.

Tagad pierādīsim, ka $e(x) > 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Tiešām, ja pieņemt pretējo, ka eksistē tāds $x_1 \in \mathbb{R}$, ka $e(x_1) < 0$, tad, ņemot vērā funkcijas $e(x)$ nepārtrauktību, no Bolcāno-Košī teorēmas[1] sekotu, ka eksistē x_2, kas atrodas starp 0 un x_1, ka $e(x_2) = 0$. Taču tas ir pretrunā ar iepriekš pierādīto. Tātad $e(x) > 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.◄

2.2. *Funkcija $e(x)$ ir stingri augoša un izliekta uz skaitļu taisnes $\mathbb{R}$.*

► Īpašības patiesums seko no sakarībām

$$e''(x) = e'(x) = e(x) > 0 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

kā arī no diferencējamas funkcijas stingrās augšanas un divreiz diferencējamas funkcijas izliektības pietiekamajiem nosacījumiem.◄

2.1. piezīme. Tā kā funkcija $e(x)$ ir stingri augoša un $e(0) = 1$, tad

$$e(x) > 1, \quad \text{ja} \quad x > 0, \tag{2.3}$$

$$0 < e(x) < 1, \quad \text{ja} \quad x < 0. \tag{2.4}$$

Nevienādība (2.3) izriet arī no nākamās īpašības.

2.3. *Jebkuram $x > 0$ ir spēkā*

$$e(x) > 1 + x. \tag{2.5}$$

► Saskaņā ar Lagranža teorēmu[2] par galīgiem pieaugumiem jebkuram $x > 0$ ir spēkā

$$e(x) - e(0) = e'(x_0)(x - 0) \quad (0 < x_0 < x),$$

no kurienes, acīmredzot, izriet (2.5), jo $e'(x_0) = e(x_0) > 1$, $e(0) = 1$.◄

---

[1] *Bolcāno-Košī teorēma.* Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta kādā intervālā $\mathcal{I}$ un divos intervālā $\mathcal{I}$ punktos a un b pieņem dažādas zīmes vērtības, tad starp punktiem a un b eksistē punkts c, ka $f(c) = 0$. [4, 29. lpp.]

[2] *Lagranža teorēma.* Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta slēgtā intervālā $[a; b]$ un diferencējama vaļējā intervālā $(a; b)$, tad eksistē tāds $c \in (a; b)$, ka $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

2.4. *Jebkuriem* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *ir spēkā*

$$e(x_1 + x_2) = e(x_1)e(x_2). \tag{2.6}$$

► Fiksēsim brīvi izraudzītu reālu skaitli x_2. Apskatīsim palīgfunkciju

$$z(x) = e(x + x_2) - e(x)e(x_2).$$

Pierādīsim, ka šī funkcija ir Košī uzdevuma

$$y' - y = 0, \quad y(0) = 0 \tag{2.7}$$

atrisinājums. Tiešām,

$$z'(x) = e'(x + x_2) - e'(x)e(x_2) = e(x + x_2) - e(x)e(x_2),$$

t.i., $z' - z = 0$, pie tam $z(0) = e(x_2) - e(x_2) = 0$, tāpēc $z(0) = 0$. Tātad $z(x)$ ir nulles funkcija, t.i., $z(x) = 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, t.i., $e(x + x_2) - e(x)e(x_2) = 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Pēdējā vienādībā ņemot $x = x_1$, iegūsim (2.6).◄

2.5. *Jebkuram* $x \in \mathbb{R}$ *ir spēkā*

$$e(-x) = \frac{1}{e(x)}. \tag{2.8}$$

► Formulā (2.6) ņemot $x_1 = x,\ x_2 = -x$ un izmantojot vienādību $e(0) = 1$, iegūsim

$$1 = e(0) = e(x - x) = e(x + (-x)) = e(x)e(-x),$$

no kurienes seko (2.8).◄

2.6.

$$\lim_{x\to+\infty} e(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} e(x) = 0. \tag{2.9}$$

► Tā kā

$$\lim_{x\to+\infty} (1 + x) = +\infty,$$

tad, ņemot vērā (2.5), iegūsim

$$\lim_{x\to+\infty} e(x) = +\infty.$$

Ņemot vērā šo robežu un formulu (2.8), atrodam

$$\lim_{x\to-\infty} e(x) = \lim_{t\to+\infty} e(-t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{e(t)} = 0,$$

kur $x = -t$.◄

2.7. *Funkcijas* $e(x)$ *vērtību kopa ir intervāls* $(0; +\infty)$.

► Tā kā funkcija $e(x)$ ir nepārtraukta intervālā $(-\infty; +\infty)$, tad no teorēmas[3] seko, ka funkcijas $e(x)$ vērtību kopa ir intervāls. Ņemot vērā formulas (2.9) un 2.1. pierādīto, ka funkcija $e(x)$ pieņem tikai pozitīvas vērtības, secinām, ka funkcijas $e(x)$ vērtību kopa ir intervāls $(0; +\infty)$.◄

---

[3] *Teorēma.* Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta intervālā $\mathcal{I}$, tad šī intervāla attēls $f(\mathcal{I})$ arī ir intervāls. [4, 30. lpp.]

2.8. *Intervālā* $(-\infty; +\infty)$ *funkciju* $e(x)$ *var attīstīt Teilora-Maklorēna rindā*

$$e(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots . \tag{2.10}$$

▶ Iepriekš tika atzīmēts, ka $e(0) = 1$ un $e^{(n)}(0) = 1$ $(n \in \mathbb{N})$. Tāpēc funkcijas $e(x)$ Teilora-Maklorēna rindai ir veids

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Viegli redzēt, ka šī pakāpju rinda konverģē uz visas skaitļu taisnes $\mathbb{R}$. Jebkuram $x \in \mathbb{R}$ un patvaļīgam $n \in \mathbb{N}$ ir spēkā funkcijas $e(x)$ Teilora formula

$$e(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

ar atlikuma locekli Lagranža formā

$$R_n(x) = \frac{e^{(n)}(x_0)}{n!}x^n = \frac{e(x_0)}{n!}x^n \quad (x_0 = \theta x,\ 0 < \theta < 1).$$

Vienādība (2.10) izpildās jebkuram $x \in \mathbb{R}$ tad un tikai tad, kad jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0. \tag{2.11}$$

Izvēlēsimies patvaļīgu $x \in \mathbb{R}$ un pierādīsim, ka izpildās (2.11). Tā kā funkcija $e(x)$ ir stingri augoša, tad no nevienādības $x_0 < |x|$ seko nevienādība $e\,(x_0) < e\big(|x|\big)$, tāpēc

$$|R_n(x)| < \frac{e\big(|x|\big)}{n!}|x|^n.$$

Viegli pierādīt, izmantojot, piemēram, Dalambēra pazīmi, ka rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e\big(|x_0|\big)}{n!}\,|x|^n$$

konverģē jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Tāpēc no rindas konverģences nepieciešamās pazīmes seko, ka

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e\big(|x|\big)}{n!}|x|^n = 0$$

jeb

$$\lim_{n\to+\infty} R_n(x) = 0.$$

Tātad (2.10) izpildās jebkuram $x \in \mathbb{R}$.◀

2.9. Ja $x = 1$, tad no (2.10) seko, ka

$$e(1) = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots .$$

Skaitli $e(1)$ ir pieņemts apzīmēt ar e. Tātad

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots . \tag{2.12}$$

Pierādīsim, ka

$$e = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \tag{2.13}$$

▶ No (2.12) seko, ka

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right). \tag{2.14}$$

Ja $n>1$, tad saskaņā ar Ņūtona binoma formulu atrodam

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots\\ &\qquad +\frac{n(n-1)\dots(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n}=\\ &= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\\ &\qquad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)<\\ &< 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}.\end{aligned}$$

Tātad

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}. \tag{2.15}$$

No otras puses, ņemot vērā nevienādības

$$1-\frac{1}{n} > 1-\frac{2}{n} > \cdots > 1-\frac{n-1}{n}$$

un Bernulli nevienādības

$$(1+h)^n \ge 1+nh \quad (h>-1,\ n\in\mathbb{N}),$$

iegūsim

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots\\ &\qquad +\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)>\\ &> 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}\ge\\ &\ge 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{2^2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{(n-1)^2}{n}\right)=\\ &= 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2!}+\frac{2^2}{3!}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n!}\right).\end{aligned}$$

Tātad

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2!}+\frac{2^2}{3!}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n!}\right). \tag{2.16}$$

No (2.15) un (2.16) seko, ka

$$\alpha_n-\frac{S_n}{n} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \alpha_n \ (n\in\mathbb{N}) \tag{2.17}$$

kur

$$\alpha_n = 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!},\ S_n=\frac{1}{2!}+\frac{2^2}{3!}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n!}\ (n\in\mathbb{N}).$$

Izmantojot Dalambēra pazīmi, ir viegli pierādīt rindas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n!}$$

konverģenci. Tāpēc eksistē galīga robeža

$$\lim_{n\to+\infty} S_n,$$

no kurienes savukārt izriet, ka

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n} = 0.$$

Ņemot vērā šo robežu, vienādību (2.14), nevienādību (2.17) un pazīstamo matemātiskās analīzes teorēmu par robežpāreju nevienādībās [3, 55. lpp.], iegūsim (2.13).◀

2.10. No nevienādības (2.6), funkcijas $e(x)$ nepārtrauktības un īpašības 2.7. izriet, ka funkcija $e(x)$ ir nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms (pat izomorfisms) par grupu $\mathbb{R}^\bullet$, t.i.,

$$e(x) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^\bullet,$$

kur $\mathbb{R}^+$ ir visu reālo skaitļu aditīvā grupa, bet $\mathbb{R}^\bullet$ ir visu pozitīvo reālo skaitļu multiplikatīvā grupa. Savukārt no teorēmām [2, 99. lpp.] par eksponentfunkcijas eksistenci un vienīgumu seko, ka funkcija $e(x)$ ir eksponentfunkcija ar bāzi e.◀

2.11. Pieņemsim, ka a ir pozitīvs skaitlis. No īpašībām 2.7. un 2.2. seko, ka eksistē vienīgs skaitlis $x = x(a)$, ka $e^x = a$. Šo skaitli ir pieņemts saukt par **skaitļa** a **naturāllogaritmu** un apzīmēt ar $\ln a$, t.i.,

$$e^{\ln a} = a.$$

Naturāllogaritma jēdziens ar vienādības

$$a^x = e^{x \ln a} \tag{2.18}$$

palīdzību ļauj definēt eksponentfunkciju ar patvaļīgu pozitīvu bāzi. Tā kā $e(0) = 1 = e^0$, tad $\ln 1 = 0$. Tāpēc

$$1^x = e^{x \ln 1} = e^0 = 1,$$

t.i.,

$$1^x = 1 \;\; (x \in \mathbb{R}). \tag{2.19}$$

Tā kā $e^{\ln e} = e$, tad $\ln e = 1$, t.i., ja $a = e$, tad $a^x = e^x = e(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.

