Daugavpils Universitāte

MATEMĀTIKAS KATEDRA

Armands Gricāns
Vjačeslavs Starcevs

PAMATELEMENTĀRO FUNKCIJU AKSIOMĀTISKĀ TEORIJA

Pēdējās izmaiņas veiktas
2008. gadā

2008

ANOTĀCIJA

Mācību līdzeklī ir izklāstīta elementāro pamatfunkciju aksiomātiskā teorija, kurā elementārās pamatfunkcijas - lineārā funkcija, eksponentfunkcija, logaritmiskā un pakāpes funkcija, kosinusa un sinusa trigonometriskās funkcijas - tiek definētas aksiomātiski kā skaitlisku grupu nepārtraukti homomorfismi.

Autori ir apkopojuši lekciju un semināru materiālus, kā arī gūto pieredzi, vadot izvēles kursu “Matemātiskās analīzes zinātniskie pamati” studentiem un maģistrantiem. Mācību līdzeklis var būt noderīgs ne tikai studentiem, maģistrantiem un mācībspēkiem, bet arī matemātikas profilkursa skolotājiem.

IEVADS

Matemātikas skolotāju profesionālajā sagatavotībā īpaša loma ir kursiem, kuri ir orientēti uz matemātikas vispārīgo tendenču un ideju lomas izpratni skolas matemātikā. Šim nolūkam kalpo gan obligātie kursi, gan izvēles kursi, piemēram, obligātie kursi, kuri ietilpst ciklā "Matemātiskā analīze", un izvēles kurss "Matemātiskās analīzes zinātniskie pamati". Ja matemātiskās analīzes kursa mērķis ir tuvināt nākamo skolotāju mūsdienu matemātikai, paaugstināt viņa matemātisko kultūru un nodrošināt skolas matemātiskās analīzes elementu pamatjēdzienu un zinātnisko ideju pamatojumu, tad matemātiskās analīzes zinātnisko pamatu mērķis, pēc autora domām, ir apspriest dažādus matemātiskās analīzes virzienus un idejas, kā arī tās atsevišķas nodaļas, kurām ir tieša saistība ar skolas matemātiskās analīzes elementu saturu un pasniegšanu gan pamatkursā, gan profilkursā. Atzīmēsim tādas matemātiskās analīzes kursa idejas, kā "atbilstība starp kopām" (atsevišķā gadījumā "funkcionālā atbilstība"), "apkārtne", "lokālā linearizācija", "mērs", "telpa" u.c., kuras ir radušas savu vietu skolas matemātiskās analīzes elementos.

Matemātiskajai analīzei ir veltīts samērā daudz literatūras, savukārt, matemātiskās analīzes zinātniskajiem pamatiem veltītās literatūras klāsts ir diezgan ierobežots, atzīmēsim, piemēram, mācību līdzekļus [3] un [4], kuros ir apspriestas dažas iepriekš minētās matemātiskās analīzes idejas. Autoriem nav zināma literatūra latviešu valodā, kura būtu veltīta matemātiskās analīzes zinātniskajiem pamatiem. Dotais mācību līdzeklis, cerams, aizpildīs šo robu.

Iepriekš minētā "funkcionālās atbilstības" ideja cita starpā ietver sevī nepieciešamību apskatīt skaitliska argumenta skaitliskas funkcijas, starp kurām nozīmīgu vietu ieņem elementārās pamatfunkcijas: lineārā funkcija, eksponentfunkcija, logaritmiskā un pakāpes funkcija, sinusa un kosinusa trigonometriskās funkcijas, arksinusa un arkkosinusa inversās trigonometriskās funkcijas.

Elementārās funkcijas tiek iegūtas, pielietojot galīga skaita reižu pamatoperācijas (t.i., saskaitīšanu, reizināšanu un kompozīciju) elementārajām pamatfunkcijām. Katru no elementārajām pamatfunkcijām var definēt dažādi. Piemēram, logaritmisko funkciju $\ln x$ var definēt kā eksponentfunkcijas e^x inverso funkciju, vai arī kā funkciju $\int\limits_1^x \frac{dx}{t}$, $x > 0$. Savukārt eksponentfunkciju e^x var definēt kā rindas $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ summu, vai kā diferenciālvienādojuma $y' - y = 0$ ar sākumnosacījumu $y(0) = 1$ atrisinājumu, vai kā eksponentfunkcijas a^x atsevišķu gadījumu, kad $a = e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, vai arī kā robežu $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Tāda paša, ja ne vēl lielāka, dažādība ir vērojama, apskatot citu elementāro pamatfunkciju, īpaši trigonometrisko un inverso trigonometrisko funkciju, definēšanas veidus.

Tāpēc ir dabiski mēģināt definēt elementārās pamatfunkcijas, izmantojot kādu vienotu pieeju, kura ļautu noskaidrot šo funkciju būtību un atbildēt uz virkni jautājumu, piemēram, kāpēc šīs funkcijas parasti tiek aplūkotas kopā, kas tām ir kopīgs un kāpēc tām ir tik ievērojama loma matemātikā un tās pielietojumos?

Šāda vienota pieeja ir iespējama, izmantojot aksiomātisko metodi, ja ievērot, ka lineārā funkcija, eksponentfunkcija, logaritmiskā un pakāpes funkcija ir tikai divu skaitlisku grupu $\mathbb{R}^\bullet$ un $\mathbb{R}^+$ nepārtraukti homomorfismi, kur $\mathbb{R}^+$ ir reālo skaitļu aditīvā grupa, bet $\mathbb{R}^\bullet$ - pozitīvo reālo skaitļu multiplikatīvā grupa. Dotā mācību līdzekļa II nodaļas 2.1., 2.2., 2.3. un 2.4. paragrāfā tiek pierādīts, ka nav citu nepārtrauktu homomorfismu starp grupām no kopas $\{\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^\bullet\}$, kā tikai iepriekš atzīmētie - lineārā funkcija, eksponentfunkcija, logaritmiskā un pakāpes funkcija. Citiem vārdiem sakot, nevar atklāt jaunas elementārās pamatfunkcijas - nepārtrauktus homomorfismus), ja neizmantot atšķirīgas no $\mathbb{R}^\bullet$ un $\mathbb{R}^+$ grupas.

Saskaņā ar iepriekš teikto sinuss un kosinuss nesakrīt ne ar vienu no nepārtrauktajiem homomorfismiem starp grupām no kopas $\{\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^\bullet\}$. Parasti šīs funkcijas tiek aplūkotas kopā, tāpēc ir dabiski tās uzlūkot kā vienas funkcijas $f(x) = (\cos x; \sin x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ "divas pusītes", kur $\mathbb{R}$ un $\mathbb{C}$ ir attiecīgi visu reālo skaitļu kopa un visu komplekso skaitļu kopa. Identitāte $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ļauj "precizēt" šo funkciju, uzskatot, ka $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$, kur $\mathbb{S}$ ir vienības riņķa līnija kompleksajā plaknē $\mathbb{C}$. Kopa $\mathbb{S}$ ir apveltīta ar dabisku grupas operāciju - kopas $\mathbb{S}$ punktu, kuri tiek uzlūkoti kā kompleksi skaitļi, reizināšanu. Tas ļauj $\mathbb{S}$ traktēt kā multiplikatīvu grupu. Tāpēc sinusa un kosinusa trigonometriskās funkcijas var tikt definētas kā nepārtraukta grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisma grupā $\mathbb{R}^\bullet$ "divas pusītes". Šāda aksiomātiskā pieeja, lai definētu sinusa un kosinusa trigonometriskās funkcijas, ir realizēta dotā mācību līdzekļa II nodaļas 2.5. un 2.6. paragrāfā.

Ja II nodaļas 2.5. un 2.6. paragrāfā tiek aplūkotas skaitliska argumenta trigonometriskās funkcijas, tad šīs pašas nodaļas 2.7. paragrāfā tiek aplūkotas leņķiska argumenta trigonometriskās funkcijas. Turpat tiek aplūkoti tādi jēdzieni kā "leņķis", "leņķa mērs" u.c., kuri tiek izmantoti leņķiska argumenta trigonometrisko funkciju teorijā.

II nodaļas 2.8. paragrāfā tiek pierādīts, ka jebkurš nepārtraukts homomorfisms starp grupām no kopas $\{\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^\bullet;\mathbb{S}\}$ ir vai nu elementārā pamatfunkcija, vai arī funkcija, kuru iegūst no elementārajām pamatfunkcijām, pielietojot pamatoperācijas (- saskaitīšanu, reizināšanu un kompozīciju) galīgu skaitu reižu, citiem vārdiem sakot, elementārā funkcija.

Homomorfismus starp grupām no kopas $\{\mathbb{R}^+;\mathbb{R}^\bullet\}$ raksturo šādi Košī funkcionālvienādojumi:

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y), \\ f(x+y) &= f(x) \cdot f(y), \\ f(x \cdot y) &= f(x) + f(y), \\ f(x \cdot y) &= f(x) \cdot f(y). \end{aligned}$$

Tāpēc elementārās pamatfunkcijas - lineārā funkcija, eksponentfunkcija, logaritmiskā un pakāpes funkcija - var tikt definētas kā attiecīgo funkcionālvienādojumu nepārtraukti atrisinājumi. Sinusa un kosinusa trigonometriskās funkcijas var definēt vienlaicīgi kā divu funkcionālvienādojumu sistēmas ar diviem nezināmajiem nepārtrauktu atrisinājumu (skat. II nodaļas 2.9. paragrāfa 30. uzdevumu). Ir iespējams definēt šīs funkcijas arī atsevišķi, t.i., katru no šīm funkcijām definēt kā viena funkcionālvienādojuma ar vienu mainīgo nepārtrauktu atrisinājumu (skat., piemēram, II nodaļas 2.9. paragrāfa 28. un 29. uzdevumu, kā arī [5, 64.-66. lpp.]).

Šajā mācību līdzeklī izmantotā pieeja elementāro pamatfunkciju definēšanai, t.i., kad elementārās pamatfunkcijas tiek definētas kā nepārtraukti homomorfismi starp grupām no kopas $\{\mathbb{R}^+; \mathbb{R}^\bullet; \mathbb{S}\}$, ļauj izklāstīt elementāro pamatfunkciju teoriju pēc šādas shēmas: vispirms tiek sniegta attiecīgās elementārās pamatfunkcijas aksiomātiskā definīcija, tad, izejot no aksiomām, tiek iegūtas pamatīpašības, un, visbeidzot, tiek pierādīta teorēma par funkcijas eksistenci un vienīgumu.

Autori ir vairākkārt lasījuši lekcijas un vadījuši seminārus par elementāro pamatfunkciju aksiomātisko teoriju. Šīs nodarbības vienmēr ir izraisījušas interesi klausītājos, tāpēc dotais mācību līdzeklis ir veltīts, galvenokārt, studentiem, kuri apgūst matemātikas bakalaura akadēmisko studiju programmu un matemātikas skolotāja profesionālo studiju programmu, kā arī maģistrantiem, kuri studē matemātiku. Daži mācību līdzeklī aplūkotie jautājumi būs noderīgi arī matemātikas skolotājiem, it īpaši tiem, kuri pasniedz profilkursu.

Dotā mācību līdzekļa I nodaļā ir apkopotas tās ziņas no algebras un analīzes, kuras tiek izmantotas II nodaļā, kura ir veltīta elementāro pamatfunkciju aksiomātiskajai teorijai. Ar $D(f)$ un $R(f)$ tiek apzīmēti attiecīgi funkcijas f definīcijas un vērtību kopa, bet ar ► un ◄ - kāda apgalvojuma pierādījuma attiecīgi sākums un beigas.

Autori sirsnīgi pateicas visiem tiem DU Matemātiskās analīzes katedras kolēģiem, kuri piedalījās kursa “Matemātiskās analīzes sākumi un algebras zinātniskie pamati” koncepcijas un ideju apspriešanā.

I nodaļa

NEPIECIEŠAMĀS ZIŅAS NO ALGEBRAS UN ANALĪZES

1.1. Grupas un to homomorfismi

Apskatīsim kādu kopu X. Attēlojumu $\omega : X^2 \to X$ sauc par **operāciju** (vai **iekšēju operāciju**) **kopā** X.

Pieņemsim, ka ω un δ ir attiecīgi operācijas kopās X un Y. Saka, ka **attēlojums** $f : X \to Y$ **ir saskaņots ar operācijām** ω **un** δ (vai **attēlojums f saglabā operācijas** ω **un** δ), ja jebkuriem $x_1, x_2 \in X$ ir spēkā $f(\omega(x_1; x_2)) = \delta(f(x_1); f(x_2))$.

Pieņemsim, ka ω ir operācija kopā X.

Operāciju ω sauc par **asociatīvu**, ja jebkuriem $x, y, z \in X$ ir spēkā $\omega(\omega(x; y); z) = \omega(x; \omega(y; z))$.

Elementu $e \in X$ sauc par **kreiso (labo) neitrālo elementu attiecībā pret operāciju** ω, ja jebkuram $x \in X$ ir spēkā $\omega(e; x) = x$ (attiecīgi $\omega(x; e) = x$).

Elementu $e \in X$ sauc par **neitrālo elementu attiecībā pret operāciju** ω, ja e ir vienlaicīgi labais un kreisais neitrālais elements attiecībā pret operāciju ω.

Ja e_2 ir labais, bet e_1 - kreisais neitrālais elements attiecībā pret operāciju ω, tad $e_1 = \omega(e_1; e_2) = e_2$. Acīmredzot, ja eksistē neitrālais elements attiecībā pret operāciju ω, tad tas ir vienīgs.

Elementu $y \in X$ sauc par **elementa** $x \in X$ **kreiso (labo) inverso elementu**, ja $\omega(y; x) = e$ (attiecīgi $\omega(x; y) = e$), kur e - neitrālais elements attiecībā pret operāciju ω.

Elementu $y \in X$ sauc par **elementa** $x \in X$ **inverso elementu**, ja y ir vienlaicīgi elementa $x \in X$ labais un kreisais inversais elements.

Ja operācija ω ir asociatīva, bet y_1 un y_2 ir attiecīgi elementa $x \in X$ kreisais un labais inversais elements, tad

$$y_1 = \omega(y_1; e) = \omega(y_1; \omega(x; y_2)) = \omega(\omega(y_1; x); y_2) = \omega(e; y_2) = y_2.$$

Acīmredzot, ja dotajam elementam eksistē inversais elements, tad tas ir vienīgs.

Sakārtotu pāri $(X; \omega)$, kur X - kopa, bet ω - operācija kopā X, sauc par **grupu**, ja operācija ω ir asociatīva, kopā X eksistē neitrālais elements attiecībā pret operāciju ω un jebkuram kopas X elementam eksistē inversais elements. Grupas operāciju ω atkarībā no tiem vai citiem apsvērumiem bieži vien sauc par saskaitīšanu vai reizināšanu. Pirmajā gadījumā grupu sauc par **aditīvu grupu**, bet otrajā - **multiplikatīvu grupu**. Ja $(X;\omega)$ ir aditīva grupa, tad kopas X elementu $\omega(x;y)$, kur $x,y \in X$, sauc par **elementu x un y summu** un apzīmē ar $x+y$; ja $(X;\omega)$ ir multiplikatīva grupa, tad kopas X elementu $\omega(x;y)$, kur $x,y \in X$, sauc par **elementu x un y reizinājumu** un apzīmē ar xy.

Aditīvas grupas neitrālo elementu apzīmē ar $\mathbb{O}$ un sauc par **nulli**; multiplikatīvas grupas neitrālo elementu apzīmē ar 1 un sauc par **vieninieku**.

Ja $(X;\omega)$ ir aditīva grupa, tad kopas X elementa $x \in X$ inverso elementu apzīmē ar $-x$ un sauc par **elementa $x \in X$ pretējo elementu**; summu $y+(-x)$ apzīmē ar $y-x$ un sauc par **elementu y un x starpību**.

Ja $(X;\omega)$ ir multiplikatīva grupa, tad kopas X elementa $x \in X$ inverso elementu apzīmē ar x^{-1} (vai $\frac{1}{x}$) un sauc par **elementa $x \in X$ apgriezto elementu**; reizinājumu yx^{-1} apzīmē ar $\frac{y}{x}$ un sauc par **elementu y un x dalījumu**.

Pieņemsim, ka $(X;\omega)$ ir grupa, bet X_0 ir kāda kopas X apakškopa. Apskatīsim attēlojuma $\omega : X^2 \to X$ sašaurinājumu kopā $X_0^2 = X_0 \times X_0$, t.i., attēlojumu $\omega_0 = \omega\big|_{X_0^2}$, ka jebkuriem $x,y \in X_0$ ir spēkā $\omega_0(x;y) = \omega(x;y)$. Ja $(X_0;\omega_0)$ ir grupa, tad $(X_0;\omega_0)$ sauc par **grupas $(X;\omega)$ apakšgrupu**. Šajā gadījumā vienkāršības labad pašu kopu X_0 sauc par grupas X apakšgrupu.

Kopa X_0 ir aditīvas grupas X apakšgrupa tad un tikai tad, kad a) $X_0 \subset X$; b) $x+y \in X_0$ jebkuriem $x,y \in X_0$; c) $O \in X_0$; d) $-x \in X_0$ jebkuram $x \in X_0$.

Kopa X_0 ir multiplikatīvas grupas X apakšgrupa tad un tikai tad, kad a) $X_0 \subset X$; b) $xy \in X_0$ jebkuriem $x,y \in X_0$; c) $1 \in X_0$; d) $x^{-1} \in X_0$ jebkuram $x \in X_0$.

Pieņemsim, ka X un Y ir grupas. Ja attēlojums $f : X \to Y$ ir saskaņots ar šo grupu operācijām, tad f sauc par **grupas X homomorfismu grupā Y**. Bijektīvu attēlojumu $f : X \to Y$, kurš ir saskaņots ar šo grupu operācijām, sauc par **grupas X izomorfismu par grupu Y**. Ja $f : X \to Y$ ir grupas X izomorfisms par grupu Y, tad attēlojuma f inversais attēlojums $f^{-1} : Y \to X$ ir grupas Y izomorfisms par grupu X. Divas grupas X un Y sauc par **izomorfām grupām**, ja eksistē vismaz viens vienas no šīm grupām izomorfisms par otru grupu.

Ja $f : X \to Y$ ir grupas X izomorfisms par grupu Y, tad grupas X apakšgrupas X_0 attēls $f(X_0)$ šajā attēlojumā ir grupas Y apakšgrupa, bet grupas Y apakšgrupas Y_0 pirmtēls $f^{-1}(Y_0)$ šajā attēlojumā ir grupas X apakšgrupa. Ja Y ir multiplikatīva grupa, bet 1 ir šīs grupas vieninieks, tad, acīmredzot, $\{1\}$ ir grupas Y apakšgrupa, bet $f^{-1}(\{1\})$ ir grupas X apakšgrupa. Šo grupas X apakšgrupu sauc par **homomorfisma f kodolu**.

Atzīmēsim dažas homomorfisma $f : X \to Y$ vienkāršākās īpašības. Noteiktības labad pieņemsim, ka X ir aditīva grupa, bet Y - multiplikatīva grupa (turpmāk tieši šādus homomorfismus apskatīsim visbiežāk).

a) $f(\mathbb{O}) = 1$, kur $\mathbb{O}$ - grupas X neitrālais elements, bet 1 - grupas Y neitrālais elements.

b) $f(-x) = [f(x)]^{-1}$ jebkuram $x \in X$.

c) $f(x_1 - x_2) = f(x_1) \cdot [f(x_2)]^{-1}$ jebkuriem $x_1, x_2 \in X$.

► Tā kā $f : X \to Y$ ir homomorfisms, tad $f(\mathbb{O}) = f(\mathbb{O}+\mathbb{O}) = f(\mathbb{O}) \cdot f(\mathbb{O})$, no kurienes seko, ka $f(\mathbb{O}) = 1$. Tātad $1 = f(\mathbb{O}) = f(x+(-x)) = f(x) \cdot f(-x)$, no kurienes izriet, ka $f(-x) = [f(x)]^{-1}$, t.i., $f(-x)$ ir elementa $f(x)$ apgrieztais elements grupā Y. Tādējādi $f(x_1 - x_2) = f(x_1 + (-x_2)) = f(x_1) \cdot f(-x_2) = f(x_1) \cdot [f(x_2)]^{-1}$.◄

Grupu $(X;\omega)$ sauc par **komutatīvu grupu** (vai **Ābela grupu**), ja operācija ω ir komutatīva, t.i., $\omega(x;y) = \omega(y;x)$ jebkuriem $x,y \in X$. Turpmāk apskatīsim tikai komutatīvas grupas.

Pieņemsim, ka $X^+ = (X;+)$ - aditīva grupa, bet $X^\circ = (X \setminus \{\mathbb{O}\};\cdot)$ - multiplikatīva grupa ($\mathbb{O}$ - grupas X^+ neitrālais elements). Trijnieku $(X;+;\cdot)$ sauc par **lauku**, ja saskaitīšanas un reizināšanas operācijas saista **distributivitātes likums**, t.i., $(x+y)z = xz + yz$ jebkuriem $x, y, z \in X$. Grupas X^+ un X° sauc par **lauka** $(X;+;\cdot)$ **pamatgrupām**. Par **lauka** $(X;+;\cdot)$ **apakšgrupu** sauc patvaļīgu šī lauka pamatgrupas apakšgrupu.

Turpmākajā kursa izklāstā sastapsimies galvenokārt ar visu reālo skaitļu lauku $\mathbb{R}$ un visu komplekso skaitļu lauku $\mathbb{C}$. Šiem laukiem ir nozīmīga loma elementārajā matemātikā un tās pielietojumos. Visu reālo skaitļu lauka $\mathbb{R}$ apakšgrupas ir aditīvās grupas $\mathbb{R}^+$ un multiplikatīvās grupas $\mathbb{R}^\circ$ apakšgrupas, bet visu komplekso skaitļu lauka $\mathbb{C}$ apakšgrupas ir aditīvās grupas $\mathbb{C}^+$ un multiplikatīvās grupas $\mathbb{C}^\circ$ apakšgrupas. Tā, piemēram, aditīvās grupas $\mathbb{R}^+$ apakšgrupas ir $\mathbb{Q}^+ = (\mathbb{Q};+)$, $G = \{0\}$ - triviālā grupa, $(\lambda\mathbb{Z})^+ = (\lambda\mathbb{Z};+)$, kur $\lambda\mathbb{Z} = \{\lambda m | m \in \mathbb{Z}\}$, λ - fiksēts pozitīvs skaitlis; multiplikatīvās grupas $\mathbb{R}^\circ$ apakšgrupas ir $\mathbb{Q}^\bullet = (\mathbb{Q} \cap (0;+\infty);\cdot)$, $\mathbb{R}^\bullet = (\mathbb{R} \cap (0;+\infty);\cdot)$, $H = \{1\}$ - triviālā grupa (ar $\mathbb{Q}$ un $\mathbb{Z}$ tika apzīmēta attiecīgi visu racionālo skaitļu kopa un visu veselo skaitļu kopa).

Turpmāk bieži vien tiks izmantotas kopu $\mathbb{R}$ un $\mathbb{C}$, kā arī to attēlojumu, topoloģiskās īpašības, uzskatot, ka šīs kopas ir apveltītas ar attiecīgajām topoloģijām: kopā $\mathbb{R}$ tiks aplūkota standartā intervālu topoloģija (šīs topoloģijas fundamentālo apkārtņu sistēmu veido visi iespējamie ierobežotie vaļējie intervāli), bet kopā $\mathbb{C}$ - Dekarta reizinājuma $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ topoloģija, kura ir ekvivalenta sfēriskajai topoloģijai (šīs topoloģijas fundamentālo apkārtņu sistēmu veido visi iespējamie plaknes vaļējie riņķi). Tas ļauj lauku $\mathbb{R}$ un $\mathbb{C}$ apakšgrupas traktēt kā topoloģiskas grupas, jo šo lauku pamatgrupu operācijas ir nepārtrauktas (attiecībā pret kopas $\mathbb{R}$ vai $\mathbb{C}$ topoloģiju).

Elementāro pamatfunkciju konstrukcijā nozīmīga loma ir lauku $\mathbb{R}$ un $\mathbb{C}$ apakšgrupām, kurām piemīt kādas papildīpašības, piemēram, sakarīgums vai kompaktums attiecībā pret kopas $\mathbb{R}$ vai $\mathbb{C}$ topoloģiju. Turpmāk tiks pierādīts, ka triviālās grupas G un H (kuras, acīmredzot, ir gan sakarīgas, gan kompaktas) noved pie konstantām funkcijām. Iepriekš minētās grupas $\mathbb{R}^+$ un $\mathbb{R}^\bullet$ ir vienīgās lauka $\mathbb{R}$ sakarīgās apakšgrupas. Starp lauka $\mathbb{C}$ apakšgrupām atzīmēsim grupas $\mathbb{C}^+ = (\mathbb{C};+)$ apakšgrupu $\mathbb{R}^+$, kā arī grupas $\mathbb{C}^\circ$ apakšgrupu $\mathbb{S}$, kura sastāv no visiem tiem un tikai tiem $z \in \mathbb{C}^\circ$, ka $|z| = 1$. Grupa $\mathbb{S}$ ir vienīgā lauka $\mathbb{C}$ netriviālā apakšgrupa, kura ir slēgta un ierobežota, t.i., kompakta. Iepriekš teiktais paskaidro grupu $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^\bullet$ un $\mathbb{S}$ nozīmi elementāro pamatfunkciju teorijā.

1.2. Dažas skaitlisku grupu īpašības

Nākamais apgalvojums sniedz izsmeļošu grupas $\mathbb{R}^+$ apakšgrupu klasifikāciju.

1.1. teorēma. *Ja G ir grupas $\mathbb{R}^+$ apakšgrupa, tad vai nu $G = \{0\}$, vai nu $G = \{am | m \in \mathbb{Z}\}$, kur $a > 0$, vai arī kopa G ir visur blīva kopas $\mathbb{R}$ apakškopa.*

► Pieņemsim, ka $G^+ = G \cap (0;+\infty)$.

Ja $G^+ = \emptyset$, tad $G = \{0\}$. Tiešām, tā kā G ir grupas $\mathbb{R}^+$ apakšgrupa, tad $0 \in G$, savukārt, ja pieņemt, ka $z \neq 0$ un $z \in G$, tad arī $-z \in G$ tā paša iemesla dēļ, no kurienes seko, ka $|z| \in G^+$, kas ir pretrunā ar to, ka $G^+ = \emptyset$.

Apskatīsim gadījumu, kad $G^+ \neq \emptyset$. Apzīmēsim $\inf G^+ = \rho$. Tad, acīmredzot, $\rho \geq 0$. Pieņemsim, ka $\rho > 0$. Vispirms pierādīsim, ka $\rho \in G^+$. Tiešām, ja pieņemt pretējo, ka $\rho \notin G^+$, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $u \in G^+$, ka $\rho < u < \rho + \varepsilon$, analoģiski, eksistē tāds $v \in G^+$, ka $\rho < v < u < \rho + \varepsilon$. Tā kā $u, v \in G^+$, tad arī $u - v \in G^+$, pie tam $u - v < \varepsilon$. Tātad $\rho \leq u - v < \varepsilon$, no kurienes, ņemot vērā, ka ε ir patvaļīgs, secinām, ka $\rho = 0$. Pretruna. Tādējādi, ja $\rho > 0$, tad $\rho \in G^+$. Pieņemsim, ka $z \in G$ un $m = \left[\frac{z}{\rho}\right] \in \mathbb{Z}$, t.i., $m \le \frac{z}{\rho} < m+1$ jeb $0 \le z-m\rho < \rho$. Tā kā $\rho \in G^+$, $\rho = \inf G^+$, $z \in G$, tad $z-m\rho \in G$ un $z - m\rho = 0$, t.i., $z = m\rho$. Tātad eksistē pozitīvs skaitlis $a = \rho$, ka $G = \{am|m \in \mathbb{Z}\}$.

Tagad pieņemsim, ka $\rho = 0$. Apskatīsim patvaļīgus $x \in \mathbb{R}$ un $\varepsilon > 0$. Tā kā $\inf G^+ = 0$, tad eksistē tāds $z \in G^+$, ka $0 < z < 2\varepsilon$. Pieņemsim, ka $m = \left[\frac{x+\varepsilon}{z}\right] \in \mathbb{Z}$, t.i., $m \le \frac{x+\varepsilon}{z} < m+1$. Tātad

$$\frac{x-\varepsilon}{z} < \frac{x+\varepsilon}{z} - 1 < m \le \frac{x+\varepsilon}{z},$$

no kurienes seko, ka $mz \in (x-\varepsilon; x+\varepsilon]$. Tā kā $z \in G^+$, tad $mz \in G$. Tādējādi $G \cap (x-\varepsilon; x+\varepsilon] \ne \emptyset$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$ un patvaļīgam $\varepsilon > 0$, t.i., kopa G ir visur blīva kopas $\mathbb{R}$ apakškopa.◀

Sekas. *Ja G ir grupas $\mathbb{R}^+$ slēgta apakšgrupa, tad vai nu $G = \mathbb{R}$, vai nu $G = \{0\}$, vai arī $G = \{am|m \in \mathbb{Z}\}$, kur $a > 0$.*

Pieņemsim, ka X ir grupas $\mathbb{R}^+$ apakšgrupa, pie tam X ir kopas $\mathbb{R}$ visur blīva apakškopa, bet $Y = \mathbb{C}^\circ$.

1.2. teorēma. *Ja $f : X \to Y$ ir grupas X homomorfisms grupā Y (t.i., $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ jebkuriem $x, y \in X$), pie tam f ir nepārtraukta funkcija punktā 0, tad eksistē vienīgā nepārtrauktā funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, ka F ir funkcijas f turpinājums (t.i., $F(x) = f(x)$ jebkuram $x \in X$) un F ir grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā Y.*

▶ Tā kā funkcija f ir nepārtraukta punktā 0, tad eksistē šī punkta apkārtne $U_1 = U(0; r_1)$ un skaitlis $K > 0$, ka jebkuram $x \in X \cap U_1$ ir spēkā nevienādība

$$|f(x)| \le K. \tag{1.1}$$

Apskatīsim patvaļīgu $x \in \mathbb{R}$. Pieņemsim, ka V_1 ir punkta x apkārtne ar rādiusu $\frac{1}{2}r_1$. Tā kā X ir kopas $\mathbb{R}$ visur blīva apakškopa, tad eksistē $t_0 \in X \cap V_1$. Apzīmēsim $|f(t_0)| = M_0$. Tad jebkuram $t \in X \cap V_1$ iegūsim:

$$|f(t)| = |f(t - t_0 + t_0)| = |f(t-t_0)\cdot f(t_0)| = |f(t-t_0)|\cdot|f(t_0)| \le KM_0. \tag{1.2}$$

(atzīmēsim, ka $|f(t-t_0)| \le K$ saskaņā ar nevienādību (1.1), jo $t - t_0 \in X \cap U_1$).

Apskatīsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Pieņemsim, ka $\widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{3KM_0}$. Tā kā funkcija f ir nepārtraukta punktā 0, tad eksistē tāda punkta 0 apkārtne $U_\delta = U(0;\delta)$, ka jebkuram $t \in X \cap U_\delta$ ir spēkā nevienādība

$$|f(t) - f(0)| = |f(t) - 1| < \widetilde{\varepsilon} \tag{1.3}$$

(turpmāk uzskatīsim, ka $U_\delta \subset U_1$, t.i., $\delta \le r_1$).

Apskatīsim punkta x apkārtni

$$V_\delta = V\left(x; \frac{1}{2}\delta\right) = \left(x - \frac{1}{2}\delta; x + \frac{1}{2}\delta\right).$$

Acīmredzot, $V_\delta \subset V_1$.

Pieņemsim, ka $t, t' \in X \cap V_\delta$. No nevienādības (1.2) seko, ka

$$|f(t')| \le KM_0.$$

Tā kā $t - t' \in X \cap U_\delta$, tad saskaņā ar nevienādību (1.3) atrodam:

$$|f(t-t') - 1| < \widetilde{\varepsilon}.$$

Jebkuriem $t, t' \in X \cap V_\delta$, ņemot vērā pēdējās divas nevienādības, iegūsim:

$$|f(t) - f(t')| = |f(t - t') - 1| \cdot |f(t')| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.4}$$

Pieņemsim, ka $f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, kur $\varphi(t) = \operatorname{Re} f(t)$, $\psi(t) = \operatorname{Im} f(t)$. Tā kā $|\varphi(t) - \varphi(t')| \leq |f(t) - f(t')|$, tad no nevienādības (1.4) seko, ka jebkuriem $t, t' \in V \cap V_\delta$ ir spēkā nevienādība

$$|\varphi(t) - \varphi(t')| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.5}$$

No (1.5) seko, ka eksistē galīga robeža $\lim\limits_{X \ni t \to x} \varphi(t)$. Pieņemsim, ka

$$\Phi(x) = \lim_{X \ni t \to x} \varphi(t). \tag{1.6}$$

Ievērosim, ja $x \in X$ un nevienādībā (1.5) ņemt $t' = x$, tad jebkuram $t \in X \cap V_\delta$ izpildīsies nevienādība $|\varphi(t) - \varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$, no kurienes seko, ka

$$\lim_{X \ni t \to x} \varphi\left(t\right) = \varphi\left(x\right). \tag{1.7}$$

Tātad funkcija $\Phi(x)$, kuru definē formula (1.6), ir funkcijas $\varphi(x)$ turpinājums kopā $\mathbb{R}$.

No (1.7) seko, ka funkcija $\varphi(t)$ ir nepārtraukta punktā $x \in X$. Tā kā x ir patvaļīgs skaitlis, tad funkcija $\varphi(t)$ ir nepārtraukta kopā X (attiecībā pret kopu X).

Pārejot nevienādībā (1.5) pie robežas, kad $t' \to x \in \mathbb{R}$, $t' \in X$, iegūsim, ka jebkuram $t \in X \cap V_\delta$ ir spēkā nevienādība

$$|\varphi(t) - \Phi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.8}$$

Pieņemsim, ka $x' \in \mathbb{R}$ un $|x' - x| < \frac{1}{2}\delta$, bet $V'_\delta = V\left(x'; \frac{1}{2}\delta\right)$. Tad $V_\delta \cap V'_\delta$ ir intervāls, kas satur punktus x un x'. Spriežot līdzīgi kā iepriekš, iegūsim, ka jebkuram $t \in X \cap V_\delta \cap V'_\delta$ ir spēkā

$$|\varphi\left(t\right) - \Phi\left(x'\right)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.9}$$

No nevienādībām (1.8) un (1.9) seko, ka jebkuriem $x, x' \in \mathbb{R}$, ka $|x - x'| < \frac{1}{2}\delta$, izpildās nevienādība

$$|\Phi\left(x\right) - \Phi\left(x'\right)| \leq \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon. \tag{1.10}$$

Tāpēc eksistē galīga robeža $\lim\limits_{x' \to x} \Phi(x') = \Phi(x)$. Tas nozīmē, ka funkcija $\Phi(x)$, kuru definē formula (1.6), ir nepārtraukta jebkurā punktā $x \in \mathbb{R}$, t.i., funkcija $\Phi(x)$ ir nepārtraukta.

Veicot analoģiskus spriedumus attiecībā pret funkciju $\psi(t)$, $t \in X$, konstruēsim funkciju $\Psi(x) = \lim\limits_{X \ni t \to x} \psi(t)$, kura ir nepārtraukts funkcijas $\psi(t)$ turpinājums kopā $\mathbb{R}$.

Pieņemsim, ka $F(x) = \Phi(x) + i\,\Psi(x)$. Acīmredzot, funkcija $F(x)$ ir nepārtraukts funkcijas $f(t)$ turpinājums kopā $\mathbb{R}$. Funkcijas $F(x)$ vienīgums seko no tā, ka X ir kopas $\mathbb{R}$ visur blīva apakškopa, bet funkcija $F(x)$ ir nepārtraukta. Šo pašu iemeslu dēļ no tā, ka $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ jebkuriem $x, y \in X$, seko, ka $F(x + y) = F(x) \cdot F(y)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$. Atzīmēsim, ka $F(x) \neq 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Tiešām, ja pieņemt pretējo, ka eksistē tāds $x_0 \in \mathbb{R}$, ka $F(x_0) = 0$, tad $F(x) = F(x_0) \cdot F(x - x_0) = 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, no kurienes seko, ka $f(x) = F(x) = 0$ jebkuram $x \in X$, kas ir pretrunā ar teorēmas nosacījumu, ka $f(x) \in Y$, kur Y ir visu no nulles atšķirīgo komplekso skaitļu multiplikatīvā grupa. Tādējādi F - nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā Y.◀

1.1. piezīme. Tā kā homomorfisma F vērtību apgabals iekļaujas homomorfisma f vērtību apgabala slēgumā, tad gadījumā, kad f ir grupas X homomorfisms grupas Y slēgtā (attiecībā pret Y topoloģiju) apakšgrupā $\widetilde{Y}$, attēlojums F būs grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\widetilde{Y}$. Piemēram, ja homomorfisms f pieņem tikai reālas vērtības, tad F būs grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\widetilde{Y} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^{\circ}$; ja pie tam visas homomorfisma f vērtības ir pozitīvas, tad F - grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{R}^{\bullet}$; ja visas homomorfisma f vērtības pēc moduļa ir vienādas ar 1, tad F - grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{S}$.

1.3. Intervālu invariance attiecībā pret nepārtrauktām funkcijām $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1.3. teorēma. *Pieņemsim, ka $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir nepārtraukta funkcija. Tad ir spēkā šādi apgalvojumi:*

1. *ja J - intervāls, $J \subset D(g)$, tad $g(J)$ arī ir intervāls, pie tam, ja J - nogrieznis, tad $g(J)$ arī ir nogrieznis;*
2. *ja g - injektīva funkcija intervālā J, tad g - stingri monotona funkcija intervālā J, pie tam funkcija g intervāla J iekšējos punktus attēlo par intervāla $g(J)$ iekšējiem punktiem.*

► Teorēmas pierādījumu skat. [7, 30.-31., 41.-42. lpp.].◄

1.4. Riņķa līnijas un skaitļu taisnes homeomorfisms

1.4. teorēma. *Riņķa līnija, no kuras ir izmests kāds viens punkts, ir homeomorfa skaitļu taisnei.*

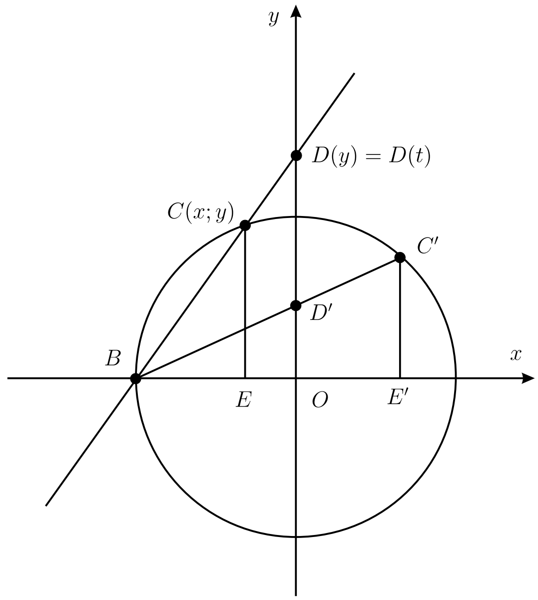
► Pierādīsim, ka tā saucamā stereogrāfiskā projekcija (precīzāk, tās plakanais variants) ir meklējamais homeomorfisms.

Plaknē apskatīsim riņķa līniju $\mathbb{S}$ ar centru punktā O. Pieņemsim, ka B ir fiksēts riņķa līnijas $\mathbb{S}$ punkts, bet t - taisne, kura iet caur centru O un ir perpendikulāra taisnei OB. Attēlojumu, kas katram riņķa līnijas $\mathbb{S}$ punktam C, $C \neq B$, piekārto taišņu t un BC krustpunktu D, sauc par **stereogrāfisko projekciju ar centru punktā** B. Punktu D sauc par **punkta** C **stereogrāfisko projekciju no centra** B.

Atradīsim šīs stereogrāfiskās projekcijas analītiskās formulas.

Pieņemsim, ka plaknē ir dota Dekarta taisnleņķa koordinātu sistēma Oxy. Nezaudējot izklāsta vispārīgumu, var uzskatīt, ka $\mathbb{S}$ ir vienības riņķa līnija ar centru punktā $O(0;0)$, bet punkta B koordinātas ir $(-1;0)$. Tad taisne t sakritīs ar asi Oy (skat. **??** zīm.).

Stereogrāfisko projekciju ar centru punktā B apzīmēsim ar f. Tad $D = f(C)$ jebkuram riņķa līnijas $\mathbb{S}$ punktam C, $C \neq B$, t.i., $t = f(x;y)$, kur t - punkta D koordināta uz taisnes Oy. Pieņemsim, ka $CE||OD$. Acīmredzot, trijstūri BEC un BOD ir līdzīgi. Tāpēc $\frac{|OD|}{|EC|} = \frac{|OB|}{|EB|}$. Tā kā $|OB| = 1$, $|EB| = 1 + x$ un $|EC| = |y|$, tad $|OD| = \frac{|y|}{1+x}$. Tātad attēlojums f tiek uzdots ar formulu $t = f(x;y) = \frac{y}{1+x}$. Tā kā $x \neq -1$, tad funkcija $f(x;y) = \frac{y}{1+x}$ ir divu argumentu x un y nepārtraukta funkcija. Attēlojums f ir injektīvs, jo jebkura taisne, kura iet caur punktu B, krusto riņķa līniju $\mathbb{S}$ tikai vienā punktā. Attēlojums f ir



1.1. zīmējums

sirjektīvs, jo jebkuram taisnes Oy punktam D eksistē vismaz viens pirmtēls (šis pirmtēls, protams, pieder kopai $\mathbb{S} \setminus \{B\}$). Tātad attēlojums $f : \mathbb{S} \setminus \{B\} \to \mathbb{R}$ ir bijektīvs un nepārtraukts.

Atliek pierādīt, ka attēlojuma $f : \mathbb{S} \setminus \{B\} \to \mathbb{R}$ inversais attēlojums $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{S} \setminus \{B\}$ arī ir nepārtraukts. Pieņemsim, ka $\alpha(t) = f^{-1}(t)$, $\alpha(t) = (x(t); y(t)) = (x; y)$, kur $t \in \mathbb{R}$. Acīmredzot, ka taisnes, kas iet caur punktiem $B(-1; 0)$ un $D(0; t)$, vienādojums ir $y = xt + t$. Tā kā punkts $C(x; y)$ ir taisnes $y = xt + t$ un riņķa līnijas $x^2 + y^2 = 1$ krustpunkts, tad

$$1 = x^2 + t^2(1 + x)^2$$

jeb

$$x^2(1 + t^2) + 2t^2 x + t^2 - 1 = 0,$$

no kurienes seko, ka

$$x_{1,2} = \frac{-t^2 \pm \sqrt{t^4 - (t^4 - 1)}}{1 + t^2} = \frac{-t^2 \pm 1}{1 + t^2}.$$

Tā kā $x \neq -1$, tad $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (ja pieņemt, ka $x = \frac{-1-t^2}{1+t^2}$, tad pie $t = 0$ iegūsim $x = -1$), bet $y = \frac{2t}{1+t^2}$. Tātad

$$\begin{cases} x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{2t}{1+t^2}, \end{cases}$$

kur $t \in \mathbb{R}$. No pēdējām formulām seko, ka attēlojuma f inversais attēlojums $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{S} \setminus \{B\}$ arī ir nepārtraukts. Tādējādi stereogrāfiskā projekcija $f : \mathbb{S} \setminus \{B\} \to \mathbb{R}$ ir homeomorfisms.◀

1.2. piezīme. 1.4. teorēmas pierādījuma gaitā tika noskaidrots, ka attēlojums $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{S} \setminus \{B\}$ tiek uzdots ar formulu

$$\alpha(t) = \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}; \frac{2t}{1 + t^2} \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Šo attēlojumu sauc par **riņķa līnijas vienkāršā loka $\mathbb{S} \setminus \{B\}$ racionālo parametrizāciju** (atgādināsim, ka šo loku iegūst no vienības riņķa līnijas ar centru koordinātu sākumpunktā, izmetot punktu $B(-1;0)$.

1.3. piezīme. Vispārīgajā gadījumā, kad no riņķa līnijas $\mathbb{S}$ tiek izmests punkts B', kurš nesakrīt ar punktu $B(-1;0)$, apskata attēlojuma $t = f(x;y)$ (skat. pēdējās teorēmas pierādījumu) un rotācijas ar centru punktā O par leņķi, kurš ir vienāds ar leņķi starp stariem OB un OB', kompozīciju. Pieņemsim, ka $B'(a;b)$. Apskatīsim attēlojumu $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kuru uzdod formulas

$$\begin{cases} u &= -ax + by, \\ v &= -bx - ay. \end{cases} \tag{1.11}$$

Nav grūti pārliecināties, ka šajā attēlojumā jebkurš punkts $(x;y) \in \mathbb{S}$ attēlojas par šīs pašas riņķa līnijas $\mathbb{S}$ punktu, bet punkts $B(-1;0)$ - par punktu $B'(a;b)$. Attēlojums g, kuru uzdod ar formulām (1.11), ir rotācija ar centru punktā O par leņķi, kurš ir vienāds ar leņķi starp stariem OB un OB'. Tāpēc attēlojums $\gamma = g \circ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{S} \setminus \{B'\}$ ir skaitļu taisnes $\mathbb{R}$ homeomorfisms par riņķa līniju, no kuras ir izmests punkts B'. Tātad funkcija

$$\gamma(t) = \left(\frac{-a\,(1-t^2) + 2bt}{1+t^2}; \frac{-b\,(1-t^2) - 2at}{1+t^2} \right), \tag{1.12}$$

kur $t \in \mathbb{R}$, ir vienkāršā loka $\mathbb{S} \setminus \{B'\}$ racionālā parametrizācija.

Nākamā teorēma parāda, ka skaitļu taisni $\mathbb{R}$ nevar bijektīvi un nepārtraukti attēlot par visu riņķa līniju.

1.5. teorēma. *Ja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ ir nepārtraukts un sirjektīvs skaitļu taisnes $\mathbb{R}$ attēlojums par vienības riņķa līniju $\mathbb{S}$, tad eksistē dažādi punkti x_1 un x_2, ka $h(x_1) = h(x_2)$.*

► Pieņemsim pretējo, ka funkcija h ir injektīva, t.i., dažādām argumenta vērtībām $x \in \mathbb{R}$ atbilst dažādas funkcijas vērtības $h(x) \in \mathbb{S}$. Pieņemsim, ka $B = h(0) \in \mathbb{S}$. Apskatīsim stereogrāfisko projekciju ar centru punktā B, t.i., attēlojumu $t = f(x;y) : \mathbb{S} \setminus \{B\} \to \mathbb{R}$, un kompozīciju $g = f \circ h$. No dotās teorēmas nosacījumiem un stereogrāfiskās projekcijas īpašībām (skat. 1.4. teorēmu) seko, ka funkcija g injektīvi un nepārtraukti attēlo kopu $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par kopu $\mathbb{R}$. Apskatīsim kopas $A_1 = g((0;+\infty)) \neq \emptyset$ un $A_2 = g((-\infty;0)) \neq \emptyset$. Tad A_1 un A_2 ir vaļēji intervāli (skat. 1.3. teorēmas otro apgalvojumu), pie tam $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R}$ un $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Taču tas ir pretrunā ar to, ka skaitļu taisne $\mathbb{R}$ ir sakarīga kopa, t.i., skaitļu taisni nevar izteikt kā divu netukšu savstarpēji nešķeļošos vaļēju intervālu apvienojumu.◄

1.4. piezīme. 1.4. teorēmas pierādījuma gaitā konstruētajam homeomorfismam $t = f(x;y) : \mathbb{S} \setminus \{B\} \to \mathbb{R}$ piemīt šādas īpašības.

1. Ja A ir kopas $\mathbb{S} \setminus \{B\}$ slēgta apakškopa, tad $f(A)$ ir slēgta un ierobežota skaitļu taisnes $\mathbb{R}$ apakškopa.
2. Ja A ir kopas $\mathbb{S} \setminus \{B\}$ sakarīga apakškopa, tad $f(A)$ ir skaitļu taisnes $\mathbb{R}$ intervāls.
3. Ja A ir kopas $\mathbb{S} \setminus \{B\}$ slēgta un sakarīga apakškopa, tad $f(A)$ ir skaitļu taisnes $\mathbb{R}$ nogrieznis.
4. $f((1;0)) = 0,\ f((0;1)) = 1,\ f((0;-1)) = -1.$

Pirmā īpašība seko no kopas A kompaktuma un funkcijas $t = f(x;y)$ nepārtrauktības, otrā īpašība - no kopas A sakarīguma un funkcijas $t = f(x;y)$ nepārtrauktības, trešā īpašība - no pirmajām divām īpašībām, savukārt ceturtās īpašības patiesumu pārbauda ar tiešiem izskaitļojumiem, izmantojot formulu $t = f(x;y) = \frac{y}{1+x}$ (skat. [8, 47.-48. lpp.], [9, 11.-16. lpp.]).

1.5. Bernulli nevienādības

a) *Ja α ir reāls skaitlis, $\alpha \geq -1$, tad jebkuram naturālam skaitlim n ir spēkā nevienādība* $(1+\alpha)^n \geq 1+n\alpha$.

► Pierādījumu veic, izmantojot matemātiskās indukcijas principu.◄

b) *Ja λ ir reāls nenegatīvs skaitlis, tad jebkuram naturālam skaitlim n ir spēkā nevienādība*

$$(1+\lambda)^{1-\frac{1}{n}} \leq 1+(n-1)\frac{\lambda}{n}.$$

► No a) seko, ka jebkuram ε, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, un patvaļīgam naturālam skaitlim n ir spēkā nevienādība:

$$(1-\varepsilon)^n \geq 1-n\varepsilon.$$

Ņemot šajā nevienādībā $\varepsilon = \frac{\lambda}{n(\lambda+1)}$, iegūsim:

$$1-n\varepsilon = 1-\frac{\lambda}{\lambda+1} \leq \left[1-\frac{\lambda}{n(\lambda+1)}\right]^n,$$

no kurienes seko, ka

$$(1+\lambda)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{\frac{1}{n}} \leq (1+\lambda)\left(1-\frac{\lambda}{n(\lambda+1)}\right)$$

jeb

$$(1+\lambda)^{1-\frac{1}{n}} \leq 1+\lambda-\frac{\lambda}{n} = 1+(n-1)\frac{\lambda}{n}. ◄$$

c) *Ja α ir reāls nenegatīvs skaitlis, tad jebkuram racionālam skaitlim ρ, $0 \leq \rho \leq 1$, ir spēkā nevienādība*

$$(1+\alpha)^\rho \leq 1+\rho\alpha.$$

Citiem vārdiem sakot, ir jāpierāda, ka jebkuram reālam nenegatīvam skaitlim α un patvaļīgam naturālam skaitlim n ir spēkā

$$(1+\alpha)^{\frac{m}{n}} \leq 1+\frac{m}{n}\alpha \quad (m=0,1,2,\ldots,n). \tag{1.13}$$

► Fiksēsim reālu nenegatīvu skaitli α. Izmantosim matemātiskās indukcijas principu pēc naturāla parametra n.

Indukcijas bāze. Ja $n=1$, tad nevienādība (1.13), acīmredzot, izpildās.

Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka nevienādība (1.13) izpildās parametram $n=p$, t.i.,

$$(1+\alpha)^{\frac{m}{p}} \leq 1+\frac{m}{p}\alpha \quad (m=0,1,2,\ldots,p)$$

(- *induktīvais pieņēmums*). Pierādīsim, ka nevienādība (1.13) izpildās parametram $n = p+1$. Tiešām, b) punkta nevienādībā ņemot $\lambda = (1+\alpha)^{\frac{m}{p}} - 1$ un izmantojot induktīvo pieņēmumu, iegūsim

$$(1+\alpha)^{\frac{m}{p+1}} = \left[(1+\alpha)^{\frac{m}{p}}\right]^{\frac{p}{p+1}} = \left[(1+\alpha)^{\frac{m}{p}}\right]^{1-\frac{1}{p+1}} \leq 1 + \frac{p}{p+1}\left[(1+\alpha)^{\frac{m}{p}} - 1\right] \leq$$
$$\leq 1 + \frac{p}{p+1}\left[1 + \frac{m}{p}\alpha - 1\right] = 1 + \frac{m}{p+1}\alpha \ \ (m = 0, 1, 2, \ldots, p+1).$$

Indukcijas secinājums. Tātad nevienādība (1.13) izpildās jebkuram naturālam parametram n.◀

II nodaļa

PAMATELEMENTĀRO FUNKCIJU AKSIOMĀTISKĀ TEORIJA

2.1. Lineārā funkcija kā nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms sevī

2.1.1. Lineārās funkcijas definīcija

2.1. definīcija. Par **lineāro funkciju** sauc jebkuru nepārtrauktu grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfismu sevī, t.i., jebkuru funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka
1° *$f(x + y) = f(x) + f(y)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$;*
2° *f ir nepārtraukta funkcija.*

2.2. definīcija. Par **lineāro funkciju ar koeficientu** a, kur $a \in \mathbb{R}$, sauc patvaļīgu lineāro funkciju, kurai piemīt papildīpašība:
3° $f(1) = a$.
Lineāro funkciju ar koeficientu a apzīmē ar $\ell_a(x)$.

Lineārās funkcijas ar koeficientu a eksistence ir viegli pierādāma. Tiešām, ja $a \in \mathbb{R}$ ir fiksēts skaitlis, tad funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka $f(x) = ax$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, apmierina visus 2.1. un 2.2. definīcijas nosacījumus, t.i., f - lineārā funkcija ar koeficientu a.

2.1.2. Lineārās funkcijas īpašības

Turpmāk ar f apzīmēsim patvaļīgu lineāro funkciju. Īpašību numerācija turpinās 2.1. un 2.2. definīcijas nosacījumu numerāciju.

4° $f(0) = 0$.

▶ Saskaņā ar 1^0 atrodam: $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$, no kurienes seko, ka $f(0) = 0$.◀

5° *$f(-x) = -f(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.*

► Tā kā $x + (-x) = 0$, tad, ņemot vērā 1^0 un 4^0 īpašību, atrodam: $f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0$, no kurienes seko, ka $f(-x) = -f(x)$.◄

Nākamā īpašība ir interesanta ar to, ka tā ir saistīta ar reizināšanu (laukā $\mathbb{R}$), kura netiek izmantota 2.1. un 2.2. definīcijā.

6^0 *$f(\lambda x) = \lambda f(x)$ jebkuriem $\lambda, x \in \mathbb{R}$.*

► Fiksēsim $x \in \mathbb{R}$.

a) Ja $\lambda = n \in \mathbb{N}$, tad vienādību $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ pierāda ar matemātiskās indukcijas principa palīdzību.

Indukcijas bāze. Ja $n = 1$, tad vienādība ir patiesa, jo $f(1 \cdot x) = f(x) = 1 \cdot f(x)$.

Induktīvā pāreja. Pieņemsim, ka vienādība ir patiesa parametram $n = p \in \mathbb{N}$, t.i., $f(px) = pf(x)$ (- *induktīvais pieņēmums*). Pierādīsim, ka vienādība ir patiesa parametram $n = p + 1$. Tiešām, tā kā $(p + 1)x = px + x$, tad, ņemot vērā 1^0 īpašību, atrodam:

$$f((p + 1)x) = f(px + x) = f(px) + f(x) = pf(x) + f(x) = (p + 1)f(x).$$

Indukcijas secinājums. Tātad vienādība ir patiesa jebkuram $n \in \mathbb{N}$.

b) Ja $\lambda = -n$, kur $n \in \mathbb{N}$, tad, ņemot vērā 5^0 īpašību un 6^0 īpašības a) punktu, atrodam:

$$f(\lambda x) = f(-nx) = -f(nx) = -nf(x) = \lambda f(x).$$

c) Ja $\lambda = m \in Z$, tad vienādības patiesums seko no 4^0 īpašības (ja $\lambda = 0$), 6^0 īpašības a) punkta (ja $\lambda \in \mathbb{N}$) un 6^0 īpašības b) punkta (ja $\lambda = -n$, kur $n \in \mathbb{N}$).

d) Apskatīsim gadījumu, kad $\lambda = r \in \mathbb{Q}$. Pieņemsim, ka $r = \frac{m}{n}$, kur $m \in \mathbb{Z}$ un $n \in \mathbb{N}$.

Atzīmēsim, ka, ja $m = 1$, tad, ņemot vērā 6^0 īpašības a) punktu, iegūsim, ka jebkuram $n \in \mathbb{N}$ ir spēkā

$$f(x) = f\left(n\,\frac{1}{n}x\right) = nf\left(\frac{1}{n}x\right) \quad \text{jeb} \quad f\left(\frac{1}{n}x\right) = \frac{1}{n}f(x).$$

Tāpēc, ņemot vērā 6^0 īpašības c) punktu, iegūsim:

$$f(rx) = f\left(\frac{m}{n}r\right) = f\left(m\left(\frac{1}{n}x\right)\right) = mf\left(\frac{1}{n}\,x\right) = m\,\frac{1}{n}\,f\,(x) = r\,f\,(x)\,, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

e) Apskatīsim gadījumu, kad $\lambda \in \mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pieņemsim, ka (r_n) ir racionālu skaitļu virkne, kas konverģē uz skaitli λ. Atrodam:

$$f(\lambda x) = f\left(\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right)x\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n x\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n x) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} r_n f(x) = \left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) f(x) = \lambda f(x).$$

Tātad vienādība $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ ir spēkā jebkuriem $\lambda, x \in \mathbb{R}$.◄

2.1. piezīme. Ievērosim, ka 6^0 īpašības pierādījumā funkcijas f nepārtrauktība tika izmantota tikai vienādību ķēdītes (skat. šīs īpašības e) punktu) trešajā vienādībā, tāpēc īpašība:
$6'^0$ *$f(\lambda x) = \lambda f(x)$ jebkuriem $\lambda \in \mathbb{Q}$ un $x \in \mathbb{R}$,*
ir 2.1. definīcijas 1^0 nosacījuma sekas.

2.1.3. Teorēma par lineārās funkcijas eksistenci un vienīgumu

2.1. teorēma. *Pieņemsim, ka $a \in \mathbb{R}$ ir fiksēts skaitlis. Tad eksistē vienīgā lineārā funkcija $\ell_a(x)$ ar koeficientu a, pie tam $\ell_a(x) = ax$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.*

► Lineārā funkcija ar koeficientu a eksistē, jo, kā jau iepriekš tika atzīmēts, tad $f(x) = ax$ $(x \in \mathbb{R})$ ir lineārā funkcija ar koeficientu a.

Pieņemsim, ka $g(x)$ ir vēl kāda lineārā funkcija ar koeficientu a, t.i., funkcija $g(x)$ apmierina 2.1. un 2.2. definīcijas nosacījumus 1^0, 2^0 un 3^0. Tad, izmantojot 6^0 īpašību, atrodam: $g(x) = g(x \cdot 1) = xg(1) = xa = ax$ (6^0 īpašība tiek izmantota vienādību ķēdītes otrajā vienādībā). Tātad $g(x) = f(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, t.i., $g = f$. Lineārās funkcijas ar koeficientu a vienīgums ir pierādīts.

No iepriekš teiktā seko, ja $\ell_a(x)$ ir lineārā funkcija ar koeficientu a, tad $\ell_a(x) = ax$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.◄

2.1.4. Lineārās funkcijas papildīpašības

7^0 *Lineārā funkcija f ir grupas $\mathbb{R}^+$ izomorfisms sevī tad un tikai tad, kad $f(1) \neq 0$.*

► *Nepieciešamība.* Ja lineārā funkcija f ir grupas $\mathbb{R}^+$ izomorfisms sevī, tad $f(1) = a \neq 0$, jo, ja $f(1) = a = 0$, tad $f(x) = \ell_0(x) = 0 \cdot x = 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, tāpēc attēlojums $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nav bijektīvs, un līdz ar to attēlojums f (- grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms sevī) nav izomorfisms.

Pietiekamība. Ja f ir lineāra funkcija, t.i. $f(x) = ax$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$ un $f(1) = a \neq 0$, tad attēlojums $f : \ R \to R$ ir bijektīvs un homomorfizms, t.i., f ir grupas $\mathbb{R}^+$ izomorfisms sevī. ◄

8^0 *Ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms sevī, pie tam f ir nepārtraukts kādā punktā $x_0 \in \mathbb{R}$, tad f ir nepārtraukts jebkurā punktā $x \in \mathbb{R}$, t.i., f - nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms sevī.*

► Apskatīsim patvaļīgu $y_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \neq x_0$. Pieņemsim, ka (y_n) ir patvaļīga reālu skaitļu virkne, kas konverģē uz punktu y_0. Acīmredzot, virkne (x_n), kur $x_n = x_0 - y_0 + y_n$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$, konverģē uz punktu x_0. Tā kā f ir nepārtraukts attēlojums punktā x_0, tad $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$. Tāpēc $f(x_n - x_0) = f(x_n) - f(x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Tā kā $f(y_n - y_0) = f(x_n - x_0)$, tad $f(y_n) - f(y_0) = f(y_n - y_0) = f(x_n - x_0) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, no kurienes seko, ka $f(y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(y_0)$, t.i., attēlojums f ir nepārtraukts punktā y_0.◄

2.2. piezīme. No 8^0 īpašības seko, ka, ja 2.1. definīcijā 2^0 nosacījumu nomainīt ar nosacījumu:
$2'^0$ *f - nepārtraukts attēlojums kādā punktā $x_0 \in \mathbb{R}$,*
tad iegūsim ekvivalentu definīciju. Par x_0 ir izdevīgi ņemt grupas $\mathbb{R}^+$ neitrālo elementu, t.i., skaitli $x_0 = 0$.

