DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

Matemātikas katedra

Armands Gricāns

Lineāri rekurenti vienādojumi ar konstantiem koeficientiem

2005. gada 8. aprīlis

2005

ANOTĀCIJA

Mācību līdzeklī ir apskatīti lineāru (homogēnu vai nehomogēnu) rekurentu vienādojumu risināšanas paņēmieni, lietojot vienādojuma spektru un veidotājfunkciju metodi. Mācību līdzekli ir domāts studentiem un maģistrantiem, apgūstot diskrētās matemātikas kursu.

SATURS

1. Fibonači uzdevums par trušiem

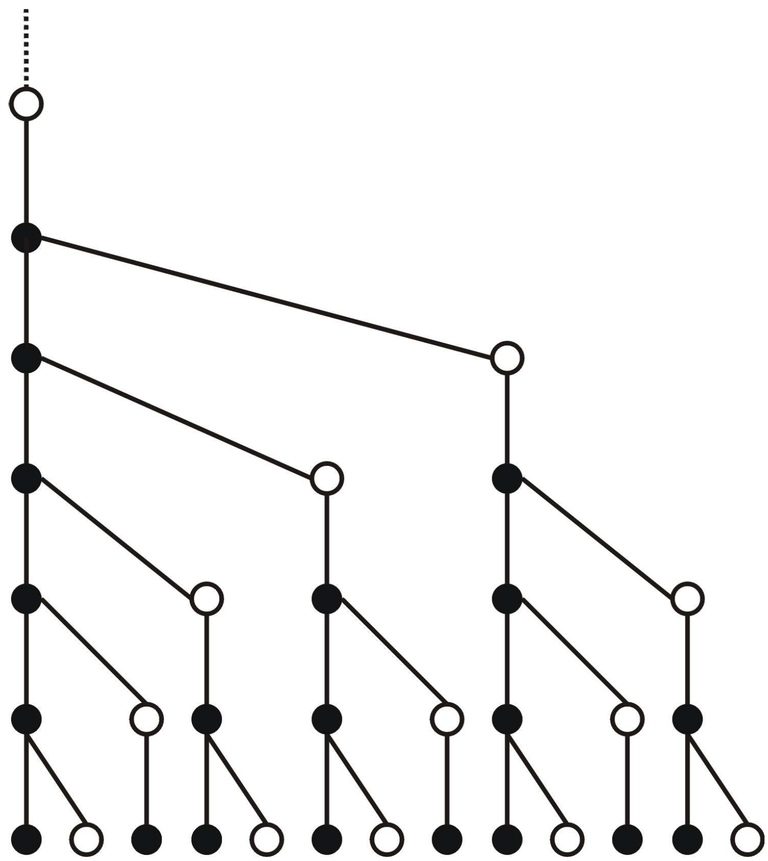
Viduslaiku itāļu matemātiķis Fibonači savā darbā "Abaka grāmata" (1202.g.) formulēja un atrisināja šādu uzdevumu:

"Cik trušu pāru piedzims gada laikā no viena pieauguša trušu pāra (trušu pāris kļūst pieaudzis vienu mēnesi pēc dzimšanas), ja katram pieaugušam trušu pārim ik pēc mēneša rodas pēcnācēji (mātīte un tēviņš) un neviens trušu pāris neiet bojā."

1.1. zīm. Pizas Leonards (Leonardo Pisano, 1180-1240)

Viduslaiku itāļu matemātiķis, kurš ir pazīstams arī kā Fibonači (*Fibonacci* latīņu valodā nozīmē "Bonači dēls"). Fibonači nozīmīgākais darbs ir 1202. gadā iznākušais darbs "Abaka grāmata" ("Liber Abaci"), kurā tika apkopotas un sistematizētas un tālāk attīstītas tajā laikā Vidusjūras krastos dzīvojošo tautu matemātiskās zināšanas un kurai bija liela nozīme pozicionālās decimālās skaitīšanas sistēmas un indiešu ciparu ieviešanā Eiropā. Vairāk nekā 200 gadu šī grāmata kalpoja eiropiešiem par matemātikas rokasgrāmatu un lielā mērā sagatavoja augsni matemātikas atdzimšanai Renesanses laikmetā. Citi nozīmīgākie Fibonači darbi: "Ģeometrijas praktika" ("Practica Geometriae", 1220), kurā ir apkopotas dažādas ģeometrijas teorēmas ar pierādījumiem, un "Kvadrātu grāmata" ("Liber Quadratorum",1225), kuru uzskata par vienīgo vērtīgo pētījumu skaitļu teorijā viduslaiku Eiropā.

Fibonači uzdevuma par trušiem atrisinājums. Ar u_n $(n = 0, 1, 2, \dots)$ apzīmēsim trušu pāru skaitu ik pēc mēneša, sākot ar kādu sākummomentu. Pieņemsim, ka sākummomentā nav neviena trušu pāra, t.i., $u_0 = 0$, bet pēc mēneša piedzimst trušu pāris, t.i., $u_1 = 1$. Paejot vēl vienam mēnesim, trušu pāru skaits paliks tas pats, jo, kaut arī trušu pāris ir kļuvis pieaudzis, tomēr tam pēcnācēji būs tikai pēc mēneša. Vēl pēc mēneša trušu pārim piedzims pēcnācēji, un tāpēc kopējais trušu skaits būs vienāds ar 2, t.i., $u_3 = 2$. Paejot vēl vienam mēnesim, pirmajam trušu pārim piedzims pēcnācēji, bet otrais trušu pāris kļūs pieaudzis, un pēcnācēji tam radīsies tikai pēc mēneša. Tātad kopējais trušu pāru skaits četrus mēnešus kopš sākummomenta būs vienāds ar 3, t.i., $u_4 = 3$. Spriežot līdzīgi,



1.2. zīm.

iegūsim, ka $u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13$ utt. To var uzskatāmi attēlot ar zīmējumu (skat. 1.2. zīm.), kurā balts aplītis apzīmē jaundzimušu pāri, bet melns aplītis – pieaugušu pāri.

Nav grūti ievērot likumsakarību, ka trušu pāru skaitu u_{n+2} $(n \geq 0)$, paejot diviem un vairāk mēnešiem kopš sākummomenta, var aprēķināt, saskaitot trušu pāru skaitu iepriekšējos divos mēnešos, t.i.,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1.1}$$

Tātad

$$\begin{aligned}
&u_0 = 0,\\
&u_1 = 1,\\
&u_2 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1,\\
&u_3 = u_2 + u_1 = 1 + 1 = 2,\\
&u_4 = u_3 + u_2 = 2 + 1 = 3,\\
&u_5 = u_4 + u_3 = 3 + 2 = 5,\\
&u_6 = u_5 + u_4 = 5 + 3 = 8,\\
&u_7 = u_6 + u_5 = 8 + 5 = 13,\\
&u_8 = u_7 + u_6 = 13 + 8 = 21,\\
&u_9 = u_8 + u_7 = 21 + 13 = 34,\\
&u_{10} = u_9 + u_8 = 34 + 21 = 55,\\
&u_{11} = u_{10} + u_9 = 55 + 34 = 89,\\
&u_{12} = u_{11} + u_{10} = 89 + 55 = 144,
\end{aligned}$$

$$u_{13} = u_{12} + u_{11} = 89 + 144 = 233,$$
$$u_{14} = u_{13} + u_{12} = 233 + 144 = 377, \ \dots \ .$$

Pēc gada, kopš pirmais trušu pāris kļuva pieaudzis, trušu pāru skaits būs vienāds ar trušu pāru skaitu pēc četrpadsmit mēnešiem kopš sākummomenta, t.i, ar $u_{14} = 377$. Fibonači uzdevums par trušiem ir atrisināts.

Skaitļu virkni

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 144, 233, 377, 610, \ \dots \tag{1.2}$$

sauc par **Fibonači virkni**, bet šīs virknes locekļus – **Fibonači skaitļiem**. Fibonači skaitļus izmanto matemātikā, programmēšanā, spēļu teorijā, skaitļošanas tehnikā utt.

Pievērsīsim uzmanību sakarībai (1.1), saskaņā ar kuru jebkurš Fibonači virknes loceklis, sākot ar u_2, var tikt aprēķināts pēc viena un tā paša likuma (– formulas (1.1)), izmantojot divus iepriekšējos virknes locekļus. *Virkni, kuras locekļus, sākot ar kādu, var aprēķināt pēc viena un tā paša likuma, izmantojot iepriekšējos locekļus, sauc par rekurentu virkni.* Šajā darbā tiks apskatīta rekurentu virkņu apakšklase, kas sastāv no tā saucamajām lineārām rekurentām virknēm ar konstantiem koeficientiem.

