DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Kopas. Attēlojumi

2010. gada 8. februāris

2010

Saturs

1. Kopas jēdziens

Kopas jēdziens ir pamatjēdziens, to nevar definēt, var tikai paskaidrot: **kopa apzīmē kaut ko vienotu, kas sastāv no atsevišķiem objektiem**. Objektus, kas veido kopu, sauc par kopas **kopas elementiem**. Ja kāds objekts a ir kopas A elements, tad raksta $a \in A$ (lasa "a pieder kopai A") vai $a \ni A$ (lasa " kopa A satur a"). Ja objekts a nav kopas A elements, tad raksta $a \notin A$ (lasa "a nepieder kopai A") vai $a \not\ni A$ (lasa "kopa A nesatur a").

Kopu sauc par **galīgu**, ja tās elementu skaits ir galīgs. Galīgas kopas elementu skaitu apzīmē ar $|A|$. Kopu, kas nav galīga kopa, sauc par **bezgalīgu kopu**. Kopu, kas nesatur nevienu elementu, apzīmē ar $\emptyset$ un sauc par **tukšo kopu**. Tukšo kopu uzskata par galīgu kopu, bet skaitli 0 - par tās elementu skaitu, t.i., $|\emptyset| \stackrel{\text{def}}{=} 0$. Kopu, kas satur vismaz vienu elementu sauc par **netukšu kopu**.

Jebkuru galīgu kopu (vismaz teorētiski) var uzdot, uzrādot visus tās elementus. Galīgas kopas visus elementus pieraksta figūriekavās:

$$A = \{\texttt{kopas } A \texttt{ elementu saraksts}\}.$$

Pastāv šāda noruna: katrs objekts, kas ir kādas kopas elements, tiek uzrādīts šajā kopā tikai vienu reizi, piemēram, skaitļa 2342431 ciparu kopa ir $\{2; 3; 4; 1\}$. Bezgalīgām kopām nav iespējams sastādīt pilnīgu elementu sarakstu. Dažkārt tomēr arī bezgalīgas kopas raksturo ar elementu sarakstu, piemēram, visu naturālo skaitļu kopa

$$\mathbb{N} = \{1; 2; \ldots; n; \ldots\}.$$

Tādu pierakstu drīkst izmantot tikai tad, ja uzrakstītie elementi skaidri norāda, kā saraksts ir turpināms.

Kopu (galīgu vai bezgalīgu) var uzdot, norādot kādu īpašību, kas piemīt visiem aplūkojamās kopas elementiem, un kas nepiemīt nevienam citam objektam. Figūriekavās vispirms raksta kopas elementa vispārīgo apzīmējumu, tad liek divpunktu (vai novelk slīpu vai taisnu svītriņu) un aiz tās norāda kopas elementu raksturīgo īpašību:

$$A = \{a: \ \texttt{kopas } A \texttt{ elementu raksturīgā īpašība}\}.$$

Piemēram, ar pierakstu $A = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ x^2 > 10\}$ uzdod visu to reālo skaitļu x kopu, kuru kvadrāts ir lielāks par skaitli 10.

Kopu A sauc par **kopas B apakškopu** vai **daļu**, ja katrs kopas A elements ir arī kopas B elements. Ja kopa A ir kopas B apakškopa, tad raksta $A \subset B$ (lasa "kopa A iekļaujas kopā B") vai $B \supset A$ (lasa "kopa B satur kopu A"). Ja kopa A nav kopas B apakškopa, tad raksta $A \not\subset B$ (lasa "kopa A neiekļaujas kopā B") vai $B \not\supset A$ (lasa "kopa B nesatur kopu A"). Kopas A visu daļu kopu apzīmē ar $\mathcal{P}(A)$ un sauc par **kopas X buleānu**. Tukšā kopa ir jebkuras kopas A apakškopa, t.i., $\emptyset \subset A$ jebkurai kopai A. Jebkura kopa A satur sevi kā apakškopu, t.i., $A \subset A$ jebkurai kopai A. Tātad jebkurai kopai A vienmēr eksistē divas apakškopas: $\emptyset$ un A, kuras sauc par **kopas A neīstām apakškopām** (vai **kopas A triviālām apakškopām**). Kopas A apakškopu, kas nav tās neīsta apakškopa, sauc par **kopas A īstu apakškopu** (vai **kopas A netriviālu apakškopu**). Kopai eksistē īsta apakškopa tad un tikai tad, kad tā satur vismaz divus dažādus elementus. Tukšajai kopai $\emptyset$ un **vienelementa kopai** $\{a\}$, t.i., kopai, kas sastāv tikai no viena elementa a, īstu apakškopu nav.

1.1. piemērs. Ja $A = \{1;2\}$, tad $\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1;2\}\big\}$, pie tam $\emptyset$, $\{1;2\}$ ir kopas A neīstas apakškopas, bet $\{1\}$, $\{2\}$ ir kopas A īstas apakškopas. Savukārt

$$\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A)\big) = \big\{\emptyset; \{\emptyset\}; \{\{1\}\}; \{\{2\}\}; \{\{1;2\}\}; \{\emptyset; \{1\}\}; \{\emptyset; \{2\}\}; \\ \{\emptyset; \{1;2\}\}; \{\{1\}; \{2\}\}; \{\{1\}; \{1;2\}\}; \{\{2\}; \{1;2\}\}; \{\emptyset; \{1\}; \{2\}\}; \\ \{\emptyset; \{1\}; \{1;2\}\}; \{\emptyset; \{2\}; \{1;2\}\}; \{\{1\}; \{2\}; \{1;2\}\}; \\ \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{1;2\}\}\big\}.$$

Divas kopas A un B sauc par **vienādām** un raksta $A = B$, ja tās sastāv no vieniem un tiem pašiem elementiem. Divas kopas, kas nav vienādas, sauc par **dažādām**. Kopas A un B ir vienādas tad un tikai tad, kad $A \subset B$ un $B \subset A$. Tātad divas kopas A un B ir vienādas tad un tikai tad, kad

1. jebkuram kopas A elementam a ir spēkā $a \in B$;
2. jebkuram kopas B elementam b ir spēkā $b \in A$.

Savukārt divas kopas A un B ir dažādas tad un tikai tad, kad izpildās vismaz viens no diviem nosacījumiem:

1. eksistē $a \in A$, ka $a \notin B$;
2. eksistē $b \in B$, ka $b \notin A$.

Termina "kopa" sinonīmi ir "saime", "sistēma", "klase" u.c., taču parasti šos terminus lieto speciālāku kopu apzīmēšanai.

2. Svarīgākās skaitļu kopas

Uzskaitīsim svarīgākās skaitļu kopas.

Visu naturālo skaitļu kopa

$$\mathbb{N} = \{1; 2; \ldots; n; \ldots\}.$$

Visu nenegatīvo veselo skaitļu kopa

$$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; \ldots; n; \ldots\}.$$

Visu veselo skaitļu kopa

$$\mathbb{N}_0 = \{\ldots; -n; \ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots; n; \ldots\}.$$

Visu racionālo skaitļu kopa

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} :\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N},\ \frac{n}{m} \text{ - nesaīsināma daļa}\right\} =$$
$$=\{x\text{: } x \text{ ir galīgs vai bezgalīgs periodisks decimāldaļskaitlis}\}.$$

Visu iracionālo skaitļu kopa

$$\mathbb{I} = \{x\colon\ x \text{ ir bezgalīgs neperiodisks decimāldaļskaitlis}\}.$$

Visu reālo skaitļu kopa

$$\mathbb{R} = \{x\colon\ x \text{ ir decimāldaļskaitlis}\}.$$

Visu pozitīvo reālo skaitļu kopa

$$\mathbb{R}^+ = \{x:\ x \in \mathbb{R},\ x > 0\}.$$

Visu negatīvo reālo skaitļu kopa

$$\mathbb{R}^- = \{x:\ x \in \mathbb{R},\ x < 0\}.$$

Visu nenegatīvo reālo skaitļu kopa

$$\mathbb{R}_0^+ = \{x:\ x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}.$$

Visu nepozitīvo reālo skaitļu kopa

$$\mathbb{R}_0^- = \{x:\ x \in \mathbb{R},\ x \leq 0\}.$$

Pieņemsim, ka skaitļiem $a, b \in \mathbb{R}$ un $a \leq b$. Kopas $\mathbb{R}$ šādas apakškopas sauc par **intervāliem**:

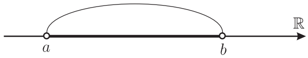
1. $(a; b) = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ a < x < b\}$ - **vaļējs intervāls ar sākumpunktu** a **un beigupunktu** b (skat. 1.(a) zīm.),
2. $[a; b] = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ a \leq x \leq b\}$ - **slēgts intervāls (jeb segments) ar sākumpunktu** a **un beigupunktu** b (skat. 1.(b) zīm.),
3. $(a; b] = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ a < x \leq b\}$ - **pusvaļējs no kreisās puses intervāls ar sākumpunktu** a **un beigupunktu** b (skat. 1.(c) zīm.),
4. $[a; b) = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ a \leq x < b\}$ - **pusvaļējs no labās puses intervāls ar sākumpunktu** a **un beigupunktu** b (skat. 1.(d) zīm.),
5. $(-\infty; a) = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ x < a\}$ - **kreisais vaļējais stars ar sākumpunktu** a (skat. 1.(e) zīm.),
6. $(a; +\infty) = \{x : \ x \in \mathbb{R}, \ x > a\}$ - **labais vaļējais stars ar sākumpunktu** a (skat. 1.(f) zīm.),

7. $(-\infty; a] = \{x : \ x \in \mathbb{R},\ x \leq a\}$ - **kreisais slēgtais stars ar sākumpunktu** a (skat. 1.(g) zīm.),
8. $[a; +\infty) = \{x : \ x \in \mathbb{R},\ x \geq a\}$ - **labais slēgtais stars ar sākumpunktu** a (skat. 1.(h) zīm.),
9. $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$ - **skaitļu taisne** (skat. 1.(i) zīm.).

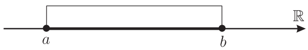
Intervālus 1)-4) sauc par **ierobežotiem intervāliem**, bet 5)-9) - **neierobežotiem intervāliem**. Intervālus 1)-9) apzīmē ar $\langle a; b\rangle$, uzskatot, ka a un b ir reāli skaitļi vai simboli $\pm\infty$ atkarībā no intervāla veida. Ja $\langle a; b\rangle$ - ierobežots intervāls, tad skaitli a sauc par **intervāla** $\langle a; b\rangle$ **sākumpunktu**, b - **beigupunktu**, a un b - **galapunktiem**, $\frac{a+b}{2}$ - **viduspunktu**, $b - a$ - **garumu**. Ierobežota intervāla $\langle a; b\rangle$ garumu apzīmē ar $|\langle a; b\rangle|$, t.i., $|\langle a; b\rangle| = b - a \geq 0$.

Ierobežotus intervālus, kuriem $a = b$, sauc par **deģenerētiem intervāliem**. Deģenerēti intervāli ir $(a; a) = \emptyset$, $[a; a) = \emptyset$, $(a; a] = \emptyset$ un $[a; a] = \{a\}$, kur $a \in \mathbb{R}$. Deģenerēta intervāla $\langle a; b\rangle$ garums $|\langle a; b\rangle| = b - a = 0$. Savukārt ierobežotus intervālus $\langle a; b\rangle$, kuriem $a < b$, un neierobežotus intervālus 5)-9) sauc par **nedeģenerētiem in-**

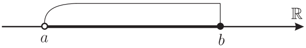
tervāliem. Ierobežota nedeğenerēta intervāla $\langle a; b\rangle$ garums $|\langle a; b\rangle| = b - a > 0$.



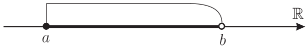
(a) $(a; b)$



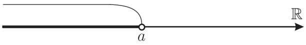
(b) $[a; b]$



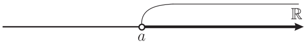
(c) $(a; b]$



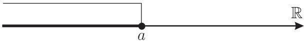
(d) $[a; b)$



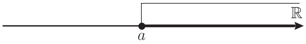
(e) $(-\infty; a)$



(f) $(a; +\infty)$



(g) $(-\infty; a]$



(h) $[a; +\infty)$

(i) $(-\infty; +\infty)$

1. zīm. Intervāli kopā $\mathbb{R}$

Apskatīsim vēl dažas skaitļu kopas.

Visu komplekso skaitļu kopa

$$\mathbb{C} = \{a + bi\colon\ a, b \in \mathbb{R},\ i \text{ - imaginārā vienība}\}$$

(uzskata, ka $a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2$ tad un tikai tad, kad $a_1 = a_2$ un $b_1 = b_2$).