9^0 *Ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms sevī, kurš ir ierobežots kādā punkta $x_0 = 0$ apkārtnē U, tad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms sevī.*

► Tā kā attēlojums $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir ierobežots punkta $x_0 = 0$ apkārtnē U, tad eksistē tāds $M > 0$, ka jebkuram $x \in U$ ir spēkā $|f(x)| \leq M$. Saskaņā ar 8^0 īpašību ir pietiekami pārliecināties, ka attēlojums $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir nepārtraukts punktā $x_0 = 0$. Atgādināsim, ka īpašības

4^0 $f(0) = 0$,
$6'^0$ $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ *jebkuriem* $\lambda \in \mathbb{Q}$ *un* $x \in \mathbb{R}$,
tika pierādītas, izmantojot tikai 2.1. definīcijas 1^0 nosacījumu. Tāpēc dotais attēlojums f apmierina šīs īpašības.

Pieņemsim, ka (x_n) ir patvaļīga no nulles atšķirīgu reālu skaitļu virkne, kas konverģē uz punktu $x_0 = 0$, bet (λ_n) - patvaļīga pozitīvu racionālu skaitļu virkne, ka $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$ un $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n x_n = 0$. Uzskatīsim, ka $\lambda_n x_n \in U$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$. Atzīmēsim, ka šāda virkne (λ_n) eksistē, piemēram, ja

$$\frac{1}{\sqrt{|x_n|}} < \lambda_n < \frac{2}{\sqrt{|x_n|}},$$

tad iegūsim virkni (λ_n), kura apmierina iepriekš minētos nosacījumus. Tā kā

$$|f(x_n)| = \left| f\left(\frac{1}{\lambda_n} \cdot \lambda_n x_n\right)\right| = \frac{1}{\lambda_n} |f(\lambda_n x_n)| \le \frac{M}{\lambda_n},$$

tad $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0 = f(0)$, t.i., f - nepārtraukts attēlojums punktā $x_0 = 0$.◀

2.3. piezīme. No 9^0 īpašības seko, ka, ja 2.1. definīcijā 2^0 nosacījumu nomainīt ar nosacījumu:
$2''^0$ *f - ierobežots attēlojums kādā punkta $x_0 = 0$ apkārtnē,*
tad iegūsim ekvivalentu definīciju (punkta $x_0 = 0$ vietā var ņemt jebkuru citu punktu $x \in \mathbb{R}$).

10^0 *Ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir monotons grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms sevī, tad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms sevī.*

▶ Pieņemsim, ka $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir monotons grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms sevī. Tad attēlojums f apmierina īpašību
$6'^0$ $f(\lambda x) = \lambda f(x)$ *jebkuriem* $\lambda \in \mathbb{Q}$ *un* $x \in \mathbb{R}$,
jo šīs īpašības pierādījumā tika izmantots tikai 2.1. definīcijas 1^0 nosacījums. Tāpēc $f\left(\pm\frac{1}{n} \cdot 1\right) = \pm\frac{1}{n} f(1)$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$. Tātad, ja $-\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}$, tad, ņemot vērā funkcijas f monotonitāti, iegūsim $|f(x)| \le \frac{1}{n} |f(1)|$, t.i., funkcija f ir ierobežota punkta $x_0 = 0$ apkārtnē $U = \left(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right)$. No 9^0 īpašības seko, ka $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms sevī.◀

2.4. piezīme. No 10^0 īpašības seko, ka, ja 2.1. definīcijā 2^0 nosacījumu nomainīt ar nosacījumu:
$2'''^0$ *f - monotons attēlojums,*
tad iegūsim ekvivalentu definīciju.

2.1.5. Afīnās funkcijas jēdziens

Skolas matemātikā ar lineāru funkciju saprot funkciju $g(x) = ax + b$. Acīmredzot, ja $b \ne 0$, tad šī funkcija neapmierina 2.1. definīciju. Lai arī uz funkciju $g(x) = ax + b$, $b \ne 0$, varētu attiecināt terminu "lineārā funkcija", tad ir dabiski šo funkciju nosaukt par **lineāru nehomogēnu funkciju**, bet funkciju, kas apmierina 2.1. definīciju, - par **lineāru homogēnu funkciju**. Tomēr biežāk funkciju $g(x) = ax + b$ sauc par **afīno funkciju** vai **afīni-lineāru funkciju**.

Izliektu nediferencējamu funkciju teorijā nozīmīgu vietu ieņem **Jensena nevienādība**:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \tag{2.1}$$

kura ir spēkā jebkuriem x un y no intervāla, kurā funkcija f ir izliekta.

Afīnai funkcijai $g(x) = ax + b$ ir spēkā Jensena vienādība:

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}, \tag{2.2}$$

jo

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = a\frac{x+y}{2} + b = \frac{ax+b+ay+b}{2} = \frac{g(x)+g(y)}{2}$$

jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$.

Pierādīsim, ka ir spēkā arī apgrieztais apgalvojums: *ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$, ir nepārtraukta funkcija, kura apmierina Jensena vienādību, tad $g(x)$ - afīnā funkcija, t.i., $g(x) = ax + b$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, kur $a, b \in \mathbb{R}$.*

▶ Pieņemsim, ka $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$, ir nepārtraukta funkcija, kura apmierina Jensena vienādību (2.2) jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$. Apzīmēsim $g(0) = b$ un apskatīsim funkciju $f(x) = g(x) - b$. Acīmredzot, funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta. No vienas puses, jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x+0}{2}\right) = g\left(\frac{x+0}{2}\right) - b = \frac{g(x)+g(0)}{2} - b = \frac{g(x)-b}{2} = \frac{f(x)}{2}$$

no kurienes seko, ka jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$ izpildās

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)}{2}. \tag{2.3}$$

No otras puses, jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = g\left(\frac{x+y}{2}\right) - b = \frac{g(x)+g(y)}{2} - b = \frac{g(x)-b+g(y)-b}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

no kurienes seko, ka jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$ izpildās

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}. \tag{2.4}$$

No (2.3) un (2.4) seko, ka $f(x+y) = f(x) + f(y)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$. Tātad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ - nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms sevī. No 2.1. teorēmas izriet, ka $f(x) = ax$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, kur $a = f(1)$. Tādējādi $g(x) = ax + b$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, kur $b = g(0)$, $a = g(1) - b = g(1) - g(0)$, t.i., $g(x)$ - afīnā funkcija.◀

2.2. Eksponentfunkcija kā nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{R}^\bullet$

2.2.1. Eksponentfunkcijas definīcija

2.3. definīcija. Par **eksponentfunkciju** sauc jebkuru nepārtrauktu grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfismu grupā $\mathbb{R}^\bullet$, t.i., jebkuru funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka

1) $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$;
2) f - nepārtraukta funkcija.

2.4. definīcija. Par **eksponentfunkciju ar bāzi** a, kur $a > 0$, sauc patvaļīgu eksponentfunkciju, kurai piemīt papildīpašība:
3) $f(1) = a$.
Eksponentfunkciju ar bāzi a apzīmē ar a^x.

Eksponentfunkcija ar bāzi a ir definēta visiem $x \in \mathbb{R}$, tās vērtības pieder pozitīvo reālo skaitļu kopai. Eksponentfunkciju ar bāzi $a < 0$ neaplūkosim, jo, piemēram, $(-2)^3$ nav pozitīvs skaitlis, bet $(-2)^{\frac{1}{2}}$ nav pat reāls skaitlis.

2.2.2. Eksponentfunkcijas eksistence un vienīgums

Atšķirībā no lineārās funkcijas, nav acīmredzams, vai eksistē kaut viena eksponentfunkcija a^x, bet, ja eksistē, vai tā ir vienīgā. Lai rastu atbildes uz šiem jautājumiem, atcerēsimies labi zināmās pozitīva skaitļa a racionālas pakāpes īpašības:
1) $a^r > 0$, kur $r \in \mathbb{Q}$;
2) $a^{r_1+r_2} = a^{r_1}a^{r_2}$, kur $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$,
no kurām seko, ka funkcija $f(r) = a^r$, $r \in \mathbb{Q}$, ir grupas $\mathbb{R}^+$ apakšgrupas $\mathbb{Q}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{R}^\bullet$. Nākamajā teorēmā tiek pierādīts, ka šāda veida funkcijas apraksta visus grupas $\mathbb{Q}^+$ homomorfismus grupā $\mathbb{R}^\bullet$.

2.2. teorēma. *Pieņemsim, ka kopā $\mathbb{Q}$ definētai funkcijai f_0 piemīt šāda īpašība:*
1′) $f_0(r_1 + r_2) = f_0(r_1)\cdot f_0(r_2)$ jebkuriem $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$.
Ja vismaz vienam $r_0 \in \mathbb{Q}$ ir spēkā $f_0(r_0) \neq 0$, tad $f_0(r) = a^r$ jebkuram $r \in \mathbb{Q}$, kur $a = f_0(1) > 0$.

► No vienas puses, saskaņā ar 1′) atrodam, ka jebkuram $r \in \mathbb{Q}$ ir spēkā

$$f_0(r) = f_0\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{2}\right) = f_0\left(\frac{r}{2}\right)\cdot f_0\left(\frac{r}{2}\right) = f_0^2\left(\frac{r}{2}\right) \geq 0,$$

tāpēc $f_0(r_0) > 0$. No otras puses, tā kā $f_0(r_0) = f_0(r)\cdot f_0(r_0 - r)$ jebkuram $r \in \mathbb{Q}$, tad $f_0(r) \neq 0$ jebkuram $r \in \mathbb{Q}$. Tātad $f_0(r) > 0$ jebkuram $r \in \mathbb{Q}$. Ņemot vērā, ka funkcijai f_0 izpildās 1′), secinām, ka f_0 ir grupas $\mathbb{Q}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{R}^\bullet$.

Saskaņā ar homomorfismu vispārīgām īpašībām (skat. I nodaļas 1.1. apakšparagrāfu) iegūstam:

$$f_0(0) = 1, \tag{2.5}$$

$$f_0(-r) = [f_0(r)]^{-1} = \frac{1}{f_0(r)} \quad (r \in \mathbb{Q}). \tag{2.6}$$

Atzīmēsim, ka jebkuriem $r \in \mathbb{Q}$ un $m \in \mathbb{Z}$ ir spēkā

$$f_0(mr) = (f_0(r))^m. \tag{2.7}$$

Tiešam, ja $m = n \in \mathbb{N}$, tad vienādību

$$f_0(nr) = (f_0(r))^n \tag{2.8}$$

nav grūti pierādīt ar matemātiskās indukcijas principu, izmantojot nosacījumu 1′); ja $m = 0$, tad saskaņā ar (2.5) atrodam

$$f_0(0\cdot r) = f_0(0) = 1 = (f_0(r))^0;$$

ja $m\in\mathbb{Z}$ un $m<0$, tad $m=-n$, kur $n\in\mathbb{N}$, un, ņemot vērā (2.6) un (2.8), iegūsim

$$f_0(mr)=f_0(-nr)=\frac{1}{f_0(nr)}=\frac{1}{(f_0(r))^n}=[f_0(r)]^{-n}=[f_0(r)]^m.$$

Vienādība (2.7) ir pierādīta.

Ja $n\in\mathbb{N}$, tad, ņemot vērā (2.7), iegūsim:

$$f_0(r)=f_0\left(n\cdot\frac{r}{n}\right)=\left(f_0\left(\frac{r}{n}\right)\right)^n.$$

Tā kā $f_0\left(\frac{r}{n}\right)>0$, tad

$$f_0\left(\frac{r}{n}\right)=(f_0(r))^{\frac{1}{n}}. \tag{2.9}$$

Pieņemsim, ka $r\in\mathbb{Q}$; $r=\frac{m}{n}$; $m,n\in\mathbb{Z}$; $n\neq 0$. Ņemot vērā (2.7) un (2.9), atrodam:

$$f_0(r)=f_0\left(\frac{m}{n}\right)=\left[f_0\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m=\left[(f_0(1))^{\frac{1}{n}}\right]^m=[f_0(1)]^{\frac{m}{n}}=[f_0(1)]^r, \tag{2.10}$$

no kurienes seko, ka $f_0(r)=a^r$, kur $a=f_0(1)>0$.◀

2.5. piezīme. No (2.10) seko šāds apgalvojums: ja $f_0(1)=1$, tad $f_0(r)=1$ jebkuram $r\in\mathbb{Q}$.

2.6. piezīme. Apskatīsim palīgfunkciju $g(r)=\frac{a^r-1}{r}$, kur $r\in\mathbb{Q}\cap(0;+\infty)$, bet a ir fiksēts skaitlis, pie tam $a\geq 1$. Pierādīsim, ka $g(r)$ ir augoša funkcija.

► Ja $r,t\in\mathbb{Q}\cap(0;+\infty)$, $r\leq t$, $\rho=\frac{r}{t}$, tad

$$g(r)=\frac{a^r-1}{r}=\frac{(a^t)^\rho-1}{r}=\frac{[1+(a^t-1)]^\rho-1}{r}\leq\frac{1+\rho\,(a^t-1)-1}{r}=\frac{a^t-1}{t}=g(t)$$

(izmantojām II nodaļas 1.5. paragrāfā apskatīto Bernulli nevienādību: $(1+\alpha)^\beta\leq 1+\alpha\beta$, kur $\alpha\geq 0$, $\beta\in\mathbb{Q}$, $0\leq\beta\leq 1$).◀

2.7. piezīme. Ņemot vērā robežu teorijas īpašību (skat. [6, 78. lpp.]), atrodam:

$$\lim_{t\to 0,\, t\in\mathbb{Q}\cap(0;+\infty)} g(t)=\inf_{\mathbb{Q}\cap(0;+\infty)} g(t).$$

Apzīmēsim šo robežu ar ℓ_a. Tad eksistē tāds $\delta>0$, ka jebkuram $r\in\mathbb{Q}\cap(0;\delta)$ izpildās nevienādība

$$0\leq\ell_a\leq g(r)\leq\ell_a+1$$

jeb

$$\ell_a r\leq a^r-1\leq(\ell_a+1)r$$

jeb

$$\ell_a r\leq f_0(r)-1\leq(\ell_a+1)r,$$

no kurienes seko, ka

$$\lim_{r\to 0,\, r\in\mathbb{Q}\cap(0;+\infty)} f_0(r)=1=f_0(0).$$

Tātad, ja funkcija $f_0(r)$ apmierina 2.2. teorēmas nosacījumus un $a\geq 1$, tad tā ir nepārtraukta punktā $r_0=0$. Pēdējais apgalvojums ir spēkā arī tad, ja funkcija $f_0(r)$ apmierina 2.2. teorēmas nosacījumus un $0<a<1$. Tiešām, ja $b=\frac{1}{a}>1$, tad funkcija $\widetilde{f_0}(r)=b^r$, kur $r\in\mathbb{Q}$, ir nepārtraukta punktā $r_0=0$, tāpēc funkcija $f_0(r)=a^r=\frac{1}{b^r}$ arī ir nepārtraukta punktā $r_0=0$.

Tagad pierādīsim teorēmu par eksponentfunkcijas eksistenci un vienīgumu.

2.3. teorēma. *Jebkuram $a > 0$ eksistē vienīgā eksponentfunkcija ar bāzi a, t.i., funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kura apmierina 2.3. un 2.4. definīcijas nosacījumus* 1), 2) *un* 3).

► Fiksēsim $a > 0$. Apskatīsim funkciju $f_0(r) = a^r$, $r \in \mathbb{Q}$, kura apmierina 2.2. teorēmas nosacījumus. Tad šī funkcija ir grupas $\mathbb{Q}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{R}^\bullet$, un tā ir nepārtraukta punktā $r_0 = 0$. Saskaņā ar I nodaļas 1.2. teorēmu un tai sekojošo 1.1. piezīmi eksistē vienīgā nepārtraukta funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kura ir funkcijas f_0 paplašinājums un kura ir nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{R}^\bullet$, pie tam $f(1) = f_0(1) = a$, citiem vārdiem sakot, eksistē vienīgā eksponentfunkcija ar bāzi a.◄

2.2.3. Eksponentfunkcijas īpašības

Pirmās trīs īpašības tieši seko no 2.3. un 2.4. definīcijas, izmantojot iepriekš ievesto apzīmējumu a^x, kur $a > 0$, bet ceturtā un piektā - no vispārīgajām homomorfismu īpašībām (skat. a) un b) īpašību 8. lpp.).

1^0 $a^{x+y} = a^x a^y$ *jebkuriem* $x, y \in \mathbb{R}$.

2^0 a^x *- nepārtraukta funkcija.*

3^0 $a^1 = a$.

4^0 $a^0 = 1$.

5^0 $a^{-x} = (a^x)^{-1} = \frac{1}{a^x}$ *jebkuram* $x \in \mathbb{R}$.

6^0 $(ab)^x = a^x b^x$ *jebkuram* $x \in \mathbb{R}$*, kur* $a > 0$, $b > 0$.

► Apskatīsim funkciju $f(x) = a^x b^x$, $x \in \mathbb{R}$. Tā kā

$$f(x + y) = a^{x+y} b^{x+y} = a^x b^x a^y b^y = (a^x b^x)(a^y b^y) = f(x) f(y)$$

jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$, tad $f(x)$ - nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{R}^\bullet$, pie tam $f(1) = a^1 b^1 = ab$ (šeit izmantojām 3^0 īpašību). No teorēmas par eksponentfunkcijas eksistenci un vienīgumu seko, ka $f(x)$ ir eksponentfunkcija ar bāzi ab, t.i., $f(x) = (ab)^x$. Tāpēc $(ab)^x = a^x b^x$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.◄

7^0 $(a^b)^x = a^{bx}$ *jebkuriem* $b, x \in \mathbb{R}$.

► Pieņemsim, ka $h(x) = a^{bx}$, $g(x) = bx$, $f(x) = a^x$. Funkcija $f(x)$ ir nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{R}^\bullet$. Ja b ir fiksēts, tad funkcija $g(x)$ - nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms sevī. Tā kā $h = f \circ g$, tad $h(x)$ - nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{R}^\bullet$, pie tam

$$h(1) = (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(b) = a^b.$$

No teorēmas par eksponentfunkcijas eksistenci un vienīgumu seko, ka $h(x)$ ir eksponentfunkcija ar bāzi a^b, t.i., $h(x) = \left(a^b\right)^x$. Tā kā $b \in \mathbb{R}$ ir patvaļīgs, tad $\left(a^b\right)^x = a^{bx}$ jebkuriem $x, b \in \mathbb{R}$.◄

8^0 *Ja* f *ir patvaļīga eksponentfunkcija un* $f(1) = 1$*, tad* $f(x) = 1$ *jebkuram* $x \in \mathbb{R}$*, citiem vārdiem sakot,* $1^x = 1$ *jebkuram* $x \in \mathbb{R}$.

► 2.5. piezīmē pēc 2.2. teorēmas tika atzīmēts: ja $f_0(1) = 1$, tad $f_0(r) = 1$ jebkuram $r \in \mathbb{Q}$. Tā kā eksponentfunkcija f ir funkcijas $f_0(r)$ turpinājums no kopas $\mathbb{Q}$ uz kopu $\mathbb{R}$ (skat. 2.3. teorēmas pierādījumu), tad jebkuram $x \in \mathbb{R}$ un patvaļīgai virknei $(r_n) \subset \mathbb{Q}$, ka $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$, iegūsim:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1. \blacktriangleleft$$

2.8. piezīme. Tātad eksponentfunkcija f ar bāzi $a = 1$ ir identiski vienāda ar 1, tāpēc homomorfisms $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^\bullet$ nav izomorfisms.

2.9. piezīme. 8^0 īpašību var izmantot identitāšu pierādīšanā. Pierādīsim, piemēram, 6^0 īpašību. Pieņemsim, ka $f_1(x) = (ab)^x$, $f_2(x) = a^x b^x$, $g(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$. Viegli pierādīt, ka $g(x)$ - nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{R}^\bullet$, pie tam

$$g(1) = \frac{f_1(1)}{f_2(1)} = \frac{ab}{ab} = 1.$$

Tāpēc $g(x) = 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, t.i., $f_1(x) = f_2(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Līdzīgi var pierādīt arī 7^0 īpašību.

9^0 *Eksponentfunkcija a^x ir stingri augoša, ja $a > 1$, un stingri dilstoša, ja $0 < a < 1$.*

► Pieņemsim, ka $a > 1$. Pierādīsim, ka $a^x > 1$, ja $x > 0$.

Vispirms atzīmēsim, ka $a^r > 1$, ja $r \in \mathbb{Q} \cap (0; +\infty)$. Tiešām, ja $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, tad $a^{\frac{1}{n}} > 1$, jo pretējā gadījumā, t.i., ja $a^{\frac{1}{n}} \leq 1$, tad

$$a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \underbrace{a^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}} \cdots a^{\frac{1}{n}}}_{n} \leq 1,$$

kas ir pretrunā ar to, ka $a > 1$; tāpēc, ja $r \in \mathbb{Q} \cap (0; +\infty)$, tad $r = \frac{m}{n}$, kur $m, n \in \mathbb{N}$, un $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m > 1$.

Pieņemsim tagad, ka $x \in \mathbb{R} \cap (0; +\infty)$, bet (r_n) ir tāda pozitīvu racionālu skaitļu virkne, ka $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. No iepriekš pierādītā seko, ka $a^{r_n} > 1$. Tāpēc $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} \geq 1$.

Pierādīsim, ka $a^x \neq 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R} \cap (0; +\infty)$. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds $x_0 \in \mathbb{R} \cap (0; +\infty)$, ka $a^{x_0} = 1$. Tad jebkuram $r \in \mathbb{Q}$ ir spēkā

$$a^{rx_0} = (a^{x_0})^r = 1^r = 1.$$

Tā kā kopa $\{rx_0 | r \in \mathbb{Q}\}$ ir visur blīva kopas $\mathbb{R}$ apakškopa, bet funkcija a^x ir nepārtraukta, tad $a^x = 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Taču $a^1 > 1$, jo $a^1 = a$ un $a > 1$. Pretruna.

Tātad $a^x > 1$, ja $x > 0$ un $a > 1$.

Pieņemsim, ka $x_1 < x_2$. Tad

$$a^{x_2} = a^{x_2 - x_1 + x_2} = a^{x_2 - x_1} a^{x_1} > a^{x_1},$$

jo $x_2 - x_1 > 0$ un tāpēc saskaņā ar iepriekš pierādīto $a^{x_2 - x_1} > 1$. Tātad, ja $a > 1$, tad funkcija a^x ir stingri augoša.

Pieņemsim, ka $0 < a < 1$. Tad $b = \frac{1}{a} > 1$. Ņemot vērā iepriekš pierādīto, ja $x_1 < x_2$, tad $b^{x_1} < b^{x_2}$, t.i., $\frac{1}{a^{x_1}} < \frac{1}{a^{x_2}}$ jeb $a^{x_1} > a^{x_2}$. Tātad, ja $0 < a < 1$, tad funkcija a^x ir stingri dilstoša.◄

10^0 *Eksponentfunkcija ar bāzi $a \neq 1$ ir grupas $\mathbb{R}^+$ izomorfisms par grupu $\mathbb{R}^\bullet$.*

► Tā kā eksponentfunkcija ar bāzi $a \neq 1$ ir stingri monotona funkcija (skat. 9^0 īpašību), tad tā ir injektīva funkcija. Tāpēc ir pietiekami pierādīt, ka eksponentfunkcija ar bāzi $a \neq 1$ ir sirjektīva funkcija, t.i., jebkuram $y_0 > 0$ eksistē tāds $x_0 \in \mathbb{R}$, ka $a^{x_0} = y_0$.

Pieņemsim, ka $a > 1$. Eksistē tādi naturāli skaitļi n_0 un m_0, ka $a^{n_0} > y_0$ un $a^{m_0} > \frac{1}{y_0}$, t.i., $a^{-m_0} < y_0$. Tā kā eksponentfunkcija ar bāzi $a > 1$ ir stingri augoša funkcija, tad $a^{-m_0} < y_0 < a^{n_0}$. Tā kā eksponentfunkcija ir nepārtraukta funkcija, tad saskaņā ar Bolcano teorēmu par starpvērtībām eksponentfunkcija pieņem jebkuru vērtību, kas atrodas starp patvaļīgām divām tās vērtībām. Tāpēc no $a^{-m_0} < y_0 < a^{n_0}$ seko, ka eksistē tāds x_0 (kurš atrodas starp $-m_0$ un n_0), ka $a^{x_0} = y_0$.

Pieņemsim, ka $0 < a < 1$. Tad $b = \frac{1}{a} > 1$. Apskatīsim patvaļīgu $y_0 > 0$. No iepriekš pierādītā seko, ka eksistē tāds x_0, ka $b^{x_0} = y_0$, t.i., $\frac{1}{a^{x_0}} = y_0$ jeb $a^{-x_0} = y_0$.◄

2.10. piezīme. Eksponentfunkcijas a^x $(a \neq 1)$ sirjektivitāte seko arī no tā fakta, ka eksponentfunkcijas a^x $(a \neq 1)$ vērtību kopa $R(a^x)$ ir vienāda ar vaļēju intervālu $(0; +\infty)$.

► Tā kā eksponentfunkcijas definīcijas kopa $D(a^x) = \mathbb{R}$ - intervāls, bet eksponentfunkcija ir nepārtraukta funkcija (skat. 2^0 īpašību), tad tās vērtību kopa $R(a^x)$ arī ir intervāls.

Eksponentfunkcija ir grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{R}^\bullet$, tāpēc tās vērtību kopa $R(a^x)$ ir grupas $\mathbb{R}^\bullet$ apakšgrupa. Tāpēc, tad $a^{-1} = \frac{1}{a} \in R(a^x)$, jo $a \in R(a^x)$ (skat. 3^0 īpašību).

Pieņemsim, ka $t = \max\left\{a; \frac{1}{a}\right\}$. Tad $t > 1$. Ņemot vērā Bernulli nevienādības (skat. I nodaļas 1.5. paragrāfu), jebkuram $n \in \mathbb{N}$ iegūsim:

$$(1 + t - 1)^n = t^n \geq 1 + n(t - 1).$$

Tā kā $t^n \in R(a^x)$, $n \in \mathbb{N}$, tad no pēdējām nevienādībām seko, ka $\inf R(a^x) = 0$ un $\sup R(a^x) = +\infty$. Ņemot vērā, ka $R(a^x)$ ir intervāls, secinām, ka $R(a^x) = (0; +\infty)$.◄

Nākamo īpašību iegūst, apvienojot 8^0 un 10^0 īpašību.

11^0 *Eksponentfunkcija ar bāzi a ir grupas $\mathbb{R}^+$ izomorfisms par grupu $\mathbb{R}^\bullet$ tad un tikai tad, kad $a \neq 1$.*

2.11. piezīme. Eksistē paņēmieni, ar kuru palīdzību var konstruēt grupas $\mathbb{R}^+$ izomorfismu par grupu $\mathbb{R}^\bullet$ (skat. Ievadu). Vismaz viena šāda izomorfisma eksistence ļauj viegli iegūt citu 2.3. teorēmas pierādījumu.

► Tiešām, ja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^\bullet$ ir kāds nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ izomorfisms par grupu $\mathbb{R}^\bullet$ un $g(1) = a$, tad eksponentfunkcijas ar bāzi a eksistence ir pierādīta.

Apskatīsim gadījumu, kad $g(1) \neq a$. Pieņemsim, ka $f = g \circ h$, kur h ir lineārā funkcija ar koeficientu $g^{-1}(a)$ (tā kā g ir bijekcija , tad $g^{-1}(a)$ ir noteikts viennozīmīgi). Atzīmēsim, ka f - nepārtraukta funkcija, pie tam

$$f(1) = (g \circ h)(1) = g(h(1)) = g\left(g^{-1}(a)\right) = a$$

un jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$f(x + y) = g(h(x + y)) = g(h(x) + h(y)) = g(h(x))g(h(y)) = f(x)f(y).$$

Tātad f - eksponentfunkcija ar bāzi a. Eksponentfunkcijas ar bāzi a eksistence ir pierādīta arī gadījumā, kad $g(1) \neq a$.

Ja $\varphi(x)$ ir kāda eksponentfunkcija ar bāzi a, tad $F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ arī ir eksponentfunkcija ar bāzi $F(1) = \frac{f(1)}{\varphi(1)} = \frac{a}{a} = 1$, no kurienes, ņemot vērā 8^0 īpašību, secinām, ka $F(x) = 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, t.i., $f(x) = \varphi(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Eksponentfunkcijas ar bāzi a vienīgums ir pierādīts.◄

2.12. piezīme. Spriežot līdzīgi kā lineārās funkcijas gadījumā (skat. lineārās funkcijas 9^0 un 10^0 īpašību), var pierādīt, ka nepārtrauktības nosacījums 2.3. definīcijā var tikt aizvietots ar citu ekvivalentu nosacījumu, piemēram, ar monotonitātes vai ierobežotības kādā punkta 0 labajā pusapkārtnē nosacījumu. Iesakām lasītājam par to pārliecināties patstāvīgi (skat. 2.9. paragrāfa 4. uzdevumu).

2.3. Logaritmiskā funkcija kā nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^\bullet$ homomorfisms grupā $\mathbb{R}^+$

2.3.1. Logaritmiskās funkcijas definīcija

2.5. definīcija. Par **logaritmisko funkciju** sauc jebkuru nepārtrauktu grupas $\mathbb{R}^\bullet$ homomorfismu grupā $\mathbb{R}^+$, t.i., jebkuru funkciju $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, kurai piemīt šādas īpašības:
1) $f(xy) = f(x) + f(y)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$;
2) f - nepārtraukta funkcija,
kur $\mathbb{R}_{>0}$ - visu pozitīvo reālo skaitļu kopa.

Šādas funkcijas triviāls piemērs ir funkcija, kura ir identiski vienāda ar nulli.

2.6. definīcija. Par **logaritmisko funkciju ar bāzi** a, kur $a > 0$, sauc patvaļīgu logaritmisko funkciju, kurai piemīt papildīpašība:
3) $f(a) = 1$.
Logaritmisko funkciju ar bāzi a apzīmē ar $\log_a x$.

Tā kā f ir homomorfs attēlojums (skat. 1) īpašību), tad $f(x) = f(1 \cdot x) = f(1) + f(x)$, no kurienes seko, ka
4) $f(1) = 0$.
Ja $a = 1$, tad 3) un 4) īpašība ir pretrunā viena otrai, tāpēc logaritmiskā funkcija ar bāzi $a = 1$ neeksistē. Tas paskaidro, kāpēc bieži vien 2.6. definīcijā nosacījumu $a > 0$ papildina ar nosacījumu $a \neq 1$.

Tāpat kā iepriekšējos divos paragrāfos rodas jautājums: vai eksistē vismaz viena logaritmiskā funkcija, un, ja tā eksistē, vai tā ir vienīgā? Kā jau tika pierādīts 2.2. paragrāfā, tad eksponentfunkcija $g(x) = a^x$ ar bāzi $a > 0$, $a \neq 1$, ir grupas $\mathbb{R}^+$ izomorfisms par grupu $\mathbb{R}^\bullet$, tāpēc eksponentfunkcija g ir apvēršama, bet tās apvērstā funkcija $f = g^{-1}$ ir grupas $\mathbb{R}^\bullet$ izomorfisms par grupu $\mathbb{R}^+$, t.i., funkcijai f izpildās 2.5. definīcijas 1) īpašība. Vēlāk tiks pierādīta šī grupas $\mathbb{R}^\bullet$ homomorfisma grupā $\mathbb{R}^+$ sakritība ar logaritmisko funkciju. Lai to izdarītu, vispirms apskatīsim logaritmiskās funkcijas ar bāzi a īpašības, uzskatot, ka šī funkcija eksistē.