Pirms pāriet pie rekurentu virkņu teorijas izklāsta, īsi atskatīsimies uz rekurentu virkņu vēsturi. Rekurentu virkņu teorijas pamatus izveidoja A. Muavrs un D. Bernulli 18. gadsimtā, taču vislielāko ieguldījumu rekurentu virkņu teorijā deva viņu laikabiedrs, izcilākais 18. gadsimta matemātiķis L. Eilers, kurš rekurentām virknēm un rindām veltīja sava fundamentālā darba "Ievads bezgalīgi mazo analīzē" ("Introductio in analysin in finitorum", 1748. g.) trīspadsmito nodaļu. Nozīmīgi darbi rekurento virkņu teorijā un pielietojumos pieder krievu matemātiķiem P. Čebišovam, A. Markovam un A. Gelfondam.

2. Lineāri rekurenti vienādojumi ar konstantiem koeficientiem

Par **k-tās kārtas lineāru rekurentu vienādojumu ar konstantiem koeficientiem** sauc sakarību

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \cdots + a_k u_n + f_n, \tag{2.1}$$

kur $a_1, a_2, \ \ldots \ , a_k \in \mathbb{C}$ ir **vienādojuma** (2.1) **koeficienti**, $a_k \neq 0$, k ir fiksēts naturāls skaitlis, kuru sauc par **vienādojuma** (2.1) **kārtu**, n ir vesels nenegatīvs skaitlis, bet (f_n) ir kāda dotā komplekso skaitļu virkne, kuru sauc par **vienādojuma** (2.1) **brīvi locekli**.

Kompleksu skaitļu virkni

$$u_0, u_1, u_2, \ \ldots \ , u_n, \ \ldots \ ,$$

kuru saīsināti apzīmēsim ar (u_n), sauc par **vienādojuma** (2.1) **partikulāro atrisinājumu** (vai **vienādojuma** (2.1) **atrisinājumu**), ja virknes (u_n) locekļus, sākot ar k-to, saista sakarība (2.1).

Jebkuri k patvaļīgi kompleksi skaitļi

$$u_0, u_1, u_2, \ \ldots \ , u_{k-1}, \tag{2.2}$$

ļauj konstruēt vienādojuma (2.1) atrisinājumu (u_n) šādi: virknes (u_n) pirmie k locekļi ir (2.2), bet šīs virknes locekļus, sākot ar k-to, aprēķina pēc formulas (2.1). Skaitļus (2.2) sauc par **sākumnosacījumiem**, bet konstruēto virkni (u_n) sauc par **vienādojuma** (2.1) **partikulāro atrisinājumu, kas atbilst sākumnosacījumiem** (2.2).

Atrisināt vienādojumu (2.1) **ar sākumnosacījumiem** (2.2) nozīmē atrast vienādojuma (2.1) partikulāro atrisinājumu, kas atbilst sākumnosacījumiem (2.2).

Ja (f_n) ir nenulles virkne, t.i., $f_n \neq 0$ vismaz vienam $n \in \mathbb{N}_0$, tad (2.1) sauc par **k-tās kārtas lineāru *nehomogēnu* rekurentu vienādojumu ar konstantiem koeficientiem**.

Pretējā gadījumā, ja $f_n = 0$ visiem $n \in \mathbb{N}_0$, tad (2.1) sauc par **k-tās kārtas lineāru *homogēnu* rekurentu vienādojumu ar konstantiem koeficientiem**. Tātad k-tās kārtas lineāram *homogēnam* rekurentam vienādojumam ar konstantiem koeficientiem ir veids

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \cdots + a_k u_n. \tag{2.3}$$

3. Lineāru rekurentu vienādojumu ar konstantiem koeficientiem piemēri

3.1. ***Fibonači virkne.*** No pirmajā paragrāfā teiktā seko, ka Fibonači virkne

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_4 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, \ \dots \tag{1.2}$$

apmierina otrās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \tag{1.1}$$

ar sākumnosacījumiem: $u_0 = 0, u_1 = 1$.

3.2. ***Ģeometriskā progresija.*** Apskatīsim ģeometrisko progresiju:

$$u_0 = a, u_1 = aq, u_2 = aq^2, \ \dots \ , u_n = aq^n, \ \dots \tag{3.1}$$

ar sākumlocekli a un kvocientu q (kurš saskaņā ar ģeometriskās progresijas definīciju ir atšķirīgs no nulles). No (3.1) seko, ka

$$u_{n+1} = aq^{n+1} = q(aq^n) = qu_n.$$

Tātad ģeometriskā progresija (3.1) apmierina pirmās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+1} = qu_n \tag{3.2}$$

ar sākumnosacījumu $u_0 = a$, pie kam sākumnosacījums $u_0 = a$ – ģeometriskās progresijas (3.1) sākumloceklis, bet koeficients $a_1 = q$ – ģeometriskās progresijas (3.1) kvocients.

3.3. ***Aritmētiskā progresija.*** Apskatīsim aritmētisko progresiju:

$$u_0 = a, u_1 = a + d, u_2 = a + 2d, \ \dots \ , u_n = a + nd, \ \dots \tag{3.3}$$

ar sākumlocekli a un diferenci d. No (3.3) seko, ka

$$u_{n+1} = a + (n+1)d = (a + nd) + d = u_n + d.$$

Atrodam:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + d,$$
$$u_{n+1} = u_n + d.$$

No pirmās vienādības atņemot otro, iegūsim

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n. \tag{3.4}$$

Redzam, ka aritmētiskā progresija (3.3) apmierina otrās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu (3.4) ar sākumnosacījumiem: $u_n = a, u_1 = a + d$.

3.4. *Veselo nenegatīvo skaitļu virkne.* Veselo nenegatīvo skaitļu virkni

$$u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 2, \ \dots \ , u_n = n, \ \dots \tag{3.5}$$

var uzlūkot kā aritmētisko progresiju ar sākumlocekli 0 un diferenci 1. Tātad no iepriekšējā punktā teiktā seko, ka virkne (3.5) apmierina otrās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \tag{3.6}$$

ar sākumnosacījumiem: $u_0 = 0, u_1 = 1$.

3.5. *Veselo nenegatīvo skaitļu kvadrātu virkne.* Apskatīsim veselo nenegatīvo skaitļu kvadrātu virkni:

$$u_0 = 0^2, u_1 = 1^2, u_2 = 2^2, \ \dots \ , u_n = n^2, \ \dots . \tag{3.7}$$

Atrodam:

$$u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 = u_n + 2n + 1$$

jeb

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1, \tag{3.8}$$

$$u_{n+2} = (n+2)^2 = n^2 + 4n + 4 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = u_{n+1} + 2n + 3$$

jeb

$$u_{n+2} = u_{n+1} + 2n + 3. \tag{3.9}$$

No vienādības (3.9) atņemot vienādību (3.8), iegūsim

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} + 2n + 3 - u_n - 2n - 1$$

jeb

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 2. \tag{3.10}$$

No (3.10) atrodam

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2. \tag{3.11}$$

No vienādības (3.11) atņemot vienādību (3.10), iegūsim

$$u_{n+3} - u_{n+2} = 2u_{n+2} - u_{n+1} + 2 - 2u_{n+1} + u_n - 2$$

jeb

$$u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n. \tag{3.12}$$

Tātad virkne (3.7) apmierina trešās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu (3.12) ar sākumnosacījumiem: $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 4$.

3.6. *Veselo nenegatīvo skaitļu kubu virkne.* Apskatīsim veselo nenegatīvo skaitļu kubu virkni:

$$u_0 = 0^3, u_1 = 1^3, u_2 = 2^3, \ \dots \ , u_n = n^3, \ \dots . \tag{3.13}$$

Spriežot līdzīgi kā iepriekšējā punktā, iegūsim, ka virkne (3.13) apmierina ceturtās kārtas lineāru homogēnu rekurentu venādojumu

$$u_{n+4} = 4u_{n+3} - 6u_{n+2} + 4u_{n+1} - u_n \tag{3.14}$$

ar sākumnosacījumiem: $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 8, u_3 = 27$.