Ar $\mathbb{K}$ apzīmēsim vienu no kopām $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$; ar $\mathbb{K}[x]$ kopu, kas sastāv no visiem polinomiem, kuru koeficienti pieder kopai $\mathbb{K}$, un tikai tiem; ar $\mathbb{K}[x]_n$, kur $n \in \mathbb{N}_0$, kopu, kas sastāv no visiem n-tās kārtas polinomiem, kuru koeficienti pieder kopai $\mathbb{K}$, un tikai tiem; ar $\mathbb{K}[x]_{\geq 0}$ kopu, kas sastāv no visiem nenulles polinomiem, kuru koeficienti pieder kopai $\mathbb{K}$, un tikai tiem.

Visu algebrisko skaitļu kopa

$$\mathbb{Q}_a = \{\alpha\colon\ \alpha \in \mathbb{C} \text{ un eksistē } p(x) \in \mathbb{Q}_{\geq 0}, \text{ ka } p(\alpha) = 0\}.$$

Visu transcendento skaitļu kopa

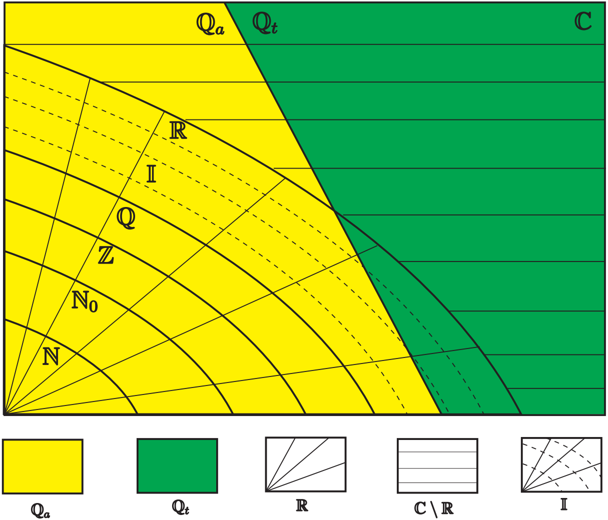
$$\mathbb{Q}_t = \{\alpha\colon\ \alpha \in \mathbb{C},\ \alpha \notin \mathbb{Q}_a\}.$$

Ir pareizas šādas iekļaušanās:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C},\ \mathbb{I} \subset \mathbb{R},$$

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_a \subset \mathbb{C},\ \mathbb{Q}_t \subset \mathbb{C},\ \mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}_0^+ \subset \mathbb{R},\ \mathbb{R}^- \subset \mathbb{R}_0^- \subset \mathbb{R}.$$

Kopas un to savstarpējās attieksmes bieži vien shematiski attēlo ar plaknes punktu kopām, kuras sauc par **Eilera-Venna diagrammām**. 2. zīm. ir attēlotas kopu $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}_a$ un $\mathbb{Q}_t$ savstarpējās attieksmes.


$\mathbb{Q}_a$
$\mathbb{Q}_t$
$\mathbb{C}$
$\mathbb{R}$
$\mathbb{I}$
$\mathbb{Q}$
$\mathbb{Z}$
$\mathbb{N}_0$
$\mathbb{N}$
$\mathbb{Q}_a$
$\mathbb{Q}_t$
$\mathbb{R}$
$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
$\mathbb{I}$

2. zīm.

3. Attēlojumi

3.1. Attēlojuma jēdziens

Pieņemsim, ka X un Y ir netukšas kopas.

Par **kopas** X **attēlojumu** f **kopā** Y sauc likumu, kas jebkuram kopas X elementam x piekārto noteiktu kopas Y elementu y, kuru apzīmē ar $f(x)$ un sauc par **elementa** x **attēlu attēlojumā** f.

Kopas X attēlojumu kopā Y apzīmē ar $f : X \to Y$. Kopas X visu iespējamo attēlojumu kopā Y kopu apzīmē ar Y^X. Kopu X apzīmē ar D_f un sauc par **attēlojuma** f **izejas kopu** vai **definīcijas kopu**, bet Y **- ieejas kopu**. Patvaļīgu attēlojuma f definīcijas kopas X elementu x sauc par **attēlojuma** f **argumentu**. Elementa $x \in X$ attēlu $f(x)$ attēlojumā f sauc arī par **attēlojuma** f **vērtību pie argumenta vērtības** x. Ieejas kopas Y apakškopu, kas sastāv no visām iespējamām attēlojuma f vērtībām $f(x)$ $(x \in X)$ un tikai tām, sauc par **attēlojuma** f **vērtību kopu** un apzīmē ar E_f. Tātad

$$E_f = \{f(x) : x \in X\}.$$

Attēlojumus $f : X \to Y$ un $g : Z \to W$ sauc par **vienādiem** un raksta $f = g$, ja $X = Z$, $Y = W$ un jebkuram $x \in X$ ir spēkā $f(x) = g(x)$.

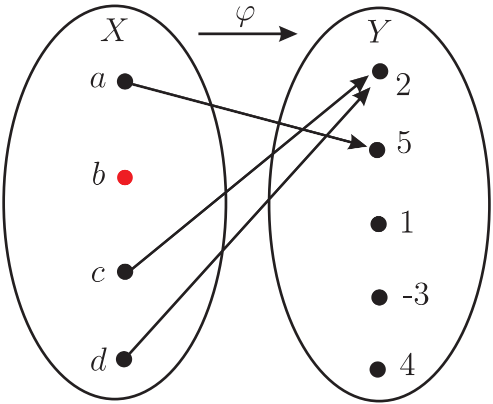
Termina "attēlojums" sinonīmi ir "funkcija", "operators", "funkcionālis" u.c., taču parasti šos terminus lieto speciālāku attēlojumu apzīmēšanai.

Attēlojumu $f : X \to Y$ sauc par

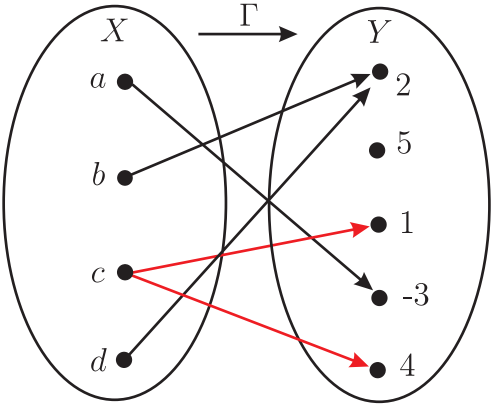
- **kompleksu funkciju**, ja $Y \subset \mathbb{C}$;
- **reālu funkciju**, ja $Y \subset \mathbb{R}$;
- **kompleksā mainīgā kompleksu funkciju**, ja $X \subset \mathbb{C}$, $Y \subset \mathbb{C}$;
- **kompleksā mainīgā reālu funkciju**, ja $X \subset \mathbb{C}$, $Y \subset \mathbb{R}$;
- **reālā mainīgā kompleksu funkciju**, ja $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{C}$;
- **reālā mainīgā reālu funkciju**, ja $X \subset \mathbb{R}$, $Y \subset \mathbb{R}$;
- **operatoru**, ja X un Y ir vektoru telpas pār lauku $\mathbb{K}$, kur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ vai $\mathbb{K} = \mathbb{R}$;

- **kompleksu funkcionāli**, ja X ir vektoru telpa pār lauku $\mathbb{C}$, bet kopa $\mathbb{Y} = \mathbb{C}$ tiek uzlūkota kā vektoru telpa pār lauku $\mathbb{C}$;
- **reālu funkcionāli**, ja X ir vektoru telpa pār lauku $\mathbb{R}$, bet kopa $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$ tiek uzlūkota kā vektoru telpa pār lauku $\mathbb{R}$.

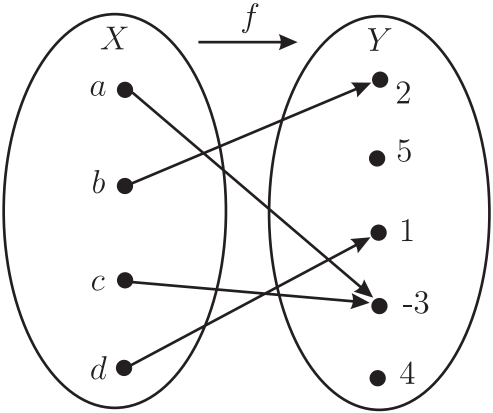
Reālā mainīgā funkciju īpašības pēta reālā mainīgā funkciju teorijā, kompleksā mainīgā funkciju īpašības - kompleksā mainīgā funkciju teorijā, operatoru un funkcionāļu īpašības - funkcionālanalīzē.



3. zīm. Likums φ **nav** kopas X attēlojums kopā Y, jo *kopas X elementam b nav piekārtots neviens kopas Y elements*



4. zīm. Likums Γ **nav** kopas X attēlojums kopā Y, jo *kopas X elementam c ir piekārtoti divi kopas Y elementi*



5. zīm. Likums f **ir** kopas X attēlojums kopā Y

3.2. Attēls un pirmtēls

Par **kopas** $A \subset X$ **attēlu attēlojumā** $f : X \to Y$ sauc kopas Y apakškopu, kas sastāv no visiem kopas A elementu attēliem attēlojumā f un tikai tiem. Kopas $A \subset X$ attēlu attēlojumā $f : X \to Y$ apzīmē ar $f(A)$, t.i.,

$$f(A) \overset{\text{def}}{=} \big\{ f(x) : \ x \in A \big\}.$$

- *Attēlojuma $f : X \to Y$ vērtību kopa ir šī attēlojuma definīcijas kopas attēls attēlojumā f, t.i., $E_f = f(D_f)$.*
- *Vienelementa kopas $\{x_0\} \subset X$ attēls attēlojumā $f : X \to Y$ ir vienelementa kopa $\big\{ f(x_0) \big\}$, kas sastāv no elementa x_0 attēla šajā attēlojumā, t.i., $f\big(\{x_0\}\big) = \big\{ f(x_0) \big\}$.*

Par **kopas** $B \subset Y$ **pirmtēlu** (vai **oriģinālu**) **attēlojumā** $f : X \to Y$ sauc kopas X apakškopu, kas sastāv no visiem tiem kopas X elementiem, kuru attēli attēlojumā f pieder kopai B, un tikai tiem. Kopas $B \subset Y$ pirmtēlu attēlojumā f apzīmē ar $f^{-1}(B)$, t.i.,

$$f^{-1}(B) \overset{\text{def}}{=} \big\{ x \in X : \ f(x) \in B \big\}.$$

Ja $y_0 \in Y$, tad simbolu $f^{-1}(y_0)$ lieto divās nozīmēs:

1. $f^{-1}(y_0) = f^{-1}\big(\{y_0\}\big)$ - vienelementa kopas $\{y_0\}$ pirmtēls attēlojumā f;
2. ar $f^{-1}(y_0)$ apzīmē patvaļīgu kopas $f^{-1}\big(\{y_0\}\big)$ elementu.

3.3. Injekcija. Sirjekcija. Bijekcija. Inversais attēlojums

Attēlojumu $f : X \to Y$ sauc par **injektīvu attēlojumu** (vai **injekciju**), ja jebkuru divu dažādu kopas X elementu attēli attēlojumā f ir dažādi, t.i.,

$$\forall x_1, x_2 \in X : \ x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

- *Attēlojums $f : X \to Y$ ir injekcija tad un tikai tad, kad*

$$\forall x_1, x_2 \in X : \ f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2.$$

Attēlojumu $f : X \to Y$ sauc par **sirjektīvu attēlojumu** (vai **sirjekciju**), ja katrs kopas Y elements ir vismaz viena kopas X elementa attēls attēlojumā F, t.i.,

$$\forall y \in Y \, \exists x \in X : \ f(x) = y.$$

Sirjekciju $f : X \to Y$ sauc arī par **kopas** X **attēlojumu *par* kopu** Y.

- *Attēlojums* $f : X \to Y$ *ir sirjekcija tad un tikai tad, kad* $f(X) = Y$.
- *Katrs attēlojums* $f : X \to Y$ *nosaka sirjekciju* $g : X \to Y_1$, *kur* $Y_1 = f(X)$, *pēc likuma:*

$$\forall x \in X : \ g(x) = f(x).$$

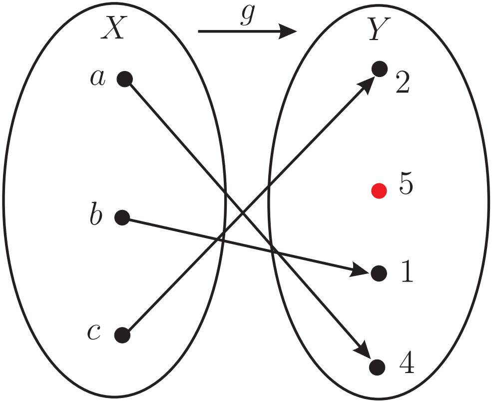
Parasti attēlojumam f *atbilstošo sirjekciju* g *apzīmē ar to pašu burtu* f.