2.3.2. Logaritmiskās funkcijas īpašības

Pirmās četras logaritmiskās funkcijas īpašības tieši seko no 2.5. un 2.6. definīcijas, izmantojot iepriekš ievesto logaritmiskās funkcijas apzīmējumu $f(x) = \log_a x$ $(a > 0,\ a{\neq}1)$.

1^0 $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ *jebkuriem* $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

$1'^0$ $\log_a(x_1 x_2 \dots x_k) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) + \dots + \log_a(x_k)$ *jebkuriem* $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}_{>0}$.

▶ Pierāda ar matemātiskās indukcijas principa palīdzību, izmantojot 1^0 īpašību.◀

2^0 *Logaritmiskā funkcija* $\log_a x$ *ir nepārtraukta funkcija.*

3^0 $\log_a a = 1$.

4^0 $\log_a 1 = 0$.

5^0 $\log_a x^{-1} = \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$ *jebkuram* $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

▶ Tā kā $0 = f(1) = f\left(x\frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$, tad $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$.◀

6^0 $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ *jebkuriem* $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.

▶ Tiešām,

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) = \log_a x - \log_a y. ◀$$

7^0 $\log_a(a^x) = x$ *jebkuram* $x \in \mathbb{R}$.

▶ Šo īpašību pierādīsim, sekojot lineārās funkcijas 6^0 īpašības pierādījuma shēmai, t.i., pierādīsim šo īpašību, kad x ir naturāls, vesels, racionāls un, visbeidzot, reāls skaitlis.

a) Ja $x = n \in \mathbb{N}$, tad, izmantojot 1^0 un 3^0 īpašību, iegūsim:

$$\log_a(a^n) = \log_a(aa\cdots a) = \log_a a + \log_a + \dots + \log_a a = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n} = n$$

(lai sniegtu stingru šīs īpašības pierādījumu, ir jāizmanto matemātiskas indukcijas princips).

b) Apskatīsim gadījumu, kad $x = m \in \mathbb{Z}$.

Ja $m > 0$, tad īpašība ir pierādīta a) gadījumā.

Ja $m = 0$, tad, ņemot vērā vienādību $a^0 = 1$ un 4^0 īpašību, iegūsim:

$$\log_a\left(a^0\right) = \log_a 1 = 0.$$

Ja $m < 0$, t.i., $m = -n$, kur $n \in \mathbb{N}$, tad

$$\log_a(a^m) = \log_a\left(a^{-n}\right) = \log_a(a^n)^{-1} = -\log_a(a^n) = -n\log_a a = -n = m.$$

c) Ja $x = \frac{1}{n}$, kur $n{\in}\mathbb{N}$, tad, izmantojot b) gadījumā pierādīto, iegūsim:

$$n\log_a\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \log_a\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \log_a a = 1,$$

no kurienes seko, ka $\log_a\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}$.

d) Pieņemsim, ka $x = r$, kur $r \in \mathbb{Q}$. Tad $r = \frac{m}{n}$, kur $m \in \mathbb{Z}$ un $n \in \mathbb{N}$. Atrodam:

$$\log_a(a^r) = \log_a\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = \log_a\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = m\log_a\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = m\frac{1}{n}\log_a a = \frac{m}{n} = r.$$

e) Pieņemsim, ka $x\in\mathbb{R}$. Apskatīsim patvaļīgu virkni $(r_n) \subset \mathbb{Q}$, ka $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$. Ņemot vērā vienādību $\log_a a^{r_n} = r_n$, $r_n\in\mathbb{Q}$, kā arī eksponentfunkcijas un logaritmiskās funkcijas nepārtrauktību, iegūsim:

$$x = \lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}\log_a a^{r_n} = \log_a a^{\lim\limits_{n\to\infty} r_n} = \log_a a^x. \blacktriangleleft$$

Pierādīto īpašību var pārformulēt šādi: eksponentfunkcijas a^x un logaritmiskās funkcijas $\log_a x$ kompozīcija ir vienāda ar identisko funkciju kopā $\mathbb{R}$, t.i., ar funkciju $I_\mathbb{R} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka $I_\mathbb{R}(x) = x$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Citiem vārdiem sakot, ir spēkā šāda īpašība.

$7'^0$ $(\log_a x) \circ a^x = I_\mathbb{R}(x)$ *jebkuram* $x \in \mathbb{R}$.

8^0 *Funkcija* $\log_a x$ *kopu* $\mathbb{R}_{>0}$ *bijektīvi attēlo par kopu* $\mathbb{R}$.

▶ Logaritmiskās funkcijas sirjektivitāte seko no 7^0 īpašības. Tiešām, jebkuram $x_0 \in \mathbb{R}$ eksistē $y_0 = a^{x_0}$, ka $\log_a y_0 = \log_a a^{x_0} = x_0$.

Pierādīsim, ka logaritmiskā funkcija ir injektīva. Apskatīsim patvaļīgus $y_1, y_2 \in \mathbb{R}_{>0}$, ka $y_1 \neq y_2$. No eksponentfunkcijas ar bāzi $a \neq 1$ 10^0 īpašības seko, ka eksistē vienīgie reālie skaitļi x_1 un x_2, ka $a^{x_1} = y_1$ un $a^{x_2} = y_2$, pie tam $x_1 \neq x_2$ (jo pretējā gadījumā, t.i., ja $x_1 = x_2$, tad, acīmredzot, $y_1 = y_2$, kas ir pretrunā ar doto). Atliek ievērot, ka $x_1 = \log_a y_1$ un $x_2 = \log_a y_2$ saskaņā ar 7^0 īpašību. Tātad funkcija $\log_a x$ ir bijektīva.◀

9^0 $a^{\log_a x} = x$ *jebkuram* $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

▶ Saskaņā ar 7^0 īpašību atrodam:

$$\log_a\left(a^{\log_a x}\right) = \log_a x = \log_a(x),$$

no kurienes, ņemot vērā logaritmiskās funkcijas injektivitāti (skat. iepriekšējo īpašību), seko, ka $a^{\log_a x} = x$.◀

Pierādīto īpašību var pārformulēt šādi: logaritmiskās funkcijas $\log_a x$ un eksponentfunkcijas a^x kompozīcija ir vienāda ar identisko funkciju kopā $\mathbb{R}_{>0}$, t.i., ar funkciju $I_{\mathbb{R}_{>0}} : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, ka $I_{\mathbb{R}_{>0}}(x) = x$ jebkuram $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Citiem vārdiem sakot, ir spēkā šāda īpašība.

$9'^0$ $(a^x) \circ (\log_a x) = I_{\mathbb{R}_{>0}}(x)$ *jebkuram* $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

No 7^0, 8^0 un 9^0 īpašības seko, ka funkcijas a^x un $\log_a x$ ir savstarpēji inversas bijektīvas funkcijas, citiem vārdiem sakot, ir spēkā šāda īpašība.

10^0 *Logaritmiskā funkcija* $\log_a x$ *ar bāzi* $a \neq 1$ *un eksponentfunkcija* a^x *ar bāzi* $a \neq 1$ *ir savstarpēji inversas bijektīvas funkcijas.*

11^0 *Logaritmiskā funkcija* $\log_a x$ *ar bāzi* $a \neq 1$ *ir nepārtraukts grupas* $\mathbb{R}^\bullet$ *izomorfisms par grupu* $\mathbb{R}^+$.

► Tā kā logaritmiskā funkcija $\log_a x$ ir eksponentfunkcijas a^x ar bāzi $a \neq 1$ inversā funkcija (skat. 10^0 īpašību), bet eksponentfunkcija a^x ar bāzi $a \neq 1$ ir grupas $\mathbb{R}^+$ izomorfisms par grupu $\mathbb{R}^\bullet$, tad logaritmiskā funkcija $\log_a x$ ir nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^\bullet$ izomorfisms par grupu $\mathbb{R}^+$ (logaritmiskā funkcija ir nepārtraukta saskaņā ar 2^0 īpašību).◄

12^0 *Logaritmiskā funkcija* $\log_a x$ *ir stingri augoša, ja* $a > 1$*, un stingri dilstoša, ja* $0 < a < 1$.

► Īpašības patiesums seko no tā, ka logaritmiskā funkcija $\log_a x$ ir eksponentfunkcijas a^x ar bāzi $a \neq 1$ inversā funkcija (skat. 10^0 īpašību), bet eksponentfunkcija a^x ir stingri augoša, ja $a > 1$, un stingri dilstoša, ja $0 < a < 1$ (skat. eksponentfunkcijas 9^0 īpašību).◄

13^0 $\log_a\left(x^b\right) = b\log_a x$ *jebkuriem* $b \in \mathbb{R}$ *un* $x \in \mathbb{R}_{>0}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

► No vienas puses, saskaņā ar 9^0 īpašību iegūsim:

$$a^{\log_a x^b} = x^b.$$

No otras puses, izmantojot eksponentfunkcijas 7^0 īpašību un logaritmiskās funkcijas 9^0 īpašību, atrodam:

$$a^{b\log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^b = x^b.$$

No iegūtajām vienādībām, ņemot vērā eksponentfunkcijas ar bāzi $a \neq 1$ injektivitāti (kura seko no eksponentfunkcijas 9^0 īpašības), secinām, ka $\log_a\left(x^b\right) = b\log_a x$ jebkuriem $b \in \mathbb{R}$ un $x \in \mathbb{R}_{>0}$.◄

14^0 $\log_a x = \log_a c \cdot \log_c x$ *jebkuriem* $c, x \in \mathbb{R}_{>0}$*,* $c \neq 1$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

► No vienas puses, saskaņā ar 9^0 īpašību iegūsim:

$$a^{\log_a x} = x.$$

No otras puses, ņemot vērā eksponentfunkcijas 7^0 īpašību un logaritmiskās funkcijas 9^0 īpašību, atrodam:

$$a^{\log_a c\cdot\log_c x} = \left(a^{\log_a c}\right)^{\log_a x} = c^{\log_c x} = x.$$

Spriežot līdzīgi kā iepriekšējās īpašības pierādījumā, iegūsim vajadzīgo.◄

2.3.3. Teorēma par logaritmiskās funkcijas eksistenci un vienīgumu

2.4. teorēma. *Katram* $a > 0$*,* $a{\neq}1$*, eksistē vienīgā logaritmiskā funkcija ar bāzi* a *, t.i., funkcija* $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$*, kura apmierina 2.5. un 2.6. definīcijas nosacījumus 1), 2) un 3).*

► Tā kā $a > 0$, $a{\neq}1$, tad eksponentfunkcija a^x ir grupas $\mathbb{R}^+$ izomorfisms par grupu $\mathbb{R}^\bullet$. Tāpēc eksponentfunkcijas a^x inversais attēlojums ir grupas $\mathrm{R}^\bullet$ izomorfisms par grupu $\mathbb{R}^+$. Šis izomorfisms apmierina 2.5. un 2.6. definīcijas nosacījumus 1), 2) un 3), tātad šis izomorfisms ir logaritmiskā funkcija ar bāzi a. Logaritmiskās funkcijas eksistence ir pierādīta.

Ja eksistē divas funkcijas, kuras apmierina 2.5. un 2.6. definīcijas nosacījumus 1), 2) un 3), tad katra no šīm funkcijām ir eksponentfunkcijas ar bāzi a inversā funkcija. Tāpēc šīs funkcijas ir vienādas (skat. [7, 39. lpp.]).◄

2.13. piezīme. Spriežot līdzīgi kā lineārās funkcijas un eksponentfunkcijas gadījumā, var pierādīt, ka nepārtrauktības nosacījums 2.5. definīcijā var tikt nomainīts ar citu ekvivalentu nosacījumu, piemēram, ar stingro monotonitāti. Tiešām, monotona funkcija ir nepārtraukta, ja tās vērtību kopai nav caurumu (skat. [6, 39. lpp.]). Tā kā logaritmiskās funkcijas definīcijas kopa $D(\log_a x) = \mathbb{R}_{>0}$, tad tās vērtību kopa $R(\log_a x)$ ir nesanumurējama grupas $\mathbb{R}^+$ apakšgrupa. Tāpēc $R(\log_a x)$ ir visur blīva kopas $\mathbb{R}$ apakškopa saskaņā ar I nodaļas 1.1. teorēmu, un līdz ar to kopai $R(\log_a x)$ nav caurumu. Tātad stingri monotona funkcija, kura apmierina 2.5. un 2.6. definīcijas nosacījumus 1), 2) un 3), ir nepārtraukta (skat. 2.9. paragrāfa 5. uzdevumu). Iepriekš teikto ilustrēsim ar piemēru, taču vispirms pierādīsim dažus palīgapgalvojumus.

2.14. piezīme. *Jebkuram $a > 0$ eksistē galīga robeža $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x}$.*

► 1) Pieņemsim, ka $a \geq 1$. Kā jau tika pierādīts 2.6. piezīmē, tad funkcija $g(r) = \frac{a^r-1}{r}$ ir augoša kopā $\mathbb{Q} \cap (0;+\infty)$, tāpēc eksistē galīga robeža

$$\lim_{r\to 0,\, r\in\mathbb{Q}\cap(0;+\infty)} g(r) = \ell_a$$

Tā kā funkcija $f(x) = \frac{a^x-1}{x}$, $x > 0$, ir nepārtraukta, tad jebkuram $x \in (0;+\infty)$ ir spēkā

$$f(x) = \lim_{r\to x,\, r\in\mathbb{Q}} g(r).$$

Tagad pierādīsim, ka funkcija $f(x)$ arī ir augoša kopā $(0;+\infty)$. Pieņemsim, ka $0 < x' < x''$. Tad jebkuriem $r_n^{'}, r_n^{''} \in \mathbb{Q} \cap (0;+\infty)$, ka $x' < r_n^{'} < r_n^{''} < x''$ un $\lim\limits_{n\to\infty} r_n' = x'$, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n'' = x''$, no nevienādības $g(r_n^{'}) \leq g(r_n^{''})$ seko, ka

$$f(x') = \lim_{n\to\infty} g(r_n^{'}) \leq \lim_{n\to\infty} g(r_n^{''}) = f(x''),$$

kas arī pierāda, ka funkcija $f(x)$ arī ir augoša kopā $(0;+\infty)$.

Tā kā $f(x) \geq 0$, ja $a \geq 1$, tad eksistē galīga robeža $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$, savukārt, tā kā $\lim\limits_{r\to 0,\, r\in\mathbb{Q}\cap(0;+\infty)} g(r) = \ell_a$, tad $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \ell_a$.

Pieņemsim, ka $x \in (-\infty;0)$. Tā kā $\frac{a^x-1}{x} = \frac{a^x\left(a^{-x}-1\right)}{-x}$ un $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$, tad

$$\lim_{x\to 0-} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to 0-} a^x \frac{a^{-x}-1}{-x} = \ell_a.$$

Tātad

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ell_a \geq 0$$

2) Pieņemsim, ka $0 < a < 1$. Tad $b = \frac{1}{a} > 1$ un no vienādības $\frac{a^x-1}{x} = -\frac{b^{-x}-1}{-x}$ saskaņā ar iepriekš pierādīto iegūsim, ka arī šajā gadījumā eksistē galīga robeža $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ell_a \leq 0$.◄

2.15. piezīme. Atzīmēsim, ja $a = 1$, tad, acīmredzot, $\ell_a = 0$. Savukārt, $l_a \neq 0$, ja $a \neq 1$.

▶ Pierādīsim, ka $\ell_a \neq 0$, ja $a \neq 1$. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds $a \neq 1$, ka $\ell_a = 0$.

Noteiktības labad pieņemsim, ka $a > 1$. Tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $n \in \mathbb{N}$, ka skaitlim $r = \frac{1}{n}$ ir spēkā nevienādība $0 < \frac{a^r - 1}{r} < \varepsilon$. Pieņemsim, ka $k = 1, 2, \ldots, n$. Tad

$$0 < a - 1 = \sum_{k=1}^{n} \left(a^{kr} - a^{(k-1)r}\right) < n\,\frac{a\varepsilon}{n} = a\varepsilon,$$

no kurienes seko, ka $a = 1$, kas ir pretrunā ar to, ka $a > 1$.

Spriežot līdzīgi, iegūsim pretrunu arī gadījumā, kad $0 < a < 1$.◀

2.16. piezīme. Tagad 2.13. piezīmē teikto ilustrēsim ar piemēru, pierādot, ka eksistē tāds $e > 1$, ka

$$\ell_a = \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a.$$

▶ Apskatīsim funkciju $h : a \mapsto l_a$, kur $a \in (0; +\infty)$. Pierādīsim, ka šī funkcija ir monotons grupas $\mathbb{R}^\bullet$ homomorfisms par grupu $\mathbb{R}^+$. Pieņemsim, ka a un b ir patvaļīgi pozitīvi skaitļi.

Tā kā

$$(ab)^x - 1 = b^x\left(a^x - 1\right) + \left(b^x - 1\right),$$

tad

$$h(ab) = \lim_{x \to 0} \frac{(ab)^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} b^x \frac{a^x - 1}{x} + \lim_{x \to 0} \frac{b^x - 1}{x} = h(a) + h(b),$$

t.i., h ir grupas $\mathbb{R}^\bullet$ homomorfisms par grupu $\mathbb{R}^+$.

No otras puses, ja $0 < a < b$, tad $\frac{b}{a} > 1$. Tāpēc $\ell_{\frac{b}{a}} > 0$, no kurienes seko, ka $h(b) - h(a) = h\left(\frac{b}{a}\right) > 0$. Tātad h ir stingri augoša funkcija.

Ņemot vērā 2.13. piezīmē teikto, secinām, ka eksistē vienīgs skaitlis e, $e > 1$, ka $h(a) = \log_e a$.◀

2.17. piezīme. Skaitļa $x \in (0; +\infty)$ logaritmu ar šo bāzi e sauc par skaitļa x naturāllogaritmu un apzīmē ar $\ln x$, bet skaitli e sauc par **naturāllogaritma bāzi**. Tātad

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a.$$

Atsevišķā gadījumā, ja $a = e$, iegūsim:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln e = 1.$$

Pēdējā formula ļauj aksiomātiski definēt skaitli e kā tādu skaitli $a > 1$, ka

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = 1.$$

Tādējādi 2.16. piezīmes piemērā ir pierādīta skaitļa e, kas apmierina šo aksiomātisko definīciju, eksistence un vienīgums.

2.18. piezīme. Tā kā eksistē galīga robeža $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ (skat. 2.14. piezīmi), tad eksponentfunkcija a^x ir diferencējama punktā $x=0$. Vēl jo vairāk, tā kā $\frac{a^{x+y}-a^x}{y}=a^x\frac{a^y-1}{y}$, tad eksponentfunkcija a^x ir diferencējama jebkurā punktā $x\in\mathbb{R}$, pie tam $(a^x)'=a^x\ln a$.

2.4. Pakāpes funkcija kā nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^\bullet$ homomorfisms sevī

2.4.1. Pakāpes funkcijas definīcija

2.7. definīcija. Par **pakāpes funkciju** sauc jebkuru nepārtrauktu grupas $\mathbb{R}^\bullet$ homomorfismu sevī, t.i., jebkuru funkciju $f:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$, ka
1) $f(xy)=f(x)\cdot f(y)$ jebkuriem $x,y\in\mathbb{R}_{>0}$;
2) f - nepārtraukta funkcija.

2.8. definīcija. Par **pakāpes funkciju ar kāpinātāju** a, kur $a\in\mathbb{R}$, sauc patvaļīgu pakāpes funkciju, kurai piemīt papildīpašība:
3) $f(2)=2^a$.
Pakāpes funkciju ar bāzi a apzīmē ar x^a.

2.19. piezīme. 2.8. definīcijas 3) nosacījums ir jāsaprot šādi: pakāpes funkcijas ar kāpinātāju a vērtība punktā $x=2$ ir vienāda ar eksponentfunkcijas ar bāzi 2 vērtību punktā $x=a$. Skaitlim 2 šajā nosacījumā nav nekādas speciālas lomas, tikpat labi šajā nosacījumā skaitļa 2 vietā varēja ņemt jebkuru pozitīvu skaitli, kurš nav vienāds ar 1, piemēram, varēja pieprasīt, lai $f(101)=101^a$ vai $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^a$. Izņēmums ir skaitlis 1, jo tam 3) nosacījums ir 1) nosacījuma sekas. Tiešām, šajā gadījumā 3) nosacījumam ir veids: $f(1)=1^a=1$. Taču tieši tāda paša vienādība izriet no 1) nosacījuma: $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)\cdot f(1)$, no kurienes seko, ka $f(1)=1$, jo $f(1)\neq 0$ (attēlojums f ir definēts kopā $\mathbb{R}_{>0}$ un pieņem vērtības šajā pašā kopā!).

2.20. piezīme. 3) nosacījumā 2^a (101^a, $\left(\frac{\pi}{3}\right)^a$) apzīmē eksponentfunkcijas ar bāzi 2 (101, $\frac{\pi}{3}$) vērtību punktā $x=a$. Tāpēc pakāpes funkciju x^a var definēt arī kā funkciju, kas jebkuram pozitīvam skaitlim x piekārto eksponentfunkcijas ar bāzi x vērtību punktā a.

2.21. piezīme. Dažām a vērtībām pakāpes funkciju ir iespējams turpināt kopā, kura satur $\mathbb{R}_{>0}$ kā īstu apakškopu. Apskatīsim piemērus.

Ja $a=n$, $n\in\mathbb{N}$, tad pakāpes funkciju x^a var turpināt kopā $\mathbb{R}=\mathbb{R}_{<0}\cup\{0\}\cup\mathbb{R}_{>0}$ ($\mathbb{R}_{<0}$ - visu negatīvo reālo skaitļu kopa), ja uzskatīt, ka $0^n=0$ un jebkuram $x\in\mathbb{R}_{<0}$ ir spēkā

$$x^n=\begin{cases}(-x)^n, & \text{ja } n \text{ - pāra skaitlis,}\\ -(-x)^n, & \text{ja } n \text{ - nepāra skaitlis.}\end{cases}$$

Spriežot līdzīgi, ja $a=-n$, $n\in\mathbb{N}$, tad pakāpes funkciju x^a var turpināt kopā $\mathbb{R}\setminus\{0\}=\mathbb{R}_{<0}\cup\mathbb{R}_{>0}$.

Ja $a=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, un n ir nepāra skaitlis, tad pakāpes funkciju x^a var turpināt kopā $\mathbb{R}$. Savukārt, ja n - pāra skaitlis, tad pakāpes funkciju x^a nevar turpināt kopā $\mathbb{R}$, taču var turpināt kopā $\{0\}\cup\mathbb{R}_{>0}$ ar vienādību $0^a=0$, ja ņemt vērā, ka $\lim\limits_{x\to 0+}x^a=0$.

Tā kā eksponentfunkcijai ar bāzi $x > 0$ ir spēkā vienādība $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x$ (skat. eksponentfunkcijas 7^0 īpašību), tad funkcija $x^{\frac{1}{n}}$ var tikt uzlūkota kā funkcijas x^n inversā funkcija (funkcijas x^n maksimālajā injektivitātes intervālā). Piemēram, funkcija $x^{\frac{30}{17}}$ ir definēta visu reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$, bet funkcija $x^{\frac{17}{30}}$ - tikai kopā $\{0\} \cup \mathbb{R}_{>0}$. Tāpēc, lai nevajadzētu ņemt vērā pakāpes funkcijas kāpinātāja a specifiku, pakāpes funkcija tiks aplūkota kopā $\mathbb{R}_{>0}$.

2.4.2. Teorēma par pakāpes funkcijas eksistenci un vienīgumu

2.5. teorēma. *Jebkuram $a > 0$ eksistē vienīgā pakāpes funkcija ar kāpinātāju a, t.i., funkcija $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, kura apmierina 2.7. un 2.8. definīcijas nosacījumus 1), 2) un 3).*

► Apskatīsim nepārtrauktus homomorfismus $f : \mathbb{R}^\bullet \to \mathbb{R}^+$, $f(2) = 1$, un $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^\bullet$, $g(1) = 2^a$, kuri eksistē saskaņā ar attiecīgi 1.4. un 1.3. teorēmu. Pieņemsim, ka $h = g \circ f$. Acīmredzot, $h : \mathbb{R}^\bullet \to \mathbb{R}^\bullet$ - nepārtraukts homomorfisms, pie tam

$$h(2) = (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2^a.$$

Tātad h ir pakāpes funkcija ar kāpinātāju a. Pakāpes funkcijas ar kāpinātāju a eksistence ir pierādīta.

Pieņemsim, ka funkcijas h_1 un h_2 apmierina 2.7. un 2.8. definīcijas nosacījumus 1), 2) un 3), bet $f(x) = \log_2(x)$. Apskatīsim funkcijas $g_1 = h_1 \circ f^{-1}$ un $g_2 = h_2 \circ f^{-1}$. Acīmredzot, f^{-1} ir nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms par grupu $\mathbb{R}^\bullet$, bet g_1 un g_2 - nepārtraukti grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfismi grupā $\mathbb{R}^\bullet$, pie tam

$$g_1(1) = h_1(f^{-1}(1)) = h_1(2) = 2^a, \quad g_2(1) = h_2(f^{-1}(1)) = h_2(2) = 2^a.$$

Tātad g_1 un g_2 ir eksponentfunkcijas ar bāzi 2^a. No 1.3. teorēmas seko, ka $g_1 = g_2$, t.i., $g_1(x) = g_2(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Tagad pierādīsim, ka $h_1 = h_2$, t.i., $h_1(x) = h_2(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds $x_0 \in \mathbb{R}_{>0}$, ka $h_1(x_0) \neq h_2(x_0)$. Tad, acīmredzot, $g_1(y_0) \neq g_2(y_0)$, kur $y_0 = \log_2 x_0$, kas ir pretrunā ar iepriekš teikto. Pakāpes funkcijas ar kāpinātāju a vienīgums ir pierādīts.◄

2.22. piezīme. No vienādības $h = g \circ f$ seko, ka jebkuram $x \in \mathbb{R}_{>0}$ ir spēkā

$$x^a = (2^a)^{\log_2 x}. \tag{2.11}$$

2.4.3. Pakāpes funkcijas īpašības

Pirmās divas īpašības tieši seko no 2.7. definīcijas, izmantojot iepriekš ievesto pakāpes funkcijas apzīmējumu x^a, $a \in \mathbb{R}$.

$\mathbf{1^0}$ *$(xy)^a = x^a y^a$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$.*

$\mathbf{2^0}$ *x^a ir nepārtraukta funkcija.*

Ērtības labad kā nākamo īpašību formulēsim 2.8. definīcijas 3) nosacījumu.

$\mathbf{3^0}$ *Ja $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ ir pakāpes funkcija ar kāpinātāju a, tad $f(2) = 2^a$.*

4^0 $1^a = 1$.

▶ Ja $f(x) = x^a$, tad $f(x) = f(1 \cdot x) = f(1) \cdot f(x)$. Tā kā $f(x) > 0$, tad $f(1) = 1$, t.i., $1^a = 1$.◀

5^0 $\left(\frac{1}{x}\right)^a = \frac{1}{x^a}$ *jebkuram* $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

▶ Ja $f(x) = x^a$, tad $1 = f(1) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$, no kurienes seko, ka $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$, t.i., $\left(\frac{1}{x}\right)^a = \frac{1}{x^a}$.◀

6^0 $(x^a)^b = x^{ab}$ *jebkuram* $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

▶ Ja $f(x) = x^a$ un $g(x) = (f(x))^b$, tad jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ ir spēkā

$$g(xy) = [f(xy)]^b = [f(x)\ f(y)]^b = [f(x)]^b\ [f(y)]^b = g(x)\ g(y).$$

Otrā vienādība ir patiesa saskaņā ar 2.7. definīcijas 1) nosacījumu, bet trešā - eksponentfunkcijas 6^0 īpašību. Funkcijas $g(x)$ nepārtrauktība seko no pakāpes funkcijas $f(x)$ nepārtrauktības (skat. 2.7. definīcijas 2) nosacījumu). Tā kā $g(2) = \big(f(2)\big)^b = (2^a)^b = 2^{ab}$, tad no iepriekš teiktā izriet, ka $g(x)$ - pakāpes funkcija ar kāpinātāju ab, t.i. $g(x) = x^{ab}$. Tāpēc $(x^a)^b = x^{ab}$.◀

7^0 *Jebkuram* $x \in \mathbb{R}_{>0}$ *ir spēkā* $x^0 = 1$.

▶ Ņemot $a = 0$ formulā (2.11), iegūsim:

$$x^0 = \left(2^0\right)^{\log_2 x} = 1^{\log_2 x} = 1$$

(pēdējā vienādība ir spēkā saskaņā ar 4^0 īpašību).◀

8^0 *Funkcija* x^a *ir stingri augoša, ja* $a > 0$*, un stingri dilstoša, ja* $a < 0$.

▶ No vienādības (2.11) seko, ka

$$x^a = (2^a)^{\log_2 x} = 2^{a \log_2 x}.$$

Acīmredzot, funkcija $a \log_2 x$ ir stingri augoša, ja $a > 0$, un stingri dilstoša, ja $a < 0$. Ņemot vērā, ka eksponentfunkcija ar bāzi 2 ir stingri augoša, secinām, ka funkcija $2^{a \log_2 x}$ ir stingri augoša, ja $a > 0$, un stingri dilstoša, ja $a < 0$.◀

9^0 *Funkcija* x^a *ir grupas* $\mathbb{R}^\bullet$ *izomorfisms par sevi tad un tikai tad, kad* $a \neq 0$.

▶ Saskaņā ar formulu (2.11):

$$x^a = (2^a)^{\log_2 x},$$

t.i., pakāpes funkcija ar kāpinātāju a ir eksponentfunkcijas ar bāzi 2^a un logaritmiskās funkcijas ar bāzi 2 kompozīcija. Tā kā logaritmiskā funkcija ar bāzi 2 ir grupas

$\mathbb{R}^\bullet$ izomorfisms par grupu $\mathbb{R}^+$ (skat. logaritmiskās funkcijas 11^0 īpašību), bet eksponentfunkcija ar bāzi 2^a ir grupas $\mathbb{R}^+$ izomorfisms par grupu $\mathbb{R}^\bullet$ tad un tikai tad, kad $2^a \neq 1$, t.i., $a \neq 0$ (skat. eksponentfunkcijas 11^0 īpašību), tad pakāpes funkcija ar kāpinātāju a ir grupas $\mathbb{R}^\bullet$ izomorfisms par sevi tad un tikai tad, kad $a \neq 0$, jo izomorfismu kompozīcija arī ir izomorfisms.◀

2.23. piezīme. Kā jau iepriekš tika atzīmēts (skat. 2.12. un 2.13. piezīmi), tad nepārtrauktības nosacījumu eksponentfunkcijas un logaritmiskās funkcijas definīcijā var nomainīt ar citiem ekvivalentiem nosacījumiem, piemēram, ar monotonitātes nosacījumu. No formulas (2.11) seko, ka tas ir spēkā arī pakāpes funkcijai, t.i., pakāpes funkciju var definēt kā monotonu grupas $\mathbb{R}^\bullet$ homomorfismu sevī (skat. 2.9. paragrāfa 6. uzdevumu).