3.7. *Virknes, kas apmierina lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu, pirmo locekļu summu virkne.* Pieņemsim, ka virkne (u_n) apmierina k-tās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \cdots + a_{k-1} u_{n+1} + a_k u_n. \tag{2.1}$$

Apskatīsim virkni (S_n), kur $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Tātad

$$\begin{aligned} S_0 &= u_0, \\ S_1 &= u_0 + u_1, \\ S_2 &= u_0 + u_1 + u_2, \\ &\ldots \\ S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \\ &\ldots, \end{aligned} \tag{3.15}$$

no kurienes atrodam:

$$\begin{aligned} u_0 &= S_0, \\ u_1 &= S_1 - S_0, \\ u_2 &= S_2 - S_1, \\ &\ldots \\ u_{n+1} &= S_{n+1} - S_n, \\ &\ldots, \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ievietojot vienādības (3.16) formulā (2.1), iegūsim

$$\begin{aligned} S_{n+k+1} - S_{n+k} = a_1(S_{n+k} - S_{n+k-1}) + a_2(S_{n+k-1} - S_{n+k-2}) + \cdots + \\ + a_{k-1}(S_{n+2} - S_{n+1}) + a_k(S_{n+1} - S_n) \end{aligned}$$

jeb

$$\begin{aligned} S_{n+k+1} = (1 + a_1)S_{n+k} + (a_2 - a_1)S_{n+k-1} + \cdots + \\ + (a_k - a_{k-1})S_{n+1} - a_k S_n. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Tātad virkne (S_n) apmierina $(k+1)$–mās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu (3.17).

Atzīmēsim šādus speciālgadījumus:

1. ja (u_n) apmierina pirmās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+1} = a_1 u_n, \tag{3.18}$$

   tad (S_n) apmierina otrās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$S_{n+2} = (1 + a_1)S_{n+1} - a_1 S_n; \tag{3.19}$$

2. ja (u_n) apmierina otrās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_2 u_n, \tag{3.20}$$

   tad (S_n) apmierina trešās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$S_{n+3} = (1 + a_1)S_{n+2} + (a_2 - a_1)S_{n+1} - a_2 S_n; \tag{3.21}$$

3. ja (u_n) apmierina trešās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+3} = a_1u_{n+2} + a_2u_{n+1} + a_3u_n, \tag{3.22}$$

tad (S_n) apmierina ceturtās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$S_{n+4} = (1 + a_1)S_{n+3} + (a_2 - a_1)S_{n+2} + (a_3 - a_2)S_{n+1} - a_3S_n; \tag{3.23}$$

4. ja (u_n) apmierina ceturtās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+4} = a_1u_{n+3} + a_2u_{n+2} + a_3u_{n+1} + a_4u_n, \tag{3.24}$$

tad (S_n) apmierina piektās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$S_{n+5} = (1 + a_1)S_{n+4} + (a_2 - a_1)S_{n+3} + (a_3 - a_2)S_{n+2}+ \\ + (a_4 - a_3)S_{n+1} - a_4S_n. \tag{3.25}$$

Pielietosim iegūtos rezultātus iepriekšējos punktos apskatītajām virknēm:

3.7.1. ja (u_n) – Fibonači virkne, tad attiecīgā virkne (S_n) apmierina vienādojumu

$$S_{n+3} = 2S_{n+2} - S_n \tag{3.26}$$

(vienādojuma (1.1) koeficientus $a_1 = 1, a_2 = 1$ ievietojam vienādojumā (3.21));

3.7.2. ja (u_n) – ģeometriskā progresija (3.1), tad attiecīgā virkne (S_n) apmierina vienādojumu

$$S_{n+2} = (1 + q)S_{n+1} - qS_n \tag{3.27}$$

(vienādojuma (3.2) koeficientu $a_1 = q$ ievietojam vienādojumā (3.19));

3.7.3. ja (u_n) – aritmētiskā progresija (3.3), tad attiecīgā virkne (S_n) apmierina vienādojumu

$$S_{n+3} = 3S_{n+2} - 3S_{n+1} + S_n \tag{3.28}$$

(vienādojuma (3.4) koeficientus $a_1 = 2, a_2 = -1$ ievietojam vienādojumā (3.21));

3.7.4. ja (u_n) – veselo nenegatīvo skaitļu virkne (3.5), tad attiecīgā virkne (S_n) apmierina to pašu vienādojumu (3.28);

3.7.5. ja (u_n) – veselo nenegatīvo skaitļu kvadrātu virkne, tad attiecīgā virkne (S_n) apmierina vienādojumu

$$S_{n+4} = 4S_{n+3} - 6S_{n+2} + 4S_{n+1} - S_n \tag{3.29}$$

(vienādojuma (3.12) koeficientus $a_1 = 3, a_2 = -3, a_3 = 1$ ievietojam vienādojumā (3.23));

3.7.6. ja (u_n) – veselo nenegatīvo skaitļu kubu virkne (3.13), tad attiecīgā virkne (S_n) apmierina vienādojumu

$$S_{n+5} = 5S_{n+4} - 10S_{n+3} + 10S_{n+2} - 5S_{n+1} + S_n \tag{3.30}$$

(vienādojuma (3.14) koeficientus $a_1 = 4, a_2 = -6, a_3 = 4, a_4 = -1$ ievietojam vienādojumā (3.25)).

4. Lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu ar konstantiem koeficientiem risināšana, lietojot vispārīgo atrisinājumu

Apskatīsim k-tās kārtas lineāru *homogēnu* rekurentu vienādojumu ar konstantiem koeficientiem

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \cdots + a_k u_n. \tag{2.3}$$

Polinomu

$$r(z) = z^k - a_1 z^{k-1} - a_2 z^{k-2} - \ldots - a_{k-1} z - a_k$$

sauc par **vienādojuma** (2.3) **raksturpolinomu** (vai **harakteristisko polinomu**), bet k-tās pakāpes algebrisku vienādojumu

$$r(z) = 0 \quad \text{jeb} \quad z^k - a_1 z^{k-1} - a_2 z^{k-2} - \ldots - a_{k-1} z - a_k = 0 \tag{4.1}$$

sauc par **vienādojuma** (2.3) **raksturvienādojumu** (vai **harakteristisko vienādojumu**).

Raksturvienādojumam (4.1) eksistē k kompleksas saknes, ja katru sakni skaitīt tik reizes, kāda ir šīs saknes kārta, pie tam visas šī vienādojuma saknes ir atšķirīgas no 0, jo $a_k \neq 0$. Pieņemsim, ka raksturvienādojuma (4.1) saknes ir $\lambda_1, \lambda_2, \ \ldots \ , \lambda_s$ ar attiecīgi kārtām $m_1, m_2, \ \ldots \ , m_s$, t.i.,

$$r(z) = (z - \lambda_1)^{m_1} (z - \lambda_2)^{m_2} \ldots (z - \lambda_s)^{m_s},$$

kur $\lambda_1, \lambda_2, \ \ldots \ , \lambda_s$ $(s \geq 1)$ ir savstarpēji dažādi nenulles kompleksi skaitļi, bet $m_1, m_2, \ \ldots \ , m_s$ ir pozitīvi veseli skaitļi, $m_1 + m_2 + \ldots + m_s = k$.

Visu raksturvienādojuma (4.1) sakņu, ņemot vērā to kārtas, sistēmu sauc par vienādojuma (2.3) **spektru** un apzīmē ar

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Vienādojuma (2.3) spektru sauc par **vienkāršu**, ja visas raksturvienādojuma (4.1) saknes ir vienkāršas, t.i., $s = k$ un $m_1 = m_2 = \ldots = m_k = 1$.

Ja rekurentā vienādojuma (2.3) spektrs ir (4.2), tad rekurentā vienādojuma (2.3) vispārīgais atrisinājums[1] ir

$$\boxed{u_n = \sum_{j=1}^{s} \left(c_{j,0} + c_{j,1} n + \cdots + c_{j,m_j-1} n^{m_j-1}\right) \lambda_j^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),} \tag{4.3}$$

kur $c_{j,0}, c_{j,1}, \ \ldots \ , c_{j,m_j-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ ir patvaļīgas kompleksas konstantes.

[1]Tas, ka (4.3) *ir vienādojuma* (2.3) *vispārīgais atrisinājums*, nozīmē sekojošo:

1. ja konstantēm $c_{j,0}, c_{j,1}, \ \ldots \ , c_{j,m_j-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ piešķirt brīvi izraudzītas kompleksas vērtības, tad (4.3) ir vienādojuma (2.3) atrisinājums;
2. jebkuram vienādojuma (2.3) atrisinājumam (u_n) eksistē tādas kompleksas konstantes $c_{j,0}, c_{j,1}, \ \ldots \ , c_{j,m_j-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$, ka ir spēkā (4.3).