No (2.19) seko, ka interesi izraisa tikai eksponentfunkcija a^x ar bāzi $a > 0$, $a \neq 1$. No (2.3) seko, ka $\ln a > 0$, ja $a > 1$, savukārt no (2.4) seko, ka $\ln a < 0$, ja $0 < a < 1$. Šīs nevienādības un formula (2.18) ļauj iegūt visas eksponentfunkcijas a^x īpašības, izejot no iepriekš apskatītajām funkcijas $e(x)$ īpašībām. Iesakām lasītājam patstāvīgi veikt attiecīgos spriedumus (skat. 1. uzdevumu).

2.12. Eksponentfunkcija a^x ar bāzi $a > 0$, $a \neq 1$, var tikt definēta arī kā Košī uzdevuma

$$y' - by = 0, \;\; y(0) = 1 \tag{2.20}$$

atrisinājums, kur $e^b = a$, t.i., $b = \ln a$ (skat. 2. uzdevumu). No 1.1. teorēmas seko, ka Košī uzdevumam (2.20) eksistē vienīgs atrisinājums, kurš ir definēts un diferencējams (tātad arī nepārtraukts) uz visas skaitļu taisnes $\mathbb{R}$. Apzīmēsim šo atrisinājumu ar $a(x)$. Tad $a'(x) - ba(x) = 0$

jebkuram $x \in \mathbb{R}$ un $a(0) = 1$. Tātad $a'(x) = ba(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, no kurienes izriet, ka $a(x)$ ir bezgalīgi diferencējama funkcija uz visas skaitļu taisnes $\mathbb{R}$, pie tam

$$a^{(n)}(x) = b^n a(x) \ (x \in \mathbb{R}), \quad a^{(n)}(0) = b^n.$$

Apskatīsim funkcijas $a(x)$ citas īpašības. Tā kā šo īpašību pierādījumi ir analoģiski attiecīgo funkcijas $e(x)$ īpašību pierādījumiem, tad funkcijas $a(x)$ īpašības tiks sniegtas bez pierādījumiem, vai arī to pierādījumi būs konspektīvi.

1) *Jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā $a(x) > 0$.*

▶ Pierādījums ir analoģisks īpašības 2.1. pierādījumam.◀

2) *Funkcija $a(x)$ ir stingri augoša, ja $a > 1$ un stingri dilstoša, ja $0 < a < 1$.*

▶ Pierādījums seko no nevienādības $\ln a > 0$, ja $a > 1$, un nevienādības $\ln a < 0$, ja $0 < a < 1$, vienādības $a'(x) = \ln a \cdot a(x)$, īpašības 1) un diferencējamas funkcijas stingrās monotonitātes pietiekamā nosacījuma.◀

3) *Funkcija $a(x)$ ir izliekta.*

▶ Pierādījums seko no vienādības $a''(x) = \ln^2(a) \cdot a(x)$, īpašības 1) un divreiz diferencējamas funkcijas izliektības pietiekamā nosacījuma.◁

4) *Jebkuriem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ir spēkā*

$$a(x_1 + x_2) = a(x_1)\, a(x_2)\,. \tag{2.21}$$

▶ Pierādījums ir analoģisks pierādījumam funkcijas $e(x)$ gadījumā.◀

5) *Jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā*

$$a(-x) = \frac{1}{a(x)}.$$

6) *Ja $a > 1$, tad*

$$\lim_{x \to +\infty} a(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} a(x) = 0;$$

ja $0 < a < 1$, tad

$$\lim_{x \to +\infty} a(x) = 0, \quad \lim_{x \to -\infty} a(x) = +\infty.$$

▶ Ja $a > 1$, tad jebkuram $x > 0$ saskaņā ar Lagranža teorēmu par galīgiem pieaugumiem iegūsim

$$a(x) - a(0) = a'(x_0)x, \quad 0 < x_0 < x,$$

no kurienes seko, ka

$$a(x) = a(0) + a'(x_0)x = 1 + ba(x_0)x.$$

Tā kā $a > 1$, tad $a(x_0) > 1$ un $b > 0$. Tāpēc $a(x) > 1 + bx$. Ņemot vērā, ka funkcija $a(x)$ ir augoša, iegūsim

$$\lim_{x \to +\infty} a(x) = +\infty.$$

Spriežot līdzīgi kā 2.6., var pierādīt, ka no pēdējās sakarības, ņemot vērā 5) īpašību, izriet

$$\lim_{x \to -\infty} a(x) = 0.$$

Analoģiski pierāda, ja $x < 0$ un $0 < a < 1$, tad

$$\lim_{x \to +\infty} a(x) = 0,$$

no kurienes, ņemot vērā 5) īpašību, izriet

$$\lim_{x \to -\infty} a(x) = +\infty. \blacktriangleleft$$

7) *Funkcijas* $a(x)$ *vērtību kopa ir vienāda intervālu* $(0; +\infty)$.

8) *Jebkuram* $x \in \mathbb{R}$ *ir spēkā*

$$a(x) = e(bx) = e^{bx}. \tag{2.22}$$

$\blacktriangleright$ Apskatīsim funkciju $g(x) = a(x) - e(bx)$. Tad

$$g'(x) = (a(x) - e(bx))' = ba(x) - be(bx) = b\,(a(x) - e(bx)) = bg(x).$$

Tātad

$$g'(x) - bg(x) = 0,\; g(0) = a(0) - e(0) = 0,$$

t.i., funkcija $g(x)$ ir Košī uzdevuma

$$y' - by(x) = 0,\; y(0) = 0$$

atrisinājums. Tā kā nulles funkcija $z(x) = 0$ arī ir šī Košī uzdevuma atrisinājums, tad no 1.1. teorēmas seko, ka $g(x) = 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, t.i., vienādība (2.22) ir spēkā jebkuram $x \in \mathbb{R}$.$\blacktriangleleft$

9) *Ir spēkā vienādības*

$$a(1) = e(b) = e^b = a. \tag{2.23}$$

$\blacktriangleright$ Vienādībā (2.22) ņemot ņemot $x = 1$, iegūsim (2.23).$\blacktriangleleft$

10) Spriežot līdzīgi kā 2.10., no funkcijas $a(x)$ nepārtrauktības, vienādībām (2.21) un (2.23) seko, ka $a(x)$ *ir eksponentfunkcija ar bāzi* a, t.i., $a(x) = a^x$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$ [2, 99. lpp.].

2.2. piezīme. Vienādība (2.22) sniedz pamatojumu funkcijas $a(x)$ definēšanai ar vienādības (2.18) palīdzību, jo, kā jau tika atzīmēts 2.11., tad skaitli b ir pieņemts apzīmēt ar $\ln a$.

3. Hiperboliskās funkcijas

Apskatīsim divus Košī uzdevumus:

$$\boxed{y'' - y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1} \tag{3.1}$$

un

$$\boxed{y'' - y = 0,\ \ y(0) = 1,\ \ y'(0) = 0.} \tag{3.2}$$

Saskaņā ar 1.1. teorēmu šiem Košī uzdevumiem eksistē vienīgie atrisinājumi, kuri ir definēti un divreiz diferencējami (tātad arī nepārtraukti) uz visas skaitļu taisnes $\mathbb{R}$. Apzīmēsim šos atrisinājumus attiecīgi ar $s(x)$ un $c(x)$. Tātad

$$s''(x) - s(x) = 0\ (x \in \mathbb{R}),\ \ s(0) = 0,\ \ s'(0) = 1; \tag{3.3}$$

$$c''(x) - c(x) = 0\ \ (x \in \mathbb{R}),\ \ c(0) = 1,\ \ c'(0) = 0. \tag{3.4}$$

No (3.3) un (3.4) seko, ka jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$s(x) = s''(x) = \left(s'(x)\right)',$$
$$c(x) = c''(x) = \left(c'(x)\right)'.$$

Tātad *funkcijas $s(x)$ un $c(x)$ ir bezgalīgi diferencējamas uz visas skaitļu taisnes $\mathbb{R}$.*

Funkciju $s(x)$ un $c(x)$ īpašības iegūst, izmantojot 1.1. teorēmu un sakarības (3.3) un (3.4).