2.5. Eksponenciālā funkcija kā nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{S}$

Lai arī kāds no daudzajiem sinusa un kosinusa trigonometrisko funkciju definēšanas paņēmieniem netiktu apskatīts, būs līdzīgas gan attiecīgās definīcijas un īpašības, gan to izmantošana uzdevumu risināšanā.

Sinusa un kosinusa trigonometriskās funkcijas ir viena otru "pavadošas" funkcijas, tāpēc ir dabiski tās aplūkot vienlaicīgi, t.i., kā nepārtrauktu funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, ka $f(x)=(\cos x;\sin x)$ jebkuram $x\in\mathbb{R}$ (komplekso skaitļu kopa $\mathbb{C}$ tiek interpretēta kā reālo skaitļu sakārtotu pāru kopa ar attiecīgajām saskaitīšanas un reizināšanas īpašībām). Tā kā sinusa un kosinusa trigonometriskajām funkcijām ir jāapmierina identitāte $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, $x\in\mathbb{R}$, tad var secināt, ka ir jāaplūko nepārtrauktu funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{S}$, kur $\mathbb{S}$ ir visu komplekso skaitļu, kuru modulis ir vienāds ar 1, kopa, citiem vārdiem sakot, $\mathbb{S}$ ir vienības riņķa līnija kompleksajā plaknē $\mathbb{C}$. Kopa $\mathbb{S}$ ir apveltīta ar dabisku grupas operāciju - kopas $\mathbb{S}$ elementu reizināšanu. Tas ļauj $\mathbb{S}$ traktēt kā multiplikatīvu grupu. Lai šī funkcija f būtu līdzīga iepriekš aplūkotajām lineārai funkcijai, eksponentfunkcijai, logaritmiskai un pakāpes funkcijai, tad funkcijai f ir jābūt ne vienkārši nepārtrauktam kopas $\mathbb{R}$ attēlojumam kopā $\mathbb{S}$, bet gan nepārtrauktam grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfismam grupā $\mathbb{S}$. Šādus nepārtrauktus homomorfismus sauc par eksponenciālajām funkcijām jeb vienkārši par eksponentēm.

Nepārtrauktam kopas $\mathbb{R}$ attēlojumam kopā $\mathbb{S}$ var sniegt šādu mehānisku interpretāciju: kopu $\mathbb{R}$ uzlūko kā bezgalīgu diegu, kuru "uztin" uz riņķa līnijas. Vārds "uztin" šajā gadījumā nav īpaši veiksmīgs, jo diegs var pārklāt tikai riņķa līnijas daļu, bet var pārklāt arī visu riņķa līniju, pie tam tas patvaļīgā vietā un veidā var mainīt uztīšanas virzienu. Taču, ja attēlojums f ir arī homomorfisms (attiecībā pret saskaitīšanu kopā $\mathbb{R}$ un reizināšanu kopā $\mathbb{S}$), tad vārds "uztin" samērā precīzi raksturo attēlojumu f, jo patvaļīgu eksponenti var intuitīvi aprakstīt šādi: punkti $\ldots-2a$, $-a$, 0, a, $2a$, $\ldots$, kur a ir kāds pozitīvs skaitlis, attēlojas par punktu $1\in\mathbb{S}$, pie tam katrs no nogriežņiem

$$\ldots\ [-2a;-a],\ [-a;0],\ [0;a],\ [a;2a],\ \ldots$$

vienmērīgi, periodiski un konstantā virzienā pārklāj visu riņķa līniju $\mathbb{S}$. Attēlojuma f periodiskums ir nepārtrauktības un homomorfisma sekas.

2.5.1. Eksponentes definīcija

2.9. definīcija. Par **eksponenciālo funkciju** (vai vienkārši par **eksponenti**) sauc jebkuru nepārtrauktu grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfismu grupā $\mathbb{S}$, t.i., jebkuru funkciju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{S}$, ka

1^0 $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ jebkuriem $x,y\in\mathbb{R}$;

2^0 f - nepārtraukta funkcija.

Neskatoties uz to, ka eksponentes definīcija (skat. 2.9. definīciju) ir ļoti līdzīga eksponentfunkcijas definīcijai (skat. 2.3. definīciju), tajās iet runa par principiāli dažādām funkcijām:

1) kaut arī eksponentei un eksponentfunkcijai ir viena un tā paša definīcijas kopa $\mathbb{R}$, tomēr tām ir dažādas vērtību kopas, jo eksponentfunkcijas vērtību kopa ir vienāda ar visu pozitīvo reālo skaitļu kopu, bet eksponentei - ar visu komplekso skaitļu, kuru modulis ir vienāds ar 1, kopu; šo vērtību kopu vienīgais kopīgais elements ir skaitlis 1, kurš ir grupu $\mathbb{R}^\bullet$ un $\mathbb{S}$ neitrālais elements;

2) eksponentfunkcijas gadījumā $f(x)\cdot f(y)$ apzīmē pozitīvu reālu skaitļu reizinājumu, bet eksponentes gadījumā - kompleksu skaitļu, kuru modulis ir vienāds ar 1, reizinājumu.

2.5.2. Eksponentes īpašības

3^0 $f(0)=1$.

▶ Tā kā $f(x)=f(x+0)=f(x)f(0)$ un $f(x)\neq 0$ (jo $|f(x)|=1$), tad $f(0)=1$.◀

4^0 $f(-x)=\overline{f(x)}=\frac{1}{f(x)}$, *kur* $\overline{f(x)}$ *ir skaitļa* $f(x)$ *kompleksi saistītais skaitlis.*

▶ Tā kā
$$1=f(0)=f(x-x)=f(x+(-x))=f(x)f(-x),$$
tad
$$f(-x)=\frac{1}{f(x)}=\frac{f(x)\overline{f(x)}}{f(x)}=\overline{f(x)}$$
(izmanto faktu, ka $|f(x)|^2=f(x)\overline{f(x)}=1$).◀

No pēdējās īpašības seko, ka kopa $f(\mathbb{R})$ ir simetriska attiecībā pret reālo asi, citiem vārdiem sakot, kopa $f(\mathbb{R})$ ir simetriska attiecībā pret vienības riņķa līnijas horizontālo diametru.

5^0 $f(x-y)=f(x)\overline{f(y)}$ *jebkuriem* $x,y\in\mathbb{R}$.

▶ $f(x-y)=f(x+(-y))=f(x)f(-y)=f(x)\overline{f(y)}$.◀

6^0 *Eksponentes* f *kodols* $f^{-1}(1)$ *ir grupas* $\mathbb{R}^+$ *slēgta apakšgrupa.*

▶ Pieņemsim, ka $H=\ker f=f^{-1}(1)=\{t\in\mathbb{R}|f(t)=1\}$ - eksponentes f kodols. Ja $t_1,t_2\in H$, tad $f(t_1+t_2)=f(t_1)f(t_2)=1$, t.i., $t_1+t_2\in H$; ja $t\in H$, tad $f(-t)=\overline{f(t)}=\overline{1}=1$, t.i., $-t\in H$; no 3^0 īpašības seko, ka $f(0)=1$, t.i., $0\in H$. Tātad H ir grupas $\mathbb{R}^+$ apakšgrupa.

Apskatīsim patvaļīgu apakšgrupas H skaitļu virkni (t_n), kura konverģē uz t_0. Saskaņā ar 2^0 īpašību attēlojums f ir nepārtraukts, tāpēc $f(t_n)\xrightarrow[n\to\infty]{} f(t_0)$. Tā kā $f(t_n)=1$ jebkuram $n\in\mathbb{N}$, tad arī $f(t_0)=1$, t.i., $t_0\in H$. Tātad H ir grupas $\mathbb{R}^+$ slēgta apakšgrupa.◀

7^0 *Ja* $H=\ker f$ *ir eksponentes kodols, tad vai nu* $H=R$, *vai nu* $H=\{0\}$, *vai arī* $H=\{ma|m\in\mathbb{Z}\}$, *kur* $a>0$.

▶ Īpašība seko no 6^0 īpašības un 1.1. teorēmas sekām (skat. I nodaļu).◀

8^0 *Divu eksponenšu attiecība ir eksponente.*

► Tā kā eksponente pieņem tikai nenulles vērtības, tad divu eksponenšu f un g attiecība $h = \frac{f}{g}$ ir definēta jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Funkcija h ir nepārtraukta kā divu nepārtrauktu funkciju dalījums, pie tam jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$|h(x)| = \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = \frac{1}{1} = 1,$$

un jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$ izpildās

$$h(x+y) = \frac{f(x+y)}{g(x+y)} = \frac{f(x)f(y)}{g(x)g(y)} = \frac{f(x)}{g(x)}\frac{f(y)}{g(y)} = h(x)h(y).$$

Tātad h - eksponente.◄

9^0 *Ja $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{S}$ - eksponente, tad $f(\mathbb{R})$ - kopas $\mathbb{S}$ slēgta apakškopa.*

► Pieņemsim, ka $z_0 \in \mathbb{S}$ ir patvaļīgs kopas $f(\mathbb{R})$ kontaktpunkts. Pierādīsim, ka $z_0 \in f(\mathbb{R})$.

Ja $z_0 = 1$, tad no 3^0 īpašības seko, ka $1 = f(0) \in f(\mathbb{R})$.

Apskatīsim gadījumu, kad $z_0 \neq 1$. Tad skaitļa z_0 reālā daļa $x_0 = \operatorname{Re} z_0$ apmierina nevienādības $-1 \leq x_0 < 1$. Saskaņā ar 4^0 īpašību kopa $f(\mathbb{R})$ ir simetriska attiecībā pret reālo asi, tāpēc ir pietiekami apskatīt gadījumu, kad $y_0 = \operatorname{Im} z_0 \geq 0$.

Tā kā $z_0 = x_0 + iy_0$, $-1 \leq x_0 < 1$, $y_0 \geq 0$, $y_0 = \sqrt{1 - x_0^2}$, tad $2x_0 < 1 + x_0$ un $x_0 < \frac{1+x_0}{2} < 1$, no kurienes seko, ka

$$x_0 < \frac{1+x_0}{2} < \sqrt{\frac{1+x_0}{2}} < 1 \tag{2.12}$$

Ja $w_0 = u_0 + iv_0 \in \mathbb{S}$ ir tāds, ka $u_0 = \operatorname{Re} w_0 = \sqrt{\frac{1+x_0}{2}}$, $v_0 \geq 0$, tad $v_0 = \operatorname{Im} w_0 = \sqrt{\frac{1-x_0}{2}}$, bet $w_0 = \sqrt{\frac{1+x_0}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x_0}{2}}$, no kurienes seko, ka $w_0^2 = x_0 + i\sqrt{1 - x_0^2} = x_0 + iy_0 = z_0$. Atliek ievērot, ja eksistē tāds $t \in \mathbb{R}$, ka $f(t) = w_0$, tad $f(2t) = f(t)f(t) = w_0^2 = z_0$, un tāpēc $z_0 \in f(\mathbb{R})$.

Pierādīsim, ka eksistē tāds $t \in \mathbb{R}$, ka $f(t) = w_0$. Šim nolūkam apskatīsim palīgfunkciju $g = P_1 \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kur $P_1 : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ - funkcija, ka $P_1(z) = \operatorname{Re} z_0$ jebkuram $z \in \mathbb{S}$. Acīmredzot, funkcija g ir nepārtraukta, pie tam $g(0) = (P_1 \circ f)(0) = P_1(f(0)) = P_1(1) = 1$. Tā kā z_0 ir kopas $f(\mathbb{R})$ kontaktpunkts, tad eksistē kopas $f(\mathbb{R})$ punktu virkne (z_n), kura konverģē kopā $\mathbb{S}$ uz punktu z_0. Pieņemsim, ka $z_n = x_n + iy_n$. Tā kā $z_n \in f(\mathbb{R})$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$, tad eksistē reālu skaitļu virkne (t_n), ka $f(t_n) = z_n$. Atrodam: $x_n = \operatorname{Re} z_n = P_1(z_n) = (P_1 \circ f)(t_n) = g(t_n)$. Tā kā $z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_0$, tad $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$. Tāpēc, ņemot vērā (2.12), seko, ka eksistē tāds x_N, ka $x_0 < x_N < \sqrt{\frac{1+x_0}{2}} < 1$. Tā kā $g(0) = 1$ un $g(t_N) = x_N$, tad

$$g(t_N) < \sqrt{\frac{1+x_0}{2}} < g(0). \tag{2.13}$$

Funkcija g ir intervālā $\mathbb{R}$ nepārtraukta funkcija, tāpēc saskaņā ar Bolcano teorēmu par starpvērtībām tā pieņem jebkuru vērtību starp $g(t_N)$ un $g(0) = 1$, t.i., eksistē tāds t, $t_N < t < 0$, ka $g(t) = \sqrt{\frac{1+x_0}{2}}$. Tātad $f(t) = \sqrt{\frac{1+x_0}{2}} + i\sqrt{\frac{1-x_0}{2}} = w_0$, no kurienes, ņemot vērā iepriekš teikto, seko, ka $z_0 \in f(\mathbb{R})$. Tādējādi $f(\mathbb{R})$ - kopas $\mathbb{S}$ slēgta apakškopa.◄

2.5.3. Eksponentes periodiskums

2.6. teorēma. *Pieņemsim, ka $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{S}$ ir patvaļīga eksponente, kura ir atšķirīga no konstantes. Tad eksistē tāds pozitīvs reāls skaitlis a, ka $f(t \pm a) = f(t)$ jebkuram $t \in \mathbb{R}$, pie tam funkcija f intervālu $[0; a)$ bijektīvi attēlo par visu riņķa līniju $\mathbb{S}$.*

► Ja $H = \ker f$ - eksponentes f kodols, tad saskaņā ar 7^0 īpašību vai nu $H = \mathbb{R}$, vai nu $H = \{0\}$, vai arī $H = \{ma | m \in \mathbb{Z}\}$, kur $a > 0$.

Gadījums, kad $H = \mathbb{R}$, nav iespējams, jo šajā gadījumā $f(t) = 1$ jebkuram $t \in \mathbb{R}$, taču tas ir pretrunā ar to, ka f nav konstante.

Pieņemsim, ka $H = \{0\}$. Tad f - injekcija. Tiešām, ja $f(t_1) = f(t_2)$, tad saskaņā ar 5^0 īpašību atrodam: $f(t_1 - t_2) = f(t_1)\overline{f(t_2)} = 1 \cdot 1 = 1$, no kurienes seko, ka $t_1 - t_2 \in H$, t.i., $t_1 - t_2 = 0$, t.i., $t_1 = t_2$. No 1.5. teorēmas (skat. I nodaļu) seko, ka attēlojums f nav sirjektīvs. Pieņemsim, ka $z_0 \in \mathbb{S} \setminus f(\mathbb{R})$, bet $h : \mathbb{S} \setminus \{z_0\} \to \mathbb{R}$ - stereogrāfiska projekcija ar centru punktā z_0. Tātad h ir riņķa līnijas $\mathbb{S}$, no kuras ir izmests punkts z_0, homeomorfisms par kopu $\mathbb{R}$. Tad $g = h \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir nepārtraukta injektīva funkcija. No 1.3. teorēmas (skat. I nodaļu) seko, ka funkcija g ir stingri monotona. Pie tam kopa $g(\mathbb{R})$ ir

1) slēgta, jo $g(\mathbb{R}) = h\big(f(\mathbb{R})\big)$, $f(\mathbb{R})$ ir slēgta kopa saskaņā ar 9^0 īpašību, bet attēlojums h ir homeomorfisms;

2) ierobežota, jo $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{S} \setminus \{z_0\}$ (skat. I nodaļu, 1.4. piezīmi pēc 1.5. teorēmas);

3) intervāls, jo $g(\mathbb{R})$ ir intervāla nepārtraukts attēls (skat. I nodaļas 1.3. teorēmu).

No iepriekš teiktā seko, ka $g(\mathbb{R})$ ir nogrieznis. Tātad stingri monotona funkcija g attēlo kopu $\mathbb{R}$ par nogriezni $g(\mathbb{R})$. Tad inversā funkcija g^{-1}, kura, protams, arī ir stingri monotona, nogriezni $g(\mathbb{R})$ attēlos par neierobežotu kopu $\mathbb{R}$. Pretruna. Tātad gadījums, kad $H = \{0\}$, arī nav iespējams.

Tagad apskatīsim gadījumu, kad $H = \{ma | m \in \mathbb{Z}\}$, kur $a > 0$. Tad $a \in H$, t.i., $f(a) = 1$. Atrodam:

$$f(t + a) = f(t)f(a) = f(t)1 = f(t),$$
$$f(t - a) = f(t)f(-a) = f(t)\overline{f(a)} = f(t)1 = f(t).$$

Tātad f ir periodiska funkcija ar periodu a.

Pierādīsim, ka a ir funkcijas f galvenais periods. Pieņemsim, ka eksistē tāds skaitlis b, ka $0 < b < a$, un b ir funkcijas f periods, t.i., jebkuram $t \in \mathbb{R}$ ir spēkā $f(t + b) = f(t)$. Tā kā $f(t + b) = f(t)f(b)$, tad $f(t)f(b) = f(t)$, no kurienes, ņemot vērā, ka $f(t) \neq 0$, atrodam, ka $f(b) = 1$, t.i., $b \in H$. Taču $b \neq ma$ jebkuram $m \in \mathbb{Z}$. Pretruna. Tātad a ir funkcijas f galvenais periods.

Tagad pierādīsim, ka funkcija f intervālu $[0; a)$ bijektīvi attēlo par visu riņķa līniju $\mathbb{S}$. Vispirms pierādīsim, ka attēlojums f ir injektīvs kopā $[0; a)$. Pieņemsim pretējo, ka $0 \leq t_1 < t_2 < a$ un $f(t_1) = f(t_2)$. Tad $f(t_1 - t_2) = 1$, t.i., $t_1 - t_2 \in H$. Taču $t_1 - t_2 \notin H$, jo $0 < t_2 - t_1 < a$. Iegūtā pretruna pierāda, ka attēlojums f - injektīvs kopā $[0; a)$.

Pierādīsim, ka attēlojums f nogriezni $\left[0; \frac{a}{4}\right]$ sirjektīvi attēlo par vienu no riņķa līnijas ceturtdaļām. Tā kā $1 = f(a) = f\left(4\frac{a}{4}\right) = \left(f\left(\frac{a}{4}\right)\right)^4$, tad skaitlis $f\left(\frac{a}{4}\right)$ ir vienādojuma $z^4 - 1 = 0$ sakne. Pēdējam vienādojumam ir četras saknes: $1, -1, i, -i$. Tā kā $0 < \frac{a}{4} < a$, tad $f\left(\frac{a}{4}\right) \neq 1$. Pierādīsim, ka $f\left(\frac{a}{4}\right) \neq -1$. Tiešām, ja pieņemt pretējo, ka $f\left(\frac{a}{4}\right) = -1$, tad $f\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(\frac{a}{4} + \frac{a}{4}\right) = \left(f\left(\frac{a}{4}\right)\right)^2 = (-1)^2 = 1$, kas ir pretrunā ar to, ka $0 < \frac{a}{2} < a$. Atliek divas iespējas: $f\left(\frac{a}{4}\right) = i$ vai $f\left(\frac{a}{4}\right) = -i$. Pieņemsim, ka $f\left(\frac{a}{4}\right) = i$. Apskatīsim funkciju $P_1 : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$, ka $P_1(z) = \operatorname{Re} z$ jebkuram $z \in \mathbb{S}$, un funkciju $P_2 : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$, ka $P_2(z) = \operatorname{Im} z$ jebkuram $z \in \mathbb{S}$. Tad funkcijas $g_1 = P_1 \circ f$ un $g_2 = P_2 \circ f$, acīmredzot, ir nepārtrauktas. Aplūkosim šīs funkcijas nogriežnī $\left[0; \frac{a}{4}\right]$ un pārliecināsimies, ka tās ir nenegatīvas šajā nogriežnī. Vispirms atzīmēsim, ka

$$g_1(0) = (P_1 \circ f)(0) = P_1(f(0)) = P_1(1) = 1,$$
$$g_1\left(\frac{a}{4}\right) = P_1\left(f\left(\frac{a}{4}\right)\right) = P_1(i) = 0.$$

Ja pieņemt pretējo, ka eksistē tāds t, $0 < t < \frac{a}{4}$, ka $g_1(t) < 0$, tad saskaņā ar Bolcano teorēmu par starpvērtībām eksistē tāds t_0, $0 < t_0 < t$, ka $g_1(t_0) = 0$. Tāpēc $f(t_0) = \pm i$. Taču, no vienas puses, $f(t_0) \neq i$, jo funkcija f ir injektīva intervālā $[0; a)$, bet $0 < t_0 < \frac{a}{4} < a$ un $f\left(\frac{a}{4}\right) = i$; no otras puses, $f(t_0) \neq -i$, jo funkcija f ir injektīva intervālā $[0; a)$, bet $0 < \frac{a}{4} < \frac{3a}{4} < a - t_0 < a$ un $f(a - t_0) = f(a)\overline{f(t_0)} = 1i = i$. Iegūtā pretruna pierāda, ka funkcija g_1 ir nenegatīva nogriežnī $\left[0; \frac{a}{4}\right]$. Spriežot līdzīgi, pierāda, ka arī funkcija g_2 ir nenegatīva nogriežnī $\left[0; \frac{a}{4}\right]$ (atzīmēsim tikai, ka $g_2(0) = 0$ un $g_2\left(\frac{a}{4}\right) = 1$). Tā kā nogriežņa nepārtraukts attēls ir nogrieznis (skat. I nodaļas 1.3. teorēmu), tad $g_1\left(\left[0; \frac{a}{4}\right]\right) = [0; 1]$ un $g_2\left(\left[0; \frac{a}{4}\right]\right) = [0; 1]$. Tātad kopa $f\left(\left[0; \frac{a}{4}\right]\right)$ sakrīt ar riņķa līnijas pirmo ceturtdaļu.

Tagad aplūkosim funkciju f nogriežnī $\left[\frac{a}{4}; \frac{a}{2}\right]$. Funkcija $u = t - \frac{a}{4}$ nogriezni $\left[\frac{a}{4}; \frac{a}{2}\right]$ attēlo par nogriezni $\left[0; \frac{a}{4}\right]$, pie tam jebkuram $u \in \left[0; \frac{a}{4}\right]$ ir spēkā $f(t) = f\left(u + \frac{a}{4}\right) = f(u)\, f\left(\frac{a}{4}\right) = if(u)$. Saskaņā ar iepriekš pierādīto kopa $f\left(\left[0; \frac{a}{4}\right]\right)$ sakrīt ar riņķa līnijas pirmo ceturtdaļu, bet reizināšana ar komplekso skaitli i ir kopas $\mathbb{S}$ punktu rotācija ar centru punktā $O(0; 0)$ par leņķi $\frac{\pi}{2}$, tāpēc kopa $f\left(\left[\frac{a}{4}; \frac{a}{2}\right]\right)$ sakrīt ar riņķa līnijas otro ceturtdaļu, t.i., attēlojums f nogriezni $\left[\frac{a}{4}; \frac{a}{2}\right]$ sirjektīvi attēlo par riņķa līnijas otro ceturtdaļu. Analoģiski pierāda, ka attēlojums f nogriežņus $\left[\frac{a}{2}; \frac{3a}{4}\right]$ un $\left[\frac{3a}{4}; a\right]$ sirjektīvi attēlo attiecīgi par riņķa līnijas trešo un ceturto ceturtdaļu. Tādējādi attēlojums f intervālu $[0; a)$ sirjektīvi attēlo par visu riņķa līniju $\mathbb{S}$, t.i., $f([0; a)) = \mathbb{S}$. Ņemot vērā, ka attēlojums f ir injektīvs intervālā $[0; a)$, secinām, ka attēlojums f intervālu $[0; a)$ bijektīvi attēlo par riņķa līniju $\mathbb{S}$.

Ja $f\left(\frac{a}{4}\right) = -i$, tad var pierādīt, ka attēlojums f nogriezni $\left[0; \frac{a}{4}\right]$ attēlo par riņķa līnijas ceturto ceturtdaļu, nogriezni $\left[\frac{a}{4}; \frac{a}{2}\right]$ - trešo ceturtdaļu, nogriezni $\left[\frac{a}{2}; \frac{3a}{4}\right]$ - otro ceturtdaļu, nogriezni $\left[\frac{3a}{4}; a\right]$ - pirmo ceturtdaļu. Tātad arī šajā gadījumā attēlojums f intervālu $[0; a)$ bijektīvi attēlo par riņķa līniju $\mathbb{S}$.◄

2.24. piezīme. No 2.6. teorēmas pierādījuma seko, ka, gadījumā, kad $f\left(\frac{a}{4}\right) = i$, eksponente $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{S}$ katru no intervāliem $[ma; (m+1)\,a)$, $m \in \mathbb{Z}$, bijektīvi attēlo par riņķa līniju $\mathbb{S}$ "pozitīvajā virzienā" (pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam), ar to saprotot, ka nogriežņi $\left[ma; ma + \frac{a}{4}\right]$, $\left[ma + \frac{a}{4}; ma + \frac{a}{2}\right]$, $\left[ma + \frac{a}{2}; ma + \frac{3a}{4}\right]$, $\left[ma + \frac{3a}{4}; (m+1)\,a\right]$ attēlojas attiecīgi par riņķa līnijas pirmo, otro, trešo un ceturto ceturtdaļu. Savukārt, ja $f\left(\frac{a}{4}\right) = -i$, tad eksponente $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{S}$ katru no intervāliem $[ma; (m+1)\,a)$, $m \in \mathbb{Z}$, bijektīvi attēlo par riņķa līniju $\mathbb{S}$ "negatīvajā virzienā" (pulksteņa rādītāju kustības virzienā). Lai paskaidrotu frāzi "attēlo ... pozitīvajā virzienā" (attiecīgi "attēlo ... negatīvajā virzienā") ne tik formāli, tad ir jāizmanto tādi jēdzieni kā vektoru lauks, pieskarvektoru lauks u.c., kuri šajā mācību līdzeklī netiek aplūkoti (lasītājs ar šiem jēdzieniem var iepazīties, aplūkojot, piemēram, [3, 41.-42. lpp.]).

2.25. piezīme. No 2.6. teorēmas pierādījuma un iepriekšējās piezīmes seko, ka, gadījumā, kad $f\left(\frac{a}{4}\right) = i$, funkcija $g_1(t) = (P_1 \circ f)(t) = \operatorname{Re} f(t)$ nogriezni $\left[0; \frac{a}{2}\right]$ bijektīvi un nepārtraukti attēlo par nogriezni $[-1; 1]$, pie tam šī funkcija stingri dilst no $+1$ līdz -1 (skat. I nodaļas 1.3. teorēmu). Analoģiski funkcija $g_2(t) = (P_2 \circ f)(t) = \operatorname{Im} f(t)$

nogriezni $\left[-\frac{a}{4}; \frac{a}{4}\right]$ bijektīvi un nepārtraukti attēlo par nogriezni $[-1; 1]$, pie tam šī funkcija stingri aug no -1 līdz $+1$. Spriežot līdzīgi, pamato, ka nogriezņī $\left[\frac{a}{2}; a\right]$ funkcija $g_1(t)$ stingri aug no -1 līdz $+1$, bet nogrieznī $\left[\frac{a}{4}; \frac{3a}{4}\right]$ funkcija $g_2(t)$ stingri dilst no $+1$ līdz -1.

2.26. piezīme. 2.6. teorēmas pierādījumā tika iegūts, ka jebkuram $t \in \left[\frac{a}{4}; \frac{a}{2}\right]$ ir spēkā $f(t) = if(u)$, kur $u \in \left[0; \frac{a}{4}\right]$; jebkuram $t \in \left[\frac{a}{2}; \frac{3a}{4}\right]$ ir spēkā $f(t) = i^2 f(u) = -f(u)$, kur $u \in \left[0; \frac{a}{4}\right]$; jebkuram $t \in \left[\frac{3a}{4}; a\right]$ ir spēkā $f(t) = -if(u)$, kur $u \in \left[0; \frac{a}{4}\right]$. Tas ļauj eksponentes īpašības, kuras ir spēkā nogrieznī $\left[0; \frac{a}{4}\right]$, ar tiem vai citiem precizējumiem "pārnest" uz intervālu $[0; a)$.

2.6. teorēma sniedz pamatojumu šādai definīcijai.

2.10. definīcija. Par **eksponenciālo funkciju ar bāzi** a (vai vienkārši par **eksponenti ar bāzi** a), kur $a > 0$, sauc jebkuru eksponenti, kuras galvenais periods ir a un kura ir attēlojums "pozitīvajā virzienā", t.i., jebkuru funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$, ka
1^0 $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$;
2^0 f - nepārtraukta funkcija;
$3'^0$ f - periodiska funkcija ar galveno periodu a;
$4'^0$ $f\left(\frac{a}{4}\right) = i$.
Eksponenti ar bāzi a apzīmē ar $e_a(x)$.

2.27. piezīme. Saskaņā ar 2.6. teorēmu skaitļa $a > 0$, kurš ir eksponentes galvenais periods, eksistence seko no eksponentes 1^0 un 2^0 īpašības pie nosacījuma, ka eksponente nav konstanta funkcija. 2.10. definīcijas nosacījumā 3^0 kāds skaitlis $a > 0$ tiek fiksēts par eksponentes galveno periodu. $4'^0$ nosacījuma būtība ir paskaidrota 2.24. piezīmē pēc 2.6. teorēmas. Tādējādi, ja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ ir patvaļīga eksponente, tad vai nu $f(x) \equiv 1$, vai arī $f(x) = e_a(x)$ kādam $a > 0$.