4.1. piezīme. Ja vienādojuma (2.3) spektrs ir vienkāršs, t.i., $s = k$ un $m_1 = m_2 = \cdots = m_k = 1$, tad vienādojuma (2.3) vispārīgajam atrisinājumam ir veids

$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_s\lambda_k^n \quad (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

kur $c_1, c_2, \ldots, c_k$ ir patvaļīgas kompleksas konstantes.

4.2. piezīme. Ja vienādojuma (2.3) spektrs sastāv tikai no vienas saknes λ ar kārtu k, tad vienādojuma (2.3) vispārīgajam atrisinājumam ir veids

$$u_n = (c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \cdots + c_{k-1} n^{k-1})\lambda^n \quad (n = 0, 1, 2 \ldots),$$

kur $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ ir patvaļīgas kompleksas konstantes.

Lai atrisinātu lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu (2.3) ar sākumnosacījumiem (2.2), lietojot vispārīgo atrisinājumu, rīkojas šādi.

1. Atrod vienādojuma (2.3) spektru (4.2).
2. Sastāda vienādojuma (2.3) vispārīgo atrisinājumu (4.3).
3. Lietojot sākumnosacījumus (2.2), atrod konstantes $c_{j,0}, c_{j,1}, \ldots, c_{j,m_j-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$.
4. Ievieto atrastās konstantes vispārīgajā atrisinājumā (4.3) un iegūst vienādojuma (2.3) atrisinājumu (u_n), kas apmierina sākumnosacījumus (2.2).

4.1. piemērs.

Atrisināsim trešās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n \tag{4.4}$$

ar sākumnosacījumiem:

$$u_0 = -1, u_1 = 2, u_2 = -7, \tag{4.5}$$

lietojot vispārīgo atrisinājumu.

Vienādojuma (4.4) raksturvienādojumam

$$z^3 - 2z^2 - 5z + 6 = 0$$

ir trīs vienkāršas saknes: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 3$. Tātad vienādojuma (4.4) vispārīgajam atrisinājumam ir veids:

$$u_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + c_3\lambda_3^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

jeb

$$u_n = c_1 + c_2(-2)^n + c_3 3^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.6}$$

Formulā (4.6) indeksam n piešķirot vērtības $0, 1, 2$ un izmantojot dotos sākumnosacījumus, iegūsim lineāru vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} c_1 1^0 + & c_2(-2)^0 + & c_3 3^0 = & -1, \\ c_1 1^1 + & c_2(-2)^1 + & c_3 3^1 = & 2, \\ c_1 1^2 + & c_2(-2)^2 + & c_3 3^2 = & -7 \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} c_1 + & c_2 + & c_3 = & -1, \\ c_1 - & 2c_2 + & 3c_3 = & 2, \\ c_1 + & 4c_2 + & 9c_3 = & -7, \end{cases}$$

no kuras atrodam:

$$c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = -\frac{6}{5}, \quad c_3 = -\frac{3}{10}.$$

Ievietojot šīs konstantes formulā (4.6), iegūsim vienādojuma (4.4) partikulārā atrisinājuma $u = (u_n)$, kas atbilst sākumnosacījumiem (4.5), vispārīgā locekļa izteiksmi:

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{6}{5}(-2)^n - \frac{3}{10}3^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

4.2. piemērs.

Atrisināsim trešās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n \tag{4.7}$$

ar sākumnosacījumiem:

$$u_0 = -1, u_1 = 2, u_2 = -3. \tag{4.8}$$

lietojot vispārīgo atrisinājumu.

Vienādojuma (4.7) raksturvienādojumam

$$z^3 - 3z^2 + 2 = 0$$

saknes ir šādas: $\lambda_1 = 1$ ar kārtu $k_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ ar kārtu $k_2 = 1$. Tātad vienādojuma (4.7) vispārīgajam atrisinājumam ir veids:

$$u_n = (c_1 + c_2 n)\lambda_1^n + c_3\lambda_2^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

jeb

$$u_n = (c_1 + c_2 n)1^n + c_3(-2)^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.9}$$

Formulā (4.9) indeksam n piešķirot vērtības $0, 1, 2$ un izmantojot sākumnosacījumus (4.8), iegūsim trīs lineāru vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} c_1 + & c_2 0 + & c_3(-2)^0 = & -1, \\ c_1 + & c_2 1 + & c_3(-2)^1 = & 2, \\ c_1 + & c_2 2 + & c_3(-2)^2 = & -3 \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} c_1 + & & + \quad c_3 = & -1, \\ c_1 + & c_2 - & 2c_3 = & 2, \\ c_1 + & 2c_2 + & 4c_3 = & -3, \end{cases}$$

no kuras atrodam:

$$c_1 = -\frac{1}{9}, \ \ c_2 = \frac{1}{3}, \ \ c_3 = -\frac{8}{9}.$$

Ievietojot šīs konstantes formulā (4.9), iegūsim vienādojuma (4.7) partikulārā atrisinājuma $u = (u_n)$, kas atbilst sākumnosacījumiem (4.8), vispārīgā locekļa izteiksmi:

$$u_n = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}n - \frac{8}{9}(-2)^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

4.3. piemērs.

Atrisināsim trešās kārtas lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+3} = -u_{n+2} + 4u_{n+1} - 6u_n \tag{4.10}$$

ar sākumnosacījumiem:

$$u_0 = 1, u_1 = -1, u_2 = 2. \tag{4.11}$$

lietojot vispārīgo atrisinājumu.

Vienādojuma (4.10) raksturvienādojumam

$$z^3 + z^2 - 4z + 6 = 0$$

ir trīs vienkāršas saknes: $\lambda_1 = 1+i$, $\lambda_2 = 1-i$, $\lambda_3 = -3$. Tātad vienādojuma (4.10) vispārīgajam atrisinājumam ir veids:

$$u_n = c_1(1+i)^n + c_2(1-i)^n + c_3(-3)^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.12}$$

Formulā (4.12) indeksam n piešķirot vērtības $0, 1, 2$ un izmantojot sākumnosacījumus (4.8), iegūsim trīs lineāru vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} c_1(1+i)^0 + & c_2(1-i)^0 + & c_3(-3)^0 = & 1, \\ c_1(1+i)^1 + & c_2(1-i)^1 + & c_3(-3)^1 = & -1, \\ c_1(1+i)^2 + & c_2(1-i)^2 + & c_3(-3)^2 = & 2 \end{cases}$$

jeb

$$\begin{cases} c_1 + & c_2 + & c_3 = & 1, \\ (1+i)c_1 + & (1-i)c_2 - & 3c_3 = & -1, \\ 2ic_1 - & 2ic_2 + & 9c_3 = & 2, \end{cases}$$

no kuras atrodam:

$$c_1 = \frac{11+10i}{34}, \quad c_2 = \frac{11-10i}{34}, \quad c_3 = \frac{6}{7}.$$

Ievietojot šīs konstantes formulā (4.12), iegūsim vienādojuma (4.10) partikulārā atrisinājuma $u = (u_n)$, kas atbilst sākumnosacījumiem (4.11), vispārīgā locekļa izteiksmi:

$$u_n = \frac{11+10i}{34}(1+i)^n + \frac{11-10i}{34}(1-i)^n + \frac{6}{17}(-2)^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.13}$$

Vienādojuma (4.10) koeficienti un sākumnosacījumi (4.11) ir reāli skaitļi, tāpēc visi virknes (u_n) locekļiem arī ir reāli skaitļi. Vai tas nav pretrunā ar formulu (4.13), jo tās labā puse ir kompleksa izteiksme? Nebūt nē, jo šajā gadījumā var iegūt reālu u_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ izteiksmi. Šim nolūkam atrodam kompleksā skaitļa λ_1 trigonometrisko formu:

$$\lambda_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Tad

$$\lambda_2 = \sqrt{2}\,\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

No (4.13) iegūstam:

$$u_n = \frac{11+10\,i}{34}\,(1+i)^n + \frac{11-10\,i}{34}\,(1-i)^n + \frac{6}{17}\,(-3)^n =$$

$$= \frac{11+10i}{34}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n + \frac{11-10i}{34}\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n + \frac{6}{17}\,(-3)^n =$$

$$= \frac{11+10i}{34}\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi n}{4}+i\sin\frac{\pi n}{4}\right) + \frac{11-10i}{34}\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi n}{4}-i\sin\frac{\pi n}{4}\right) +$$

$$+ \frac{6}{17}\,(-3)^n =$$

$$= \left(\frac{11+10i}{34}+\frac{11-10i}{34}\right)\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{\pi n}{4} + i\left(\frac{11+10i}{34}-\frac{11-10i}{34}\right)\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{\pi n}{4} +$$

$$+ \frac{6}{17}\,(-3)^n =$$

$$= \frac{11}{17}\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{\pi n}{4} - \frac{10}{17}\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{\pi n}{4} + \frac{6}{17}\,(-3)^n \quad (n\in\mathbb{N}_0).$$

Iegūvām vienādojuma (4.10) partikulārā atrisinājuma $u=(u_n)$, kas atbilst sākumnosacījumiem (4.11), vispārīgā locekļa reālu izteiksmi:

$$u_n = \frac{11}{17}\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{\pi n}{4} - \frac{10}{17}\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{\pi n}{4} + \frac{6}{17}\,(-3)^n \quad (n\in\mathbb{N}_0).$$

5. Lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu ar konstantiem koeficientiem risināšana, lietojot veidotājfunkciju metodi

Lai atrisinātu lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu (2.3) ar sākumnosacījumiem (2.2), lietojot veidotājfunkciju metodi, rīkojas šādi.