3.1. *Jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā*

$$s'(x) = c(x),\ c'(x) = s(x). \tag{3.5}$$

► Saskaņā ar (3.3) un (3.4) ir spēkā vienādības

$$s(x) = s''(x),\ c(x) = c''(x),$$

no kurām seko, ka

$$s'(x) = \left(s'(x)\right)'',\ c'(x) = \left(c'(x)\right)''.$$

Tātad funkcijas $s'(x)$ un $c'(x)$ apmierina vienādojumu $y'' - y = 0$. Bez tam no (3.3) un (3.4) izriet, ka

$$s'(0) = 1 = c(0),\ s''(0) = s(0) = 0 = c'(0). \tag{3.6}$$

Tātad funkcijas $s'(x)$ un $c(x)$ ir Košī uzdevuma (3.2) atrisinājumi. No 1.1. teorēmas izriet, ka funkcijas $s'(x)$ un $c(x)$ ir vienādas, t.i., $s'(x) = c(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.

Analoģiski, tā kā

$$c'(0) = 1 = s(0),\ c''(0) = c(0) = 0 = s'(0),$$

tad funkcijas $c'(x)$ un $s(x)$ ir Košī uzdevuma (3.1) atrisinājumi, tāpēc no 1.1. teorēmas izriet, ka funkcijas $c'(x)$ un $s(x)$ ir vienādas, t.i., $c'(x) = s(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.◄

3.1. piezīme. No 3.1. seko, ka funkcija $s'(x) - c(x)$ (attiecīgi $c'(x) - s(x)$) ir identiski vienāda ar nulli. Šo faktu var pierādīt arī savādāk. Tā kā funkcijas $s'(x)$ un $c(x)$ (attiecīgi $c'(x)$ un $s(x)$) apmierina vienādojumu $y'' - y = 0$ un nosacījumus (3.6), tad funkcija $s'(x) - c(x)$ (attiecīgi $c'(x) - s(x)$) ir Košī uzdevuma

$$y'' - y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \tag{3.7}$$

atrisinājums. Saskaņā ar 1.1. teorēmu funkcija $s'(x) - c(x)$ (attiecīgi $c'(x) - s(x)$) ir vienāda ar nulles funkciju, t.i., $s'(x) = c(x)$ (attiecīgi $c'(x) = s(x)$) jebkuram $x \in \mathbb{R}$. No iepriekš teiktā seko, ka, *lai pierādītu divu funkciju vienādību, ir pietiekami pierādīt, ka šo funkciju starpība ir Košī uzdevuma (3.7) atrisinājums.*

3.2. *$s(x)$ - nepāra funkcija, bet $c(x)$ - pāra funkcija.*

▶ Saskaņā ar pāra un nepāra funkcijas definīciju, ir pietiekami pierādīt, ka jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$s(-x) = -s(x),\ c(-x) = c(x).$$

Apskatīsim funkcijas $u(x) = s(-x) + s(x)$ un $v(x) = c(-x) - c(x)$ un pārliecināsimies, ka tās apmierina Košī uzdevumu (3.7). Izmantojot vienādības (3.5) un (3.6), atrodam

$$\begin{aligned} u''(x) - u(x) &= \big[s(-x) + s(x)\big]'' - \big[s(-x) + s(x)\big] = \\ &= \Big(\big[s(-x) + s(x)\big]'\Big)' - \big[s(-x) + s(x)\big] = \\ &= \big[-c(-x) + c(x)\big]' - \big[s(-x) + s(x)\big] = \\ &= \big[s(-x) + s(x)\big] - \big[s(-x) + s(x)\big] = 0; \\ u(0) &= s(-0) + s(0) = 0 + 0 = 0; \\ u'(0) &= -c(-0) + c(0) = -1 + 1 = 0. \end{aligned}$$

Ņemot vērā 3.1. piezīmē teikto, secinām, ka $s(-x) = -s(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Veicot analoģiskus spriedumus attiecībā pret funkciju $v(x)$, iegūsim, ka $c(-x) = c(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.◀

3.3. *Jebkuriem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ir spēkā*

$$c(x_1 + x_2) = c(x_1)\, c(x_2) + s(x_1)\, s(x_2), \tag{3.8}$$

$$s(x_1 + x_2) = s(x_1)\, c(x_2) + c(x_1)\, s(x_2). \tag{3.9}$$

▶ Fiksēsim brīvi izraudzītu reālu skaitli x_2. Apskatīsim palīgfunkciju $z(x) = c(x + x_2) - c(x)c(x_2) - s(x)s(x_2)$. Pierādīsim, ka šī funkcija ir Košī uzdevuma (3.7) atrisinājums. Izmantojot (3.5) un (3.6), atrodam

$$\begin{aligned} z'(x) &= s(x + x_2) - s(x)c(x_2) - c(x)s(x_2), \\ z''(x) &= c(x + x_2) - c(x)c(x_2) - s(x)s(x_2), \end{aligned}$$

no kurienes seko, ka

$$z''(x) - z(x) = 0,$$

pie tam

$$\begin{aligned} z(0) &= c(x_2) - c(0)c(x_2) - s(0)s(x_2) = \\ &= c(x_2) - 1 \cdot c(x_2) - 0 \cdot s(x_2) = \\ &= c(x_2) - c(x_2) = \\ &= 0; \\ z'(0) &= s(x_2) - s(0)c(x_2) - c(0)s(x_2) = \\ &= s(x_2) - 0 \cdot c(x_2) - 1 \cdot s(x_2) = \\ &= s(x_2) - s(x_2) = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ņemot vērā 3.1. piezīmē teikto, secinām, ka $z(x) = 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, t.i.,

$$c(x + x_2) = c(x)\, c(x_2) + s(x)\, s(x_2)$$

jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Ja $x = x_1$, tad no pēdējās vienādības seko (3.8). Vienādību (3.9) pierāda analoģiski. Iesakām lasītājam patstāvīgi veikt šo pierādījumu.◀

Sekas. *Jebkuriem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ir spēkā*

$$\begin{aligned} c(x_1 - x_2) &= c(x_1)\, c(x_2) - s(x_1)\, s(x_2), & (3.10)\\ s(x_1 - x_2) &= s(x_1)\, c(x_2) - c(x_1)\, s(x_2). & (3.11) \end{aligned}$$

► Pierādījums seko no īpašības 3.2. un vienādībām (3.8), (3.9).◄

3.4. *Jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā*

$$c^2(x) - s^2(x) = 1. \tag{3.12}$$

► Vienādībā (3.10) ņemot $x_1 = x_2 = x$ un ievērojot, ka $c(0) = 1$, iegūsim (3.12).◄

3.2. piezīme. Citu vienādības (3.12) pierādījumu, kurš nebalstās uz vienādībām (3.8)-(3.11), var veikt pēc šādas shēmas. Apskata funkciju

$$f(x) = c^2(x) - s^2(x),$$

tad

$$f'(x) = 2c(x)s(x) - 2s(x)c(x) = 0,$$

t.i., $f(x) = const$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, no kurienes, ņemot vērā, ka

$$f(0) = c^2(0) - s^2(0) = 1,$$

seko, ka $f(x) = 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, t.i., izpildās (3.12).

3.5. *$c(x) \geq 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, bet*

$$s(x) \begin{cases} > 0, & ja \quad x \in (0; +\infty), \\ = 0, & ja \quad x = 0, \\ < 0, & ja \quad x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

► Vispirms pierādīsim, ka $c(x) \geq 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Atrodam

$$c(x) = c\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = c\left(\frac{x}{2}\right) c\left(\frac{x}{2}\right) + s\left(\frac{x}{2}\right) s\left(\frac{x}{2}\right) = c^2\left(\frac{x}{2}\right) + s^2\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0.$$

Tātad

$$c(x) \geq 0 \ \ (x \in \mathbb{R}). \tag{3.13}$$

No (3.12) seko, ka $c^2(x) = 1 + s^2(x) \geq 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, t.i., $|c(x)| \geq 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, no kurienes, ņemot vērā (3.13), izriet

$$c(x) \geq 1 \ (x \in \mathbb{R}). \tag{3.14}$$

Nevienādību $s(x) > 0$, ja $x \in (0; +\infty)$, pierāda, izmantojot vienādību (3.5) un nevienādību (3.14):

$$s'(x) = c(x) \geq 1 > 0 \ (x \in \mathbb{R}),$$

no kurienes seko, ka funkcija $s(x)$ ir augoša intervālā $[0; +\infty)$, taču, tā kā $s(0) = 0$, tad $s(x) > 0$, ja $x > 0$. Saskaņā ar 2.2. funkcija $s(x)$ ir nepāra, tāpēc $s(x) < 0$, ja $x < 0$.◄

3.6. *Funkcija $s(x)$ ir stingri augoša intervālā $(-\infty; +\infty)$, savukārt funkcija $c(x)$ ir stingri augoša intervālā $[0, +\infty)$ un stingri dilstoša intervālā $(-\infty; 0]$.*

▶ No īpašībām 3.5. un 3.1. seko, ka $s'(x) = c(x) \geq 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, tāpēc funkcija $s(x)$ ir stingri augoša intervālā $(-\infty; +\infty)$. Savukārt, tā kā funkcija $c(x)$ ir nepārtraukta, pie tam $c'(x) = s(x) > 0$ ($c'(x) < 0$) intervālā $[0; +\infty)$ (attiecīgi intervālā $(-\infty; 0]$), tad funkcija $c(x)$ ir stingri augoša (attiecīgi stingri dilstoša) intervālā $[0; +\infty)$ (attiecīgi intervālā $(-\infty; 0]$).◀

3.7. *Funkcijai $c(x)$ eksistē vienīgais lokālais ekstrēms punktā $x = 0$, pie tam*

$$c(0) = 1 = c_{min}(0).$$

▶ Īpašības patiesums izriet no funkcijas $c(x)$ stingrās augšanas intervālā $[0; +\infty)$, stingrās dilšanas intervālā $(-\infty; 0]$ un nepārtrauktības punktā $x = 0$.◀

3.8. $s(x) = 0$ *tad un un tikai tad, kad* $x = 0$.