2.5.4. Eksponentes eksistence un vienīgums

2.7. teorēma. [**Eksponentes eksistence**] *Nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{S}$ eksistē.*

► Labi zināms, ka pakāpju rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ absolūti konverģē jebkuram $x \in \mathbb{R}$, bet pakāpju rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolūti konverģē jebkuram $z \in \mathbb{C}$. Ja $g(z)$ ir pēdējās rindas summa, tad $g(z)$ - nepārtraukta funkcija, $g(0) = 1$ un $g(\overline{z}) = \overline{g(z)}$, jo $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$. Tā kā absolūti konverģentas rindas drīkst reizināt, tad

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{w^s}{s!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!},$$

no kurienes seko, ka $g(z+w) = g(z) \cdot g(w)$ jebkuriem $z, w \in \mathbb{C}$. Tātad funkcija $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ apmierina 2.9. definīcijas 1^0 un 2^0 nosacījumu. Pieņemsim, ka $z = ix$, $x \in \mathbb{R}$ un $f(x) = g(ix)$. Tad f - nepārtraukta funkcija; jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$f(x + y) = g(i(x + y)) = g(ix)g(iy) = f(x)f(y);$$

jebkuram $x \in \mathbb{R}$ izpildās

$$|f(x)|^2 = |g(ix)|^2 = g(ix)\overline{g(ix)} = g(ix - ix) = g(0) = 1,$$

t.i., $|f(x)| = 1$. Tātad f - nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{S}$.◀

2.28. piezīme. Funkcija $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{S}$, kura tika konstruēta 2.7. teorēmas pierādījuma gaitā, nav konstanta, tāpēc saskaņā ar 2.6. teorēmu funkcija f ir nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms grupā $\mathbb{S}$, t.i., f - eksponente ar kādu galveno periodu a, $a > 0$. Šo skaitli a apzīmēsim ar 2π. Tātad

$$f(x) = e_{2\pi}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n\,!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(-1)^n}{(2n)\,!} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}(-1)^{n+1}}{(2n-1)\,!} \tag{2.14}$$

ir eksponente ar bāzi $a = 2\pi$. Tā kā $f(0) = 1$ un $1 = f(0) = f(0 + 2\pi) = f(2\pi)$, tad 2π ir vismazākais pozitīvais skaitlis x, ka $f(x) = 1$. No 2.10. definīcijas $4'^0$ nosacījuma seko, ka $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{2\pi}{4}\right) = i$, no kurienes seko, ka $f(\pi) = f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = -1$. Vienādība $f(\pi) = -1$ sniedz jaunu iespēju, kā definēt skaitli π: par **skaitli** π sauc vismazāko pozitīvo skaitli a, ka $f(a) = -1$.

▶ Pieņemsim, ka $f(x) = u(x) + iv(x)$, kur $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$ un $v(x) = Imf(x)$. Tā kā $f(0) = 1$, tad $u(0) = 1$. No (2.14) seko, ka $v'(x) = u(x)$, tāpēc $v'(0) = 1$. Tātad funkcija $v(x)$ ir stingri augoša funkcija punktā 0. Tāpēc eksistē $h > 0$, ka $v(x) > 0$ jebkuram $x \in (0; h)$.

Pieņemsim, ka $A = \{x > 0 | f(x) = -1\}$. Tad $\inf A \geq h > 0$ (atzīmēsim, ka kopa A ir netukša kopa, vēl jo vairāk, saskaņā ar 2.6. teorēmu kopa A ir bezgalīga kopa). Apzīmēsim $\inf A = \pi$. Tā kā π ir kopas A kontaktpunkts, tad eksistē kopas A punktu virkne (x_n), kura konverģē uz skaitli π. No funkcijas f nepārtrauktības seko, ka $f(\pi) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -1$. Tātad $f(\pi) = -1$, bet jebkuram $x \in [0; \pi)$ ir spēkā $f(x) \neq -1$.◀

Atzīmēsim, ka $f(2\pi) = f(\pi + \pi) = f(\pi)f(\pi) = (-1)^2 = 1$.

2.8. teorēma. [**Eksponentes ar bāzi** a **eksistence**] *Jebkuram skaitlim $a > 0$ eksistē eksponente ar bāzi a.*

▶ Pieņemsim, ka $\ell : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ir lineārā funkcija ar bāzi $\frac{2\pi}{a}$, t.i., ℓ ir nepārtraukts grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfisms sevī, pie tam $\ell(x) = \frac{2\pi}{a}x$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$; f - eksponente, kura tika konstruēta 2.7. teorēmas pierādījuma gaitā. Pierādīsim, ka $F = f \circ \ell$ ir eksponente ar bāzi a.

1^0 Jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$ atrodam:

$$\begin{aligned} F(x + y) &= (f \circ \ell)(x + y) = f(\ell(x + y)) = f(\ell(x) + \ell(x)) = \\ &= f(\ell(x)) \cdot f(\ell(x)) = (f \circ \ell)(x) \cdot (f \circ \ell)(y) = F(x) \cdot F(y). \end{aligned}$$

2^0 Funkcija F ir nepārtraukta kā nepārtrauktu funkciju f un ℓ kompozīcija.

3^0 Jebkuriem $x \in \mathbb{R}$ atrodam:

$$F(x + a) = F(x)F(a) = F(x)(f \circ \ell)(a) = F(x)f(\ell(a)) = F(x)f(2\pi) = F(x);$$
$$F(x - a) = F(x)\overline{F(a)} = F(x)\overline{f(2\pi)} = F(x).$$

Tātad a ir funkcijas F periods. Pierādīsim, ka a ir funkcijas F galvenais periods. Pieņemsim pretējo, ka $0 < b < a$ un jebkuriem $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā $F(x+b) = F(x)$. No vienas puses, ja $x = 0$, tad

$$F(b) = F(0) = (f \circ \ell)(0) = f(0) = 1.$$

No otras puses,

$$F(b) = (f \circ \ell)(b) = f(\ell(b)) = f\left(\frac{2\pi}{a} b\right) \neq 1,$$

jo $0 < \frac{2\pi}{a} b < 2\pi$. Iegūtā pretruna pierāda, ka a funkcijas F galvenais periods.

4^0

$$F\left(\frac{a}{4}\right) = (f \circ \ell)\left(\frac{a}{4}\right) = f\left(\ell\left(\frac{a}{4}\right)\right) = f\left(\frac{2\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = i.$$

Saskaņā ar 2.10. definīciju funkcija F ir eksponente ar bāzi a, t.i., $F(x) = e_a(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.◄

Sekas. No pēdējās teorēmas pierādījuma seko, ka

$$e_a(x) = F(x) = (f \circ \ell)(x) = f(\ell(x)) = f\left(\frac{2\pi}{a} x\right).$$

Ja a=1, tad $e_1(x) = f(2\pi x)$, bet $e_1\left(\frac{x}{a}\right) = f\left(\frac{2\pi}{a} x\right)$. Tātad

$$e_a(x) = e_1\left(\frac{x}{a}\right), \quad e_{2\pi}(x) = e_1\left(\frac{x}{2\pi}\right). \tag{2.15}$$

2.9. teorēma. **[Eksponentes ar bāzi a vienīgums]** *Ja f un g ir divas eksponentes ar bāzi a, $a > 0$, tad $f(x) = g(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.*

► Saskaņā ar 2.26. piezīmi pēc 2.6.teorēmas ir pietiekami pierādīt, ka funkcijas f un g ir vienādas nogrieznī $\left[0; \frac{a}{4}\right]$. No eksponentes 8^0 īpašības seko, ka funkcija $h = \frac{f}{g}$ ir eksponente. Pierādīsim, ka $h(x) = 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds $x \in \mathbb{R}$, ka $h(x) \neq 1$. Tad eksponente h nav konstanta funkcija. Tāpēc saskaņā ar 2.6. teorēmu eksistē skaitlis b, $b > 0$, kurš ir funkcijas h galvenais periods. Tā kā

$$h\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{f\left(\frac{a}{4}\right)}{g\left(\frac{a}{4}\right)} = \frac{i}{i} = 1,$$

tad skaitlis $\frac{a}{4}$ ir funkcijas h periods (tāpēc eksistē tāds $k \in \mathbb{N}$, ka $kb = \frac{a}{4}$). No 2.6. teorēmas seko, ka $h\left([0; b)\right) = \mathbb{S}$. Līdz ar to arī $h\left(\left[0; \frac{a}{4}\right]\right) = \mathbb{S}$. Taču saskaņā ar 2.6. teorēmas pierādījumā teikto funkcijas f un g nogriezni $\left[0; \frac{a}{4}\right]$ attēlo par riņķa līnijas $\mathbb{S}$ pirmo ceturtdaļu, tāpēc kompleksiem skaitļiem $f(x)$ un $g(x)$, kur $x \in \left(0; \frac{a}{4}\right)$, ir pozitīva reālā un imaginārā daļa. Seko, ka kompleksā skaitļa $h(x)$ reālā daļa ir pozitīva. Tātad $h\left(\left[0; \frac{a}{4}\right]\right)$ var aizpildīt tikai riņķa līnijas $\mathbb{S}$ pirmo un ceturto ceturtdaļu. Ieguvām pretrunu ar to, ka $h\left(\left[0; \frac{a}{4}\right]\right) = \mathbb{S}$, t.i., funkcija h nogriezni $\left[0; \frac{a}{4}\right]$ attēlo par visu riņķa līniju $\mathbb{S}$. Tātad $h(x) = 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, t.i., $f(x) = g(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.◄

Pierādītā teorēma ļauj precizēt 2.8. teorēmu.

2.10. teorēma. *Jebkuram $a > 0$ eksistē vienīgā eksponente ar bāzi a.*

2.5.5. Skaitļa 2π aksiomātiskā definīcija

Vēsturiski skaitli 2π (attiecīgi π) definēja kā vienības riņķa līnijas garumu (attiecīgi vienības riņķa laukumu). Taču šāda pieeja pieprasa vispirms definēt riņķa līnijas garumu (attiecīgi riņķa laukumu).

Skaitli 2π var definēt aksiomātiski: par **skaitli 2π** sauc tādu pozitīvu skaitli a, ka

$$\lim_{x\to 0}\frac{e_a(x)-1}{x}=i. \tag{2.16}$$

Rodas jautājums: vai skaitlis 2π eksistē, un, ja eksistē, vai tas ir vienīgs, ja skaitli 2π definēt ar formulu (2.16)? Tā kā

$$\frac{e_a(x)-1}{x}=\frac{e_a(x)-e_a(0)}{x-0},$$

tad, acīmredzot, robežas (2.16) eksistences pierādījumam ir jābalstās uz eksponentes diferenciālajām īpašībām.

2.11. teorēma. *Eksponente $e_a(x)$ ar bāzi a, $a>0$, ir diferencējama funkcija, pie tam*

$$e_a'(x)=e_a(x)e_a'(0). \tag{2.17}$$

► Tā kā $e_a(0)=1$ un $e_a(x)$ ir nepārtraukta funkcija, tad patvaļīgam ε, $0<\varepsilon<1$, eksistē δ, $\delta>0$, ka jebkuram t, $|t-0|<\delta$, izpildās nevienādība

$$|e_a(x)-1|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.18}$$

Apskatīsim tādu $c\in\mathbb{R}$, ka $0<c<\delta$. Tad jebkuram $t\in[0;c]$ izpildās nevienādība (2.18). Atrodam:

$$\left|\frac{1}{c}\int_0^c e_a(t)\,dt-1\right|=\left|\frac{1}{c}\int_0^c e_a(t)\,dt-\frac{1}{c}\int_0^c dt\right|=\left|\frac{1}{c}\int_0^c [e_a(t)-1]\,dt\right|\le\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{c}c=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

Tā kā $0<\varepsilon<1$, tad

$$0<1-\varepsilon<\frac{1}{c}\int_0^c e_a(t)\,dt<1+\varepsilon. \tag{2.19}$$

No nevienādības (2.19) seko, ka $\frac{1}{c}\int_0^c e_a(t)\,dt\neq 0$.

Apskatīsim funkciju

$$g(x)=\int_0^c e_a(x+t)\,dt.$$

No eksponentes 2^0 īpašības seko, ka $e_a(x+t)=e_a(x)e_a(t)$, tāpēc

$$g(x)=e_a(x)\int_0^c e_a(t)dt$$

jeb

$$e_a(x) = g(x)\left[\int_0^c e_a(t)\,dt\right]^{-1}. \qquad (2.20)$$

No (2.20) seko, ka, lai pierādītu funkcijas $e_a(x)$ diferencējamību, ir pietiekami pierādīt funkcijas $g(x)$ diferencējamību.

Veicot mainīgā t aizvietošanu ar mainīgo u pēc formulas $u = x + t$, iegūsim:

$$g(x) = \int_0^c e_a(x+t)dt = \int_x^{x+c} e_a(u)du.$$

No pēdējās formulas, izmantojot nepārtrauktas funkcijas integrāļa ar mainīgām integrēšanas robežām īpašības, seko, ka funkcija $g(x)$, un līdz ar to arī funkcija $e_a(x)$, ir diferencējama, pie tam

$$g'(x) = e_a(x+c) - e_a(x) = e_a(x)[e_a(c) - 1],$$

no kurienes, ņemot vērā (2.20), atrodam:

$$e'_a(x) = e_a(x)[e_a(c) - 1]\left[\int_0^c e_a(t)dt\right]^{-1}. \qquad (2.21)$$

Formulā (2.21) ņemot $x = 0$, iegūsim:

$$e'(0) = e_a(0)[e_a(c) - 1]\left[\int_0^c e_a(t)dt\right]^{-1}. \qquad (2.22)$$

No (2.21) un (2.22) seko (2.17), jo $e_a(0) = 1$.◄

Sekas *Jebkuram $a > 0$ eksistē $\alpha = \alpha(a) > 0$, ka*

$$e'_a(0) = \alpha i. \qquad (2.23)$$

► Fiksēsim $a > 0$. Apskatīsim eksponenti $e_a(x)$ ar bāzi a. Kopā $\mathbb{C}$ ir definēts komplekso skaitļu z un w Eiklīda skalārais reizinājums $\langle z; w\rangle = \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Re} w + \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} w$. Tā kā $|e_a(x)| = 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, tad $\langle e_a(x); e_a(x)\rangle = 1$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Diferencējot šo vienādību, iegūsim:

$$\left\langle e'_a(x); e_a(x)\right\rangle + \left\langle e_a(x); e'_a(x)\right\rangle = 0,$$

no kurienes, ņemot vērā skalārā reizinājuma simetriskumu, atrodam:

$$\left\langle e'_a(x); e_a(x)\right\rangle = \left\langle e_a(x); e'_a(x)\right\rangle = 0.$$

Tātad $\left\langle e_a(0); e'_a(0)\right\rangle = 0$ jeb $\left\langle 1\,; e'_a(0)\right\rangle = 0$ jeb $e'_a(0) = \alpha i$, kur $\alpha \in \mathbb{R}$.

Tagad pierādīsim, ka $\alpha > 0$. Kā jau tika atzīmēts 2.25. piezīmē pēc 2.6. teorēmas, tad funkcija $g_2(x) = \operatorname{Im} e_a(x)$ ir stingri augoša nogriezni $\left[-\frac{a}{4}; \frac{a}{4}\right]$. Saskaņā ar 2.9. teorēmu funkcija $g_2(x)$ ir diferencējama. Tāpēc $g'_2(x) \geq 0$ jebkuram $x \in \left[-\frac{a}{4}; \frac{a}{4}\right]$. Tātad $g'_2(0) \geq 0$. Tā kā $e'_a(0) = \alpha i$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tad $\alpha \geq 0$. Ja pieņemt, ka $\alpha = 0$, t.i., $e'_a(0) = 0$, tad no formulas (2.17) sekotu, ka $e'_a(x) = 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, taču tas ir pretrunā ar to, ka eksponente ar bāzi $a > 0$ nav konstanta funkcija. Tādējādi $\alpha > 0$.◄

2.11.teorēma un tās sekas ļauj pierādīt skaitļa $a > 0$, kuram izpildās (2.16), eksistenci un vienīgumu.

2.12. teorēma. *Eksistē vienīgs skaitlis $a > 0$, kuram izpildās* (2.16).

▶ Tā kā $a = 1 > 0$, tad no (2.17) un (2.23) seko, ka

$$e_1'(x) = e_1(x)e_1'(0) = e_1(x)\alpha_1 i,$$

kur $\alpha_1 > 0$. Analoģiski, tā kā $\alpha_1 > 0$, tad no (2.17) un (2.23), ņemot vērā (2.15), iegūsim:

$$e_{\alpha_1}'(x) = e_{\alpha_1}(x)e_{\alpha_1}'(0) = e_1\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)e_{\alpha_1}'(0), \tag{2.24}$$

$$e_{\alpha_1}'(x) = \left(e_1\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)\right)' = e_1'\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)\frac{1}{\alpha_1} = e_1\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)\alpha_1 i\frac{1}{\alpha_1} = e_1\left(\frac{x}{\alpha_1}\right)i. \tag{2.25}$$

Salīdzinot (2.24) un (2.25), iegūsim, ka $e_{\alpha_1}'(0) = i$. Atrodam:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e_{\alpha_1}(x) - e_{\alpha_1}(0)}{x} = i$$

jeb

$$\lim_{x\to 0}\frac{e_{\alpha_1}(x) - 1}{x} = i.$$

Tātad eksistē $a = \alpha_1 > 0$, kuram izpildās (2.16).

Pierādīsim šāda skaitļa $a > 0$ vienīgumu. Apskatīsim patvaļīgu $a > 0$, kuram izpildās (2.16). Tad no (2.16) seko, ka $e_a'(0) = i$. Tāpēc saskaņā ar (2.17) iegūsim:

$$e_a'(x) = e_a(x)i. \tag{2.26}$$

Spriežot līdzīgi kā formulas (2.25) izvedumā, atrodam:

$$e_a(x) = e_1\left(\frac{x}{a}\right),$$

$$e_a'(x) = e_1'\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a} = e_1\left(\frac{x}{a}\right)e_1'(0)\frac{1}{a} = e_1\left(\frac{x}{a}\right)\alpha_1 i\frac{1}{a} = e_a(x)\frac{\alpha_1}{a}i. \tag{2.27}$$

No (2.26) un (2.27) seko, ka $a = \alpha_1$. Tātad skaitlis $a > 0$, kuram izpildās (2.16), ir noteikts viennozīmīgi.◀

2.29. piezīme. Kā jau tika atzīmēts 2.5.5. apakšparagrāfā, tad skaitli $a > 0$, kuram izpildās (2.16), t.i., $\lim_{x\to 0}\frac{e_a(x)-1}{x} = i$, apzīmē ar 2π. Saskaņā ar pierādīto eksistē vienīgs skaitlis 2π. Par dažām citām skaitļa π definīcijām skat. [10].

Eksponentei ar bāzi $a = 2\pi$ ir spēkā $\lim_{x\to 0}\frac{e_{2\pi}(x)-1}{x} = i$ jeb $e_{2\pi}'(0) = i$. No (2.15) un (2.17) seko šādas eksponentes ar bāzi $a = 2\pi$ īpašības:

$$e_{2\pi}'(x) = ie_{2\pi}(x),\ x \in \mathbb{R}; \tag{2.28a}$$

$$e_{2\pi}(x) = e_1\left(\frac{x}{2\pi}\right),\ x \in \mathbb{R}; \tag{2.28b}$$

$$e_{2\pi}(x) = e_a\left(\frac{a}{2\pi}x\right),\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}; \tag{2.28c}$$

$$e_a(x) = e_1\left(\frac{x}{a}\right) = e_1\left(\frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{a}x\right) = e_{2\pi}\left(\frac{2\pi}{a}x\right),\ a > 0,\ x \in \mathbb{R}; \tag{2.28d}$$

$$e_b(x) = e_1\left(\frac{x}{b}\right) = e_1\left(\frac{a}{b}x\frac{1}{a}\right) = e_a\left(\frac{b}{a}x\right),\ a > 0,\ b > 0,\ x \in \mathbb{R}. \tag{2.28e}$$

2.30. piezīme. Noslēgumā atzīmēsim zināmu analoģiju starp skaitļa 2π aksiomātisko definīciju (par skaitli 2π sauc tādu skaitli $a > 0$, kuram izpildās vienādība (2.16), t.i., $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e_a(x)-1}{x} = i$) un skaitļa e aksiomātisko definīciju (par skaitli e sauc tādu skaitli $a > 1$, kuram izpildās $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = 1$; skat. 2.17. piezīmi). Izrādās, ka skaitļa e eksistenci un vienīgumu (kas jau tika pierādīts 2.16. piezīmē) var pierādīt līdzīgi kā skaitļa 2π gadījumā.

▶ Nav grūti pierādīt, ka eksponentfunkcijai $f_a(x) = a^x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^\bullet$ ir spēkā 2.11. teorēmas analogs: eksponentfunkcija a^x ir diferencējama, pie tam jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā $f_a'(x) = f_a(x) f_a'(0)$. Apzīmēsim: $f_a'(0) = \varphi(a)$, kur $\varphi(a)$ ir skaitlis, kurš ir atkarīgs no a, pie tam $\varphi(a) \neq 0$, ja $a \neq 1$. Pieņemsim, ka $b \neq a$ un $b \neq 1$. Tad, no vienas puses, $(b^x)' = b^x \varphi(b)$. No otras puses, tā kā $b^x = a^{x \log_a b}$, tad $(b^x)' = a^{x\log_a b}\varphi(a)\log_a b$. Tātad $\varphi(b) = \varphi(a)\log_a b$. Tā kā

$$\varphi(b) = 1 \Leftrightarrow \varphi(a)\log_a b = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\varphi(a)} = \log_a b \Leftrightarrow b = a^{\frac{1}{\varphi(a)}},$$

tad eksistē vienīgs skaitlis b, ka $\varphi(b) = 1$. Apzīmēsim $e = b$. Tad,

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = 1 \Leftrightarrow f_a'(0) = 1 \Leftrightarrow \varphi(a) = 1 \Leftrightarrow a = e,$$

t.i., eksistē vienīgais skaitlis $a = e$, ka $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = 1$.◀

2.6. Skaitliska argumenta sinuss un kosinuss

2.6.1. Skaitliska argumenta sinusa un kosinusa definīcija

Apskatīsim funkcijas $P_1, P_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, ka $P_1(z) = \operatorname{Re} z$, $P_2(z) = \operatorname{Im} z$ jebkuram $z \in \mathbb{C}$.

2.11. definīcija. Par **skaitliska argumenta kosinusu un sinusu** sauc eksponentes ar bāzi 2π attiecīgi reālo un imagināro sastāvdaļu, t.i., funkcijas $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$f_1(x) = (P_1 \circ e_{2\pi})(x) = P_1(e_{2\pi}(x)), \ f_2(x) = (P_2 \circ e_{2\pi})(x) = P_2(e_{2\pi}(x)).$$

Skaitliska argumenta kosinusu un sinusu apzīmē attiecīgi ar $\cos x$ un $\sin x$.

2.11. definīcijā tiek izmantota konkrēta eksponente $e_{2\pi}(x)$, t.i., konkrēts skaitlis 2π starp visiem citiem pozitīviem skaitļiem a. Eksponentes $e_{2\pi}(x)$ izdalīšanai ir vēsturiski iemesli, jo šīs eksponentes bāze 2π ir "galvenais trigonometriskais periods". Taču elementārajā matemātikā, kā arī citās matemātikas nozarēs, klasisko funkciju $\cos x$ un $\sin x$ vietā tikpat labi var aplūkot arī sinusu un kosinusu ar patvaļīgu pozitīvu bāzi.

2.12. definīcija. Par **skaitliska argumenta kosinusu un sinusu ar bāzi** a, kur $a > 0$, sauc eksponentes ar bāzi a attiecīgi reālo un imagināro sastāvdaļu, t.i., funkcijas $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā

$$f_1(x) = (P_1 \circ e_a)(x) = P_1(e_a(x)), \quad f_2(x) = (P_2 \circ e_a)(x) = P_2(e_a(x)).$$

Skaitliska argumenta kosinusu un sinusu ar bāzi a apzīmē attiecīgi ar $\cos_a x$ un $\sin_a x$.

Acīmredzot, $\cos x = \cos_{2\pi} x$ un $\sin x = \sin_{2\pi} x$.

No 2.12. definīcijas un 2.10. teorēmas seko šādi apgalvojumi.

2.13. teorēma. *Jebkuram $a > 0$ eksistē vienīgs skaitliska argumenta kosinuss un sinuss ar bāzi a.*

2.14. teorēma. *Eksistē vienīgs skaitliska argumenta kosinuss un sinuss.*

2.6.2. Skaitliska argumenta sinusa un kosinusa īpašības

Skaitliska argumenta kosinusa un sinusa īpašības seko no eksponentes $e_{2\pi}(x)$ ar bāzi 2π īpašībām, kā arī komplekso skaitļu lauka $\mathbb{C}$ īpašībām.

1^0 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ *jebkuram* $x \in \mathbb{R}$.

► Apskatīsim patvaļīgu $x \in \mathbb{R}$. Tā kā eksponentes $e_{2\pi}(x)$ vērtības pieder vienības riņķa līnijai $\mathbb{S}$, tad

$$1 = |e_{2\pi}(x)| = |\cos x + i \sin x| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x},$$

no kurienes seko, ka $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.◄

2.31. piezīme. Pēdējā īpašība sniedz pamatojumu tam, ka skaitliska argumenta kosinusu un sinusu bieži vien sauc par attiecīgi **riņķa kosinusu un sinusu**.

2^0 *Jebkuriem $x, y \in R$ ir spēkā formulas:*

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

► Apskatīsim patvaļīgu $x \in \mathbb{R}$. No eksponentes 2^0 īpašības seko, ka

$$e_{2\pi}(x+y) = e_{2\pi}(x) e_{2\pi}(y).$$

Tā kā

$$e_{2\pi}(x+y) = \cos(x+y) + i \sin(x+y),$$

$$e_{2\pi}(x) e_{2\pi}(y) = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) =$$
$$= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y),$$

tad, ņemot vērā divu kompleksu skaitļu vienādības definīciju, iegūsim:

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \text{ ◄}$$

3^0 *Jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā formulas:*

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x, \quad \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x,$$
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x, \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x.$$

▶ Apskatīsim patvaļīgu $x \in R$. No eksponentes 2^0 īpašības seko, ka

$$e_{2\pi}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=e_{2\pi}(x)e_{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Tā kā

$$e_{2\pi}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$
$$e_{2\pi}(x)e_{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(\cos y+i\sin y)i=-\sin x+i\cos x,$$

tad, ņemot vērā divu kompleksu skaitļu vienādības definīciju, iegūsim: $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$, $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$. Līdzīgi pierāda abas pārējās vienādības.◀

4^0 $\cos x$ - *pāra funkcija, bet* $\sin x$ - *nepāra funkcija.*

▶ Apskatīsim patvaļīgu $x \in \mathbb{R}$. Tā kā

$$e_{2\pi}(-x)=\overline{e_{2\pi}(x)}=\cos x-i\sin x,\quad e_{2\pi}(-x)=\cos(-x)+i\sin(-x),$$

tad, ņemot vērā divu kompleksu skaitļu vienādības definīciju, iegūsim: $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(-x)=-\cos x$. Tātad $\cos x$ - pāra funkcija, bet $\sin x$ - nepāra funkcija.◀

5^0 $\cos x$ *un* $\sin x$ - *nepārtrauktas funkcijas.*

▶ Funkcijas $P_1(z)=\operatorname{Re} z$ un $P_2(z)=\operatorname{Im} z$, acīmredzot, ir nepārtrauktas. Saskaņā ar definīciju eksponente arī ir nepārtraukta funkcija. Tātad arī funkcijas $(P_1\circ e_{2\pi})(x)=\cos x$, $(P_2\circ e_{2\pi})(x)=\sin x$ ir nepārtrauktas.◀

6^0 $\cos 0=1$, $\sin 0=0$.

▶ Tā kā $e_{2\pi}(0)=1$, tad $\operatorname{Re}(e_{2\pi}(0))=\cos 0=1$ un $\operatorname{Im}(e_{2\pi}(0))=\sin 0=0$.◀

Iesakām lasītājam patstāvīgi atrast funkciju $\cos x$ un $\sin x$ vērtības punktos $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ un 2π.

7^0 *Funkcijas* $\cos x$ *un* $\sin x$ *ir periodiskas funkcijas, pie tam* 2π *ir to galvenais periods.*

▶ Apskatīsim patvaļīgu $x \in \mathbb{R}$. No vienas puses, tā kā eksponente ir periodiska funkcija ar periodu 2π, tad

$$e_{2\pi}(x\pm 2\pi)=e_{2\pi}(x)=\cos x+i\sin x.$$

No otras puses,

$$e_{2\pi}(x\pm 2\pi)=\cos(x\pm 2\pi)+i\sin(x\pm 2\pi).$$

Ņemot vērā divu kompleksu skaitļu vienādības definīciju, iegūsim: $\cos(x\pm 2\pi)=\cos x$, $\sin(x\pm 2\pi)=\sin x$. Tātad $\cos x$ un $\sin x$ ir periodiskas funkcijas ar periodu 2π.

Skaitlis 2π ir funkciju $\cos x$ un $\sin x$ galvenais periods. Tiešām, ja pieņemt pretējo, ka T, $0<T<2\pi$, ir funkciju $\cos x$ un $\sin x$ periods, tad T būs arī eksponentes periods, kas ir pretrunā ar to, ka 2π ir eksponentes galvenais periods (atzīmēsim, ka vienādības $\cos(x\pm T)=\cos x$ un $\sin(x\pm T)=\sin x$ jebkuram $x\in\mathbb{R}$ var izpildīties tikai vienlaicīgi).◀

8^0 *Funkciju* $\cos_a x$ *un* $\sin_a x$ *monotonitāte, kā arī to zīmes patstāvīguma intervāli, tika apspriesta 2.8. teorēmas pierādījuma gaitā, kā arī piezīmē pēc šīs teorēmas. Iesakām lasītājam pārformulēt šīs īpašības funkcijām* $\cos x$ *un* $\sin x$*, kā arī pierādīt redukcijas formulas argumentiem* x *un* $x \pm \pi$*,* x *un* $x \pm \frac{3\pi}{2}$ *(skat. II nodaļas 2.9. paragrāfa 18. uzdevumu).*

9^0 *Jebkuram* $x \in \mathbb{R}$ *ir spēkā*

$$\cos \frac{x}{a} = P_1(e_{2\pi a}(x)), \quad \sin \frac{x}{a} = P_2(e_{2\pi a}(x)),$$

kur $a > 0$.

► Šo formulu patiesums seko no formulas $e_{2\pi a}(x) = e_{2\pi}(\frac{x}{a})$, kura ir spēkā jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Savukārt pēdējā formula ir patiesa saskaņā ar (2.28d), ja apskatīt bāzi $2\pi a$.

Tā kā funkcijas $e_{2\pi a}(x)$ galvenais periods ir $2\pi a$, tad $2\pi a$ ir arī funkciju $\cos \frac{x}{a}$ un $\sin \frac{x}{a}$ galvenais periods. Tāpēc funkciju $\cos \frac{x}{a}$ un $\sin \frac{x}{a}$, kur $a > 0$, galveno periodu iegūst, ja sareizina funkciju $\cos x$ un $\sin x$ galveno periodu ar skaitli a.◄

Ja funkcijas $e_{2\pi}(x)$ vietā apskatīt funkciju $e_a(x)$, kur $a > 0$, tad nav grūti iegūt funkciju $\cos_a x$ un $\sin_a x$ īpašības (skat., piemēram, nākamo īpašību).

10^0 *Jebkuram* $x \in \mathbb{R}$ *ir spēkā*

$$\cos_a x = \cos \frac{2\pi}{a} x, \quad \sin_a x = \sin \frac{2\pi}{a} x,$$

kur $a > 0$.

► Šo formulu patiesums seko no formulām

$$e_a(x) = \cos_a x + i \sin_a x, \quad e_a(x) = e_{2\pi}\left(\frac{2\pi}{a} x\right) = \cos \frac{2\pi}{a} x + i \sin \frac{2\pi}{a} x,$$

kuras ir spēkā jebkuram $x \in \mathbb{R}$.◄

2.7. Leņķiska argumenta sinuss un kosinuss

Līdztekus skaitliska argumenta trigonometriskajām funkcijām tiek aplūkotas arī leņķiska argumenta trigonometriskās funkcijas. Tradicionāli leņķa α sinuss un kosinuss tiek definēts kā šim leņķim viennozīmīgi atbilstošā vienības riņķa līnijas $\mathbb{S}$ punkta attiecīgi abscisa un ordināta. Tāpēc, lai definētu leņķiska argumenta trigonometriskās funkcijas, ir nepieciešams a) definēt leņķa jēdzienu, b) nodibināt atbilstību starp leņķiem un kompleksiem skaitļiem $z \in \mathbb{S}$, t.i., kompleksiem skaitļiem, kuru modulis ir vienāds ar 1.