1. Atrod vienādojuma (2.3) atrisinājuma (u_n), kas apmierina sākumnosacījumus (2.2), **veidotājfunkciju**, t.i., tādu funkciju $u(z)$, kuras attīstījuma pakāpju rindā pēc z-pakāpēm koeficienti būtu vienādi ar virknes (u_n) locekļiem: $u(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n z^n$.
2. Veidotājfunkciju $u(z)$ attīsta pakāpju rindā pēc z pakāpēm, tādējādi atrodot u_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

5.1. piemērs.

Atrisināsim lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n \tag{4.4}$$

ar sākumnosacījumiem:

$$u_0 = -1, u_1 = 2, u_2 = -7, \tag{4.5}$$

lietojot veidotājfunkciju metodi.

a) Atradīsim vienādojuma (4.4) atrisinājuma (u_n), kas apmierina sākumnosacījumus (4.5), veidotājfunkciju $u(z)$.

Virknes (u_n) locekļi apmierina vienādības:

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.1}$$

Attiecīgo vienādību (5.1) abas puses pareizinot ar z^{n+3} un summējot pa $n = 0, 1, 2, \ldots,$ iegūsim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+3} z^{n+3} = 2\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+2} z^{n+3} + 5\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} z^{n+3} - 6\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{n+3}$$

jeb

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+3} z^{n+3} = 2z\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+2} z^{n+2} + 5z^2\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} z^{n+1} - 6z^3\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n,$$

no kurienes izriet, ka

$$\big[u(z) - (u_0 + u_1 z + u_2 z^2)\big] = 2z\big[u(z) - (u_0 + u_1 z)\big] + \\ + 5z^2\big[u(z) - u_0\big] - 6z^3 u(z) = 0.$$

Ņemot vērā sākumnosacījumus (4.5), atrodam:

$$\big[u(z) - (-1 + 2z - 7z^2)\big] = 2z\big[u(z) - (-1 + 2z)\big] + 5z^2\big[u(z) + 1\big] - 6z^3 u(z) = 0,$$

no kurienes, atrisinot pēdējo vienādojumu attiecībā pret $u(z)$, iegūsim:

$$u(z) = \frac{-1 + 4z - 6z^2}{1 - 2z - 5z^2 + 6z^3}.$$

b) Attīstīsim veidotājfunkciju $u(z)$ pakāpju rindā pēc z pakāpēm.

1. Izteiksim daļveida racionālu funkciju

$$u(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1 - 4z + 6z^2}{-1 + 2z + 5z^2 - 6z^3}$$

elementārdaļu summā. Atrodam polinoma $g(z) = -1 + 2z + 5z^2 - 6z^3$ saknes:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{3}.$$

Sadalām polinomu $g(z)$ lineāros reizinātājos:

$$g(z) = -6(z - 1)\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right).$$

Tagad uzrakstām funkciju $u(z)$ kā elementārdaļu summu

$$\frac{1 - 4z + 6z^2}{-6(z - 1)(z + \frac{1}{2})(z - \frac{1}{3})} = \frac{A}{z - 1} + \frac{B}{z + \frac{1}{2}} + \frac{C}{z - \frac{1}{3}}$$

ar nenoteiktiem koeficientiem A, B un C. Atradīsim šos koeficientus. No pēdējās vienādības seko, ka

$$-\frac{1}{6} + \frac{2}{3}z - z^2 = A\left(z + \frac{1}{2}\right)\left(z - \frac{1}{3}\right) + B(z - 1)\left(z - \frac{1}{3}\right) + \\ + C(z - 1)\left(z + \frac{1}{2}\right). \quad (5.2)$$

Ievietojot $z = 1$ vienādībā (5.2), iegūsim

$$-\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot 1 - 1^2 = A\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right),$$

no kurienes seko, ka $A = -\frac{1}{2}$.

Ievietojot $z = -\frac{1}{2}$ vienādībā (5.2), iegūsim

$$-\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = B\left(-\frac{1}{2} - 1\right)\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right),$$

no kurienes seko, ka $B = -\frac{3}{5}$.

Ievietojot $z = \frac{1}{3}$ vienādībā (5.2), iegūsim

$$-\frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = C\left(\frac{1}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right),$$

no kurienes seko, ka $C = \frac{1}{10}$.

Tātad meklējamais funkcijas $u(z)$ sadalījums elementārdaļu summā ir šāds:

$$u(z) = \frac{1 - 4z + 6z^2}{-1 + 2z + 5z^2 - 6z^3} = \frac{-\frac{1}{2}}{z - 1} + \frac{-\frac{3}{5}}{z + \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{10}}{z - \frac{1}{3}}.$$

2. Katru no iegūtajām elementārdaļām attīstīsim pakāpju rindā pēc z pakāpēm, izmantojot formulu

$$\frac{\alpha}{z - \beta} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{1 - \frac{z}{\beta}} \quad (\beta \neq 0) \tag{5.3}$$

un labi pazīstamo bezgalīgas dilstošas ģeometriskās progresijas summas formulu

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1. \tag{5.4}$$

Iegūsim:

$$\frac{-\frac{1}{2}}{z - 1} = -\frac{-\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - z} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1;$$

$$\frac{-\frac{3}{5}}{z - (-\frac{1}{2})} = -\frac{-\frac{3}{5}}{1 - \frac{z}{-\frac{1}{2}}} = -\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{1 - (-2z)} = -\frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty} (-2z)^n =$$

$$= -\frac{6}{5}\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n z^n, \quad |z| < \frac{1}{2};$$

$$\frac{\frac{1}{10}}{z - \frac{1}{3}} = -\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\frac{1}{3}}} = -\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1 - 3z} = -\frac{3}{10}\sum_{n=0}^{\infty} 3z^n =$$

$$= -\frac{3}{10}\sum_{n=0}^{\infty} 3^n z^n, \quad |z| < \frac{1}{3};$$

3. Tātad riņķī $|z| < \frac{1}{3}$ ir spēkā šāds virknes (u_n) veidotājfunkcijas attīstījums pakāpju rindā pēc z pakāpēm:

$$u(z) = \frac{1 - 4z + 6z^2}{-1 + 2z + 5z^2 - 6z^3} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{6}{5}\right)(-2)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{10}\right) 3^n z^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{6}{5}(-2)^n - \frac{3}{10}3^n\right) z^n, \quad |z| < \frac{1}{3},$$

no kurienes seko, ka

$$u_n = \frac{1}{2} - \frac{6}{5}(-2)^n - \frac{3}{10}3^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

5.1. piezīme. Atzīmēsim, ka veidotājfunkcijas $u(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ attīstījuma pakāpju rindā punkta $z = 0$ apkārtnē pirmos locekļus var atrast, ja izpildīt **polinomu** $f(z)$ **un** $g(z)$ **dalīšanu pēc augošām pakāpēm**:

$$
\begin{array}{rrrrrrr|rrrrrr}
f(z) = & 1 & -4z & +6z^2 & & & & -1 & +2z & +5z^2 & -6z^3 & = g(z) & \\
\cline{8-13}
 & 1 & -2z & -5z^2 & +6z^3 & & & \mathbf{-1} & \mathbf{+2}z & \mathbf{-7}z^2 & \mathbf{+2}z^3 & -\cdots & = u(z) \\
\cline{2-5}
 & & -2z & +11z^2 & -6z^3 & & & & & & & & \\
 & & -2z & +4z^2 & +10z^3 & -12z^4 & & & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & 7z^2 & -16z^3 & +12z^4 & & & & & & & \\
 & & & 7z^2 & -14z^3 & -35z^4 & +42z^5 & & & & & & \\
\cline{4-7}
 & & & & -2z^3 & +\cdots & & & & & & &
\end{array}
$$

5.2. piemērs.