Attēlojumu $f : X \to Y$ sauc par **bijektīvu attēlojumu** (vai **bijekciju**), ja f ir injekcija un sirjekcija vienlaicīgi. Ja $f : X \to Y$ ir bijekcija, tad saka, ka **starp kopām X un Y var nodibināt savstarpēji viennozīmīgu atbilstību pēc likuma** f.

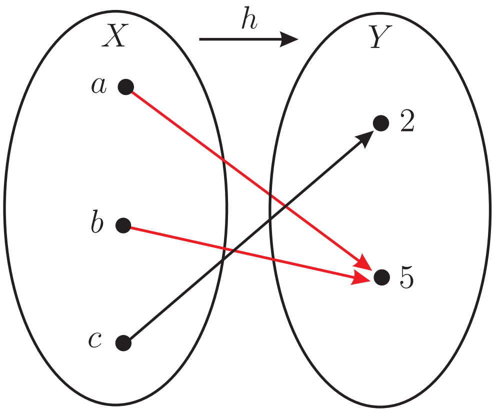
Termins "savstarpēji viennozīmīga atbilstība" tiek lietots tādēļ, ka bijekcijā $f : X \to Y$ katrs kopas Y elements y atbilst vienam un tikai vienam kopas X elementam x (elementa x eksistence seko no attēlojuma f sirjektivitātes, bet vienīgums - no attēlojuma f injektivitātes). Attēlojumu, kas katram $y \in Y$ piekārto to vienīgo $x \in X$, kuram $f(x) = y$, apzīmē ar $f^{-1} : Y \to X$ un sauc par

attēlojuma f **inverso attēlojumu** (vai **apvērsto attēlojumu**). Injekcijai $f : X \to Y$ atbilstošā sirjekcija $f : X \to f(X)$ ir bijekcija un tāpēc tai eksistē inversais attēlojums $f^{-1} : f(X) \to X$!

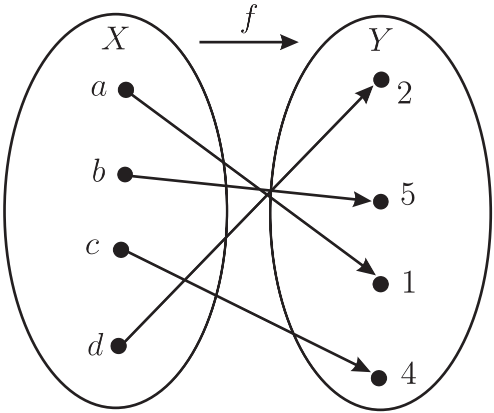
- *Attēlojums* $f : X \to Y$ *ir injekcija tad un tikai tad, kad jebkuram* $y \in Y$ *vienādojumam* $y = f(x)$ *eksistē ne vairāk kā viens atrisinājums kopā* X*.*
- *Attēlojums* $f : X \to Y$ *ir sirjekcija tad un tikai tad, kad jebkuram* $y \in Y$ *vienādojumam* $y = f(x)$ *eksistē atrisinājums kopā* X*.*
- *Attēlojums* $f : X \to Y$ *ir bijekcija tad un tikai tad, kad jebkuram* $y \in Y$ *vienādojumam* $y = f(x)$ *eksistē tieši viens atrisinājums kopā* X*.*



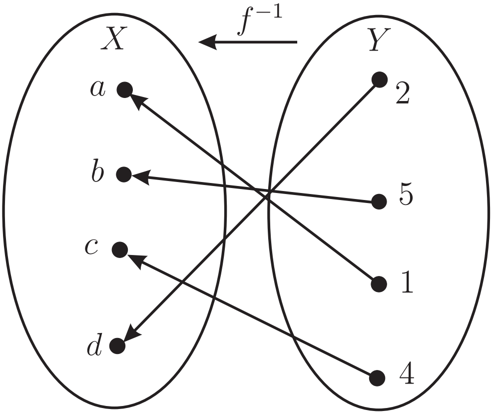
6. zīm. Attēlojums g ir injekcija, bet nav sirjekcija



7. zīm. Attēlojums h ir sirjekcija, bet nav injekcija



8. zīm. Attēlojums f ir bijekcija



9. zīm. Attēlojuma f inversais attēlojums f^{-1}

3.4. Attēlojuma turpinājums un sašaurinājums. Identiskais attēlojums

Attēlojumu $f : X \to Y$ sauc par **attēlojuma** $g : A \to Y$ **turpinājumu kopā** X, bet attēlojumu g - **attēlojuma** f **sašaurinājumu kopā** A, ja $A \subset X$ un jebkuram $x \in A$ ir spēkā $g(x) = f(x)$. Attēlojuma f sašaurinājumu kopā A apzīmē ar $f|A$.

- *Katrs attēlojums $f : X \to Y$ un patvaļīga netukša apakškopa $A \subset X$ nosaka divus attēlojumus:*
  1. *$f|A : A \to Y$ - attēlojuma f sašaurinājumu kopā $A \subset X$;*
  2. *šim sašaurinājumam atbilstošo sirjekciju $f|A : A \to f(A) = (f|A)(A)$, kuru sauc par **attēlojuma f sirjektīvo sašaurinājumu kopā** $A \subset X$.*
- *Jebkuras injekcijas (tai skaitā bijekcijas) $f : X \to Y$ sašaurinājums kopā $A \subset X$, t.i., attēlojums $f|A : A \to Y$, ir injekcija, bet sirjektīvais sašaurinājums kopā $A \subset X$, t.i., attēlojums $f|A : A \to f(A)$, ir bijekcija.*

Par **identisko attēlojumu kopā** X sauc attēlojumu $i_X : X \to X$, ka jebkuram $x \in X$ ir spēkā $i_X(x) = x$.

- *Identiskais attēlojums kopā X ir bijekcija un tā inversais attēlojums ir pats identiskais attēlojums kopā X, t.i., $(i_X)^{-1} = i_X$.*

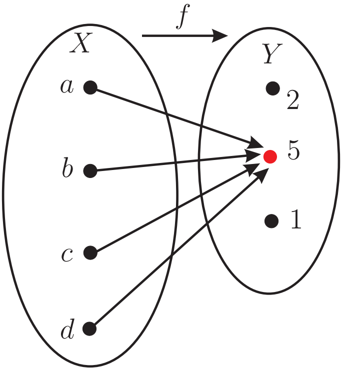
Identiskā attēlojuma $i_X : X \to X$ sašaurinājumu kopā $A \subset X$, t.i., attēlojumu $i_X|A : A \to X$, sauc par **apakškopas** $A \subset X$ **dabisko iegremdējumu kopā** X.

- *Tā kā i_X ir bijekcija, tad $i_X|A$ ir injekcija (bet ne sirjekcija, ja $A \neq X$).*

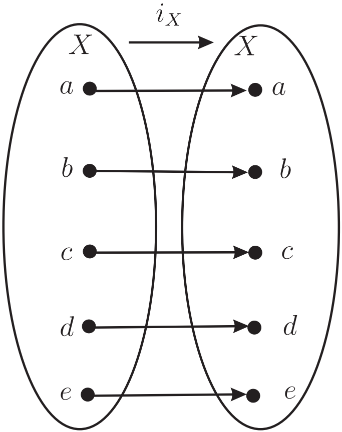
3.5. Konstants attēlojums

Attēlojumu $f : X \to Y$ sauc par **konstantu** (vai **patstāvīgu**), ja eksistē $b \in Y$, ka jebkuram $x \in X$ ir spēkā $f(x) = b$.

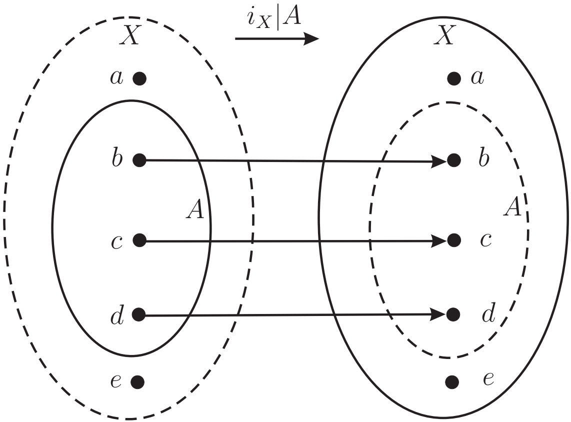
Attēlojumu $f : X \to Y$ sauc par **konstantu** (vai **patstāvīgu**) **kopā** $A \subset X$**,** $A \neq \emptyset$, ja attēlojuma f sašaurinājums kopā A ir konstants attēlojums, t.i., eksistē $b \in Y$, ka jebkuram $x \in A$ ir spēkā $f(x) = b$.



10. zīm. $f : X \to Y$ ir konstants attēlojums



11. zīm. $i_X : X \to X$ ir identiskais attēlojums kopā X



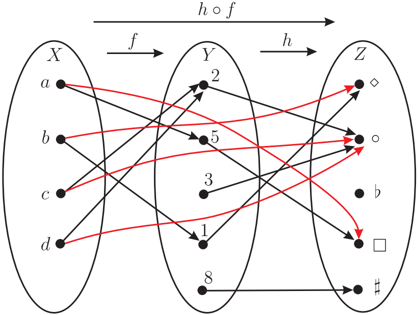
12. zīm. $i_X|A : A \to X$ ir apakškopas $A \subset X$ dabiskais iegremdējums kopā X

3.6. Attēlojumu kompozīcija

Par **attēlojumu** $f : X \to Y$ **un** $h : Y \to Z$ **kompozīciju** sauc attēlojumu $h \circ f : X \to Z$, ka

$$\forall x \in X : \ (h \circ f)(x) \overset{\text{def}}{=} h\big(f(x)\big).$$

13. zīm. ir attēlota attēlojumu $f : X \to Y$ un $h : Y \to Z$ kompozīcija $h \circ f : X \to Z$.



13. zīm.

Attēlojuma $f : X \to X$ **n-to pakāpi** definē induktīvi:

$$f^0 \stackrel{\text{def}}{=} i_X,\ f^1 \stackrel{\text{def}}{=} f,\ f^2 \stackrel{\text{def}}{=} f \circ f,\ \dots\ , f^n \stackrel{\text{def}}{=} f \circ f^{n-1}\ (n \geq 1),\ \dots\ .$$

Tātad

$$\forall x \in X : f^0(x) \stackrel{\text{def}}{=} x,$$
$$\forall x \in X : f^1(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x),$$
$$\forall x \in X : f^2(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(f(x)),$$
$$\forall x \in X : f^3(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(f(f(x))),\ \dots\ .$$

3.7. Orbīta. Stabilas un invariantas kopas. Nekustīgs punkts

Par **kopas** $A \subset X$ **orbītu attiecībā pret attēlojumu** $f : X \to X$ sauc kopu

$$\mathrm{Orb}_f(A) \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in X: \ x = f^n(z), \ z \in A, \ n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Par **elementa** $x_0 \in X$ **orbītu attiecībā pret attēlojumu** $f : X \to X$ sauc kopu

$$\mathrm{Orb}_f(x_0) \overset{\mathrm{def}}{=} \{x \in X: \ x = f^n(x_0), \ z \in A, \ n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Tātad

$$\mathrm{Orb}_f(x_0) = \mathrm{Orb}_f\big(\{x_0\}\big), \quad \mathrm{Orb}_f(A) = \bigcup_{x \in A} \mathrm{Orb}_f(x).$$

Saka, ka **kopa** $A \subset X$ **ir stabila attiecībā pret attēlojumu** $f : X \to X$, ja $f(A) \subset A$. Saka, ka **kopa** $A \subset X$ **ir invarianta attiecībā pret attēlojumu** $f : X \to X$, ja $f(A) = A$.

Elementu $x_0 \in X$ sauc par **attēlojuma** $f : X \to X$ **nekustīgu punktu**, ja ir spēkā vienādība $f(x_0) = x_0$.