Traktējot plaknes vienības riņķa līniju kā grupu $\mathbb{S}$, varēs nodibināt atbilstību starp leņķiem un reāliem skaitļiem, kuri ir šo leņķu "mērs", līdz ar to tiks nodibināta atbilstība starp skaitliska un leņķiska argumenta trigonometriskajām funkcijām.

2.7.1. Leņķis aritmētiskajā plaknē $\mathbb{R}^2$

Leņķa jēdziens nevar tikt aplūkots neatkarīgi no plaknes jēdziena. Matemātikā tiek aplūkoti vairāki neekvivalenti plaknes jēdzieni, kuri lielākā vai mazākā mērā atbilst intuitīvajam priekšstatam par plakni.

Aplūkosim leņķa jēdzienu tā saucamajā aritmētiskajā plaknē $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kas sastāv no visiem iespējamiem sakārtotiem reālu skaitļu pāriem. Formulas

$$\begin{gathered}
x + y = (x_1; x_2) + (y_1; y_2) = (x_1 + x_2; y_1 + y_2),\\
x \cdot y = (x_1; x_2) \cdot (y_1; y_2) = (x_1y_1 - x_2y_2; x_1y_2 + x_2y_1),\\
\lambda \cdot x = (\lambda; 0) \cdot (x_1; x_2) = (\lambda x_1; \lambda x_2),\\
\langle x; y\rangle = \langle (x_1; x_2); (y_1; y_2)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2,
\end{gathered}$$

kur $x = (x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1; y_2) \in \mathbb{R}^2$ un $\lambda \in \mathbb{R}$, definē aritmētiskās plaknes $\mathbb{R}^2$ elementu attiecīgi saskaitīšanu, reizināšanu, reizināšanu ar reāliem skaitļiem (skaitlis $\lambda \in \mathbb{R}$ tiek identificēts ar aritmētiskās plaknes $\mathbb{R}^2$ elementu $(\lambda; 0)$) un Eiklīda skalāro reizināšanu. Šīs operācijas ļauj aritmētisko plakni $\mathbb{R}^2$ identificēt ar visu komplekso skaitļu kopu $\mathbb{C}$. Tāpēc var definēt kompleksā skaitļa z reizinājumu ar elementu $(a; b) \in \mathbb{R}^2$:

$$z \cdot (a; b) = (\operatorname{Re} z; \operatorname{Im} z) \cdot (a; b) = (a \operatorname{Re} z - b \operatorname{Im} z; a \operatorname{Im} z + b \operatorname{Re} z).$$

Pieņemsim, ka a un x ir dažādi aritmētiskās plaknes $\mathbb{R}^2$ punkti. Par **staru ar sākumpunktu a, kas iet caur punktu x,** $x \neq a$, sauc aritmētiskās plaknes $\mathbb{R}^2$ apakškopu $\{\lambda(x - a) |\ \lambda \geq 0\}$, kur $x - a = x + (-a)$. Par **leņķi** sauc patvaļīgu sakārtotu pāri $(\mu; \eta)$, kurš sastāv no diviem stariem μ un η ar vienu un to pašu sākumpunktu a. Šo kopīgo sākumpunktu a sauc par **leņķa** $(\mu; \eta)$ **virsotni**, bet starus μ un η - attiecīgi par **leņķa** $(\mu; \eta)$ **sākummalu un beigumalu**. Divus leņķus sauc par **vienādiem leņķiem**, ja izpildās vismaz viens no šādiem nosacījumiem:

1. leņķi ir vienādi kā sakārtoti pāri, t.i., to sākummalas un beigumalas attiecīgi ir vienādas kā kopas $\mathbb{R}^2$ apakškopas;

2. ja leņķiem ir dažādi sākumpunkti, tad eksistē plaknes $\mathbb{R}^2$ paralēlā pārnese[1], kas viena leņķa sākummalu un beigumalu attēlo par attiecīgi otrā leņķa sākummalu un beigumalu (no iepriekš teiktā seko, ka ir pietiekami apskatīt leņķus ar sākumpunktu $O = (0; 0)$; turpmāk leņķa sākumpunktu nenorādīsim, jo apskatīsim tikai leņķus ar sākumpunktu O);

3. ja leņķiem ir viens un tas pats sākumpunkts, tad eksistē plaknes $\mathbb{R}^2$ *rotācija*[2] *ar*

[1] Attēlojumu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sauc par **paralēlo pārnesi**, ja $f((x; y)) = (x + a; y + b)$ jebkuram $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, kur a un b ir fiksēti reāli skaitļi.

[2] Attēlojumu $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sauc par **rotāciju ar centru punktā** O, ja eksistē tāda ortogonāla matrica $M = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$, kuras determinants ir vienāds ar 1, ka $f((x; y)) = (ax + by; cx + dy)$ jebkuram $(x; y) \in \mathbb{R}^2$. Matricu $M = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ sauc par **ortogonālu matricu**, ja $a^2 + c^2 = 1$, $b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$. Ortogonālas matricas determinants ir vienāds ar 1, vai nu -1. Divu ortogonālu matricu reizinājums ir ortogonāla matrica. Ja divu ortogonālu matricu determinants ir vienāds ar 1 (vai arī -1), tad to reizinājuma determinants arī ir vienāds ar 1; savukārt, ja vienas ortogonālas matricas determinants ir vienāds ar 1, bet otras - ir vienāds ar -1, tad to reizinājuma determinants ir vienāds ar -1 (šo apgalvojumu viegli pierādīt, ja atcerēties, ka divu vienāda tipa kvādrātisku matricu reizinājuma determinants ir vienāds ar šo matricu determinantu reizinājumu). Ortogonālas matricas $M = \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}$ inversā matrica M^{-1} ir vienāda ar tā saucamo **matricas M transponēto matricu**, kuru iegūst no matricas M, mainot tajā vietām rindiņas ar attiecīgajām kolonnām, t.i., $M^{-1} = \begin{matrix} a & c \\ b & d \end{matrix}$.

centru punktā O, kas viena leņķa sākummalu un beigumalu attēlo par attiecīgi otrā leņķa sākummalu un beigumalu.

Viegli pierādīt, ka visu leņķu ar sākumpunktu O kopā definētā attieksme "būt par vienādiem leņķiem" ir ekvivalence.

Atgādināsim dažus ģeometriskus faktus, kurus izmantosim iepriekš minētās ekvivalences pētīšanā.

- Visu ortogonālo matricu $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, kuru determinants ir vienāds ar 1, kopa ir komutatīva grupa attiecībā pret matricu reizināšanu. Šo grupu apzīmē ar SO_2. Grupas SO_2 neitrālais elements ir matrica $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elementa $M \in SO_2$ simetriskais elements ir matricas M inversā matrica M^{-1}, t.i., tāda matrica M^{-1}, ka $M \cdot M^{-1} = E$. Jebkurai matricai $M \in SO_2$ eksistē vienīgs skaitlis $t \in [0; 2\pi)$, ka $M = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Grupa SO_2 ir izomorfa multiplikatīvajai grupai $\mathbb{S}$, kura, atgādināsim, sastāv no visiem tiem un tikai tiem kompleksiem skaitļiem, kuru modulis ir vienāds ar 1. Tiešām, viegli pārliecināties, ka attēlojums $f : SO_2 \to S$, ka $f\left(\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\right) = \cos t + i \sin t$ jebkurai matricai $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \in SO_2$, $t \in [0; 2\pi)$, ir grupas SO_2 izomorfisms par grupu $\mathbb{S}$.

- Ja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ir rotācija ar centru punktā O, tad punkta $a \in \mathbb{R}^2$ attēls šajā attēlojumā ir vienāds ar punktu $z \cdot a$, kur $z \in \mathbb{S}$, t.i., z ir komplekss skaitlis, kura modulis ir vienāds ar 1. Tiešām, no iepriekš teiktā seko, ka eksistē vienīgs skaitlis $t \in [0; 2\pi)$, ka

$$f(a) = f((x; y)) = (x \cos t - y \sin t; x \sin t + y \cos t)$$

jebkuram $a = (x; y) \in \mathbb{R}^2$. Apskatīsim kompleksu skaitli $z = (\cos t; \sin t) \in \mathbb{S}$. Tad

$$z \cdot a = (\cos t; \sin t) \cdot (x; y) = (x \cos t - y \sin t; x \sin t + y \cos t).$$

Tātad $f(a) = z \cdot a$ jebkuram $a \in \mathbb{R}^2$, kur $z \in \mathbb{S}$.

Iepriekš teiktais ļauj definēt leņķa jēdzienu, izmantojot rotācijas interpretāciju kā plaknes $\mathbb{R}^2$ punktu reizināšanu ar kādu kompleksu skaitli $z \in \mathbb{S}$.

Pieņemsim, ka X ir visu plaknes $\mathbb{R}^2$ staru ar sākumpunktu O kopa. Kopā X^2 definēsim attieksmi $\sim$ pēc šāda likuma: $(a; b) \sim (c; d)$ tad un tikai tad, kad eksistē tāds $z \in \mathbb{S}$, ka $c = z \cdot a$ un $d = z \cdot b$, kur $(a; b) \in X^2$ un $(c; d) \in X^2$, $za = \{z \cdot (x, y) : (x, y) \in a\} \subset R^2$, $zb = \{z \cdot (x, y) : (x, y) \in b\} \subset R^2$. Nav grūti pierādīt, ka attieksme $\sim$ ir ekvivalences attieksme. Tāpēc kopu X^2 var izteikt kā savstarpēji nešķeļošos netukšu ekvivalences klašu apvienojumu. To vienīgo ekvivalences klasi, kura satur elementu $(a; b) \in X^2$, apzīmēsim ar $[(a; b)]$. Tātad $(a; b) \sim (c; d)$ tad un tikai tad, kad $[(a; b)] = [(c; d)]$.

2.13. definīcija. Par **plaknes** $\mathbb{R}^2$ **leņķi** sauc patvaļīgu ekvivalences klasi attiecībā pret iepriekš aplūkoto ekvivalences attieksmi kopā X^2.

Visu plaknes $\mathbb{R}^2$ leņķu kopu, t.i., kopas X^2 faktorkopu attiecībā pret tajā definēto ekvivalences attieksmi $\sim$, apzīmē ar An (`angle` latīņu valodā nozīmē "leņķis").

Ja $\alpha = [(a;b)] \in An$ ir patvaļīgs leņķis, tad eksistē vienīgs pārstāvis $(\omega; k_z) \in \alpha$, kur $\omega = \{(x;0) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0\}$, $k_z = \{\lambda z \in \mathbb{R}^2 |\ \lambda \geq 0\}$, $z \in \mathbb{C}^\circ$. Šo pārstāvi $(\omega; k_z)$ sauc par **leņķa α kanonisko pārstāvi**. Atzīmēsim, ka $k_z = \omega$ jebkuram $z = (x;0) \in \mathbb{C}^\circ$, ka $x > 0$.

Apskatīsim attēlojumu $A : An \to \mathbb{S}$, kurš jebkuram leņķim $\alpha \in An$ piekārto šī leņķa kanoniskā pārstāvja $(\omega; k_z)$ beigumalas k_z un vienības riņķa līnijas $\mathbb{S}$ krustpunktu. Atgādināsim, ka vienības riņķa līnija $\mathbb{S}$ tiek uzlūkota kā topoloģiskās telpas $\mathbb{R}^2$ apakštelpa (t.i., kopa $E \subset \mathbb{S}$ tiek uzlūkota par vaļēju kopu topoloģiskā telpā $\mathbb{S}$ tad un tikai tad, kad $E = G \cap \mathbb{S}$, kur G ir kāda vaļēja kopa topoloģiskā telpā $\mathbb{R}^2$). Kopā An definēsim topoloģiju, uzskatot, ka kopa $U \subset An$ ir vaļēja tad un tikai tad, kad kopas U attēls attēlojumā A, t.i., kopa $A(U)$, ir vaļēja kopa topoloģiskā telpā $\mathbb{S}$ (iesakām lasītājam pārliecināties, ka šādā veidā definēto kopas An vaļējo apakškopu saime ir topoloģija kopā An). Viegli pierādīt, ka attēlojums $A : An \to \mathbb{S}$ ir topoloģisko telpu An un $\mathbb{S}$ homeomorfisms.

Definēsim leņķu saskaitīšanu. Apskatīsim patvaļīgus leņķus $[(a;b)]$ un $[(c;d)]$. Stars c ar sākumpunktu O krusto vienības riņķa līniju $\mathbb{S}$ vienīgā punktā z_c, bet stars b - punktā z_b. Viegli redzēt, ka $\frac{z_b}{z_c} \in \mathbb{S}$. Tāpēc staru pāris $\left(\frac{z_b}{z_c}c; \frac{z_b}{z_c}d\right)$ ir ekvivalents staru pārim $(c;d)$, t.i., $\left[\left(\frac{z_b}{z_c}c; \frac{z_b}{z_c}d\right)\right] = [(c;d)]$, pie tam $\frac{z_b}{z_c}c = b$.

2.14. definīcija. Par **leņķu** $[(a;b)]$ **un** $[(c;d)]$ **summu** sauc leņķi $\left[\left(a; \frac{z_b}{z_c}d\right)\right]$, t.i., $[(a;b)] + [(c;d)] = \left[\left(a; \frac{z_b}{z_c}d\right)\right]$.

Leņķu saskaitīšanas ģeometriskā interpretācija ir šāda: otrā leņķa malas ir jāpagriež tā, lai tā sākummala sakristu ar pirmā leņķa beigumalu, tad pāris, kas sastāvēs no pirmā leņķa sākummalas un jauniegūtā leņķa beigumalas, būs doto leņķu summa. Atzīmēsim, ka eksistē arī citi ekvivalenti paņēmieni, lai definētu divu leņķu summu (skat. II nodaļas 2.9. paragrāfa 22. uzdevumu).

Iesakām lasītājam pārliecināties, ka kopa An ar tajā definēto leņķu saskaitīšanas operāciju ir aditīva komutatīva grupa, kuras neitrālais elements ir leņķis $\theta = [(a;a)]$, bet elementa $[(a;b)] \in An$ simetriskais elements ir leņķis $[(b;a)]$. Leņķi θ sauc par **nulles leņķi**.

2.15. teorēma. *a) Funkcija $A : An \to \mathbb{S}$ ir grupas An izomorfisms par grupu S. b) Funkcija $f : \mathbb{C}^\circ \to An$, ka $f(z) = [(\omega; k_z)]$ jebkuram $z \in \mathbb{C}^\circ$, ir grupas $\mathbb{C}^\circ$ nepārtraukts homomorfisms grupā An.*

► a) Iepriekš jau tika atzīmēts, ka attēlojums $A : An \to \mathbb{S}$ ir bijektīvs. Pierādīsim, ka jebkuriem $\alpha, \beta \in An$ ir spēkā

$$A(\alpha + \beta) = A(\alpha) \cdot A(\beta). \tag{2.29}$$

Tiešām, ņemot vērā 2.14. definīciju, iegūsim:

$$\alpha + \beta = \left[(\omega; k_{A(\alpha)})\right] + \left[(\omega; k_{A(\beta)})\right] = \left[(k_{A(\alpha)}; k_{A(\alpha)\cdot A\beta})\right] = \left[(\omega; k_{A(\alpha)\cdot A(\beta)})\right].$$

No attēlojuma $A : An \to \mathbb{S}$ definīcijas seko, ka jebkuriem $\alpha, \beta \in An$ ir spēkā (2.29).

b) Tā kā $A : An \to \mathbb{S}$ ir grupas An izomorfisms par grupu $\mathbb{S}$, tad attēlojuma A inversais attēlojums $A^{-1} : \mathbb{S} \to An$ ir grupas $\mathbb{S}$ izomorfisms par grupu An, pie tam attēlojums A^{-1} ir nepārtraukts, jo iepriekš tika atzīmēts, ka attēlojums A ir homeomorfisms.

Apskatīsim attēlojumu $g : \mathbb{C}^\circ \to \mathbb{S}$, ka $g(z) = \frac{1}{|z|} \cdot z$ jebkuram $z \in \mathbb{C}^\circ$. Acīmredzot, funkcija g ir nepārtraukta, pie tam jebkuriem $z, w \in \mathbb{C}^\circ$ ir spēkā

$$g(zw) = \frac{zw}{|zw|} = \frac{z}{|z|} \cdot \frac{w}{|w|} = g(z)g(w),$$

t.i., g - grupas $\mathbb{C}^\circ$ homomorfisms grupā $\mathbb{S}$. Tā kā $f = A^{-1} \circ g$, tad f ir grupas $\mathbb{C}^\circ$ nepārtraukts homomorfisms grupā An kā divu nepārtrauktu homomorfismu kompozīcija.◀

2.7.2. Leņķiska argumenta kosinusa un sinusa definīcija un īpašības

Apskatīsim funkcijas $P_1, P_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, ka $P_1(z) = \operatorname{Re} z$, $P_2(z) = \operatorname{Im} z$ jebkuram $z \in \mathbb{C}$.

2.15. definīcija. Par **leņķiska argumenta kosinusu un sinusu** sauc funkcijas cos un sin, kuras ir attiecīgi funkcijas $A : An \to \mathbb{S}$ reālā un imaginārā sastāvdaļa, t.i.,

$$\cos\alpha = (P_1 \circ A)(\alpha) = P_1(A(\alpha)), \quad \sin\alpha = (P_2 \circ A)(\alpha) = P_2(A(\alpha))$$

jebkuram $\alpha \in An$.

Tātad saskaņā ar definīciju jebkuram $\alpha \in A$ ir spēkā $A(\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

Leņķiska argumenta sinusa un kosinusa īpašības seko no iepriekš apskatīto funkciju A un A^{-1} īpašībām.

1⁰ $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$.

▶ Tā kā $A : An \to \mathbb{S}$ ir grupas An izomorfisms par grupu $\mathbb{S}$, tad, protams, A ir šo grupu homomorfisms. Tāpēc grupas An neitrālā elementa $\theta = [(a; a)]$, kur a ir kāds stars ar sākumpunktu O, attēls attēlojumā A ir grupas $\mathbb{S}$ neitrālais elements, t.i., skaitlis $1 = (1; 0) \in \mathbb{S}$. Ņemot vērā 2.15. definīciju, secinām, ka $\cos\theta = 1$ un $\sin\theta = 0$.◀

Leņķi $d \in An$ sauc par **taisnu leņķi**, ja $d = A^{-1}(i)$.

2⁰ $\cos d = 0$, $\sin d = 1$.

▶ Tā kā $A(d) = i = (0; 1) \in \mathbb{S}$, tad ņemot vērā 2.15. definīciju, secinām, ka $\cos d = 0$ un $\sin d = 1$.◀

3⁰ $\cos 2d = -1$, $\sin 2d = 0$ *(kur $2d = d + d$, bet + apzīmē leņķu saskaitīšanas operāciju grupā An).*

▶ Ņemot vērā, ka $A^{-1} : \mathbb{S} \to An$ ir grupas $\mathbb{S}$ izomorfisms par grupu An, atrodam:

$$2d = d + d = A^{-1}(i) + A^{-1}(i) = A^{-1}(i \cdot i) = A^{-1}(-1).$$

Tā kā $A(2d) = -1 = (-1; 0) \in \mathbb{S}$, tad ņemot vērā 2.15. definīciju, secinām, ka $\cos 2d = -1$ un $\sin 2d = 0$.◀

4⁰ *Jebkuram $\alpha \in An$ ir spēkā*

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

▶ Tā kā $A : An \to \mathbb{S}$ ir grupas An izomorfisms par grupu $\mathbb{S}$, pie tam $A(\theta) = 1$ (skat. 1^0 īpašības pierādījumu), tad

$$1 = A(\theta) = A(\alpha + (-\alpha)) = A(\alpha) \cdot A(-\alpha),$$

no kurienes seko, ka $A(-\alpha) = \frac{1}{A(\alpha)} = [A(\alpha)]^{-1}$ t.i., skaitlis $[A(\alpha)]^{-1}$ ir skaitļa $A(-\alpha)$ inversais elements grupā $\mathbb{S}$. Taču, ja $z \in \mathbb{S}$, tad $z^{-1} = \overline{z}$, t.i., elementa $z \in \mathbb{S}$ inversais elements z^{-1} grupā $\mathbb{S}$ ir vienāds ar kompleksā skaitļa z kompleksi saistīto skaitli. Ņemot vērā, ka leņķiska argumenta sinuss un kosinuss ir attiecīgi attēlojuma A reālā un imaginārā sastāvdaļa, secinām, ka $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ un $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.◀

5⁰ *Jebkuriem* $\alpha_1, \alpha_2 \in An$ *ir spēkā*

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_1 + \alpha_2) &= \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2,\\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) &= \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2.\end{aligned}$$

▶ Tiešām, tā kā

$$\begin{aligned}A(\alpha_1 + \alpha_2) = A(\alpha_1) \cdot A(\alpha_2) &= (\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_2) \cdot (\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2) =\\ &= (\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2) + i(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2),\end{aligned}$$

tad

$$\begin{aligned}\cos(\alpha_1 + \alpha_2) =& P_1(A(\alpha_1 + \alpha_2)) = \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2,\\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) =& P_2(A(\alpha_1 + \alpha_2)) = \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2 \blacktriangleleft .\end{aligned}$$

6⁰ *Jebkuram* $\alpha \in An$ *ir spēkā* $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

▶ Tā kā $A(\alpha) \in \mathbb{S}$ jebkuram $\alpha \in An$, t.i., $|A(\alpha)| = 1$ jebkuram $\alpha \in An$, tad

$$1 = |A(\alpha)|^2 = A(\alpha) \cdot \overline{A(\alpha)} = (\cos\alpha + i\sin\alpha) \cdot (\cos\alpha - i\sin\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha. \blacktriangleleft$$

7⁰ *Pieņemsim, ka* $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$, *kur* $O = (0; 0)$. *Tad*

$$\langle u; v\rangle = \|u\|\,\|v\| \cos\left[(k_u; k_v)\right], \tag{2.30}$$

kur $\|u\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$ *- vektora* $u = (u_1; u_2) \in \mathbb{R}^2$ *garums (citiem vārdiem sakot,* $\|u\| = |u|$ *- kompleksā skaitļa* $u = u_1 + iu_2 \in \mathbb{C}$ *modulis).*

▶ Tā kā $\frac{u}{|u|} \in \mathbb{S}$, tad arī $\frac{|u|}{u} \in \mathbb{S}$, pie tam $\frac{u}{|u|} \cdot \frac{|u|}{u} = 1 \in \mathbb{S}$. Ņemot vērā, ka kopas $\mathbb{R}^2$ elementu reizināšana ar kompleksu skaitli, kas pieder $\mathbb{S}$, saglabā skalāro reizinājumu, atrodam:

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{u}{|u|}; \frac{v}{|v|} \right\rangle = \left\langle 1; \frac{v}{u} \cdot \frac{|u|}{|v|} \right\rangle = P_1\left(\frac{v}{u} \cdot \frac{|u|}{|v|}\right) &= \cos\left[\left(\omega; k_{\frac{v}{u}\cdot\frac{|u|}{|v|}}\right)\right] =\\ &= \cos\left[\left(k_{\frac{u}{|u|}}; k_{\frac{v}{|v|}}\right)\right] = \cos\left[(k_u; k_v)\right],\end{aligned}$$

no kurienes seko (2.30).◀

Sekas. *Jebkuriem* $u, v \in \mathbb{R}^2$ *ir spēkā* ***Koši-Buņakovska nevienādība*** $\langle u; v\rangle^2 \leq \|u\|^2\|u\|^2$.

8^0 *Jebkuriem trim punktiem $A, B, C \in \mathbb{R}^2$, ka leņķis ABC ir taisns, ir spēkā* ***Pitagora teorēma***

$$\left|\overrightarrow{BA}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{AC}\right|^2.$$

► Apzīmēsim: $\overrightarrow{BA} = u$, $\overrightarrow{BC} = v$. Tad $\overrightarrow{AC} = v - u$. Izmantojot skalārā reizinājuma īpašības un vienādību $\cos[(k_u; k_v)] = 0$, iegūsim

$$\|v-u\|^2 = \langle v-u; v-u\rangle = \langle v; v\rangle - 2\langle v; u\rangle + \langle u; u\rangle =$$
$$= \|v\|^2 + \|u\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos[(k_u; k_v)] = \|v\|^2 + \|u\|^2. \blacktriangleleft$$

2.7.3. Leņķu mērs

Saistība starp leņķiska un skaitliska argumenta trigonometriskajām funkcijām var tikt nodibināta, pateicoties tam, ka leņķi tiek mērīti ar skaitļiem. Pie tam eksistē dažādi leņķu mērīšanas ar skaitļiem paņēmieni, piemēram, leņķu mērīšana ar grādiem vai radiāniem. Mēģinājums definēt leņķa skaitlisko mēru kā attēlojumu no An uz $\mathbb{R}$ noved pie daudzvērtīgām funkcijām. Piemēram, ar taisno leņķi d var asociēt ne tikai skaitli 90, bet arī skaitļus 450, 810, 90, 270 u.t.t. No tā izvairās, uzskatot, ka šie skaitļi atbilst dažādiem leņķiem. Šim nolūkam izmanto tādus jēdzienus kā "leņķis pulksteņa rādītāju kustības virzienā", "leņķis pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam", "leņķis ar vairākiem pilniem apgriezieniem" u.c.

No daudzvērtīguma var izvairīties arī tādējādi, ka piekārtot nevis leņķiem skaitļus, bet skaitļiem leņķus. Piemēram, iepriekš minētajā piemērā skaitļiem 450, 810, -90, 270 (vispārīgi runājot, skaitļiem $90 + 360m$ ($m \in \mathbb{Z}$) viennozīmīgi var tikt piekārtots taisns leņķis d, pie tam, sekojot šīs nodaļas idejām, izmantojot nevis patvaļīgus attēlojumus $f : \mathbb{R} \to An$, bet gan tikai tos no šiem attēlojumiem, kuri ir nepārtraukti homomorfismi (kopas $\mathbb{R}$ un An tiek uzlūkotas kā aditīvas grupas). Nepārtrauktu homomorfismu $f : \mathbb{R} \to An$ izvēli motivē šādas vēlamās īpašības:

1. mazām leņķu skaitliskā mēra izmaiņām ir jāatbilst mazas attiecīgo leņķu leņķiskā mēra izmaiņas;

2. neatkarīgi no tā, kāds leņķu skaitliskā mēra definēšanas paņēmiens tiek izmantots, skaitlim nulle tiek piekārtots nulles leņķis, bet pretējiem skaitļiem x un $-x$ tiek piekārtoti pretēji leņķi α un $-\alpha$.

2.16. definīcija. Par **leņķu mēru** sauc jebkuru nepārtrauktu grupas $\mathbb{R}^+$ homomorfismu grupā An, t.i., jebkuru funkciju $f : \mathbb{R} \to An$, ka
1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$;
2) f ir nepārtraukta funkcija.

2.16. teorēma. *Patvaļīgam leņķu mēram $f : \mathbb{R}^+ \to An$ ir viens un tikai viens no šādiem veidiem:*
1) $f(x) = 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$,
2) $f(x) = (A^{-1} \circ e_a)(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$,
3) $f(x) = (A^{-1} \circ \overline{e_a})(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$,
kur $A : An \to \mathbb{S}$ ir grupas An izomorfisms par grupu $\mathbb{S}$, $e_a(x)$ ir eksponente ar bāzi a ($a > 0$), $\overline{e_a}(x) = \overline{e_a(x)}$ - eksponentes $e_a(x)$ kompleksi saistītā funkcija.

► Attēlojumu $f : \mathbb{R}^+ \to An$ un $A : An \to \mathbb{S}$ kompozīcija $A \circ f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{S}$ ir eksponente. Iepriekš tika pierādīts (skat. 2.27. piezīmi), ka šajā gadījumā vai nu $A \circ f$ ir identiski vienāds ar $1 \in \mathbb{S}$, vai arī $A \circ f$ ir eksponente ar bāzi a ($a > 0$). Pirmajā gadījumā $f(x) = A^{-1}(1) = 0$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Otrajā gadījumā ir iespējami divi apakšgadījumi.

- Ja $(A \circ f)\left(\frac{a}{4}\right) = i$, tad no 2.9. definīcijas un 2.10. teorēmas seko, ka $(A \circ f)(x) = e_a(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$, t.i., $f(x) = (A^{-1} \circ e_a)(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.
- Ja $(A \circ f)\left(\frac{a}{4}\right) = -i$, tad $\left(\overline{A \circ f}\right)\left(\frac{a}{4}\right) = i$, kur $\left(\overline{A \circ f}\right)(x) = \overline{A\left(f\left(x\right)\right)}$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Tā kā funkcija $\overline{A \circ f}$ apmierina 2.9. definīcijas nosacījumus, tad no 2.10. teorēmas seko, ka jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ir spēkā $\left(\overline{A \circ f}\right)(x) = e_a(x)$ jeb $(A \circ f)(x) = \overline{e_a}(x)$. Tātad $f(x) = \left(A^{-1} \circ \overline{e_a}\right)(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$.◄

2.32. piezīme. No 2.16. teorēmas pierādījuma seko, ka a) gadījumā, kad $(A \circ f)\left(\frac{a}{4}\right) = i$, eksponentes $e_a(x)$ ($a > 0$) iedarbībā skaitļu taisne $\mathbb{R}$ tiek "uztīta" uz riņķa līnijas $\mathbb{S}$ pozitīvajā virzienā (t.i., pretēji pulksteņa rādītāju kustības virzienam). Savukārt, tā kā punkti $e_a(x)$ un $\overline{e_a}(x)$ ir simetriski attiecībā pret asi OX (riņķa līnijas $\mathbb{S}$ horizontālo diametru), tad b) gadījumā, kad $(A \circ f)\left(\frac{a}{4}\right) = -i$, eksponentes $\overline{e_a}(x)$ ($a > 0$) iedarbībā skaitļu taisne $\mathbb{R}$ tiek "uztīta" uz riņķa līnijas $\mathbb{S}$ negatīvajā virzienā (t.i., pulksteņa rādītāju kustības virzienā).