▶ Īpašības patiesums seko no funkcijas $s(x)$ stingrās augšanas (skat. 3.6. īpašību) un vienādības $s(0) = 0$.◀

3.9.

$$\lim_{x \to +\infty} s(x) = +\infty, \tag{3.15}$$

$$\lim_{x \to -\infty} s(x) = -\infty, \tag{3.16}$$

$$\lim_{x \to +\infty} c(x) = +\infty, \tag{3.17}$$

$$\lim_{x \to -\infty} c(x) = +\infty. \tag{3.18}$$

▶ Pierādīsim (3.15). Ja $x > 0$, tad no Lagranža teorēmas par galīgiem pieaugumiem un nevienādības (3.14) izriet, ka

$$s(x) - s(0) = s'(x_0)x = c(x_0)x \geq x,$$

no kurienes, ņemot vērā vienādību $s(0) = 0$ un to, ka $s(x)$ ir stingri augoša funkcija intervālā $(0; +\infty)$, seko (3.15). Sakarība (3.16) seko no (3.15) un tā, ka $s(x)$ ir nepāra funkcija. Sakarības (3.17) un (3.18) pierāda, izmantojot sakarības (3.15) un (3.16), nevienādību (3.14) un vienādību (3.12), saskaņā ar kuru

$$c(x) = \sqrt{1 + s^2(x)} \ (x \in \mathbb{R}). ◀$$

3.10. *Funkcijas $s(x)$ vērtību kopa ir intervāls $(-\infty; +\infty)$, bet funkcijas $c(x)$ - intervāls $[1; +\infty)$.*

▶ Pierādījums seko no sakarībām (3.15)-(3.18), īpašības 3.7., nevienādības (3.14) un funkciju $s(x)$ un $c(x)$ nepārtrauktības uz visas taisnes $\mathbb{R}$.◀

3.11. *Jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā*

$$s(x) = \frac{e(x) - e(-x)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \tag{3.19}$$

$$c(x) = \frac{e(x) + e(-x)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{3.20}$$

▶ Pierādīsim (3.19). Apskatīsim palīgfunkciju

$$f(x) = s(x) - \frac{e(x) - e(-x)}{2} \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Ņemot vērā funkciju $s(x)$ un $e(x)$ diferencējamību, kā arī vienādības $c(0) = 1$, $s(0) = 0$ un $e(0) = 1$, iegūsim

$$f'(x) = c(x) - \frac{e(x) + e(-x)}{2},$$
$$f''(x) = s(x) - \frac{e(x) - e(-x)}{2},$$

no kurienes seko, ka $f''(x) - f(x) = 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, pie tam

$$f(0) = s(0) - \frac{e(0) - e(-0)}{2} = 0 - \frac{1-1}{2} = 0,$$
$$f'(0) = c(0) - \frac{e(0) + e(-0)}{2} = 1 - \frac{1+1}{2} = 0.$$

Tātad funkcija $f(x)$ ir Koši uzdevuma (3.7) atrisinājums. Tāpēc funkcija $f(x)$ ir identiski vienāda ar nulli, t.i., izpildās (3.19). Vienādību (3.20) pierāda analoģiski.◀

Funkciju

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

apzīmē ar $\operatorname{ch} x$ un sauc par **hiperbolisko kosinusu**, savukārt funkciju

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

apzīmē ar $\operatorname{sh} x$ un sauc par **hiperbolisko sinusu** [1, 23. lpp.]. Tādējādi no vienādībām (3.19) un (3.20) izriet, ka funkcijas $s(x)$ un $c(x)$, kuras tika definētas kā Koši uzdevumu attiecīgi (3.1) un (3.2) atrisinājumi, ir vienādas ar attiecīgi hiperbolisko sinusu $\operatorname{sh} x$ un hiperbolisko kosinusu $\operatorname{ch} x$.

4. Trigonometriskās funkcijas

Apskatīsim divus Košī uzdevumus:

$$\boxed{y'' + y = 0, \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1;} \tag{4.1}$$

un

$$\boxed{y'' + y = 0, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.} \tag{4.2}$$

Saskaņā ar 1.1. teorēmu šiem Košī uzdevumiem eksistē vienīgie atrisinājumi, kuri ir definēti un divreiz diferencējami (tātad arī nepārtraukti) uz visas skaitļu taisnes $\mathbb{R}$. Apzīmēsim šos atrisinājumus attiecīgi ar $\varphi(x)$ un $\psi(x)$. Tātad

$$\varphi''(x) + \varphi(x) = 0 \;\; (x \in \mathbb{R}), \; \varphi(0) = 0, \;\; \varphi'(0) = 1; \tag{4.3}$$

$$\psi''(x) + \psi(x) = 0 \;\; (x \in \mathbb{R}), \;\; \psi(0) = 1, \;\; \psi'(0) = 0. \tag{4.4}$$

No (4.3) un (4.4) seko, ka jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\varphi''(x) = -\left(\varphi'(x)\right)', \\ \psi(x) &= -\psi''(x) = -\left(\psi'(x)\right)'. \end{aligned}$$

Tātad *funkcijas* $\varphi(x)$ *un* $\psi(x)$ *ir bezgalīgi diferencējamas uz visas skaitļu taisnes* $\mathbb{R}$.

Funkciju $\varphi(x)$ un $\psi(x)$ īpašības iegūst, izmantojot (4.3) un (4.4).

4.1. *Jebkuram* $x \in \mathbb{R}$ *ir spēkā*

$$\varphi'(x) = \psi(x), \; \psi'(x) = -\varphi(x). \tag{4.5}$$

► Saskaņā ar (4.3) un (4.4) ir spēkā vienādības

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\varphi''(x), \\ \psi(x) &= -\psi''(x), \end{aligned}$$

no kurām seko, ka

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\varphi'''(x) = -\left(\varphi'(x)\right)'', \\ \psi'(x) &= -\psi'''(x) = -\left(\psi'(x)\right)''. \end{aligned}$$

Tātad funkcijas $\varphi'(x)$ un $\psi'(x)$ apmierina vienādojumu $y'' + y = 0$. Bez tam no (4.3) un (4.4) izriet, ka

$$\varphi'(0) = 1 = \psi(0), \; \varphi''(0) = -\varphi(0) = 0 = \psi'(0). \tag{4.6}$$

Tātad funkcijas $\varphi'(x)$ un $\psi(x)$ ir Košī uzdevuma (4.2) atrisinājumi. No 1.1. teorēmas izriet, ka funkcijas $\varphi'(x)$ un $\psi(x)$ ir vienādas, t.i., $\varphi'(x) = \psi(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.

Analoģiski, tā kā

$$\psi'(0) = 1 = \varphi(0) = -\varphi'(0), \quad \psi''(0) = -\psi(0) = -1 = -\varphi'(0),$$

tad funkcijas $\psi'(x)$ un $-\varphi(x)$ ir Košī uzdevuma (4.1) atrisinājumi, tāpēc no 1.1. teorēmas izriet, ka funkcijas $\psi'(x)$ un $-\varphi(x)$ ir vienādas, t.i., $\psi'(x) = -\varphi(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.◄

4.1. piezīme. No 4.1. īpašības seko, ka funkcija $\varphi'(x) - \psi(x)$ (attiecīgi $\psi'(x) + \varphi(x)$) ir identiski vienāda ar nulli. Šo faktu var pierādīt arī savādāk. Tā kā funkcijas $\varphi'(x)$ un $\psi(x)$ (attiecīgi $\psi'(x)$ un $-\varphi(x)$) apmierina vienādojumu $y'' + y = 0$ un nosacījumus (4.6), tad funkcija $\varphi'(x) - \psi(x)$ (attiecīgi $\psi'(x) + \varphi(x)$) ir Košī uzdevuma

$$y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0 \tag{4.7}$$

atrisinājums. Saskaņā ar 1.1. teorēmu funkcija $\varphi'(x) - \psi(x)$ (attiecīgi $\psi'(x) + \varphi(x)$) ir vienāda ar nulles funkciju, t.i., $\varphi'(x) = \psi(x)$ (attiecīgi $\psi'(x) = -\varphi(x)$) jebkuram $x \in \mathbb{R}$. No iepriekš teiktā seko, ka, lai pierādītu divu funkciju vienādību, ir pietiekami pierādīt, ka šo funkciju starpība ir Košī uzdevuma (4.7) atrisinājums.