- *Ja kopa* $A \subset X$ *ir invarianta attiecībā pret attēlojumu* $f : X \to X$*, tad kopa* A *ir stabila attiecībā pret šo attēlojumu, bet ne otrādi. Tukšā kopa* $\emptyset \subset X$ *ir invarianta attiecībā pret jebkuru attēlojumu* $f : X \to X$*.*

- *Ja katrs netukšas kopas* $A \subset X$ *elements ir attēlojuma* $f : X \to X$ *nekustīgs punkts, tad kopa* A *ir invarianta kopa attiecībā pret attēlojumu* f*. Savukārt, ja netukša kopas* $A \subset X$ *ir invarianta attiecībā pret attēlojumu* $f : X \to X$*, tad var gadīties, ka neviens kopas* A *elements nav attēlojuma* f *nekustīgs punkts, vēl jo vairāk, attēlojumam* f *vispār var nebūt nekustīgu punktu.*

- *Kopas* $A \subset X$ *orbīta attiecībā pret attēlojumu* $f : X \to X$ *ir stabila kopa attiecībā pret šo attēlojumu.*

- *Elements* $x_0 \in X$ *ir attēlojuma* $f : X \to X$ *nekustīgs punkts tad un tikai tad, kad* $\mathrm{Orb}_f(x_0) = \{x_0\}$*.*

3.8. Darbības ar kompleksām funkcijām

Par **funkciju $f : X \to \mathbb{C}$ un $g : X \to \mathbb{C}$ summu** sauc funkciju, kas jebkuram elementam $x \in X$ piekārto skaitli $f(x) + g(x) \in \mathbb{C}$. Funkciju f un g summu apzīmē ar $f + g$. Tātad

$$\forall x \in X : \ (f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x).$$

Ja g ir konstanta funkcija, t.i., $g(x) = \lambda$ visiem $x \in X$, kur $\lambda \in \mathbb{C}$ ir fiksēts skaitlis, tad funkciju f un g summu apzīmē ar $f + \lambda$ un sauc par **funkcijas $f : X \to \mathbb{C}$ un skaitļa $\lambda \in \mathbb{C}$ summu**.

Par **funkciju $f : X \to \mathbb{C}$ un $g : X \to \mathbb{C}$ starpību** sauc funkciju, kas jebkuram elementam $x \in X$ piekārto skaitli $f(x) - g(x) \in \mathbb{C}$. Funkciju f un g starpību apzīmē ar $f - g$. Tātad

$$\forall x \in X : \ (f - g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - g(x).$$

Par **funkciju $f : X \to \mathbb{C}$ un $g : X \to \mathbb{C}$ reizinājumu** sauc funkciju, kas jebkuram elementam $x \in X$ piekārto skaitli $f(x) \cdot g(x) \in$

$\mathbb{C}$. Funkciju f un g reizinājumu apzīmē ar fg. Tātad

$$\forall x \in X: \ (fg)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \cdot g(x).$$

Ja f ir konstanta funkcija, t.i., $f(x) = \lambda$ visiem $x \in X$, kur $\lambda \in \mathbb{C}$ ir fiksēts skaitlis, tad funkciju f un g reizinājumu apzīmē ar λg un sauc par **skaitļa** $\lambda \in \mathbb{C}$ **un funkcijas** $g : X \to \mathbb{R}$ **reizinājumu**. Tātad

$$\forall x \in X: \ (\lambda g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \cdot g(x).$$

Atzīmēsim, ka

$$f - g = f + (-1)g.$$

Pieņemsim, ka funkcija $g : X \to \mathbb{C}$ pieņem tikai nenulles vērtības, t.i., $g(x) \neq 0$ jebkuram $x \in X$. Par **funkciju** $f : X \to \mathbb{C}$ **un** $g : X \to \mathbb{C}$ **dalījumu** sauc funkciju, kas jebkuram elementam $x \in X$ piekārto skaitli $\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{C}$. Funkciju f un g dalījumu apzīmē ar $\frac{f}{g}$. Tātad

$$\forall x \in X: \ \left(\frac{f}{g}\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Operācijas, kas jebkurām divām funkcijām $f : X \to \mathbb{C}$ un $g : X \to$

$\mathbb{C}$ piekārto to summu $f+g$, starpību $f-g$, reizinājumu $f-g$ un dalījumu $\frac{f}{g}$, sauc attiecīgi par **funkciju saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu un dalīšanu** (dalīšanas gadījumā tiek pieprasīts, lai $g(x) \neq 0$ jebkuram $x \in X$). Operāciju, kas jebkurai funkcijai $f : X \to \mathbb{C}$ un patvaļīgam skaitlim $\lambda \in \mathbb{C}$ piekārto funkciju λf, sauc par **funkciju reizināšanu ar skaitli**.

Par **funkcijas** $f : X \to \mathbb{C}$ **moduli** sauc funkciju, kas jebkuram elementam $x \in X$ piekārto skaitli $\big|f(x)\big| \in \mathbb{C}$. Funkcijas f moduli apzīmē ar $|f|$. Tātad

$$\forall x \in X:\ |f|(x) \stackrel{\text{def}}{=} \big|f(x)\big|.$$

Kompleksu funkciju saskaitīšanas un reizināšanas operācijas var vispārināt galīgam skaitam funkciju $f_1 : X \to \mathbb{C}, \ldots, f_n : X \to \mathbb{C}$:

$$\forall x \in X:\ (f_1 + \cdots + f_n)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x) + \cdots + f_n(x);$$

$$\forall x \in X:\ (f_1 \cdots f_n)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f_1(x) \cdots f_n(x).$$

Gadījumā, ja $f_1 = \cdots = f_n$, tad funkciju $f_1, \ldots, f_n$ reizinājumu apzīmē ar f^n un sauc par **funkcijas f n-to pakāpi**.

Uzmanību: nejaukt funkcijas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n-to pakāpi reizināšanas nozīmē $f^n = \underbrace{f \cdots f}_{n}$ ar funkcijas $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ n-to pakāpi kompozīcijas nozīmē $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$, jo vispārīgā gadījumā tās ir dažādas funkcijas, piemēram $x^4 x^4$ un $(x^4)^4$. Iesakām lasītājām patstāvīgi atrast tādu funkciju $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, ka $ff = f \circ f$.

3.9. Raksturfunkcija

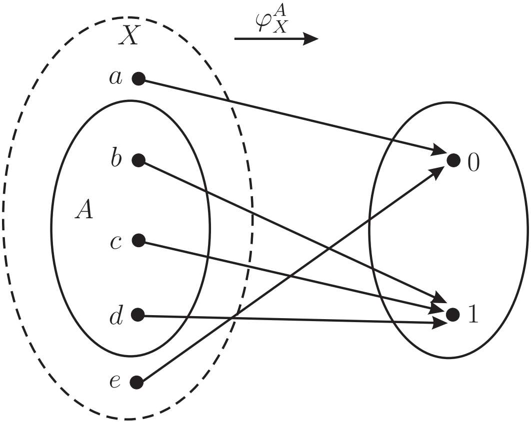
Pieņemsim, ka $A \subset X$. Par **kopas** A **raksturfunkciju kopā** X sauc attēlojumu
$\varphi_X^A : X \to \{0;1\}$, ka

$$\forall x \in X : \ \varphi_X^A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in A, \\ 0, & \text{ja} \quad x \neq A. \end{cases}$$

Atzīmēsim, ka

- kopas $A = \emptyset$ raksturfunkcija kopā X ir funkcija $\varphi_X^\emptyset : X \to \{0;1\}$, ka
$$\forall x \in X : \ \varphi_X^\emptyset(x) = 0;$$
- kopas $A = X$ raksturfunkcija kopā X ir funkcija $\varphi_X^X : X \to \{0;1\}$, ka
$$\forall x \in X : \ \varphi_X^X(x) = 1.$$

Otrādi, jebkura funkcija $f : X \to \{0;1\}$ ir kopas $A = f^{-1}(1)$ raksturfunkcija kopā X, t.i., $f = \varphi_X^A$.



14. zīm. Attēlojums $\varphi_X^A : X \to \{0; 1\}$ ir kopas $A \subset X$ raksturfunkcija kopā X

3.10. Attēlojuma jēdziena vispārinājumi

1. Paragrāfa sākumā formulēto attēlojuma definīciju turpmāk sauksim par **attēlojuma pamatdefinīciju**. Attēlojuma jēdzienu var vispārināt, ja attēlojuma pamatdefinīcijā frāzi

   *"... sauc likumu, kas jebkuram kopas X elementam piekārto **noteiktu** kopas Y elementu ..."*

   nomainīt ar

   *"... sauc likumu, kas jebkuram kopas X elementam piekārto **ne vairāk kā vienu** kopas Y elementu ..."*.

   Šajā gadījumā visu to un tikai to izejas kopas X elementu, kuriem ir piekārtots kāds (un līdz ar to pilnīgi noteikts) ieejas kopas Y elements, kopu apzīmē ar D_f un sauc par **attēlojuma f definīcijas kopu**. Tātad definīcijas kopa D_f ir izejas kopas X apakškopa, pie tam vispārīgā gadījumā tās ir dažādas kopas. Visu to un tikai to ieejas kopas Y elementu, kuri ir piekārtoti vismaz vienam definīcijas kopas D_f elementam, kopu apzīmē ar E_f un sauc par **attēlojuma f vērtību kopu**. Vispārīgā gadījumā attēlojuma f ieejas kopas Y un šī attēlojuma vērtību kopa E_f (kura ir ieejas kopas Y apakškopa) ir dažādas kopas. Visbiežāk ar šādiem attēlojumiem ir jāsastopas tad, kad kāda funkcija tiek uzdota ar formulu. Piemēram, pieņemsim, ka funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ir uzdota ar formulu

$$f(x) = \frac{x+3}{(x^2+1)(x-1)}.$$

Šajā gadījumā ar funkcijas f definīcijas kopu D_f (kuru sauc arī par **funkcijas f dabisko definīcijas kopu**) saprot visu to un tikai to skaitļu $x \in \mathbb{R}$ kopu, ka, ievietojot x dotajā formulā, var izpildīt attiecīgās operācijas un iegūt noteiktu skaitli $f(x) \in \mathbb{R}$. Dotajā piemērā $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Taču, ja ar doto formulu tiek uzdota funkcija $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tad $D_f = \mathbb{C} \setminus \{-i; i; 1\}$. Tātad, *ja funkcija tiek uzdota ar formulu, tad obligāti ir jānorāda funkcijas izejas un ieejas kopu.*

2. Attēlojuma jēdzienu var vispārināt, ja attēlojuma pamatdefinīcijā frāzi

"... sauc likumu, kas jebkuram kopas X elementam

piekārto ***noteiktu*** *kopas Y elementu ...”*

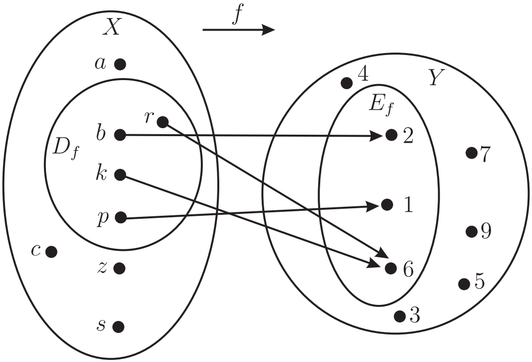
nomainīt ar

“... sauc likumu, kas jebkuram kopas X elementam piekārto ***zināmus*** *kopas Y elementus ...”.*

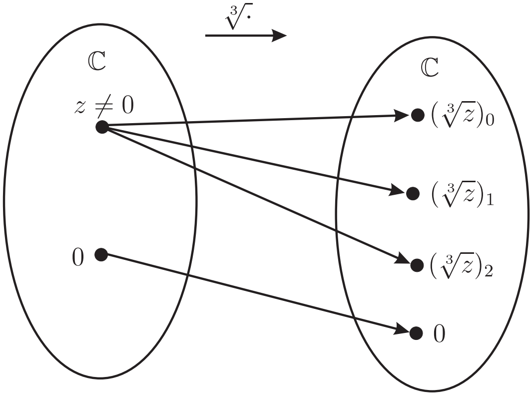
Tādējādi elementam $x \in X$ var būt piekārtoti viens, divi, trīs un vairāk elementi, bet var arī nebūt piekārtots neviens elements. Šādu attēlojumu sauc par **daudzvērtīgu attēlojumu**, ja vismaz vienam elementam $x \in X$ ir piekārtoti divi un vairāk elementi. Pretējā gadījumā šādu attēlojumu sauc par **vienvērtīgu attēlojumu**. Tātad attēlojumi 1. punktā apskatītās definīcijas nozīmē ir vienvērtīgi attēlojumi. *Atzīmēsim, ka attēlojumus šajā punktā apskatītās definīcijas nozīmē var identificēt ar attēlojumiem $f : X \to \mathcal{P}(Y)$ pamatdefinīcijas nozīmē!* Daudzvērtīgi attēlojumi tiek apskatīti, piemēram, kompleksā mainīgā funkciju teorijā: likums, kas katram kompleksam skaitlim z piekārto visas tā n-tās pakāpes saknes

$$\left(\sqrt[n]{z}\right)_0, \left(\sqrt[n]{z}\right)_1, \ldots, \left(\sqrt[n]{z}\right)_{n-1} \quad (n \geq 2),$$

ir daudzvērtīgs attēlojums. *Turpmāk, ja nav teikts pretējais, apskatīsim tikai attēlojumus pamatdefinīcijas nozīmē.*



15. zīm. Likums $f : X \to y$ ir attēlojums attēlojuma pamatdefinīcijas 1. vispārinājuma nozīmē



16. zīm. Likums $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, kas katram kompleksam skaitlim piekārto visas tā trešās pakāpes saknes, ir attēlojums attēlojuma pamatdefinīcijas 2. vispārinājuma nozīmē. Likums $\sqrt[3]{\cdot}$ ir daudzvērtīgs attēlojums

4. Operācijas ar kopām

Ar kopām var izpildīt dažādas operācijas, kuru rezultātā iegūst citas kopas.