2.33. piezīme. Tā kā $e_a(x) = \cos_a x + i \sin_a x = \cos \frac{2\pi}{a} x + i \sin \frac{2\pi}{a} x$, tad $\overline{e_a}(x) = \cos \frac{2\pi}{a} x - i \sin \frac{2\pi}{a} x = \cos \frac{2\pi}{-a} x + i \sin \frac{2\pi}{-a} x$. Tāpēc gadījumam, kad $f = A^{-1} \circ e_a$, atbilst skaitlis a, bet gadījumam $f = A^{-1} \circ \overline{e_a}$ - skaitlis $-a$. Ja nulles attēlojumam f piekārtot skaitli 0, tad jebkuram leņķu mēram $f : \mathbb{R}^+ \to An$ atbildīs vienīgs parametrs $a \in \mathbb{R}$, kuru sauc par leņķu mēra f bāzi. Pašu leņķu mēru apzīmē ar $f_a(x)$ vai $M_a(x)$. Tāpat kā eksponentes gadījumā aplūkosim tikai leņķu mērus ar bāzi $a > 0$, jo gadījumā, kad $a = 0$, leņķu mērs ir triviāls, bet gadījums, kad $a < 0$, reducējas uz gadījumu, kad $a > 0$. Turpmāk uzskatīsim, ka $(A \circ f)\left(\frac{a}{4}\right) = i$, kur a ($a > 0$) ir funkcijas $(A \circ f)(x) = e_a(x)$ galvenais periods. Tā kā $f\left(\frac{a}{4}\right) = A^{-1}(i) = d$, tad nosacījums $(A \circ f)\left(\frac{a}{4}\right) = i$ ir ekvivalents nosacījumam $f\left(\frac{a}{4}\right) = d$.

Iepriekš teiktais ļauj aksiomātiski definēt leņķu mēru ar bāzi a ($a > 0$).

2.17. definīcija. Par **leņķu mēru ar bāzi** a ($a > 0$) sauc patvaļīgu leņķu mēru f, kuram piemīt šādas papildīpašības:
3) a - funkcijas f galvenais periods;
4) $f\left(\frac{a}{4}\right) = d$, kur d - taisnais leņķis.

No 2.10. teorēmas, kurā tika pierādīta eksponentes eksistence un vienīgums, un 2.16. teorēmas seko šāda teorēma.

2.17. teorēma. *Jebkuram $a > 0$ eksistē vienīgais leņķu mērs $M_a(x)$ ar bāzi a.*

2.18. definīcija. Saka, ka
a) **leņķa** α **mērs pie bāzes** a ($a > 0$) **ir vienāds ar** x, ja $M_a(x) = \alpha$;
b) **leņķa** α **galvenais mērs pie bāzes** a ($a > 0$) **ir vienāds ar** x, ja $M_a(x) = \alpha$ un $x \in [0; a)$; leņķa α galveno mēru pie bāzes a ($a > 0$) apzīmē ar $m_a(x)$.

Leņķa galvenais mērs $m_a(x)$ kopu $[0; a)$ bijektīvi attēlo par kopu An. Tāpēc funkcijai $m_a(x)$ eksistē inversā funkcija $m_a^{-1}(\alpha) : An \to [0; a)$, kuru arī dažkārt sauc par leņķu galveno mēru pie bāzes a ($a > 0$). Parasti apskata leņķu mēru ar bāzi 2π, 360 vai 400.

2.19. definīcija. Saka, ka

a) **leņķa** α **grādu mērs ir vienāds ar** x, ja $M_{360}(x) = \alpha$;
b) **leņķa** α **radiānu mērs ir vienāds ar** x, ja $M_{2\pi}(x) = \alpha$;
c) leņķa α decimālais grādu mērs ir vienāds ar x, ja $M_{400}(x) = \alpha$.

Nomainot šajās definīcijās leņķu mēru ar galveno leņķu mēru, iegūsim leņķu galvenā grādu mēra, galvenā radiānu mēra un galvenā decimālo grādu mēra definīciju. Piemēram, ja leņķa α galvenais radiānu mērs ir vienāds ar x, ja $M_{2\pi}(x) = \alpha$ un $x \in [0; 2\pi)$, t.i., ja $m_{2\pi}(x) = \alpha$.

2.20. definīcija.

1) Par **radiānu** sauc leņķi, kura galvenais radiānu mērs ir vienāds ar 1, t.i.,

$$1 \text{ radiāns} = m_{2\pi}(1) = \left(A^{-1} \circ e_{2\pi}\right)(1) = \left(A^{-1} \circ e_1\right)\left(\frac{1}{2\pi}\right);$$

2) par **grādu** sauc leņķi, kura galvenais grādu mērs ir vienāds ar 1, t.i.,

$$1^\circ = 1 \text{ grāds} = m_{360}(1) = \left(A^{-1} \circ e_{360}\right)(1) = \left(A^{-1} \circ e_1\right)\left(\frac{1}{360}\right);$$

3) par **decimālo grādu** sauc leņķi, kura galvenais decimālais grādu mērs ir vienāds ar 1, t.i.,

$$1^\partial = 1 \text{ decimālais grāds} = m_{400}(1) = \left(A^{-1} \circ e_{400}\right)(1) = \left(A^{-1} \circ e_1\right)\left(\frac{1}{400}\right);$$

4) par **grādu pie bāzes** a $(a > 0)$ sauc leņķi, kura galvenais grādu mērs pie bāzes a ir vienāds ar 1, t.i.,

$$1_a = m_a(1) = \left(A^{-1} \circ e_a\right)(1) = \left(A^{-1} \circ e_1\right)\left(\frac{1}{a}\right).$$

Ilustrēsim iepriekš teikto ar piemēriem.

2.1. piemērs. Apskatīsim leņķi $\alpha = -d$. Tad leņķa $-d$ mērs pie bāzes a $(a > 0)$ ir vienāds ar jebkuru kopas

$$E = \left\{\ldots, \frac{-5a}{4}, \frac{-a}{4}, \frac{3a}{4}, \frac{7a}{4}, \ldots\right\}$$

elementiem. Tiešām, jebkuram $x \in E$ ir spēkā $e_a(x) = -i$. Tā kā $A^{-1}(-i) = -d$, tad jebkuram $x \in E$ ir spēkā $-d = (A^{-1} \circ e_a)(x) = M_a(x)$. Skaitlis $\frac{3a}{4}$ ir vienīgais starp kopas E elementiem, kurš pieder $[0; a)$. Tāpēc skaitlis $\frac{3a}{4}$ ir leņķa $\alpha = -d$ galvenais mērs pie bāzes a $(a > 0)$. Ja $a = 2\pi$, tad $\frac{3a}{4} = \frac{3\pi}{2}$ ir leņķa $\alpha = -d$ galvenais radiānu mērs. Ja $a = 360$, tad $\frac{3a}{4} = 270$ ir leņķa $\alpha = -d$ galvenais grādu mērs.

2.2. piemērs. Pieņemsim, ka $\alpha = 2d = d + d$. Tā kā $A^{-1}(i) = d$, tad $A^{-1}(i) + A^{-1}(i) = 2d$. Taču $A^{-1}(i) + A^{-1}(i) = A^{-1}(i^2) = A^{-1}(-1)$. Tāpēc $A^{-1}(-1) = 2d$. Atradīsim leņķa $\alpha = 2d$ galveno radiānu mēru. Šajā gadījumā $\alpha = 2\pi$. Tā kā $e_{2\pi}(x) = -1$, t.i., $\cos x + i \sin x = -1$, tad $x = \pi \in [0; 2\pi)$. Tātad π ir leņķa $\alpha = 2d$ galvenais radiānu mērs.

2.3. piemērs. Ja x ir leņķa α mērs pie bāzes 2π, tad $\cos x = \cos\alpha$ un $\sin x = \sin\alpha$. Tiešām,

$$\alpha = M_{2\pi}(x) \Leftrightarrow \alpha = \left(A^{-1} \circ e_{2\pi}\right)(x) \Leftrightarrow A(\alpha) = e_{2\pi}(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(P_1\left(A(\alpha)\right) = P_1\left(e_{2\pi}(x)\right) \text{ un } P_2\left(A(\alpha)\right) = P_2\left(e_{2\pi}(x)\right)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\cos x = \cos\alpha \text{ un } \sin x = \sin\alpha\right).$$

No pēdējā piemēra izriet, ka skaitliska argumenta sinusu un kosinusu var definēt, izmantojot leņķiska argumenta sinusu un kosinusu, pie tam, protams, bāzes 2π vietā var ņemt jebkuru pozitīvu skaitli a.

2.21. definīcija. Par **skaitļa** x **kosinusu un sinusu pie bāzes** a ($a > 0$) sauc leņķa α, kura mērs pie bāzes a ir vienāds ar x, attiecīgi kosinusu un sinusu.

Tātad

$$\cos_a x = \cos\alpha,\ \ \sin_a x = \sin\alpha \Leftrightarrow \alpha = M_a(x).$$

2.4. piemērs. Pierādīsim, ka

$$\cos_b x = \cos_a\left(\frac{a}{b}x\right),\ \ \sin_b x = \sin_a\left(\frac{a}{b}x\right).$$

► Tiešām, izmantojot formulas (2.29) un (2.28d), iegūsim

$$\alpha = M_b\,(x) = \left(A^{-1} \circ e_b\right)\,(x) = A^{-1}\left(e_b\,(x)\,\right) = A^{-1}\left(e_1\left(\frac{x}{b}\right)\right) =$$
$$= A^{-1}\left(e_a\left(\frac{a}{b}x\right)\right) = \left(A^{-1} \circ e_a\right)\,\left(\frac{a}{b}x\right) = M_{\ a}\left(\frac{a}{b}x\right),$$

no kurienes seko, ka $\alpha = M_b(x) = M_a\left(\frac{a}{b}x\right)$. Tātad

$$\cos_b x = \cos\alpha,\ \ \sin_b x = \sin\alpha$$

tad un tikai tad, kad

$$\cos_b x = \cos_a\left(\frac{a}{b}x\right),\ \ \sin_b x = \sin_a\left(\frac{a}{b}x\right). \blacktriangleleft$$

Pierādīsim, ka 2.12. definīcija ir ekvivalenta 2.21. definīcijai.

► Tiešām, saskaņā ar 2.12. definīciju $\cos_a x = \left(P_1 \circ e_a\right)(x)$, saskaņā ar 2.21. definīciju $\cos{}_a x = \cos\alpha$, kur $\alpha = M_a(x) = \left(A^{-1} \circ e_a\right)(x)$. Savukārt no 2.15.definīcijas seko, ka $\cos\alpha = \left(P_1 \circ A\right)(\alpha)$. Tāpēc

$$\cos_a x = \cos\alpha = \left(P_1 \circ A\right)(\alpha) = \left(P_1 \circ A\right)\left(\left(A^{-1} \circ e_a\right)(x)\right) =$$
$$= P_1\left(A\left(A^{-1}\left(e_a(x)\right)\right)\right) = P_1\left(e_a(x)\right) = \left(P_1 \circ e_a\right)(x).$$

Līdzīgi apskata sinusa gadījumu.◄

2.8. Noslēguma piezīmes par elementāro pamatfunkciju aksiomātisko teoriju

Iepriekš tika pierādīts, ka elementārās pamatfunkcijas (lineārā funkcija, eksponentfunkcija, logaritmiskā funkcija, pakāpes funkcija) var tikt definētas kā skaitlisku grupu $\mathbb{R}^+$ un $\mathbb{R}^\bullet$ nepārtraukti homomorfismi, bet sinusa un kosinusa trigonometriskās funkcijas - kā grupu $\mathbb{R}^+$ un $\mathbb{S}$ nepārtraukta homomorfisma attiecīgi reālā un imaginārā sastāvdaļa. Rodas jautājums, vai eksistē citi skaitlisku grupu $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^\bullet$ un $\mathbb{S}$ nepārtraukti homomorfismi, kuri ļautu definēt atšķirīgas no iepriekš minētajām elementārās pamatfunkcijas? Turpmāk tiks pierādīts, ka atbilde uz šo jautājumu ir negatīva, jo pārējie iespējamie nepārtrauktie homomorfismi $f : R^\bullet \to \mathbb{S}$, $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}^+$, $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}^\bullet$, $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ var tikt izteikti ar 2.1., 2.2., 2.3., 2.4., 2.5. un 2.6. paragrāfā apskatītajiem nepārtrauktajiem homomorfismiem.

• Apskatīsim nepārtrauktu homomorfismu $f : \mathbb{R}^\bullet \to \mathbb{S}$ un patvaļīgu nepārtrauktu homomorfismu $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^\bullet$ (skat. 1.3. teorēmu). Tad $h = f \circ g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{S}$ - nepārtraukts homomorfisms. No 2.7. teorēmas seko, ka $h(x) = e_a(x)$ vai $h(x) = 1$. Ja $h(x) = 1$, tad $g(x) = 1$, t.i., $f(x) = 1$. Ja $h(x) = e_a(x)$, tad $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^\bullet$ - nepārtraukts izomorfisms. Pieņemsim, ka $g^{-1} : \mathbb{R}^\bullet \to \mathbb{R}^+$ ir tā inversais izomorfisms. Tad $(f \circ g) \circ g^{-1} = e_a \circ g^{-1}$, no kurienes seko, ka $f(x) = \left(e_a \circ g^{-1}\right)(x) = \cos_a g^{-1}(x) + i \sin_a g^{-1}(x)$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$. Tātad nepārtraukta homomorfisma $f : \mathbb{R}^\bullet \to \mathbb{S}$ reālā sastāvdaļa $\cos_a g^{-1}(x)$ un imaginārā sastāvdaļa $\sin_a g^{-1}(x)$ ir elementārās funkcijas (atzīmēsim, ja $g(x) = b^x$, tad $g^{-1}(x) = \log_b x$, tāpēc $f(x) = (e_a \circ \log_b)(x)$, ja $b \neq 1$, un $f(x) = 1$, ja $b = 1$).

• Apskatīsim identiski nenulles nepārtrauktu homomorfismu $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}^+$ un patvaļīgu nepārtrauktu homomorfismu $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{S}$. No 2.7. teorēmas seko, ka $g(x) = e_a(x)$ kādam $a > 0$, pie tam $g(\mathbb{R}) = \mathbb{S}$. Acīmredzot, $h = f \circ g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ - nepārtraukts homomorfisms. No 1.1. teorēmas seko, ka $h(x) = bx$, kur $b \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$. Tātad $f(e_a(x)) = bx$ jebkuram $x \in \mathbb{R}$ ($a > 0$, $b \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$). Vienkāršības labad pieņemsim, ka $a = 2\pi$. Tad jebkuram $t \in \mathbb{R}$ ir spēkā $f(e_a(t)) = bt$ jeb $f(\cos t + i \sin t) = bt$, kur $b \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$.

Ja $z = \cos t + i \sin t \in \mathbb{S}_+$ ($\mathbb{S}_+$ - augšējā pusriņķa līnija), tad eksistē tāds $x \in [-1; 1]$, ka
$$z = \cos(\arccos x) + i \sin(\arccos x) = x + i\sqrt{1 - x^2}.$$
Tāpēc
$$g(x) = f(z) = f\left(x + i\sqrt{1 - x^2}\right) = b \arccos x, \quad x \in [-1; 1].$$

Ja $z = \cos t + i \sin t \in \mathbb{S}_l$ ($\mathbb{S}_l$ - labā pusriņķa līnija), tad eksistē tāds $y \in [-1; 1]$, ka
$$z = \cos(\arcsin y) + i \sin(\arcsin y) = \sqrt{1 - y^2} + iy.$$
Tāpēc
$$g(y) = f(z) = f\left(\sqrt{1 - y^2} + iy\right) = b \arcsin y, \quad y \in [-1; 1].$$

Līdzīgi apskata gadījumus, kad $z = \cos t + i \sin\, t \in \mathbb{S}_-$ ($\mathbb{S}_-$ - apakšējā pusriņķa līnija) un $z = \cos t + i \sin t \in \mathbb{S}_k$ ($\mathbb{S}_k$ - kreisā pusriņķa līnija). Tātad visi iespējamie nepārtrauktie homomorfismi $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}^+$ reducējas uz elementārajām funkcijām $b \arccos x$ un $b \arcsin y$.

Pārējie nepārtrauktie homomorfismi $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}^\bullet$ un $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ tiek aplūkoti līdzīgi (skat. 26. un 27. uzdevumu).

Visu paragrāfa sākumā minēto nepārtraukto homomorfismu raksturojums ir sniegts tabulā, ņemot vērā arī iepriekš minētos uzdevumus.

	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}^\bullet$	$\mathbb{S}$
$\mathbb{R}^+$	$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = ax$, kur $a \in \mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = a^x$, kur $a > 0$, vai arī $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$	$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = e_a(x)$, kur $a > 0$, vai arī $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 1$
$\mathbb{R}^\bullet$	$\forall x \in \mathbb{R}_{>0} : f(x) = \log_a(x)$, kur $a > 0$, $a \neq 1$, vai arī $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} : f(x) = 0$	$\forall x \in \mathbb{R}_{>0} : f(x) = x^a$, kur $a \in \mathbb{R}$	$\forall x \in \mathbb{R}_{>0} : f(x) = (e_a \circ \log_b)(x)$, kur $a > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, vai arī $\forall x \in \mathbb{R}_{>0} : f(x) = 1$
$\mathbb{S}$	$\forall x \in \mathbb{R} : f(e_a(x)) = bx$, kur $a > 0$, $b \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, vai arī $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = 0$	$\forall x \in \mathbb{R} : f(e_{2\pi}(x)) = a^{bx}$, kur $a > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$, vai arī $\forall x \in \mathbb{R} : f(e_{2\pi}(x)) = 1$	$\forall x \in \mathbb{R} : f(e_{2\pi}(x)) = e_{2\pi}(bx)$, kur $b \in \mathbb{R}$

Autori uzskata, ka, elementāro pamatfunkciju aksiomātiskās teorijas izklāsts nevar būt pilnīgs, ja netiek apskatīti dažādi konkrēti elementāro pamatfunkciju definēšanas paņēmieni (t.i., konkrēti grupu $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^\bullet$ un $\mathbb{S}$ nepārtrauktu homomorfismu definēšanas paņēmieni). Autoriem nav zināma matemātiskā literatūra, kurā vispusīgi tiktu aplūkoti dažādi elementāro pamatfunkciju definēšanas paņēmieni, izņemot, varbūt, mācību līdzekli [5], kurā tiek apskatīti daži no tiem.

Autori ir iecerējuši dotā mācību līdzekļa turpinājumu "Elementāro pamatfunkciju definēšanas paņēmieni", kurā tiks aplūkotas sekojošas tēmas:

- elementārās pamatfunkcijas kā integrāļi ar mainīgu augšējo robežu, vai arī to apgrieztie lielumi;
- elementārās pamatfunkcijas kā diferenciālvienādojumu atrisinājumi;
- elementārās pamatfunkcijas kā funkcionālu virkņu robežas;
- elementārās pamatfunkcijas kā pakāpju rindu summas.

2.9. Uzdevumi

1. Pieņemsim, ka $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir grupas $\mathbb{R}^+$ izomorfisms sevī. Atrast funkcijas f inversās funkcijas veidu un pierādīt, ka tā ir lineāra funkcija.
2. Pierādīt, neizmantojot lineārās funkcijas 9^0 īpašību, ka monotona funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$ ir spēkā $f(x + y) = f(x) + f(y)$, ir lineāra funkcija.
3. Pieņemsim, ka $\mathbb{R}^n$ ir n-dimensiju aritmētiskā Eiklīda telpa. Funkciju $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sauc par **lineāru funkciju**, ja izpildās šādi nosacījumi:
   aditivitate: jebkuriem $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^n$ ir spēkā $\ell(h_1 + h_2) = \ell(h_1) + \ell(h_2)$;
   homogenitāte: jebkuram $h \in \mathbb{R}^n$ un patvaļīgam $\lambda \in \mathbb{R}$ ir spēkā $\ell(\lambda h) = \lambda \ell(h)$.
   (a) Pierādīt, ka homogenitātes īpašība racionāliem skaitļiem λ izriet no aditivitātes īpašības.
   (b) Pierādīt, ka nepārtraukta funkcija $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kurai piemīt aditivitātes īpašība, ir lineāra funkcija.
   (c) Pierādīt, ka $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ir lineāra funkcija, ja tā ir nepārtraukta vismaz vienā punktā un tai piemīt aditivitātes īpašība.
   (d) Pierādīt, ka $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ir lineāra funkcija, ja tā ir ierobežota funkcija kādā punkta $0 \in \mathbb{R}^n$ apkārtnē un tai piemīt aditivitātes īpašība.
   (e) Pierādīt, ka jebkurai lineārai funkcijai $\ell : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eksistē tāds $a \in \mathbb{R}^n$, ka

$$\forall h \in \mathbb{R}^n : \ \ell(h) = \langle a; h \rangle,$$

kur $\langle x; y\rangle$ ir skalārais reizinājums Eiklīda telpā $\mathbb{R}^n$, t.i.,

$$\langle x; y\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

jebkuriem $x = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \in R^n$ un $y = (y_1; y_2; \ldots; y_n) \in \mathbb{R}^n$.

4. Pierādīt, ka eksponentfunkcijas definīcijā (skat. 2.3. definīciju) otro nosacījumu: f - nepārtraukta funkcija, nomainot ar jebkuru no trim nosacījumiem:
1) f - monotona funkcija;
2) f - ierobežota funkcija kādā punkta $x_0 = 0$ apkārtnē;
3) f - nepārtraukta funkcija kādā punktā $x_0 = 0$ (vai kādā citā punktā x_0),
iegūsim ekvivalentu definīciju.

5. Pierādīt, ka logaritmiskās funkcijas definīcijā (skat. 2.5. definīciju) otro nosacījumu: f - nepārtraukta funkcija, nomainot ar jebkuru no trim nosacījumiem:
1) f - monotona funkcija;
2) f - ierobežota funkcija kādā punkta $x_0 = 1$ (vai arī kāda cita punkta $x_0 > 0$) apkārtnē;
3) f - nepārtraukta funkcija kādā punktā $x_0 = 1$ (vai arī kādā citā punktā $x_0 > 0$),
iegūsim ekvivalentu definīciju.

6. Pierādīt, ka pakāpes funkcijas definīcijā (skat. 2.7. definīciju) otro nosacījumu: f - nepārtraukta funkcija, nomainot ar nosacījumu: f - monotona funkcija, iegūsim ekvivalentu definīciju.

7. Pierādīt, ka pārtraukta funkcija

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x > 0, \\ 0, & \text{ja} \quad x = 0, \\ -1, & \text{ja} \quad x < 0, \end{cases}$$

apmierina vienādojumu $f(xy) = f(x)f(y)$.

8. Atrisināt funkcionālvienādojumu $f(x) = f(2x)$ nepārtraukto funkciju klasē. Pierādīt, ka visur pārtrauktā Dirihlē funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{ja} \quad x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

apmierina šo funkcionālvienādojumu.

9. Atrast nepārtrauktu funkciju $f(x)$, kura nav identiski vienāda ar nulli un kura apmierina funkcionālvienādojumu $f(x-y) = f(x)f(y)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$.

10. Atrast visas funkcijas $f(x)$, kuras apmierina funkcionālvienādojumu $xf(y)+yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$. Pierādīt, ka tikai divas no šīm funkcijām ir nepārtrauktas.

11. Pieņemsim, ka nepārtraukta funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vienlaicīgi apmierina funkcionālvienādojumus $f(x+y) = f(x) + f(y)$ un $f(xy) = f(x)f(y)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$. Pierādīt, ka vai nu $f(x) \equiv 0$, vai arī $f(x) = x$.

12. Pie kādām parametra α vērtībām eksistē vismaz viena funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kura nav konstanta funkcija un kura apmierina funkcionālvienādojumu $f(\alpha(x + y)) = f(x) + f(y)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$?

13. Pieņemsim, ka a un b ir atšķirīgi no skaitļa 1 dažādi pozitīvi skaitļi. Atrast visas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka $f(x + y) = a^y f(x) + b^x f(y)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$.

14. Pieņemsim, ka a ir fiksēts reāls skaitlis. Atrast visas nepārtrauktas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka $f(1) = a$ un $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$.

15. Atrast visas nepārtrauktas punktā $x = 0$ funkcijas $f : R \to R$, ka $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$.

16. Pieņemsim, ka a ir fiksēts reāls skaitlis. Atrast visas diferencējamas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ka $f(1) = a$ un $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$.

17. Pierādīt, ka eksponente $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{S}$, kurai ir spēkā $f\left(\frac{a}{4}\right) = i$ (a - eksponentes galvenais periods), nogriezni $\left[\frac{a}{2}; \frac{3a}{4}\right]$ bijektīvi attēlo par nogriezni $\left[\frac{3a}{4}; a\right]$.

18. Pierādīt, ka funkcija $\cos_a x$ ir stingri dilstoša nogrieznī $[0; \frac{a}{2}]$, iepriekš pierādot šādu formulu:
$$\cos_a x_1 - \cos_a x_2 = -2 \sin_a \frac{x_1 + x_2}{2} \cos_a \frac{x_2 - x_1}{2}.$$
Formulēt funkcijas $\arccos_a x$ kā funkcijas $\cos_a x$, $x \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$, inversās funkcijas definīciju. Kādu lomu šajā definīcijā spēlē nogrieznis $\left[0; \frac{a}{2}\right]$? Atrast funkcijas $\sin_a x$ stingrās monotonitātes intervālus. Formulēt funkcijas $\arcsin_a x$, kā funkcijas $\sin_a x$ sašaurinājuma kādā no šiem intervāliem inversās funkcijas, definīciju. Pierādīt redukcijas formulas argumentiem x un $x \pm \pi$, x un $x \pm \frac{3\pi}{2}$.

19. Pierādīt, ka vienādojumam $z^n = z_0 = \cos x + i \sin x$ ir tieši n saknes, kuras pieder vienības riņķa līnijai un kuras iegūst, formulā
$$z = \cos \frac{x + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{x + 2k\pi}{n}$$
parametram k piešķirot vērtības $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

20. Pieņemsim, ka d ir taisns leņķis. Atrast leņķu $d, 2d, 3d, \ldots, nd$ dažādus mērus. Pierādīt, ka $\frac{d}{2} = A^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ un $\frac{d}{3} = A^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$, ja leņķus $\frac{d}{2}$ un $\frac{d}{3}$ definē attiecīgi vienādojumi $2x = d$ un $3x = d$. Atrast leņķu $\pm\frac{d}{2}$, $\pm\frac{d}{3}$, $\pm\frac{4d}{3}$ dažādus mērus.

21. Pierādīt, ka attēlojums $f : SO_2 \to \mathbb{S}$, ka
$$f\left(\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\right) = \cos t + i \sin t,$$
ir grupu SO_2 un $\mathbb{S}$ izomorfisms.

22. Pārformulēt leņķu saskaitīšanas definīciju (skat. 2.14. definīciju), uzskatot, ka
$$[\langle a; b\rangle] + [\langle c; d\rangle] = \left[\left\langle \frac{z_c}{z_b} a; d \right\rangle\right].$$

Pierādīt, ka

$$\left[\left\langle a; \frac{z_b}{z_c} d \right\rangle\right] = \left[\left\langle \frac{z_c}{z_b} a; d \right\rangle\right].$$

Noskaidrot šādas leņķu saskaitīšanas definīcijas ģeometrisko jēgu (z_c un z_b ir 2.14. definīcijā aplūkotie kompleksie skaitļi).

23. Pierādīt, ka visu plaknes leņķu kopa An attiecībā pret saskaitīšanas operāciju (skat. 2.14. definīciju) ir komutatīva grupa, kuras neitrālais elements ir leņķis $[\langle a; a \rangle]$, bet leņķa $[\langle a; b \rangle]$ simetriskais elements ir leņķis $[\langle b; a \rangle]$.

24. Formulēt leņķu saskaitīšanas definīciju, plaknes $\mathbb{R}^2$ elementu reizināšanas ar kompleksiem skaitļiem $z \in \mathbb{S}$ vietā izmantojot plaknes $\mathbb{R}^2$ rotācijas (t.i., matricas no grupas SO_2).

25. Pierādīt formulu $\langle u; v \rangle = \|u\| \, \|v\| \cos [\langle k_u; k_v \rangle]$ (skat. 2.7.2. apakšparagrāfa 7^0 īpašību), plaknes $\mathbb{R}^2$ elementu reizināšanas ar kompleksiem skaitļiem $z \in \mathbb{S}$ vietā izmantojot plaknes $\mathbb{R}^2$ rotācijas (t.i., matricas no grupas SO_2).

26. Pierādīt, ka nepārtraukts homomorfisms $f : \mathbb{S} \to \mathbb{R}^\bullet$ apmierina vienādību $f(\cos t + i \sin t) = a^{bt}$ jebkuram $t \in \mathbb{R}$ un reducējas uz elementārajām funkcijām $a^{b \arccos x}$ un $a^{b \arcsin x}$, kur a,b - fiksēti reāli skaitļi, ka $a > 0$, $a \neq 1$ un $b \neq 0$.

27. Pierādīt, ka nepārtraukts homomorfisms $f : \mathbb{S} \to \mathbb{S}$ apmierina vienādību $f(\cos t + i \sin t) = \cos bt + i \sin bt$ jebkuram $t \in \mathbb{R}$ un reducējas uz elementārajām funkcijām $\cos(b \arccos x)$, $\sin(b \arccos x)$, $\cos(b \arcsin x)$ un $\sin(b \arcsin x)$, kur b - fiksēts reāls skaitlis.

28. Atrast visas nepārtrauktas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kuras ir atšķirīgas no konstantām funkcijām un kuras apmierina vienādību $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$.

29. Atrast visas nepārtrauktas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kuras ir atšķirīgas no nullfunkcijas un kuras apmierina vienādību $f^2(x) - f^2(y) = f(x+y)f(x-y)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$.

30. Atrast visas nepārtrauktas funkcijas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kuras apmierina vienādības $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$ un $g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$ jebkuriem $x, y \in \mathbb{R}$, pie tam $f(0) = 1$ un $g(0) = 0$.

LITERATŪRA

[1] Н. Бурбаки. Функции действительного переменного (элементарная теория). - М.: Наука, 1996. - 424 с.

[2] Н. Бурбаки. Общая топология (Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства). - М.: Наука, 1969. - 392 с.

[3] В.А. Любецкий. Основные понятия школьной математики. - М.: Просвещение, 1987. - 400 с.

[4] Современные основы школьного курса математики (А.Я. Виленкин, К.И. Дуничев, Л.А. Калужнин, А.А. Столяр). - М.: Просвещение, 1980. - 240 с.

[5] Элементарные функции (Б.М. Архипов, А.А. Мазаник, Г.Н. Петровский, М.И. Урбанович). - Минск: Вышэйшая школа, 1991. - 140 с.

[6] В.А. Старцев. Введение в математический анализ I. Теория пределов. - Daugavpils: DPU izd. "Saule", 1996. - 139 lpp.

[7] В.А. Старцев. Введение в математический анализ II. Непрерывные функции и отображения. - Daugavpils: DPU izd. "Saule", 1996. - 84 lpp.

[8] В.А. Старцев. Основные структуры математического анализа (метрические пространства). - R.: LVU, 1988. - 80 lpp.

[9] В.А. Старцев. Основные структуры математического анализа (непрерывные отображения). - R.: LVU, 1988. - 84 lpp.

[10] В.А. Старцев. О некоторых способах определения числа π.// Akadēmiskās izglītības problēmas universitātē. Daugavpils Pedagoģiskās universitātes pasniedzēju un 5. (39.) studentu zinātniski metodiskās konferences materiāli (matemātiskās analīzes sekcija, algebras un ğeometrijas sekcija). DPU zinātniskie raksti A5. - Daugavpils: DU izdevniecība "Saule", 1997. - 5.-12. lpp.

SATURS