Atrisināsim lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n \tag{4.7}$$

ar sākumnosacījumiem:

$$u_0 = -1, u_1 = 2, u_2 = -3. \tag{4.8}$$

lietojot veidotājfunkciju metodi.

a) Atradīsim vienādojuma (4.7) atrisinājuma (u_n), kas apmierina sākumnosacījumus (4.8), veidotājfunkciju $u(z)$.

Virknes (u_n) locekļi apmierina vienādības:

$$u_{n+3} = 3u_{n+1} - 2u_n \quad (n = 0, 1, 2, \ \ldots\ ). \tag{5.5}$$

Attiecīgo vienādību (5.5) abas puses pareizinot ar z^{n+3} un summējot pa $n = 0, 1, 2, \ \ldots\ ,$ iegūsim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+3}z^{n+3} = 3\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}z^{n+3} - 2\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{n+3}$$

jeb

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+3}z^{n+3} = 3z^2\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}z^{n+1} - 2z^3\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{n},$$

no kurienes izriet

$$\big[u(z) - (u_0 + u_1 z + u_2 z^2)\big] = 3z^2\big[u(z) - u_0\big] - 2z^3 u(z).$$

Ņemot vērā sākumnosacījumus (4.8), atrodam:

$$\big[u(z) - (-1 + 2z - 3z^2)\big] = 3z^2\big[u(z) + 1\big] - 2z^3 u(z).$$

no kurienes, atrisinot pēdējo vienādojumu attiecībā pret $u(z)$, iegūsim:

$$u(z) = \frac{-1 + 2z}{1 - 3z^2 + 2z^3}.$$

b) Attīstīsim veidotājfunkciju $u(z)$ pakāpju rindā pēc z pakāpēm.

1. Izteiksim daļveida racionālu funkciju

$$u(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{1 - 2z}{-1 + 3z^2 - 2z^3} \tag{5.6}$$

elementārdaļu summā. Atrodam polinoma $g(z) = -1 + 3z^2 - 2z^3$ saknes:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \ \ \lambda_3 = -\frac{1}{2}.$$

Sadalām polinomu $g(z)$ lineāros reizinātājos:

$$g(z) = -2(z-1)^2\left(z+\frac{1}{2}\right).$$

Tagad uzrakstām funkciju (5.6) kā elementārdaļu summu

$$\frac{1-2z}{-2(z-1)^2(z+\frac{1}{2})} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z+\frac{1}{2}}$$

ar nenoteiktiem koeficientiem A, B un C. Atradīsim šos koeficientus. No pēdējās vienādības seko, ka

$$-\frac{1}{2} + z = A(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right) + B\left(z+\frac{1}{2}\right) + C(z-1)^2$$

jeb

$$-\frac{1}{2} + z = \left(-\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + C\right) + \left(-\frac{1}{2}A + B - 2C\right)z + (A+C)z^2.$$

Pielīdzinot koeficientus pie attiecīgajām mainīgā z pakāpēm, iegūsim šādu lineāru vienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}A & +\frac{1}{2}B & +C & = -\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}A & +B & -2C & = 1, \\ A & & +C & = 0, \end{cases}$$

no kuras atrodam:

$$A = \frac{4}{9},\ \ B = \frac{1}{3},\ \ C = -\frac{4}{9}.$$

Tātad meklējamais funkcijas (5.6) sadalījums elementārdaļu summā ir šāds:

$$\frac{1-2z}{-1+3z^2-2z^3} = \frac{\frac{4}{9}}{z-1} + \frac{\frac{1}{3}}{(z-1)^2} + \frac{-\frac{4}{9}}{z-\left(-\frac{1}{2}\right)}.$$

2. Katru no iegūtajām elementārdaļām attīstīsim pakāpju rindā pēc z pakāpēm. Izmantojot formulas (5.3) un (5.4), iegūsim:

$$\frac{\frac{4}{9}}{z-1} = -\frac{\frac{4}{9}}{1}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{1}} = -\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1-z} = -\frac{4}{9}\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z|<1;$$

$$\frac{-\frac{4}{9}}{z-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{-\frac{4}{9}}{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{-\frac{1}{2}}} = -\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{1-(-2z)} = -\frac{8}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-2z)^n =$$

$$= -\frac{8}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n z^n, \quad \text{ja } |-2z|<1, \text{ t.i., } |z|<\frac{1}{2}.$$

Diferencējot vienādību

$$\frac{\frac{4}{9}}{z-1} = -\frac{4}{9}\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$

iegūsim

$$-\frac{\frac{4}{9}}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{9}\right)(n+1)z^n, \quad |z| < 1,$$

no kurienes seko, ka

$$\frac{\frac{1}{3}}{(z-1)^2} = \frac{1}{3}\left(-\frac{9}{4}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{9}\right)(n+1)z^n = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n, \quad |z| < 1.$$

3. Tātad riņķī $|z| < \frac{1}{2}$ ir spēkā šāds virknes (u_n) veidotājfunkcijas (5.6) attīstījums pakāpju rindā:

$$\begin{aligned}\frac{1-2z}{-1+3z^2-2z^3} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{9}\right)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}(n+1)z^n + \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{8}{9}\right)(-2)^n z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{9} + \frac{1}{3}(n+1) - \frac{8}{9}(-2)^n\right)z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{9} + \frac{1}{3}n - \frac{8}{9}(-2)^n\right)z^n,\end{aligned}$$

no kurienes seko, ka

$$u_n = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3}n - \frac{8}{9}(-2)^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.7}$$

6. Lineāru nehomogēnu rekurentu vienādojumu ar konstantiem koeficientiem risināšana, lietojot vispārīgo atrisinājumu

Lai atrisinātu lineāru nehomogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \cdots + a_k u_n + f_n. \tag{2.1}$$

ar sākumnosacījumiem

$$u_0, u_1, u_2, \ \ldots \ , u_{k-1}, \qquad (2.2),$$

lietojot vispārīgo atrisinājumu, rīkojas šādi.

1. Atrod nehomogēnajam vienādojumam (2.1) atbilstošā homogēnā vienādojuma

   $$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \cdots + a_k u_n \tag{2.3}$$

   vispārīgo atrisinājumu

   $$u_n = \sum_{j=1}^{s} \left(c_{j,0} + c_{j,1} n + \cdots + c_{j,m_j-1} n^{m_j-1}\right) \lambda_j^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (4.3),$$

   kur $c_{j,0}, c_{j,1}, \ \ldots \ , c_{j,m_j-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$ ir patvaļīgas kompleksas konstantes.

2. Atrod kādu nehomogēnā vienādojuma (2.1) partikulāro atrisinājumu (u_n^*).

3. Sastāda nehomogēnā vienādojuma vispārīgo atrisinājumu:

   $$u_n = \sum_{j=1}^{s} \left(c_{j,0} + c_{j,1} n + \cdots + c_{j,m_j-1} n^{m_j-1}\right) \lambda_j^n + u_n^* \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6.1}$$

4. Lietojot sākumnosacījumus (2.2), atrod konstantes $c_{j,0}, c_{j,1}, \ \ldots \ , c_{j,m_j-1}$ $(j = 1, 2, \ldots, s)$.

5. Ievieto atrastās konstantes nehomogēnā vienādojuma (2.1) vispārīgajā atrisinājumā (6.1) un iegūst nehomogēnā vienādojuma (2.1) atrisinājumu (u_n), kas apmierina sākumnosacījumus (2.2).

Nehomogēnā vienādojuma (2.1) partikulāro atrisinājumu (u_n^*) atrod, lietojot **nenoteikto koeficientu metodi**: atkarībā no nehomogēnā vienādojuma (2.1) brīvā locekļa (f_n) veida partikulārā atrisinājuma (u_n^*) vispārīgo locekli meklē noteiktā formā ar nenoteiktiem koeficientiem.

6.1. teorēma. *Pieņemsim, ka nehomogēnā vienādojuma* (2.1) *brīvajam loceklim* (f_n) *ir veids:*

$$f_n = (P_0 + P_1 n + \cdots + P_m n^m) r^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

kur $r \neq 0$.