4.1. Divu kopu apvienojums, šķēlums, starpība un simetriskā starpība

Par **kopu** A **un** B **apvienojumu** sauc kopu, kas sastāv no visiem tiem un tikai tiem elementiem, kuri pieder vismaz vienai no šīm kopām. Kopu A un B apvienojumu apzīmē ar $A \cup B$. Tātad

$$A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \ x \in A \text{ vai } x \in B\}.$$

Par **kopu** A **un** B **šķēlumu** sauc kopu, kas sastāv no visiem tiem un tikai tiem elementiem, kuri vienlaicīgi pieder abām šīm kopām. Kopu A un B šķēlumu apzīmē ar $A \cap B$. Tātad

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{x : \ x \in A \text{ un } x \in B\}.$$

Saka, ka **kopas A un B nešķeļas** (jeb **kopas A un B ir šķirtas**), ja tām nav kopīgu elementu.

Par **kopu A un B starpību** sauc kopu, kas sastāv no visiem tiem un tikai tiem kopas A elementiem, kuri nepieder kopai B. Kopu A un B starpību apzīmē ar $A \setminus B$. Tātad

$$A \setminus B \overset{\text{def}}{=} \{x : \ x \in A \text{ un } x \notin B\}.$$

Par **kopu A un B simetrisko starpību** sauc kopu, kas sastāv no visiem tiem un tikai tiem elementiem, kuri pieder vai nu kopai A, vai arī kopai B. Kopu A un B simetrisko starpību apzīmē ar $A \triangle B$. Tātad

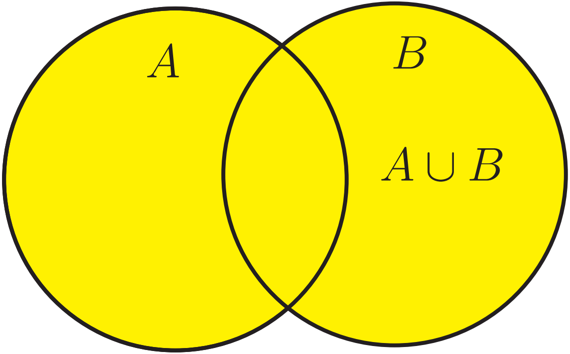
$$A \triangle B \overset{\text{def}}{=} \Big\{x : \ (x \in A \text{ un } x \notin B) \text{ vai } (x \notin A \text{ un } x \in B)\Big\}.$$

Operācijas $\cup$, $\cap$, $\setminus$ un $\triangle$ sauc attiecīgi par **kopu apvienošanu**, **šķelšanu**, **atņemšanu** un **simetrisko reizināšanu**.

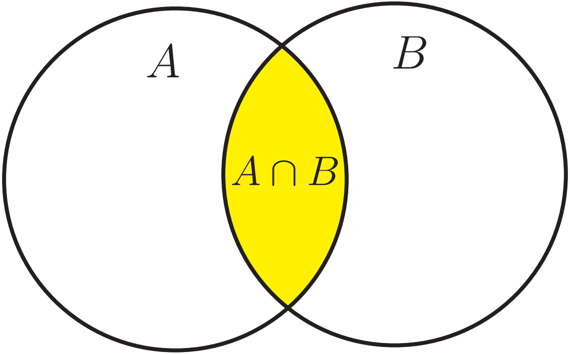
Operāciju $\cup$, $\cap$, $\setminus$ un $\triangle$ definīcijas ir ērti pierakstīt **incidences tabulu** veidā, norādot patvaļīga elementa x piederību (vai nepiederību) kopām $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ un $A \triangle B$ atkarībā no elementa

x piederības (vai nepiederību) kopām A un B. Elementa piederību (nepiederību) attiecīgajai kopai norāda ar $+$ $(-)$.

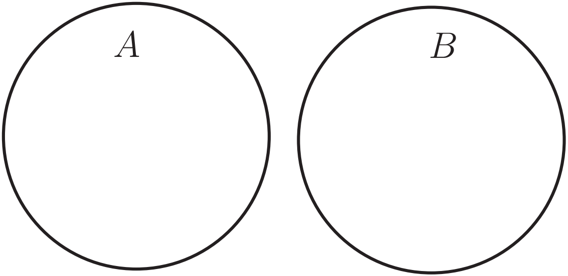
A	B	$A \cup B$	$A \cap B$	$A \setminus B$	$A \triangle B$
$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$



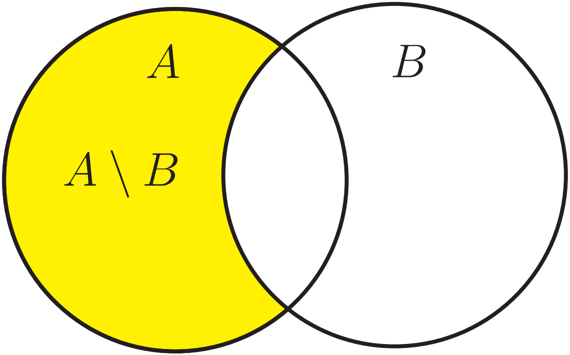
17. zīm. Kopu A un B apvienojums $A \cup B$



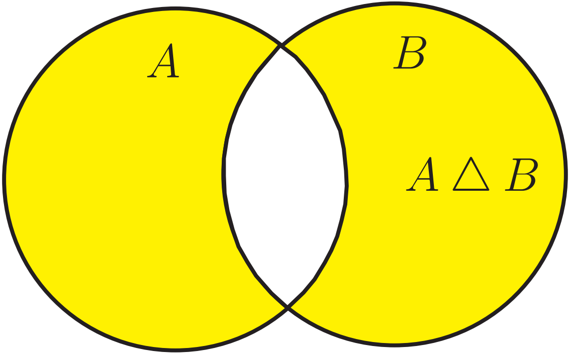
18. zīm. Kopu A un B šķēlums $A \cap B$



19. zīm. Kopas A un B nešķeļas

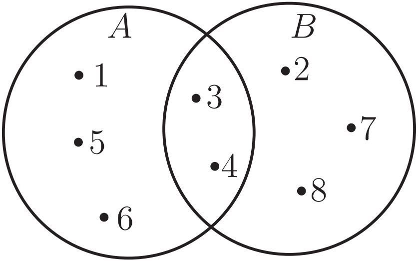


20. zīm. Kopu A un B starpība $A \setminus B$



21. zīm. Kopu A un B simetriskā starpība $A \triangle B$

4.1. piemērs.



22. zīm.

Ja

$$A = \{1; 3; 4; 5; 6\} \text{ un } B = \{2; 3; 4; 7; 8\},$$

tad

$$A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}, \qquad A \cap B = \{3; 4\},$$

$$A \setminus B = \{1; 5; 6\}, \qquad B \setminus A = \{2; 7; 8\},$$

$$A \triangle B = \{1; 5; 6; 2; 7; 8\}.$$

4.2. Sakārtota pāra jēdziens

Apskatīsim kopas A un B (iespējams gadījums, kad $A = B$).

Sakārtota pāra Kuratovska definīcija. Par **sakārtotu pāri** $(a;b)$, kur $a \in A$ un $b \in B$, sauc kopu $\big\{\{a\};\{a;b\}\big\}$, t.i.,

$$\boxed{(a;b) \stackrel{\text{def}}{=} \big\{\{a\};\{a;b\}\big\},} \tag{4.1}$$

pie tam a **sauc par sakārtota pāra** $(a;b)$ **pirmo komponenti, bet** b **- otro komponenti**.

4.1. teorēma. *Apskatīsim kopas A un B. Pieņemsim, ka $a_1, a_2 \in A$ un $b_1, b_2 \in B$. Sakārtoti pāri $(a_1;b_1)$ un $(a_2;b_2)$ ir vienādi tad un tikai tad, kad to attiecīgās komponentes ir vienādas, t.i., $a_1 = a_2$ un $b_1 = b_2$.*

► Jāpierāda, ka

$$(a_1;b_1) = (a_2;b_2) \longleftrightarrow a_1 = a_2 \;\text{ un }\; b_1 = b_2.$$

Nepieciešamība. Pieņemsim, ka $(a_1; b_1) = (a_2; b_2)$. Saskaņā ar definīciju tas nozīmē, ka

$$\big\{\{a_1\}; \{a_1; b_1\}\big\} = \big\{\{a_2\}; \{a_2; b_2\}\big\}. \tag{4.2}$$

Loģiski spriežot, pavisam ir iespējami šādi trīs gadījumi: 1. $a_1 \neq b_1$, 2. $a_2 \neq b_2$, 3. $a_1 = b_1$ un $a_2 = b_2$.

1. Pieņemsim, ka $a_1 \neq b_1$.
   (a) Tā kā $a_1 \neq b_1$, tad kopa $\{a_1; b_1\}$ sastāv no diviem elementiem. Tā kā šī kopa pieder vienādības (4.2) kreisajai pusei, tad tā pieder vienādības (4.2) labajai pusei. Tāpēc vai nu $\{a_1; b_1\} = \{a_2\}$, vai arī $\{a_1; b_1\} = \{a_2; b_2\}$. Pirmais gadījums nav iespējams, jo kopa $\{a_1; b_1\}$ sastāv no diviem elementiem, bet kopa $\{a_2\}$ - no viena elementa. Tātad ir spēkā otrais gadījums: $\{a_1; b_1\} = \{a_2; b_2\}$.
   (b) Tā kā kopa $\{a_1\}$ pieder vienādības (4.2) kreisajai pusei, tad tā pieder vienādības (4.2) labajai pusei. Tāpēc vai nu $\{a_1\} = \{a_2\}$, vai arī $\{a_1\} = \{a_2; b_2\}$. Otrais gadījums nav iespējams, jo kopa $\{a_1\}$ sastāv no viena elementa, bet kopa

$\{a_2; b_2\}$ - no diviem elementiem. Tātad ir spēkā pirmais gadījums: $\{a_1\} = \{a_2\}$, no kurienes izriet, ka $\underline{a_1 = a_2}$.

Tā kā $\{a_1; b_1\} = \{a_2; b_2\}$ un $a_1 = a_2$, tad $\underline{b_1 = b_2}$.

2. Gadījumu, kad $a_2 \neq b_2$, apskata līdzīgi.
3. Pieņemsim, ka $a_1 = b_1$ un $a_2 = b_2$.
   (a) Tā kā $a_1 = b_1$, tad $\{a_1; b_1\} = \{a_1\}$. Tāpēc vienādības (4.2) kreisā puse ir vienāda ar $\{\{a_1\}\}$.
   (b) Tā kā $a_2 = b_2$, tad $\{a_2; b_2\} = \{a_2\}$. Tāpēc vienādības (4.2) labā puse ir vienāda ar $\{\{a_2\}\}$.

   Tātad $\{\{a_1\}\} = \{\{a_2\}\}$, no kurienes izriet, ka $\underline{a_1 = a_2}$. Tā kā $a_1 = b_1$ un $a_2 = b_2$, tad $\underline{b_1 = b_2}$.

Pietiekamība. Ja $a_1 = a_2$ un $b_1 = b_2$, tad ir spēkā vienādība (4.2), kura saskaņā ar sakārtota pāra definīciju nozīmē, ka $(a_1; b_1) = (a_2; b_2)$.◄

4.1. piezīme. Sakārtota pāra Kuratovska definīcijai var sniegt šādu ekvivalentu definīciju.