4.2. *Funkcija $\varphi(x)$ ir nepāra funkcija, bet $\psi(x)$ - pāra funkcija.*

► Saskaņā ar pāra un nepāra funkcijas definīciju, ir pietiekami pierādīt, ka jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$\varphi(-x) = -\varphi(x),\ \psi(-x) = \psi(x).$$

Apskatīsim funkcijas

$$u(x) = \varphi(-x) + \varphi(x) \ \text{ un } \ v(x) = \psi(-x) - \psi(x)$$

un pārliecināsimies, ka tās apmierina Košī uzdevumu (4.7). Izmantojot vienādības (4.5) un (4.6), atrodam

$$\begin{aligned}
u''(x) + u(x) &= (\varphi(-x) + \varphi(x))'' + (\varphi(-x) + \varphi(x)) = \\
&= \left((\varphi(-x) + \varphi(x))'\right)' + (\varphi(-x) + \varphi(x)) = \\
&= (-\varphi(-x) + \psi(x))' + (\varphi(-x) + \varphi(x)) = \\
&= -(\varphi(-x) + \varphi(x)) + (\varphi(-x) + \varphi(x)) = 0; \\
u(0) &= \varphi(-0) + \varphi(0) = 0 + 0 = 0; \\
u'(0) &= -\psi(-0) + \psi(0) = -1 + 1 = 0.
\end{aligned}$$

Ņemot vērā 4.1. piezīmē teikto, secinām, ka $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Veicot analoģiskus spriedumus attiecībā pret funkciju $v(x)$, iegūsim, ka $\psi(-x) = \psi(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.◄

4.3. *Jebkuriem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ir spēkā*

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1)\psi(x_2) + \varphi(x_2)\psi(x_1), \tag{4.8}$$

$$\psi(x_1 + x_2) = \psi(x_1)\psi(x_2) - \varphi(x_1)\varphi(x_2). \tag{4.9}$$

► Fiksēsim brīvi izraudzītu reālu skaitli x_2. Apskatīsim palīgfunkciju

$$z(x) = \varphi(x + x_2) - \varphi(x)\psi(x_2) - \psi(x)\varphi(x_2).$$

Pierādīsim, ka šī funkcija ir Košī uzdevuma (4.7) atrisinājums. Izmantojot (4.5) un (4.6), atrodam, ka jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$\begin{gathered}
z'(x) = \psi(x + x_2) - \psi(x)\psi(x_2) + \varphi(x_2)\varphi(x), \\
z''(x) = -\varphi(x + x_2) + \varphi(x)\psi(x_2) + \varphi(x_2)\psi(x),
\end{gathered}$$

no kurienes seko, ka

$$z''(x) + z(x) = 0,$$

pie tam

$$\begin{aligned}
z(0) &= \varphi(x_2) - \varphi(0)\psi(x_2) - \varphi(x_2)\psi(0) = \\
&= \varphi(x_2) - 0 \cdot \psi(x_2) - \varphi(x_2) \cdot 1 = \\
&= \varphi(x_2) - \varphi(x_2) = 0; \\
z'(0) &= \psi(x_2) - \psi(0)\psi(x_2) + \varphi(x_2)\varphi(0) = \\
&= \psi(x_2) - 1 \cdot \psi(x_2) + \varphi(x_2) \cdot 0 = \\
&= \psi(x_2) - \psi(x_2) = 0.
\end{aligned}$$

Ņemot vērā 4.1. piezīmē teikto, secinām, ka $z(x) = 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, t.i.,

$$\varphi(x + x_2) = \varphi(x)\,\psi(x_2) + \varphi(x_2)\,\psi(x)$$

jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Ja $x = x_1$, tad no pēdējās vienādības seko (4.8). Vienādību (4.9) pierāda analoģiski. Iesakām lasītājam patstāvīgi veikt šo pierādījumu.▶

Sekas. *Jebkuriem* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *ir spēkā*

$$\varphi(x_1 - x_2) = \varphi(x_1)\,\psi(x_2) - \varphi(x_2)\,\psi(x_1), \tag{4.10}$$

$$\psi(x_1 - x_2) = \psi(x_1)\,\psi(x_2) + \varphi(x_1)\,\varphi(x_2). \tag{4.11}$$

▶ Pierādījums seko no īpašības 4.2. un vienādībām (4.8) un (4.9).◀

4.4. *Jebkuram* $x \in \mathbb{R}$ *ir spēkā*

$$\varphi^2(x) + \psi^2(x) = 1. \tag{4.12}$$

▶ Vienādībā (4.11) ņemot $x_1 = x_2 = x$ un ievērojot, ka $\psi(0) = 1$, iegūsim (4.12).◀

4.2. piezīme. Citu vienādības (4.12) pierādījumu, kurš nebalstās uz vienādībām (4.8)-(4.11), var veikt pēc šādas shēmas. Apskata funkciju

$$f(x) = \varphi^2(x) + \psi^2(x),$$

tad

$$f'(x) = 2\varphi(x)\varphi'(x) + 2\psi(x)\psi'(x) = 2\varphi(x)\psi(x) - 2\psi(x)\varphi(x) = 0,$$

t.i., $f(x) = const$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, no kurienes, ņemot vērā, ka

$$f(0) = \varphi^2(0) + \psi^2(0) = 0 + 1 = 1,$$

seko, ka $f(x) = 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, t.i., izpildās (4.12).

4.3. piezīme. Vienādības (4.8)-(4.11) sauc par **funkciju** $\varphi(x)$ **un** $\psi(x)$ **saskaitīšanas teorēmām**. Formulās (4.8) un (4.9) ņemot $x_1 = x_2 = x$, iegūsim divkāršota argumenta funkciju $\varphi(x)$ un $\psi(x)$ vērtības:

$$\varphi(2x) = \varphi(x + x) = \varphi(x)\psi(x) + \varphi(x)\psi(x) = 2\varphi(x)\psi(x), \tag{4.13}$$

$$\psi(2x) = \psi(x + x) = \psi(x)\psi(x) - \varphi(x)\varphi(x) = \psi^2(x) - \varphi^2(x). \tag{4.14}$$

No (4.12)-(4.14) atrodam:

$$\psi^2(x) = \frac{1 + \psi(2x)}{2}, \tag{4.15}$$

$$\varphi^2(x) = \frac{1 - \psi(2x)}{2}. \tag{4.16}$$

4.5. *Funkcijas $\varphi(x)$ un $\psi(x)$ ir ierobežotas, pie tam*

$$|\varphi(x)| \leq 1, \ |\psi(x)| \leq 1 \ (x \in \mathbb{R}). \tag{4.17}$$

▶ No (4.12) seko, ka $\varphi^2(x) = 1 - \psi^2(x) \leq 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Tātad $|\varphi(x)| \leq 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Funkcijas $\psi(x)$ gadījumu apskata analoģiski.◀

4.6. *Funkcijai $\psi(x)$ eksistē vismazākā pozitīvā nulle, t.i., eksistē tāds skaitlis x_0, ka $\psi(x_0) = 0$, bet $\psi(x) \neq 0$ jebkuram x, ka $0 < x < x_0$.*

▶ Saskaņā Lagranža teorēmas par galīgiem pieaugumiem atrodam:

$$\varphi(2) - \varphi(0) = \varphi'(c)(2 - 0) \ \ (0 < c < 2),$$

no kurienes seko, ka $\varphi(2) = 2\psi(c)$. Ņemot vērā (4.17), iegūsim

$$|\psi(c)| = \frac{1}{2}\big|\varphi(2)\big| \leq \frac{1}{2}.$$

Izmantojot (4.15), atrodam

$$\psi(2c) = 2\psi^2(c) - 1 \leq 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 < 0.$$

Tātad $\psi(0) = 1 > 0$ un $\psi(2c) < 0$. Tā kā funkcija $\psi(x)$ ir nepārtraukta, tad no Bolcāno-Košī teorēmas seko, ka eksistē tāds pozitīvs skaitlis ξ, kas atrodas starp 0 un $2c$, ka $\psi(\xi) = 0$. Tātad funkcijai $\psi(x)$ eksistē pozitīva nulle.

Pieņemsim, ka E ir funkcijas $\psi(x)$ visu pozitīvo nuļļu kopa. No iepriekš pierādītā seko, ka $E \neq \emptyset$. Pieņemsim, ka $x_0 = \inf E$. Tā kā $E \neq \emptyset$, tad $0 \leq x_0 < +\infty$. Punkts x_0, būdams kopas E infīms, ir kopas E kontaktpunkts [3, 30. lpp.]. Tāpēc eksistē tāda kopas E punktu virkne (x_n), ka

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0.$$

Tā kā funkcija $\psi(x)$ ir nepārtraukta, bet $\psi\left(x_n\right) = 0$ jebkuram $x \in \mathbb{N}$, tad

$$\psi\left(x_0\right) = \lim_{n\to+\infty} \psi\left(x_n\right) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0.$$

Tātad $x_0 \in E$. Atzīmēsim, ka $x_0 > 0$. Tiešām, no vienas puses, iepriekš tika pierādīts, ka $x_0 \geq 0$, no otras puses, $x_0 \neq 0$, jo $\psi\left(x_0\right) = 0$, bet $\psi(0) = 1$. Tātad $x_0 > 0$. Tā kā x_0 ir funkcijas $\psi(x)$ visu pozitīvo nuļļu kopas E infīms, pie tam $x_0 > 0$, tad x_0 ir funkcijas $\psi(x)$ vismazākā pozitīvā nulle.◀

4.7. Funkcijas $\psi(x)$ vismazāko pozitīvo nulli, kura eksistē saskaņā ar iepriekšējā īpašībā pierādīto, apzīmēsim ar ω, t.i., $\psi(\omega) = 0$, bet $\psi(x) \neq 0$ jebkuram $x \in [0;\omega)$. Tā kā $\psi(0) = 1 > 0$, tad intervālā $x \in [0;\omega)$ funkcija $\psi(x)$ pieņem tikai pozitīvas vērtības. Ņemot vērā, ka $\varphi'(x) = \psi(x) > 0$ jebkuram $x \in [0;\omega)$, var secināt, ka funkcija $\varphi(x)$ ir stingri augoša intervālā $x \in [0;\omega]$. Tā kā $\varphi(0) = 0$, tad $\varphi(x) > 0$ jebkuram $x \in (0;\omega]$. No (4.12) seko, ka

$$\varphi(\omega) = \sqrt{1 - \psi^2(\omega)} = 1.$$

No iepriekš teiktā, ņemot vērā funkcijas $\varphi(x)$ nepārtrauktību, izriet, ka $\varphi\big([0;\omega]\big) = [0;1]$, pie tam

- *intervālā* $[0;\omega]$ *funkcija* $\varphi(x)$ *stingri aug no* 0 *līdz* 1.