1. *Ja r* ***nav*** *nehomogēnajam vienādojumam* (2.1) *atbilstošā homogēnā vienādojuma* (2.3) *raksturvienādojuma sakne, tad* (u_n^*) *meklē formā:*

$$u_n^* = (A_0 + A_1 n + \cdots + A_m n^m) r^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

kur $A_0, A_1, \dots, A_m$ *ir nenoteiktie koeficienti;*

2. *ja r* ***ir*** *nehomogēnajam vienādojumam* (2.1) *atbilstošā homogēnā vienādojuma* (2.3) *raksturvienādojuma sakne ar kārtu s* $(s \geq 1)$, *tad* (u_n^*) *meklē formā:*

$$u_n^* = (A_0 + A_1 n + \cdots + A_m n^m) r^n n^s \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

kur $A_0, A_1, \dots, A_m$ *ir nenoteiktie koeficienti.*

6.1. piemērs.

Atrisināsim lineāru nehomogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n + 2 - n \tag{6.2}$$

ar sākumnosacījumiem:

$$u_0 = -1, u_1 = 2, u_2 = -7, \tag{4.5}$$

lietojot vispārīgo atrisinājumu.

4.1. piemērā tika atrasts nehomogēnajam vienādojumam (6.2) atbilstošā homogēnā vienādojuma

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n \tag{4.4}$$

vispārīgais atrisinājums:

$$u_n = c_1 + c_2(-2)^n + c_3 3^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.6}$$

Tā kā nehomogēnā vienādojuma (6.2) brīvajam loceklim ir veids

$$f_n = 2 - n = (2 - n)1^n,$$

bet skaitlis 1 ir homogēnā vienādojuma (4.4) raksturvienādojuma vienkārša sakne, tad nehomogēnā vienādojuma (6.2) partikulāro atrisinājumu meklēsim formā:

$$u_n^* = (A_0 + A_1 n)n^1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

jeb

$$u_n^* = A_0 n + A_1 n^2 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots\,), \tag{6.3}$$

kur A_0 un A_1 ir nenoteiktie koeficienti. Atrodam:

$$\begin{aligned}
u_{n+3}^* &= A_0(n+3) + A_1(n+3)^2 = \\
&= A_0 n + 3A_0 + A_1 n^2 + 6A_1 n + 9A_1, \\
u_{n+2}^* &= A_0(n+2) + A_1(n+2)^2 = \\
&= A_0 n + 2A_0 + A_1 n^2 + 4A_1 n + 4A_1, \\
u_{n+1}^* &= A_0(n+1) + A_1(n+1)^2 = \\
&= A_0 n + A_0 + A_1 n^2 + 2A_1 n + A_1, \\
u_n^* &= A_0 n + A_1 n^2.
\end{aligned}$$

Tā kā (u_n^*) ir nehomogēnā vienādojuma (6.2) partikulārais atrisinājums, tad ir jāizpildās vienādībām:

$$\begin{aligned}
&A_0 n + 3A_0 + A_1 n^2 + 6A_1 n + 9A_1 = \\
&\quad = 2(A_0 n + 2A_0 + A_1 n^2 + 4A_1 n + 4A_1) + 5(A_0 n + A_0 + A_1 n^2 + 2A_1 n + A_1) - \\
&\qquad\qquad - 6(A_0 n + A_1 n^2) + 2 - n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots\,)
\end{aligned}$$

jeb

$$(-A_1+2A_1+5A_1-6A_1)n^2+(-A_0-6A_1+2A_0+8A_1+5A_0+10A_1-6A_0-1)n+ \\ +(-3A_0-9A_1+4A_0+8A_1+5A_0+5A_1+2)=0 \quad (n=0,1,2,\dots)$$

jeb

$$(12A_1-1)n+(6A_0+4A_1+2)=0 \quad (n=0,1,2,\dots),$$

no kurienes izriet, ka

$$\begin{cases} 12A_1 & & =1, \\ 6A_0 & +4A_1 & =-2. \end{cases}$$

Atrisinot šo vienādojumu sistēmu, iegūsim:

$$A_0=-\frac{7}{18},\ \ A_1=\frac{1}{12}.$$

Esam atraduši nehomogēnā vienādojuma (6.2) partikulāro atrisinājumu (u_n^*), kur

$$u_n^*=-\frac{7}{18}n+\frac{1}{12}n^2 \quad (n=0,1,2,\dots).$$

Tātad nehomogēnā vienādojuma (6.2) vispārīgajam atrisinājumam ir veids:

$$u_n=c_1+c_2(-2)^n+c_3 3^n-\frac{7}{18}n+\frac{1}{12}n^2 \quad (n=0,1,2,\dots). \tag{6.4}$$

Formulā (6.4) indeksam n piešķirot vērtības $0,1,2$ un izmantojot dotos sākumnosacījumus (4.5), iegūsim lineāru vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} c_1+ & c_2+ & c_3 & & = & -1, \\ c_1- & 2c_2+ & 3c_3- & \frac{7}{18}+\frac{1}{12} & = & 2, \\ c_1+ & 4c_2+ & 9c_3- & \frac{7}{18}\cdot 2+\frac{1}{12}\cdot 4 & = & -7 \end{cases}$$

jeb

$$\begin{cases} c_1+ & c_2+ & c_3 & = & -1, \\ c_1- & 2c_2+ & 3c_3 & = & \frac{83}{36}, \\ c_1+ & 4c_2+ & 9c_3 & = & -\frac{59}{9}, \end{cases}$$

no kuras atrodam:

$$c_1=\frac{103}{216},\ \ c_2=-\frac{169}{135},\ \ c_3=-\frac{9}{40}.$$

Ievietojot šīs konstantes formulā (6.4), iegūsim vienādojuma (6.2) partikulārā atrisinājuma $u=(u_n)$, kas atbilst sākumnosacījumiem (4.5), vispārīgā locekļa izteiksmi:

$$u_n=\frac{103}{216}-\frac{169}{135}(-2)^n-\frac{9}{40}3^n-\frac{7}{18}n+\frac{1}{12}n^2 \quad (n=0,1,2,\dots).$$

7. Lineāru nehomogēnu rekurentu vienādojumu ar konstantiem koeficientiem risināšana, lietojot veidotājfunkciju metodi

Lai atrisinātu lineāru homogēnu rekurentu vienādojumu (2.1) ar sākumnosacījumiem (2.2), lietojot veidotājfunkciju metodi, rīkojas šādi.

1. Atrod vienādojuma (2.1) atrisinājuma (u_n), kas apmierina sākumnosacījumus (2.2), **veidotājfunkciju**, t.i., tādu funkciju $u(z)$, kuras attīstījuma pakāpju rindā pēc z-pakāpēm koeficienti būtu vienādi ar virknes (u_n) locekļiem: $u(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n z^n$.

2. Veidotājfunkciju $u(z)$ attīsta pakāpju rindā pēc z pakāpēm, tādējādi atrodot u_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Pieņemsim, ka $a \neq 0$. Daži noderīgi attīstījumi pakāpju rindā:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^n = \frac{1}{1-az},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n a^n z^n = \frac{az}{(1-az)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 a^n z^n = \frac{az(az+1)}{(1-az)^3},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^3 a^n z^n = \frac{az(a^2z^2+4az+1)}{(1-az)^4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^4 a^n z^n = \frac{az(a^3z^3+11a^2z^2+11az+1)}{(1-az)^5},$$

kuri ir spēkā riņķī $|z| < \frac{1}{|a|}$.

7.1. piemērs.

Atrisināsim lineāru nehomogēnu rekurentu vienādojumu

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n + 2 - n \tag{6.2}$$

ar sākumnosacījumiem:

$$u_0 = -1, u_1 = 2, u_2 = -7, \tag{4.5}$$

lietojot veidotājfunkciju metodi.

a) Atradīsim vienādojuma (6.2) atrisinājuma (u_n), kas apmierina sākumnosacījumus (4.5), veidotājfunkciju $u(z)$.