Sakārtota pāra Vīnera definīcija. Par **sakārtotu pāri** $(a;b)$, kur $a \in A$ un $b \in B$, sauc kopu $\Big\{\{\emptyset;\{a\}\};\{\{b\}\}\Big\}$, t.i.,

$$\boxed{(a;b) \overset{\text{def}}{=} \Big\{\{\emptyset;\{a\}\};\{\{b\}\}\Big\}.}$$

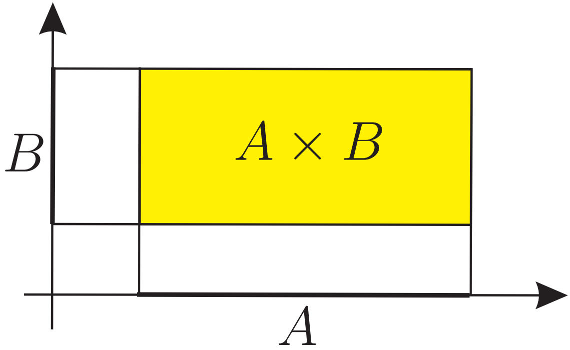
4.2. piezīme. Ņemot vērā 4.2. teorēmu, sakārtotus pārus $(a;b)$, kur $a \in A$ un $b \in B$, bieži vien definē kā tādus objektus, kuriem piemīt īpašība: *jebkuriem* $a, c \in A$, $b, d \in B$ *ir spēkā* $(a;b) = (c;d)$ *tad un tikai tad, kad* $a = c$ *un* $b = d$.

4.3. Divu kopu Dekarta reizinājums

Par **kopu A un B Dekarta reizinājumu** (vai **tiešo reizinājumu**) sauc kopu, kas sastāv no visiem tiem un tikai tiem sakārtotiem pāriem $(a; b)$, kuru pirmā komponente a pieder kopai A, bet otrā komponente pieder kopai B. Kopu A un B Dekarta reizinājumu apzīmē ar $A \times B$. Tātad

$$A \times B \overset{\text{def}}{=} \{(a; b) :\ a \in A \text{ un } b \in B\}.$$

Operāciju, kas divām kopām piekārto to Dekarta reizinājumu, sauc par **Dekarta reizināšanu** (vai **tiešo reizināšanu**).



23. zīm. Kopu A un B Dekarta reizinājums $A \times B$

4.4. Attēlojuma grafiks

Par **attēlojuma** $f : X \to Y$ **grafiku** sauc kopu X un Y Dekarta reizinājuma $X \times Y$ apakškopu

$$\Gamma_f = \big\{(x; y) : \; x \in X, \; y = f(x)\big\}.$$

4.2. piemērs. Attēlojuma $f : X \to Y$ grafiks (skat. 5. zīm.) ir

$$\Gamma_f = \big\{(a; -3); (b; 2); (c; -3); (d; 1)\big\}.$$

Divi attēlojumi $g : X \to Y$ *un* $f : X \to Y$ *ir vienādi tad un tikai tad, kad to grafiki ir vienādi.* Tātad attēlojuma $f : X \to Y$ grafiks pilnīgi raksturo doto attēlojumu, jo tas satur visu informāciju par elementiem $x \in X$ un to attēliem $y = f(x) \in Y$.

Kādi ir nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi, lai apakškopa $F \subset X \times Y$ būtu kāda attēlojuma $f : X \to Y$ grafiks? Atbilde uz šo jautājumu ir šāda: *apakškopa* $F \subset X \times Y$ *ir kāda attēlojuma* $f : X \to Y$ *grafiks tad un tikai tad, kad jebkuram* $x \in X$ *eksistē vienīgs* $y \in Y$*, ka* $(x; y) \in F$. Šajā gadījumā elementa $x \in X$ attēls attēlojumā f ir vienāds ar to vienīgo $y \in Y$, ka $(x; y) \in F$.

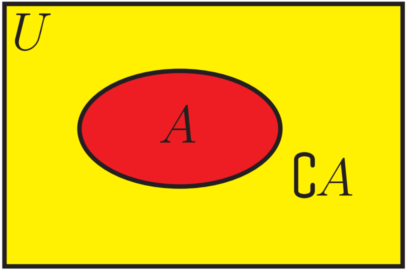
4.3. piezīme. No iepriekš teiktā izriet, ka var sniegt šādu ekvivalentu attēlojuma definīciju: par **kopas** X **attēlojumu** f **kopā** Y sauc kopas $X \times Y$ apakškopu F, ka jebkuram $x \in X$ eksistē vienīgs $y \in Y$, ka $(x; y) \in F$. Par **elementa** $x \in X$ **attēlu attēlojumā** f sauc to vienīgo $y \in Y$, ka $(x; y) \in F$, un to apzīmē ar $f(x)$.

4.5. Kopas papildkopa

Bieži vien nākas sastapties ar situāciju, kad tiek apskatītas tikai dotās kopas U apakškopas, piemēram, plaknes figūras. Šajā gadījumā U sauc par **universālkopu** (vai **universu**). Starpību $U \setminus A$, kur $A \subset U$, sauc par **kopas** A **papildkopu kopā** U un apzīmē ar $\complement_U A$ (vai vienkārši ar $\complement A$, ja nerodas pārtratumi). Tātad

$$\complement_U A \overset{\text{def}}{=} U \setminus A.$$

Operāciju, kas ikkatrai universa U daļai A piekārto tās papildkopu $\complement A$, sauc par **papildināšanu universā** U. Dažkārt kopu $\complement A$ apzīmē arī ar $\overline{A}$.



A	$\complement A$
+	-
-	+

24. zīm. Kopas A papildkopa $\complement A$ līdz kopai U

4.6. Kopu saimes apvienojums un šķēlums. Pārklājums un sadalījums

Kopu, kuras elementi arī ir kopas, parasti sauc par **kopu saimi**, bet kopu saimes $\mathcal{A}$ apakškopas - par **kopu saimes $\mathcal{A}$ apakšsaimēm**.

Par **kopu saimes $\mathcal{A}$ apvienojumu** sauc kopu, kas sastāv no visiem tiem un tikai tiem elementiem, kuri pieder vismaz vienai kopai no kopu saimes $\mathcal{A}$. Kopu saimes $\mathcal{A}$ apvienojumu apzīmē ar $\bigcup \mathcal{A}$. Tātad

$$\bigcup \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{a : \ \exists A \in \mathcal{A} \quad a \in A\}.$$

Par **kopu saimes $\mathcal{A}$ šķēlumu** sauc kopu, kas sastāv no visiem tiem un tikai tiem elementiem, kuri pieder ikkatrai kopai no kopu saimes $\mathcal{A}$. Kopu saimes $\mathcal{A}$ šķēlumu apzīmē ar $\bigcap \mathcal{A}$. Tātad

$$\bigcap \mathcal{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{a : \ \forall A \in \mathcal{A} \quad a \in A\}.$$

Kopu saimi $\mathcal{A}$ sauc par **savstarpēji šķirtu kopu saimi**, ja jebkuras divas dažādas kopas no kopu saimes $\mathcal{A}$ ir šķirtas:

$$\forall A, B \in \mathcal{A} : \ A \neq B \longrightarrow A \cap B = \emptyset.$$

Par **kopas X pārklājumu** sauc tādu šīs kopas apakškopu saimi $\mathcal{A}$ (t.i., $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$), ka $X = \bigcup \mathcal{A}$.

Par **kopas X pārklājuma $\mathcal{A}$ apakšpārklājumu** sauc tādu kopu saimes $\mathcal{A}$ apakšsaimi $\mathcal{B}$, kura pati veido kopas X pārklājumu, t.i., $X = \bigcup \mathcal{B}$.

Par **kopas X sadalījumu** sauc tādu šīs kopas apakškopu saimi $\mathcal{A}$, ka

1. $\forall A \in \mathcal{A}: \; A \neq \emptyset$, t.i., kopu saime $\mathcal{A}$ sastāv no netukšām kopām;
2. $\mathcal{A}$ ir savstarpēji šķirtu kopu saime;
3. $\mathcal{A}$ ir kopas X pārklājums.

Kopas X sadalījuma $\mathcal{A}$ elementus sauc par **sadalījuma klasēm**.

Kopas pārklājuma jēdzienu var vispārināt šādi. Pieņemsim, ka kopa X ir kāda universa U apakškopa.

Par **kopas X pārklājumu kopā U** sauc tādu kopas U apakškopu saimi $\mathcal{A}$ (t.i., $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(U)$), ka $X \subset \bigcup \mathcal{A}$.

Par **kopas X pārklājuma $\mathcal{A}$ kopā U apakšpārklājumu** sauc tādu kopu saimes $\mathcal{A}$ apakšsaimi $\mathcal{B}$, kura pati veido kopas X pārklājumu, t.i., $X \subset \bigcup \mathcal{B}$. Atsevišķā gadījumā, ja $U = X$, nonāksim pie iepriekš apskatītajiem kopas X pārklājuma un kopas X pārklājuma apakšpārklājuma jēdzieniem.

4.7. Indeksētas un neindeksētas kopu saimes

Bieži vien kopu saimi $\mathcal{A}$ (t.i., kopu, kuras elementi arī kopas), sauc par **neindeksētu kopu saimi**, lai atšķirtu no **indeksētas kopu saimes** $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$, kuras elementi ir iezīmēti ar indeksiem α no kopas T. Atšķirība starp neindeksētu un indeksētu kopu saimēm ir tā, ka indeksētā kopu saimē elementus atšķir pēc to indeksiem, nevis kopām, kuras ir iezīmētas ar šiem indeksiem: A_α un A_β $(\alpha, \beta \in T)$ uzskata par dažādiem indeksētas kopu saimes $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ elementiem tad un tikai tad, kad $\alpha \neq \beta$, kaut arī var gadīties, ka ar šiem indeksiem iezīmētās kopas A_α un A_β ir vienādas (t.i., šīs kopas sastāv no vieniem un tiem pašiem elementiem). Savukārt neindeksētas kopu saimes $\mathcal{A}$ elementus A un B uzskata par dažādiem tad un tikai tad, kad kopas A un B ir dažādas.

Atzīmēsim, ka *jebkuru neindeksētu kopu saimi* $\mathcal{A}$ *var indeksēt, ja par indeksu kopu* T *ņemt pašu kopu* $\mathcal{A}$ *un uzskatīt, ka indeksam* $A \in T = \mathcal{A}$ *atbilst kopa* A. Šādu kopu saimes $\mathcal{A}$ indeksācijas paņēmienu sauc par **kopu saimes $\mathcal{A}$ dabisko indeksāciju**. Tādējādi *indeksētas kopu saimes jēdziens ir vispārīgāks par neindeksētas kopu saimes jē-*

dzienu. No jebkura apgalvojuma par indeksētām kopu saimēm var iegūt attiecīgu apgalvojumu par neindeksētām kopu saimēm, ja uzskatīsim, ka pēdējās ir dabiski indeksētas (iesakām lasītājam par to pārliecināties patstāvīgi apskatot attiecīgās definīcijas).

Atzīmēsim arī, ka jebkurai indeksētai kopu saimei $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ atbilst neindeksēta kopu saime $\mathcal{A}$, kura ir sastādīta no visām kopām A_α ($\alpha \in T$), ignorējot to indeksāciju, un tikai tām. Šo kopu saimi $\mathcal{A}$ sauc par **indeksētai kopu saimei $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ atbilstošo neindeksēto kopu saimi**.

Par **kopu saimes $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ apakšsaimi** sauc patvaļīgu kopu saimi $\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$, kur $S \subset T$.

4.4. piezīme. Stingri ņemot, indeksēta kopu saime $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ ir kāda attēlojuma
$f : T \to \mathcal{U}$, kur $\mathcal{U}$ - neindeksēta kopu saime, grafiks

$$\Gamma_f = \big\{(\alpha; A) : \ \alpha \in T, \ \ A = f(\alpha)\big\},$$

ja elementu $(\alpha; A) \in \Gamma_f$ apzīmēt ar A_α un ar pierakstu $x \in A_\alpha = (\alpha; A)$ saprast, ka $x \in A$. Šajā gadījumā:

- indeksētai kopu saimei $\Gamma_f = \{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ atbilstošā neindeksētā kopu saime $\mathcal{A} = f(T) \subset \mathcal{U}$ - attēlojuma f vērtību kopa;
- dabiski indeksēt neindeksētu kopu saimi $\mathcal{A}$ nozīmē pāriet pie indeksētas kopu saimes $\{A_A\}_{A\in\mathcal{A}}$ - identiskā attēlojuma $i_\mathcal{A} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ grafika
$$\Gamma_{i_\mathcal{A}} = \big\{(A; A) : \ A \in \mathcal{A}\big\};$$
- kopu saimes $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ apakšsaime $\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$ ir attēlojuma $f : T \to \mathcal{U}$ sašaurinājuma kopā $S \subset T$, t.i., attēlojuma $f|S : S \to \mathcal{U}$, grafiks
$$\Gamma_{f|S} = \big\{(\alpha; A) : \ \alpha \in S, \ A = f(\alpha)\big\}.$$

4.8. Indeksētas kopu saimes apvienojums un šķēlums. Pārklājums un sadalījums

Formulēsim apvienojuma, šķēluma, savstarpēji šķirtu kopu saimes, pārklājuma, apakšpārklājuma un sadalījuma definīcijas indeksētām kopu saimēm (kā jau iepriekš tika minēts, no šīm definīcijām var iegūt attiecīgās definīcijas par neindeksētām kopu saimēm, ja uzskatīt, ka pēdējās ir dabiski indeksētas).