  Tā kā $\psi'(x) = -\varphi(x) < 0$ jebkuram $x \in (0;\omega]$, tad

- *intervālā* $[0;\omega]$ *funkcija* $\psi(x)$ *stingri dilst no* 1 *līdz* 0,

pie tam, ņemot vērā funkcijas $\psi(x)$ nepārtrauktību, ir spēkā vienādība $\psi\big([0;\omega]\big) = [0;1]$.

4.8. Izpētīsim funkciju φ un ψ uzvedību intervālos $[\omega;2\omega]$, $[2\omega;3\omega]$, $[3\omega;4\omega]$.

Izmantojot vienādības vienādības (4.8) un (4.9), atrodam, ka jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$\varphi(x+\omega) = \varphi(x)\psi(\omega) + \varphi(\omega)\psi(x) = \varphi(x)\cdot 0 + 1\cdot\psi(x) = \psi(x), \tag{4.18}$$
$$\psi(x+\omega) = \psi(x)\psi(\omega) - \varphi(x)\varphi(\omega) = \psi(x)\cdot 0 - \varphi(x)\cdot 1 = -\varphi(x). \tag{4.19}$$

Vienādībās (4.18) un (4.19) ņemot $x = \omega$, iegūsim

$$\varphi(2\omega) = \psi(\omega) = 0, \ \psi(2\omega) = -\varphi(\omega) = -1.$$

Ja $x \in [\omega;2\omega]$, tad $x = t+\omega$, kur $t \in [0;\omega]$. Tāpēc

$$\varphi(x) = \varphi(t+\omega) = \psi(t) > 0 \quad (x \in [\omega;2\omega]),$$
$$\psi(x) = \psi(t+\omega) = -\varphi(t) < 0 \quad (x \in [\omega;2\omega]),$$

no kurienes, ņemot vērā (4.5), secinām, ka

- *intervālā* $[\omega;2\omega]$ *funkcija* $\varphi(x)$ *stingri dilst no* 1 *līdz* 0,
- *intervālā* $[\omega;2\omega]$ *funkcija* $\psi(x)$ *stingri dilst no* 0 *līdz* -1,

pie tam

$$\varphi\left([\omega;2\omega]\right) = [0;1], \ \psi\left([\omega;2\omega]\right) = [-1;0].$$

Divreiz pielietojot vienādības (4.18) un (4.19), iegūsim

$$\varphi(x+2\omega) = \varphi((x+2\omega)+\omega) = \psi(x+\omega) = -\varphi(x), \tag{4.20}$$
$$\psi(x+2\omega) = \psi((x+2\omega)+\omega) = -\varphi(x+\omega) = -\psi(x). \tag{4.21}$$

No formulām (4.20), (4.21) un iepriekš teiktā seko, ka

- *intervālā* $[2\omega;3\omega]$ *funkcija* $\varphi(x)$ *stingri dilst no* 0 *līdz* -1,
- *intervālā* $[2\omega;3\omega]$ *funkcija* $\psi(x)$ *stingri aug no* -1 *līdz* 0,
- *intervālā* $[3\omega;4\omega]$ *funkcija* $\varphi(x)$ *stingri aug no* -1 *līdz* 0,
- *intervālā* $[3\omega;4\omega]$ *funkcija* $\psi(x)$ *stingri aug no* 0 *līdz* 1,

pie tam

$$\varphi(3\omega) = -1, \ \psi(3\omega) = 0, \ \varphi(4\omega) = 0, \ \psi(4\omega) = 1.$$

Visbeidzot, divreiz pielietojot vienādības (4.20) un (4.21), iegūsim

$$\varphi(x+4\omega) = \varphi((x+2\omega)+2\omega) = -\varphi(x+2\omega) = \varphi(x), \tag{4.22}$$
$$\psi(x+4\omega) = \psi((x+2\omega)+2\omega) = -\psi(x+2\omega) = \psi(x). \tag{4.23}$$

No formulām (4.22) un (4.23) un seko, ka funkcijas $\varphi(x)$ un $\psi(x)$ ir periodiskas funkcijas ar periodu 4ω.

4.9. *Funkciju $\varphi(x)$ un $\psi(x)$ vismazākais pozitīvais periods ir 4ω.*

► Pierādīsim, ka 4ω ir funkcijas $\varphi(x)$ vismazākais pozitīvais periods. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds $T \in (0; 4\omega)$, ka jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$\varphi(x+T) = \varphi(x). \tag{4.24}$$

Vienādībā (4.24) ņemot $x = 0$, iegūsim $\varphi(0+T) = \varphi(0)$ jeb $\varphi(T) = \varphi(0) = 0$. Tā kā $T \in (0; 4\omega)$, tad no punktos 4.7. un 4.8. teiktā izriet, ka $T = 2\omega$. No vienas puses, vienādībā (4.24) ņemot $x = \omega$, atrodam $\varphi(\omega+T) = \varphi(\omega)$ jeb $\varphi(3\omega) = \varphi(\omega) = 1$. No otras puses, $\varphi(3\omega) = -1$. Pretruna. Tātad 4ω ir funkcijas $\varphi(x)$ vismazākais pozitīvais periods.

Pierādīsim, ka 4ω ir funkcijas $\psi(x)$ vismazākais pozitīvais periods. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds $T \in (0; 4\omega)$, ka jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$\psi(x+T) = \psi(x). \tag{4.25}$$

Vienādībā (4.25) ņemot $x = 0$, iegūsim $\psi(0+T) = \psi(0)$ jeb $\psi(T) = \psi(0) = 1$. Taču no punktos 4.7. un 4.8. teiktā izriet, ka $\psi(T) \neq 1$ jebkuram $T \in (0; 4\omega)$. Pretruna. Tātad 4ω ir funkcijas $\psi(x)$ vismazākais pozitīvais periods.◄

4.10. *$\varphi(x) = 0$ tad un tikai tad, kad $x = 2k\omega$ ($k \in \mathbb{Z}$), savukārt $\psi(x) = 0$ tad un tikai tad, kad $x = \omega + 2k\omega$ ($k \in \mathbb{Z}$).*

► Vispirms pierādīsim, ka skaitļi $2k\omega$ ($k \in \mathbb{Z}$) ir funkcijas $\varphi(x)$ nulles. Ja $k = 0$, tad, ņemot vērā (4.3), atrodam $\varphi(2k\omega) = \varphi(0) = 0$. Ja $k \in \mathbb{N}$, tad vienādību $\varphi(2k\omega) = 0$ pierāda ar matemātiskās indukcijas principa palīdzību, izmantojot saskaitīšanas teorēmu (4.8). Ja $k \in \mathbb{Z}$, $k < 0$, tad vienādību $\varphi(2k\omega) = 0$ pierāda, izmantojot faktu, ka $\varphi(x)$ ir nepāra funkcija.

Tagad pierādīsim, ka funkcijai $\varphi(x)$ nav citu nuļļu, izņemot $2k\omega$ ($k \in \mathbb{Z}$). Šim nolūkam pieņemsim, ka $\varphi(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$, un pierādīsim, ka eksistē tāds $k_0 \in \mathbb{Z}$, ka $t = 2k_0\omega$. Pieņemsim pretējo, ka tāds $k_0 \in \mathbb{Z}$ neeksistē, t.i., $t \neq 2k\omega$ jebkuram $k \in \mathbb{Z}$. No vienas puses, eksistē vienīgs $m \in \mathbb{Z}$, ka

$$2m\omega < t < 2(m+1)\omega$$

jeb

$$0 < t - 2m\omega < 2\omega,$$

no kurienes, ņemot vērā punktos 4.7. un 4.8. teikto, izriet, ka $\varphi(t - 2m\omega) > 0$. No otras puses, ņemot vērā (4.10) un iepriekš pierādīto, atrodam

$$\varphi(t - 2m\omega) = \varphi(t)\psi(2m\omega) - \varphi(2m\omega)\psi(t) = 0 \cdot \psi(2m\omega) - 0 \cdot \psi(t) = 0.$$

Pretruna. Tātad funkcijai $\varphi(x)$ nav citu nuļļu, izņemot $2k\omega$ ($k \in \mathbb{Z}$).