Virknes (u_n) locekļi apmierina vienādības:

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n + 2 - n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{7.1}$$

Attiecīgo vienādību (7.1) abas puses pareizinot ar z^{n+3} un summējot pa $n = 0, 1, 2, \ \ldots,$ iegūsim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+3}z^{n+3} = 2\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+2}z^{n+3} + 5\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}z^{n+3} - 6\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{n+3} + \\ + 2\sum_{n=0}^{\infty} z^{n+3} - \sum_{n=0}^{\infty} nz^{n+3}$$

jeb

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+3}z^{n+3} = 2z\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+2}z^{n+2} + 5z^2\sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}z^{n+1} - 6z^3\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{n} + \\ + 2z^3\sum_{n=0}^{\infty} z^{n} - z^3\sum_{n=0}^{\infty} nz^{n},$$

no kurienes izriet, ka

$$\big[u(z) - (u_0 + u_1 z + u_2 z^2)\big] = 2z\big[u(z) - (u_0 + u_1 z)\big] + \\ + 5z^2\big[u(z) - u_0\big] - 6z^3 u(z) + \frac{2z^3}{1-z} - \frac{z^4}{(1-z)^4} = 0.$$

Ņemot vērā sākumnosacījumus (4.5), atrodam:

$$\big[u(z) - (-1 + 2z - 7z^2)\big] = 2z\big[u(z) - (-1 + 2z)\big] + \\ + 5z^2\big[u(z) + 1\big] - 6z^3 u(z) + \frac{2z^3}{1-z} - \frac{z^4}{(1-z)^4} = 0,$$

no kurienes, atrisinot pēdējo vienādojumu attiecībā pret $u(z)$, iegūsim:

$$u(z) = \frac{-1 + 6z - 15z^2 + 18z^3 - 9z^4}{(1-z)^2(1 - 2z - 5z^2 + 6z^3)}.$$

b) Attīstīsim veidotājfunkciju $u(z)$ pakāpju rindā pēc z pakāpēm.

1. Izteiksim daļveida racionālu funkciju

$$u(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{-1+6z-15z^2+18z^3-9z^4}{(1-z)^2(1-2z-5z^2+6z^3)}$$

elementārdaļu summā. Atrodam polinoma $g(z) = (1-z)^2(-1+2z+5z^2-6z^3)$ saknes:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda_5 = \frac{1}{3}.$$

Sadalām polinomu $g(z)$ lineāros reizinātājos:

$$g(z) = 6(z-1)^3 \left(z+\frac{1}{2}\right)\left(z-\frac{1}{3}\right)$$

jeb

$$g(z) = (1-z)^3(1+2z)(1-3z).$$

Tagad uzrakstām funkciju $u(z)$ kā elementārdaļu summu

$$\frac{-1+6z-15z^2+18z^3-9z^4}{(1-z)^3(1+2z)(1-3z)} = \\ = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{(1-z)^3} + \frac{D}{1+2z} + \frac{E}{1-3z}$$

ar nenoteiktiem koeficientiem A, B, C, D un E. Atradīsim šos koeficientus. No pēdējās vienādības seko, ka

$$\begin{aligned} &-1+6z-15z^2+18z^3-9z^4 = \\ &\quad = A(1-z)^2(1+2z)(1-3z) + B(1-z)(1+2z)(1-3z) + \\ &\quad + C(1+2z)(1-3z) + D(1-z)^3(1-3z) + E(1-z)^3(1+2z). \end{aligned} \tag{7.2}$$

Ievietojot $z = \frac{1}{3}$ vienādībā (7.2), iegūsim

$$-1+6\cdot\frac{1}{3}-15\cdot\frac{1}{9}+18\cdot\frac{1}{27}-9\cdot\frac{1}{81} = E\left(1-\frac{1}{3}\right)^3\left(1+2\cdot\frac{1}{3}\right),$$

no kurienes seko, ka

$$E = -\frac{9}{40}.$$

Ievietojot $z = -\frac{1}{2}$ vienādībā (7.2), iegūsim

$$-1-6\cdot\frac{1}{2}-15\cdot\frac{1}{4}-18\cdot\frac{1}{8}-9\cdot\frac{1}{16} = D\left(1+\frac{1}{2}\right)^3\left(1+\frac{3}{2}\right),$$

no kurienes seko, ka

$$D = -\frac{169}{135}.$$

Ievietojot $z = 1$ vienādībā (7.2), iegūsim

$$-1+6-15+18-9 = C\,(1+2)\,(1-3),$$

no kurienes seko, ka

$$C = \frac{1}{6}.$$

Atvasināsim abas vienādības (7.2) puses:

$$\begin{aligned}
&6 - 30z + 54z^2 - 36z^3 = \\
&\quad = A2(1-z)(-1)(1+2z)(1-3z) + A(1-z)^2\big[(1+2z)(1-3z)\big]' + \\
&\quad\quad + B(-1)(1+2z)(1-3z) + B(1-z)\big[(1+2z)(1-3z)\big]' + \\
&\quad + C\big[(1+2z)(1-3z)\big]' + D3(1-z)^2(-1)(1-3z) + D(1-z)^3(-3) + \\
&\quad\quad\quad + E3(1-z)^2(-1)(1+2z) + E(1-z)^3 2. \qquad (7.3)
\end{aligned}$$

Ievietojot $z = 1$ šajā vienādībā, iegūsim

$$6 - 30 + 54 - 36 = B(-1)(1+2)(1-3) + C(-12+1),$$

no kurienes seko, ka

$$B = -\frac{23}{36}.$$

Lai atrastu A, var rīkoties šādi: atvasināt vienādības (7.3) abas puses, ievietot $z = 1$ un atrast A. Rīkosimies vienkāršāk: ņemot vērā vienādību (7.2), pielīdzināsim koeficientus pie z^0:

$$-1 = A + B + C + D + E$$

jeb

$$A = -1 + \frac{23}{36} - \frac{1}{6} + \frac{169}{135} + \frac{9}{40} = \frac{205}{216}.$$

Tātad

$$A = \frac{205}{216}.$$

Tādējādi

$$\begin{aligned}
u(z) &= \frac{-1 + 6z - 15z^2 + 18z^3 - 9z^4}{(1-z)^3(1+2z)(1-3z)} = \\
&= \frac{205}{216}\cdot\frac{1}{1-z} - \frac{23}{36}\cdot\frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{(1-z)^3} - \\
&\quad - \frac{169}{135}\cdot\frac{1}{1+2z} - \frac{9}{40}\cdot\frac{1}{1-3z}.
\end{aligned}$$

Ņemot vērā attīstījumus:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z| < 1,$$
$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \quad |z| < 1,$$
$$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2}\, z^n, \quad |z| < 1,$$
$$\frac{1}{1+2z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n\, z^n, \quad |z| < \frac{1}{2},$$
$$\frac{1}{1-3z} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n\, z^n, \quad |z| < \frac{1}{3},$$

iegūsim:

$$u(z) = \frac{205}{216} \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \frac{23}{36} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n + \frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2}\, z^n - $$
$$- \frac{169}{135} \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n\, z^n - \frac{9}{40} \sum_{n=0}^{\infty} 3^n, \qquad |z| < \frac{1}{3}$$

jeb

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{205}{216} - \frac{23}{36}(n+1) + \frac{1}{6} \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{169}{135}(-2)^n - \frac{9}{40} 3^n \right) z^n, \quad |z| < \frac{1}{3}.$$

Atzīmēsim, ka

$$\frac{205}{216} - \frac{23}{36}(n+1) + \frac{1}{6} \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{103}{216} - \frac{7}{18} n + \frac{1}{12} n^2.$$

Tātad

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{103}{216} - \frac{7}{18} n + \frac{1}{12} n^2 - - \frac{169}{135}(-2)^n - \frac{9}{40} 3^n \right) z^n, \quad |z| < \frac{1}{3},$$

no kurienes izriet, ka

$$u_n = \frac{103}{216} - \frac{7}{18} n + \frac{1}{12} n^2 - - \frac{169}{135}(-2)^n - \frac{9}{40} 3^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

LITERATŪRA

[1] I. Strazdiņš. Diskrētās matemātikas pamati. - R.: Zvaigzne, 1978.

[2] I. Strazdiņš. Fibonači skaitļi (Š. Mihelovičs. Skaitļu teorija. - Daugavpils: DPU izdevniecība "Saule", 1996; 2. pielikums).

[3] Виленкин Н.Я. Комбинаторика. - М.: Наука, 1969.

[4] Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. - М.: Наука, 1978.

[5] Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. - М.: Наука, 1967.

[6] Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. - М.: Наука, 1975.

[7] Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. - М.: Наука, 1978.

[8] Яунземс А. Математика для экономических наук. - Рига: Латвийский университет, 1993.

[9] WWL Chen. Discrete Mathematics.
`http://www.maths.mq.edu.au/~wchen/lndmfolder/lndm.html`