Par **kopu saimes $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ apvienojumu un šķēlumu** sauc attiecīgi kopas

$$\bigcup_{\alpha\in T} A_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{a :\ \exists\alpha\in T\ \ a\in A_\alpha\} \ \text{ un } \ \bigcap_{\alpha\in T} A_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{a :\ \forall\alpha\in T\ \ a\in A_\alpha\}.$$

Kopu saimes $\{A_i\}_{i\in\overline{n}}$, kur $\overline{n}=\{1;2;\ldots;n\}$, un $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ apzīmē attiecīgi ar $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ un $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ un sauc par **kopu virknēm**, bet kopu virknes elementus **- kopu virknes locekļiem**.

Kopu virknes $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ apvienojumu apzīmē ar $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ vai $A_1\cup A_2\cup$

$\dots \cup A_n$, t.i.,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{a:\ \exists i \in \overline{n} \quad a \in A_i\},$$

bet šķēlumu - ar $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ vai $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$, t.i.,

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \{a:\ \forall i \in \overline{n} \quad a \in A_i\}.$$

Kopu virknes $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ apvienojumu apzīmē ar $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ vai $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \cdots$, t.i.,

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots = \{a:\ \exists i \in \mathbb{N} \quad a \in A_i\},$$

bet šķēlumu - ar $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ vai $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$, t.i.,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \{a :\ \forall i \in \mathbb{N} \quad a \in A_i\}.$$

Kopu saimi $\{A_\alpha\}_{\alpha \in T}$ sauc par **savstarpēji šķirtu kopu saimi**, ja

$$\forall \alpha, \beta \in T :\ \alpha \neq \beta \longrightarrow A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset.$$

Saka, ka **kopas** X **apakškopu saime** $\{A_\alpha\}_{\alpha \in T}$ **ir kopas** X **pārklājums**, ja $X = \bigcup\limits_{\alpha \in T} A_\alpha$.

Par **kopas** X **pārklājuma** $\{A_\alpha\}_{\alpha \in T}$ **apakšpārklājumu** sauc tādu šīs kopu saimes apakšsaimi $\{A_\alpha\}_{\alpha \in S}$ $(S \subset T)$, kura pati veido kopas X pārklājumu, t.i., $X = \bigcup\limits_{\alpha \in S} A_\alpha$.

Saka, ka **kopas** X **apakškopu saime** $\{A_\alpha\}_{\alpha \in T}$ **ir kopas** X **sadalījums**, ja

1. $\forall \alpha \in T :\ A_\alpha \neq \emptyset$, t.i., šī kopu saime sastāv no netukšām kopām;

2. $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ ir savstarpēji šķirtu kopu saime;
3. $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ ir kopas X pārklājums.

Kopas X sadalījuma $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ elementus sauc par **sadalījuma klasēm**.

Kopas pārklājuma jēdzienu var vispārināt šādi. Pieņemsim, ka kopa X ir kāda universa U apakškopa.

Saka, ka **kopas** U **apakškopu saime** $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ **ir kopas** X **pārklājums kopā** U, ja $X \subset \bigcup\limits_{\alpha\in T} A_\alpha$.

Par **kopas** X **pārklājuma** $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ **kopā** U **apakšpārklājumu** sauc tādu kopu saimes $\mathcal{A}$ apakšsaimi $\{A_\alpha\}_{\alpha\in S}$ ($S \subset T$), kura pati veido kopas X pārklājumu, t.i., $X \subset \bigcup\limits_{\alpha\in S} A_\alpha$.

Atsevišķā gadījumā, ja $U = X$, nonāksim pie iepriekš apskatītajiem kopas X pārklājuma un kopas X pārklājuma apakšpārklājuma jēdzieniem.

4.9. Indeksētas kopu saimes Dekarta reizinājums

Par **kopu saimes** $\{A_i\}_{i=1}^n$ **Dekarta reizinājumu** (vai **tiešo reizinājumu**) sauc kopu, kas sastāv no visiem n-kāršiem kortežiem $(a_1; a_2; \dots; a_n)$, kur $a_i \in A_i$ $(i \in \overline{n})$, un tikai tiem (divus n-kāršus kortežus $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ un $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ uzskata par **vienādiem** tad un tikai tad, kad $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \dots\ ,\ a_n = b_n$). Kopu saimes $\{A_i\}_{i\in\overline{n}}$ Dekarta reizinājumu apzīmē ar $\prod\limits_{i\in\overline{n}} A_i$ vai $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ vai $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$, t.i.,

$$\prod_{i\in\overline{n}} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n =$$

$$= \Big\{(a_1; a_2; \dots; a_n) :\ \forall i \in \overline{n} \quad a_i \in A_i\Big\}.$$

Ja $A_i = A$ $(i \in \overline{n})$, tad Dekarta reizinājumu $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ apzīmē ar A^n un sauc par **kopas A n-to pakāpi**, bet kopas A^n elementu - n-kāršu kortežu $(a_1; a_2; \dots; a_n)$, kur $a_i \in A_i$ $(i \in \overline{n})$, - par **n-kāršu virkni**

kopā A. Tātad

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n} = \big\{(a_1; a_2; \ldots; a_n) :\ \forall i \in \overline{n} \quad a_i \in A\big\}.$$

Par **galīgu virkni kopā** A sauc jebkuru n-kāršu virkni kopā A. Tātad $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ ir visu galīgo virkņu kopā A kopa!

Par **kopu saimes** $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ **Dekarta reizinājumu** (vai **tiešo reizinājumu**) sauc kopu, kas sastāv no visiem bezgalīgiem kortežiem $(a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots)$, kur $a_i \in A_i$ $(i \in \mathbb{N})$, un tikai tiem (divus bezgalīgus kortežus $(a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots)$ un $(b_1; b_2; \ldots; b_n; \ldots)$ uzskata par **vienādiem** tad un tikai tad, kad $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ \ldots\ ,\ a_n = b_n, \ldots$). Kopu saimes $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ Dekarta reizinājumu apzīmē ar $\prod\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i$

vai $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ vai $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times \cdots$, t.i.,

$$\prod_{i\in\mathbb{N}} A_i = \prod_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times \cdots =$$
$$= \big\{(a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots) : \ \forall i \in \mathbb{N} \quad a_i \in A_i\big\}.$$

Ja $A_i = A$ $(i \in \mathbb{N})$, tad Dekarta reizinājumu $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ apzīmē ar A^{∞}, bet kopas A^{∞} elementu - bezgalīgu kortežu $(a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots)$, kur $a_i \in A_i$ $(i \in \mathbb{N})$, - par **bezgalīgu virkni kopā** A. Tātad

$$A^{\infty} = A \times A \times \dots \times A \times \cdots = \big\{(a_1; a_2; \ldots; a_n; \ldots) : \ \forall i \in \mathbb{N} \quad a_i \in A\big\}.$$

Kopu saimes $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$, kur T - patvaļīga indeksu kopa, **Dekarta** (jeb **tiešo**) **reizinājumu** definē kā kopu, kas sastāv no visiem iespējamiem attēlojumiem $f : T \to \bigcup\limits_{\alpha\in T} A_\alpha$, ka

$$\forall \alpha \in T : \ f(\alpha) \in A_\alpha,$$

un tikai tiem. Kopu saimes $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ Dekarta reizinājumu apzīmē ar $\prod_{\alpha\in T} A_\alpha$. Tātad

$$\prod_{\alpha\in T} A_\alpha \overset{\text{def}}{=} \left\{ f : T \to \bigcup_{\alpha\in T} A_\alpha \middle| \forall\alpha \in T \quad f(\alpha) \in A_\alpha \right\}.$$

Jautājums: vai eksistē vismaz viens šāds attēlojums? Atbilde uz šo jautājumu ir pozitīva, jo kopu teorijā pieņem, ka izpildās

Izvēles aksioma: *jebkurai kopu saimei* $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ *eksistē attēlojums* $f : T \to \bigcup_{\alpha\in T} A_\alpha$, *ka jebkuram* $\alpha \in T$ *izpildās* $f(\alpha) \in A_\alpha$.

Ja $A_\alpha = A\ (\alpha \in T)$, tad kopu saimes $\{A_\alpha\}_{\alpha\in T}$ Dekarta reizinājuma $\prod_{\alpha\in T} A_\alpha$ elementi ir visi iespējamie attēlojumi $f : T \to \bigcup_{\alpha\in T} A_\alpha = A$ un tikai tie. Tāpēc $\prod_{\alpha\in T} A_\alpha = A^T$, ja $A_\alpha = A$ visiem $\alpha \in T$.

No pirmā acu uzmetiena var likties, ka Dekarta reizinājuma $\prod_{\alpha\in T} A_\alpha$ definīcija ir pretrunā ar Dekarta reizinājumu $\prod_{i=1}^{n} A_i$ un $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$ definīcijām, jo kopas $\prod\limits_{\alpha\in T} A_\alpha$ elementi ir attēlojumi, bet kopu $\prod\limits_{i=1}^{n} A_i$ un $\prod\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ elementi ir attiecīgi n-kārši un bezgalīgi korteži. Šo šķietamo pretrunu novērš šādi:

1. indeksu kopas $T = \overline{n}$ gadījumā attēlojumu $f : \overline{n} \to \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, kur $\forall i \in \overline{n} :\ f(i) \in A_i$, identificē ar n-kāršu kortežu
$$\big(f(1); f(2); \ldots; f(n)\big);$$
2. indeksu kopas $T = \mathbb{N}$ gadījumā attēlojumu $f : \mathbb{N} \to \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$, kur $\forall i \in \mathbb{N} :\ f(i) \in A_i$, identificē ar bezgalīgu kortežu
$$\big(f(1); f(2); \ldots; f(n); \ldots\big)\ .$$

4.10. Kopu virknes augšējā un apakšējā robeža

Par **kopu virknes $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ augšējo un apakšējo robežām** sauc attiecīgi kopas

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \quad \text{un} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_i.$$

Ja kopu virknes $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ augšējā un apakšējā robeža ir vienādas, tad kopu

$$\lim_{n\to\infty} A_n \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$$

sauc par **kopu virknes $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ robežu**, bet $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ **- konverğentu kopu virkni**.

Ir spēkā šādi apgalvojumi.

1° *Kopu virknes $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ augšējā robeža $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$ sastāv no visiem tiem un tikai tiem elementiem, kuri pieder bezgalīgi daudziem dotās virknes locekļiem.*

2° *Kopu virknes* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *apakšējā robeža* $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ *sastāv no visiem tiem un tikai tiem elementiem, kuri pieder visiem dotās virknes locekļiem, izņemot varbūt galīgu to skaitu.*

3° *Kopu virknes* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *augšējā un apakšējā robežas* $\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n$ *nav atkarīgas no tā, vai kopu virknei pievieno vai atmet galīgu skaitu locekļu.*

4° *Jebkurai kopu virknei* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ir spēkā*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset \underline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \overline{\lim}_{n\to\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

5° *Ja* $A_i \subset X$ $(i \in \mathbb{N})$, *tad*

$$\complement\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} A_n\right) = \underline{\lim}_{n\to\infty} \complement A_n, \quad \complement\left(\underline{\lim}_{n\to\infty} A_n\right) = \overline{\lim}_{n\to\infty} \complement A_n.$$

6° *Pieņemsim, ka* $A_i \subset X$ $(i \in \mathbb{N})$. *Kopu virkne* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverģē tad un tikai tad, kad konverģē kopu virkne* $\{\complement A_n\}_{n=1}^{\infty}$. *Ja* $A = \lim_{n\to\infty} A_n$, *tad* $\complement A = \lim_{n\to\infty} \complement A_n$.

7° *Jebkura augoša (dilstoša) kopu virkne* $A_i \subset X$ $(i \in \mathbb{N})$ *ir konverğenta, pie tam*

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \left(\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

5. Operāciju ar kopām īpašības

Uzskaitīsim operāciju ar kopām svarīgākās īpašības.

1° Idempotences likumi:

$$A \cup A = A, \quad A \cap A = A.$$

2° Komutatīvie likumi:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A, \quad A \triangle B = B \triangle A.$$

3° Asociatīvie likumi:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C),$$
$$(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C).$$

Atzīmēsim, ka Dekarta reizināšana nav komutatīva un asociatīva.