No skaitļa ω definīcijas (skat. 4.7.), (4.9) un iepriekš pierādītā seko, ka

$$\psi(\omega + 2k\omega) = \psi(\omega)\psi(2k\omega) - \varphi(\omega)\varphi(2k\omega) = 0 \cdot \psi(2k\omega) - \varphi(\omega) \cdot 0 = 0,$$

t.i., skaitļi $\omega + 2k\omega$ ($k \in \mathbb{Z}$) ir funkcijas $\psi(x)$ nulles. Spriežot līdzīgi kā funkcijas $\varphi(x)$ gadījumā pierāda, ka funkcijai $\psi(x)$ nav citu nuļļu, izņemot $\omega + 2k\omega$ ($k \in \mathbb{Z}$).◄

4.11. Izmantojot 4.6., 4.7., 4.8., 4.9., un 4.10. teikto, viegli pierādīt, ka

- punkti $x_k = \omega + 4k\omega$ ($k \in \mathbb{Z}$) ir funkcijas $\varphi(x)$ lokālā maksimuma punkti, pie tam $\varphi(x_k) = 1$ jebkuram $k \in \mathbb{Z}$;

- punkti $x_s = 3\omega + 4s\omega$ ($s \in \mathbb{Z}$) ir funkcijas $\varphi(x)$ lokālā minimuma punkti, pie tam $\varphi(x_s) = -1$ jebkuram $s \in \mathbb{Z}$;
- uz nogriežņiem $[4k\omega; (4k+2)\omega]$ ($k \in \mathbb{Z}$) funkcija $\varphi(x)$ ir ieliekta;
- uz nogriežņiem $[(4k-2)\omega; 4k\omega]$ ($k \in \mathbb{Z}$) funkcija $\varphi(x)$ ir izliekta;
- punkti $x_l = 2l\omega$ ($l \in \mathbb{Z}$) ir funkcijas $\varphi(x)$ pārliekuma punkti, pie tam $\varphi(x_l) = 0$ jebkuram $l \in \mathbb{Z}$;
- punkti $x_k = 4k\omega$ ($k \in \mathbb{Z}$) ir funkcijas $\psi(x)$ lokālā maksimuma punkti, pie tam $\psi(x_k) = 1$ jebkuram $k \in \mathbb{Z}$;
- punkti $x_s = 2\omega + 4s\omega$ ($s \in \mathbb{Z}$) ir funkcijas $\psi(x)$ lokālā minimuma punkti, pie tam $\psi(x_s) = -1$ jebkuram $s \in \mathbb{Z}$;
- uz nogriežņiem $[-\omega + 4k\omega; \omega + 4k\omega]$ ($k \in \mathbb{Z}$) funkcija $\psi(x)$ ir ieliekta;
- uz nogriežņiem $[\omega + 4k\omega; 2\omega + 4k\omega]$ ($k \in \mathbb{Z}$) funkcija $\psi(x)$ ir izliekta;
- punkti $x_l = \omega + 2l\omega$ ($l \in \mathbb{Z}$) ir funkcijas $\psi(x)$ pārliekuma punkti, pie tam $\psi(x_l) = 0$ jebkuram $l \in \mathbb{Z}$;

4.12. No 4.8.) seko, ka formulas (4.18)-(4.23) ir spēkā jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Šīs formulas ir pieņemts saukt par **redukcijas formulām**. Iesakām lasītājam patstāvīgi pierādīt vēl divas redukcijas formulas:

$$\psi(x+3\omega) = -\psi(x), \tag{4.26}$$
$$\varphi(x+3\omega) = \varphi(x), \tag{4.27}$$

kuras ir spēkā jebkuram $x \in \mathbb{R}$.

4.13. *Parametrizētā ceļa*

$$\begin{cases} x = \psi(t), \\ y = \varphi(t), \end{cases} \tag{4.28}$$

kur $t \in [0; 4\omega]$, *vienīgais paškrustošanās punkts ir* $(1;0) = \big(\psi(0);\varphi(0)\big) = \big(\psi(4\omega);\varphi(4\omega)\big)$.

► Ja $0 < t_1 < t_2 < 4\omega$, tad, izmantojot (4.10), (4.11) un (4.12), atrodam

$$\big[\psi(t_1) - \psi(t_2)\big]^2 + \big[\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\big]^2 = 2 - 2\big[\psi(t_1)\psi(t_2) + \varphi(t_1)\varphi(t_2)\big] = \\ = 2 - 2\psi(t_1 - t_2) = 2\big[1 - \psi(t_1 - t_2)\big].$$

Tā kā $0 < t_2 - t_1 < 4\omega$, tad $\psi(t_1 - t_2) \neq 1$, t.i., $1 - \psi(t_1 - t_2) \neq 0$. Tāpēc

$$\big(\psi(t_1);\varphi(t_2)\big) \neq \big(\psi(t_1);\varphi(t_2)\big),$$

no kurienes arī seko, ka parametrizētajam ceļam (4.28) nav paškrustošanās punktu, izņemot punktu $(1;0)$.◄

4.14. *Punkts* $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ *pieder parametrizētajam ceļam (4.28), t.i., eksistē* $t \in [0;4\omega]$, *ka* $x = \psi(t)$ *un* $y = \varphi(t)$, *tad un tikai tad, kad punkts* $(x;y)$ *pieder riņķa līnijai*

$$x^2 + y^2 = 1. \tag{4.29}$$

► No (4.12) seko, ka visi parametrizētā ceļa (4.28) punkti pieder riņķa līnijai (4.29).

Pierādīsim, ka jebkurš riņķa līnijas (4.29) punkts pieder parametrizētajam ceļam (4.28). No punktos 4.7. un 4.8. teiktā seko, ka

$$(1;0) = \big(\psi(0);\varphi(0)\big), \quad (0;1) = \big(\psi(\omega);\varphi(\omega)\big),$$
$$(-1;0) = \big(\psi(2\omega);\varphi(2\omega)\big), \quad (0;-1) = \big(\psi(3\omega);\varphi(3\omega)\big).$$

Apskatīsim kopu

$$M = \big\{(u;v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0,\, v > 0\big\}.$$

Pieņemsim, ka $(x;y)$ ir patvaļīgs riņķa līnijas (4.29) punkts, kurš ir atšķirīgs no $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$ un $(0;-1)$, t.i., $0 < |x| < 1$ un $0 < |y| < 1$.

- Ja $x > 0$ un $y > 0$, t.i., $(x;y) \in M$, tad no vienādības $\psi((0;\omega)) = (0;1)$ seko, ka eksistē vienīgs $t \in (0;\omega)$, ka $x = \psi(t)$. Tā kā $y > 0$ un $\varphi(t) > 0$, tad

$$y = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\psi^2(t)} = \varphi(t).$$

- Ja $x < 0$ un $y > 0$, tad $(y;-x) \in M$. Tāpēc no iepriekš pierādītā seko, ka eksistē vienīgs $t \in (0;\omega)$, ka $y = \psi(t)$ un $-x = \varphi(t)$. No formulām (4.18) un (4.19) izriet, ka $x = \psi(t+\omega)$ un $y = \varphi(t+\omega)$, pie tam $t+\omega \in (\omega;2\omega)$.
- Ja $x < 0$ un $y < 0$, tad $(-x;-y) \in M$. Tāpēc eksistē vienīgs $t \in (0;\omega)$, ka $-x = \psi(t)$ un $-y = \varphi(t)$. Ņemot vērā vienādības (4.22) un (4.23), iegūsim, ka $x = \psi(t+2\omega)$ un $x = \varphi(t+2\omega)$, pie tam $t+2\omega \in (2\omega;3\omega)$.
- Ja $x > 0$ un $y < 0$, tad $(-y;x) \in M$. Tāpēc eksistē vienīgs $t \in (0;\omega)$, ka $-y = \psi(t)$ un $x = \varphi(t)$. Ņemot vērā vienādības (4.26) un (4.27), iegūsim, ka $x = \psi(t+3\omega)$ un $x = \varphi(t+3\omega)$, pie tam $t+3\omega \in (3\omega;4\omega)$.◄

4.4. piezīme. Tātad (4.28) ir riņķa līnijas (4.29) parametriskie vienādojumi. Tā kā funkcijas $\psi(t)$ un $\varphi(t)$ ir nepārtraukti diferencējamas, tad jebkurš parametrizētā ceļa (4.28) loks

$$\begin{cases} x &= \psi(\tau), \\ y &= \varphi(\tau), \end{cases} \tag{4.30}$$

kur $\tau \in [0;t]$, bet $t \in [0;4\omega]$, ir rektificējams [5, 101. lpp.], pie tam šī loka garums

$$\ell_t = \int_0^t \sqrt{(\psi'(\tau))^2 + (\varphi'(\tau))^2}d\tau = \int_0^t \sqrt{\varphi^2(\tau)+\psi^2(\tau)}d\tau = \int_0^t d\tau = t.$$

Ja $t = 4\omega$, tad $\ell_{4\omega} = 4\omega$, t.i., 4ω ir riņķa līnijas (4.29) garums, no kurienes seko, ka skaitlis ω, kurš tika definēts kā funkcijas $\psi(x)$ vismazākā pozitīvā nulle, sakrīt ar skaitli $\frac{\pi}{2}$, kurš tiek apskatīts ģeometrijas kursā.

4.5. piezīme. Atzīmēsim, ka t ir vienāds ne tikai ar vienības riņķa līnijas (4.29) loka (4.30) garumu, bet arī ar šīs riņķa līnijas sektora, kurš balstās uz šo loku, divkāršotu laukumu (skat. 5. uzdevumu). Tāpēc skaitlis 4ω ir vienāds ar vienības riņķa divkāršotu laukumu, bet skaitlis 2ω ir vienāds ar vienības riņķa laukumu, t.i., $2\omega = \pi$.

4.15. Apskatīsim funkciju

$$f(x) = \psi(x) + i\varphi(x) \ (x \in \mathbb{R}).$$

No (4.12) seko, ka

$$\big|f(x)\big| = \sqrt{\psi^2(x) + \varphi^2(x)} = 1 \ \ (x \in \mathbb{R}).$$

Jebkuriem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, ņemot vērā (4.8) un (4.9), ir spēkā

$$\begin{aligned} f(x_1)f(x_2) &= (\psi(x_1) + i\varphi(x_1))(\psi(x_2) + i\varphi(x_2)) = \\ &= (\psi(x_1)\psi(x_2) - \varphi(x_1)\varphi(x_2)) + i(\varphi(x_1)\psi(x_2) + \varphi(x_2)\psi(x_1)) = \\ &= \psi(x_1 + x_2) + i\varphi(x_1 + x_2) \\ &= f(x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Funkcijas $\psi(x)$ un $\varphi(x)$ ir nepārtrauktas, tāpēc no iepriekš teiktā seko, ka $f(x)$ ir nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā S, t.i.,

$$f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow S,$$

kur $\mathbb{R}^+$ ir visu reālo skaitļu aditīvā grupa, bet S ir visu komplekso skaitļu, kuru modulis ir vienāds ar 1, multiplikatīvā grupa. Tā kā

$$f(\omega) = \psi(\omega) + i\varphi(\omega) = 0 + i \cdot 1 = i,$$

tad no teorēmām par eksponentes eksistenci un vienīgumu [2, 99. lpp.] seko, ka $f(x)$ ir eksponente ar bāzi 4ω, bet funkcijas $f(x)$ reālā sastāvdaļa $\psi(x) = \operatorname{Re} f(x)$ un imaginārā sastāvdaļa $\varphi(x) = \operatorname{Im} f(x)$ ir attiecīgi skaitliska argumenta kosinuss un sinuss ar bāzi 4ω, t.i.,

$$\psi(x) = \cos_{4\omega}(x), \ \varphi(x) = \cos_{4\omega}(x)$$

jeb, ņemot vērā 4.4. piezīmē teikto,

$$\psi(x) = \cos_{2\pi}(x) = \cos(x), \ \varphi(x) = \cos_{2\pi}(x) = \cos(x).$$

5. Uzdevumi

5.1. uzdevums. Fiksēsim skaitli a ($a > 0$, $a \neq 1$). Apskatīsim funkciju $f(x) = e^{x \ln a}$. Pierādīt, ka $f(x) = a^x$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, t.i., $f(x)$ ir eksponentfunkcija ar bāzi a.

5.2. uzdevums. Fiksēsim skaitli b ($b \neq 0$). Pierādīt, ka Košī uzdevuma

$$y' - by = 0, \; y(0) = 1$$

atrisinājums ir funkcija $f(x) = a^x$, kur a ir tāds pozitīvs reāls skaitlis, ka $\ln a = b$, t.i., $e^b = a$.

Norādījums. Vispirms izpētīt funkcijas $f(x)$ īpašības.

5.3. uzdevums. Pierādīt, ka riņķa līnijas loka

$$\begin{cases} x &= \psi(\tau), \\ y &= \varphi(\tau), \end{cases}$$

kur $\tau \in [0; t]$, bet $t \in [0; 4\omega]$, parametrs t ir vienāds ar riņķa sektora, kurš balstās uz šo loku, divkāršotu laukumu (skat. 4.5. piezīmi).

5.4. uzdevums. Pieņemsim, ka funkcija $c(x)$ ir Košī uzdevuma

$$y'' - y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0$$

atrisinājums. Pierādīt, ka

1. $c(x)$ ir pāra funkcija;
2. jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā $c(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

5.5. uzdevums. Apskatīsim parametrizētu ceļu

$$\begin{cases} x = c(t), \\ y = s(t), \end{cases}$$

kur funkcijas $s(t)$ un $c(t)$ ir Košī uzdevumu attiecīgi (3.1) un (3.2) atrisinājumi. Pierādīt, ka

1. visi šī parametrizētā ceļa punkti pieder hiperbolai $x^2 - y^2 = 1$;
2. jebkurš hiperbolas $x^2 - y^2 = 1$ punkts ir šī parametrizētā ceļa punkts;
3. ja hiperbolas $x^2 - y^2 = 1$ loka parametriskie vienādojumi ir

$$\begin{cases} x = c(\tau), \\ y = s(\tau), \end{cases}$$

   kur $\tau \in [0; t]$ un $t > 0$, tad parametrs t ir vienāds ar hiperboliskā sektora, kurš balstās uz šo loku, divkāršotu laukumu.

5.6. uzdevums. Pieņemsim, ka funkcijas $\varphi(x)$ un $\psi(x)$ ir Košī uzdevumu attiecīgi (4.1) un (4.2) atrisinājumi. Neizmantojot īpašību 4.6., pierādīt, ka

1. funkcijai $\varphi(x)$ eksistē vismaz viena pozitīva nulle;
2. funkcijai $\varphi(x)$ eksistē vismazākā pozitīvā nulle, t.i., eksistē $\ell > 0$, ka $\varphi(\ell) = 0$, bet$\varphi(x) \neq 0$ jebkuram $x \in (0; \ell)$;

3. funkcija $\varphi(x)$ ir pozitīva intervālā $(0;\ell)$ un negatīva intervālā $(-\ell;0)$;
4. funkcija $\psi(x)$ ir stingri dilstoša intervālā $[0;\ell]$ un stingri augoša intervālā $[-\ell;0]$;
5. $\varphi(x)=0$ tad un tikai tad, kad $x=kl$ $(k\in\mathbb{Z})$;
6. $\psi(\frac{\ell}{2})=0$, $\varphi(\frac{\ell}{2})=1$, $\psi(-\frac{\ell}{2})=0$, $\varphi(-\frac{\ell}{2})=1$;
7. funkcija $\psi(x)$ ir pozitīva intervālā $\left[0;\frac{\ell}{2}\right)$ un negatīva intervālā $\left(\frac{\ell}{2};\ell\right]$;
8. funkcija $\varphi(x)$ ir stingri augoša intervālā $\left[0;\frac{\ell}{2}\right]$ un stingri dilstoša intervālā $\left[\frac{\ell}{2};\ell\right]$;
9. funkcijas $\varphi(x)$ un $\psi(x)$ ir periodiskas ar vismazāko pozitīvo periodu 2ℓ;
10. $\psi(x)=0$ tad un tikai tad, kad $x=\frac{l}{2}+kl$ $(k\in\mathbb{Z})$;
11. jebkuram $x\in\mathbb{R}$ ir spēkā funkciju $\varphi(x)$ un $\psi(x)$ redukcijas formulas:

$$\begin{array}{rclrcl}
\varphi(\frac{l}{2}-x) & = & \psi(x), & \psi(\frac{l}{2}-x) & = & \varphi(x),\\
\varphi(\frac{l}{2}+x) & = & \psi(x), & \psi(\frac{l}{2}+x) & = & -\varphi(x),\\
\varphi(l-x) & = & \varphi(x), & \psi(l-x) & = & -\psi(x),\\
\varphi(l+x) & = & -\varphi(x), & \psi(l+x) & = & -\psi(x),\\
\varphi(\frac{3l}{2}-x) & = & -\psi(x), & \psi(\frac{3l}{2}-x) & = & -\varphi(x),\\
\varphi(\frac{3l}{2}+x) & = & -\psi(x), & \psi(\frac{3l}{2}+x) & = & \varphi(x),\\
\varphi(2l-x) & = & -\varphi(x), & \psi(2l-x) & = & \psi(x).
\end{array}$$

12. funkcijas $\varphi(x)$ vismazākā pozitīvā nulle ir vienāda ar π.

5.7. uzdevums. Pierādīt, ka Košī uzdevumu

$$y''+b^2y=0,\ \ y(0)=0,\ \ y'(0)=1;$$
$$y''+b^2y=0,\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=0,$$

kur b it fiksēts reāls skaitlis, atrisinājumi ir attiecīgi funkcijas $\sin_a x$ un $\cos_a x$, kur $a=\frac{2\pi}{b}$.

Norādījums. Vispirms izpētīt šo funkciju īpašības pēc 4. paragrāfa shēmas.

5.8. uzdevums. Pierādīt, ka Košī uzdevuma

$$y''=0,\ \ y(0)=0,\ \ y'=a$$

atrisinājums ir funkcija $y=ax$.

5.9. uzdevums. Pieņemsim, ka $a,b\in\mathbb{R}$. Pierādīt, ka Košī uzdevuma

$$y''=0,\ y(0)=b,\ y'=a$$

atrisinājums ir funkcija $y=ax+b$.

5.10. uzdevums. Pieņemsim, ka $a\in\mathbb{R}$. Pierādīt, ka Košī uzdevuma

$$y'x-y=0,\ y(1)=a$$

atrisinājums ir funkcija $y=ax$.

5.11. uzdevums. Pieņemsim, ka $a\in\mathbb{R}$. Pierādīt, ka apgabalā

$$G:0<x<+\infty,\ 0<y<+\infty$$

Košī uzdevuma

$$y'x-ay=0,\ y(2)=2^a$$

atrisinājums ir funkcija $y=x^a$.

5.12. uzdevums. Pieņemsim, ka $a > 0$, $a \neq 1$. Pierādīt, ka apgabalā

$$G : 0 < x < +\infty,\ -\infty < y < +\infty$$

Košī uzdevuma

$$y'(x) = \frac{1}{\ln a},\ y(a) = 1$$

atrisinājums ir funkcija $y = \log_a x$.

Literatūra

[1] Архипов Б.А., Мазаник А.А., Петровский Г.Н., Урбанович М.И. Элементарные функции. - Минск: Вышэйшая школа, 1991.

[2] A. Gricāns, V. Starcevs. Elementāro pamatfunkciju aksiomātiskā teorija. - Daugavpils: DPU izdevniecība "Saule", 2001.
http://www.de.dau.lv/matematika

[3] Старцев В.А. Введение в математический анализ II. Теория пределов. - Даугавпилс: издательство ДПУ "Saule", 1996.

[4] Старцев В.А. Введение в математический анализ II. Непрырывные функции и отображения. - Даугавпилс: издательство ДПУ "Saule", 1996.

[5] V. Starcevs. Mērojamas kopas un integrālis. - R.: LVU, 1982.

Saturs

1. Ievads **2**

2. Eksponentfunkcija **3**

3. Hiperboliskās funkcijas **10**

4. Trigonometriskās funkcijas **15**

5. Uzdevumi **24**

Literatūra **27**