4° Distributīvie likumi:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$
\begin{aligned}
A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\
A \cup \left(\bigcap_{\alpha \in T} B_\alpha \right) &= \bigcap_{\alpha \in T} (A \cup B_\alpha), \\
A \cap \left(\bigcup_{\alpha \in T} B_\alpha \right) &= \bigcup_{\alpha \in T} (A \cap B_\alpha), \\
A \cap (B \setminus C) &= (A \cap B) \setminus (A \cap C), \\
(A \cap B) \setminus C &= (A \setminus C) \cap (B \setminus C), \\
(A \cup B) \setminus C &= (A \setminus C) \cup (B \setminus C), \\
A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C), \\
(A \cup B) \times C &= (A \times C) \cup (B \times C), \\
A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C), \\
(A \cap B) \times C &= (A \times C) \cap (B \times C), \\
A \times (B \setminus C) &= (A \times B) \setminus (A \times C), \\
(A \setminus B) \times C &= (A \times C) \setminus (B \times C).
\end{aligned}
$$

5° **Dualitātes likumi:**

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C),$$
$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C),$$
$$A \setminus \left(\bigcup_{\alpha \in T} B_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in T} (A \setminus B_\alpha),$$
$$A \setminus \left(\bigcap_{\alpha \in T} B_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in T} (A \setminus B_\alpha).$$

6° $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C, \;\; A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A).$

7° $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C).$

8° $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cup C) = (A \cup C) \setminus (B \cup C).$

9° $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$; ja $B \subset A$, tad $A = (A \setminus B) \cup B.$

10° $A \cup B = (A \setminus B) \cup B = (B \setminus A) \cup A.$

11° $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) = B \setminus (B \setminus A).$

12° $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

13° $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

14° $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \setminus \emptyset = A$, $\emptyset \setminus A = \emptyset$, $A \setminus A = \emptyset$, $A \triangle \emptyset = A$, $A \triangle A = \emptyset$, $A \times \emptyset = \emptyset$, $\emptyset \times A = \emptyset$.

15° $(A \setminus B = \emptyset \longleftrightarrow A \subset B)$, $A \setminus B = A \longleftrightarrow A \cap B = \emptyset$.

Formulējot nākamos likumus, uzskatīsim ka visas kopas ir universa U daļas.

16° $A \cup \complement A = U$, $A \cap \complement A = \emptyset$, $\complement\complement A = A$, $C\emptyset = U$, $\complement U = \emptyset$.

17° $A \setminus B = \complement B \setminus \complement A$.

18° $(A \subset B \longleftrightarrow \complement B \subset \complement A)$, $(A = B \longleftrightarrow \complement A = \complement B)$.

19° $(A \cap B = \emptyset \longleftrightarrow A \subset \complement B)$, $(A \cap B = \emptyset \longleftrightarrow B \subset \complement A)$.

20° **Dualitātes likumi:**

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B, \quad \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B,$$

$$\complement\left(\bigcup_{\alpha \in T}\right) = \bigcap_{\alpha \in T} \complement A_\alpha, \quad \complement\left(\bigcap_{\alpha \in T}\right) = \bigcup_{\alpha \in T} \complement A_\alpha.$$

21° $A \setminus B = A \cap \complement B$.

22° $A \triangle B = (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B)$.

6. Divu kopu vienādības pierādīšanas paņēmieni

Šajā paragrāfā apskatīsim četrus divu kopu vienādības pierādīšanas paņēmienus.

6.1. piemērs. Pierādīsim vienādību

$$A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C). \tag{6.3}$$

1. paņēmiens (izmantojot operāciju ar kopām definīcijas).

Izmantosim divu kopu vienādības nepieciešamo un pietiekamo pazīmi: $A = B$ tad un tikai tad, kad $A \subset B$ un $B \subset A$.

a) Pieņemsim, ka $x \in F_1 = A \setminus (B \setminus C)$, un pierādīsim, ka $x \in F_2 = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$. Tā kā $x \in F_1$, tad $x \in A$ un $x \notin B \setminus C$. Nosacījums $x \notin B \setminus C$ nozīmē, ka $x \notin B$ vai $x \in C$.

a$_1$) Pieņemsim, ka $x \notin B$. Tā kā $x \in A$, tad $x \in A \setminus B$. Tātad $x \in F_2 = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

a$_2$) Pieņemsim, ka $x \in C$. Tā kā $x \in A$, tad $x \in A \cap C$. Tātad $x \in F_2 = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.

Tādējādi abos iespējamos gadījumos ieguvām, ka $x \in F_2$.

b) Pieņemsim, ka $x \in F_2$, un pierādīsim, ka $x \in F_1$. Tā kā $x \in F_2$, tad $x \in A \setminus B$ vai $x \in A \cap C$.

   b$_1$) Pieņemsim, ka $x \in A \setminus B$, t.i., $x \in A$ un $x \notin B$. Tā kā $x \notin B$, tad $x \notin B \setminus C$. Ņemot vērā, ka $x \in A$, iegūsim, ka $x \in A \setminus (B \setminus C) = F_1$.

   b$_2$) Pieņemsim, ka $x \in A \cap C$, t.i., $x \in A$ un $x \in C$. Tā kā $x \in C$, tad $x \notin B \setminus C$. Ņemot vērā, ka $x \in A$, iegūsim, ka $x \in A \setminus (B \setminus C) = F_1$.

Tādējādi abos iespējamos gadījumos ieguvām, ka $x \in F_1$.

Saskaņā ar divu kopu vienādības nepieciešamo un pietiekamo pazīmi kopas F_1 un F_2 ir vienādas.

2. paņēmiens (analītiskais paņēmiens).

Pieņemsim, ka kopas A, B un C ir kāda universa U daļas (šāds universs vienmēr eksistē, piemēram, $U = A \cup B \cup C$). Jebkuru netukšu kopu $M \subset U$, kura ir iegūta kopu A, B un C apvienošanas, šķelšanas, atņemšanas, simetriskās atņemšanas un papildināšanas rezultātā, lietojot formulas

$$\overline{\overline{A}} = A,\ \ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},\ \ A \setminus B = A \cap \overline{B},$$
$$A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B),\ \ A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}),$$

kā arī idempotences, komutatīvos, asociatīvos un distributīvos likumus, vienīgā veidā var izteikt kā **kopu** A**,** B **un** C **elementāršķēlumu**

$$\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C},\ \ \overline{A} \cap \overline{B} \cap C,\ \ \overline{A} \cap B \cap \overline{C},\ \ \overline{A} \cap B \cap C,$$
$$A \cap \overline{B} \cap C,\ \ A \cap B \cap \overline{C},\ \ A \cap \overline{B} \cap \overline{C},\ \ A \cap B \cap C$$

apvienojumu, ja uzskatīt, ka elementāršķēlumu kārtība nav svarīga, un pieprasīt, ka šajā apvienojumā neietilpst divi vienādi elementāršķēlumi.

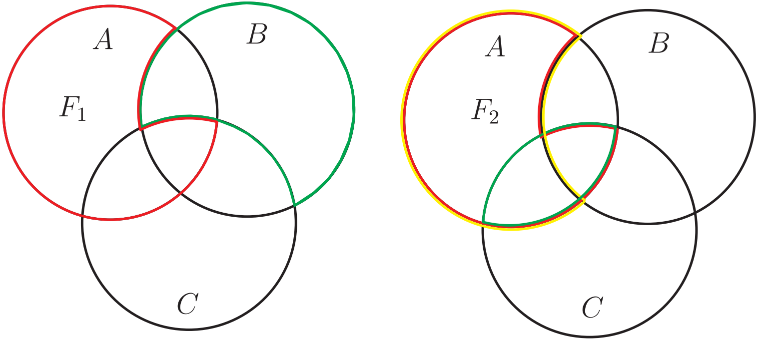
$$F_1 = A \setminus (B \setminus C) = A \setminus (B \cap \overline{C}) = A \cap \overline{B \cap \overline{C}} =$$
$$= A \cap (\overline{B} \cup C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) =$$
$$= (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) =$$
$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}).$$

$$F_2 = (A \setminus B) \cup (A \cap C) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C) =$$
$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}).$$

Tā kā kopas F_1 un F_2 ir vienu un to pašu elementāšķēlumu apvienojums, tad kopas F_1 un F_2 ir vienādas. Atzīmēsim, ka šajā piemērā secinājumu par kopu F_1 un F_2 vienādību varēja izdarīt jau pēc tā, ka abas šīs kopas ir vienādas ar kopu $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap C)$.

3. paņēmiems (grafiskais paņēmiems).

Uzzīmēsim divos eksemplāros kopu A, B un C Eilera-Venna diagrammas "vispārīgā stāvoklī", t.i., tā, lai visi to savstarpējie šķēlumi būtu netukši. Katra no diagrammām sastāvēs no 8 elementārapgabaliem, kuri atbilst iepriekš minētajiem elementāršķēlumiem. Zīmējumos universu U un ārējo elementārapgabalu, t.i., elementārapgabalu, kas atbilst elementāršķēlumam $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, parasti nenorāda. Eilera-Venna diagrammās jebkura netukša kopa $M \subset U$, kura ir iegūta operāciju ar kopām A, B un C (izņemot šo kopu Dekarta reizināšanu) rezultātā attēlojas kā kāds elementārapgabalu apvienojums.



25. zīm. Kreisajā zīmējumā: zaļajā krāsā ir apgabala $B \setminus C$ kontūrs, bet sarkanajā krāsā ir apgabala $F_1 = A \setminus (B \setminus C)$ kontūrs. Labajā zīmējumā: zaļajā krāsā ir apgabala $A \cap C$ kontūrs, dzeltenajā krāsā ir apgabala $A \setminus B$ kontūrs, bet sarkanajā krāsā ir ir apgabala $F_2 = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$ kontūrs.

Tā kā kopas F_1 un F_2 ir vienu un to elementārapgabalu apvienojums (skat. 25. zīm.), tad kopas F_1 un F_2 ir vienādas.

4. paņēmiems (tabulārais paņēmiens).

Sastādīsim kopu F_1 un F_2 incidences tabulu, norādot patvaļīga elementa x piederību (vai nepiederību) kopām F_1 un F_2 atkarībā no elementa x piederības (vai nepiederības) kopām A, B un C.

A	B	C	$B \setminus C$	$F_1 = A \setminus (B \setminus C)$	$A \setminus B$	$A \cap C$	$F_2 = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
−	−	−	−	−	−	−	−
−	−	+	−	−	−	−	−
−	+	−	+	−	−	−	−
−	+	+	−	−	−	−	−
+	−	−	−	+	+	−	+
+	−	+	−	+	+	+	+
+	+	−	+	−	−	−	−
+	+	+	−	+	−	+	+

No incidences tabulas ir redzams, ka $x \in F_1$ tad un tikai tad, kad $x \in F_2$. Tātad kopas F_1 un F_2 ir vienādas.

7. Attēlojumu īpašības

Apskatīsim kopas X attēlojumu f kopā Y.

1° $f(\emptyset) = \emptyset,\ f^{-1}(\emptyset) = \emptyset,\ f^{-1}(Y) = X.$

2° *Ja* $A_1 \subset A_2 \subset X$, *tad* $f(A_1) \subset f(A_2)$.

3° *Ja* $B_1 \subset B_2 \subset Y$, *tad* $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$.

4° *Ja* $A_1 \subset A_2 \subset X$, *tad*

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2), \quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

5° *Ja* $A_\alpha \subset X$ $(\alpha \in T)$, *tad*

$$f\left(\bigcup_{\alpha\in T} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in T} f(A_\alpha), \quad f\left(\bigcap_{\alpha\in T} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in T} f(A_\alpha).$$

6° *Ja* $B_1 \subset B_2 \subset Y$, *tad*

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2),$$
$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

7° *Ja* $B_\tau \subset Y$ $(\tau \in S)$, *tad*

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\tau\in S} B_\tau\right) = \bigcup_{\tau\in S} f^{-1}(B_\tau),$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{\tau\in S} B_\tau\right) = \bigcap_{\tau\in S} f^{-1}(B_\tau).$$

8° *Ja* $A_1 \subset A_2 \subset X$, *tad* $f(A_1 \setminus A_2) \supset f(A_1) \setminus f(A_2)$.

9° *Ja* $B_1 \subset B_2 \subset Y$, *tad* $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.

10° *Ja* $B \subset Y$, *tad* $f^{-1}\big(\complement_Y B\big) = \complement_X f^{-1}(B)$, *kur* $\complement_Y B = Y \setminus B$, $\complement_X f^{-1}(B) = X \setminus f^{-1}(B)$.

11° *Ja* $A \subset X$, *tad* $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.

12° *Ja* $B \subset Y$, *tad* $f\big(f^{-1}(B)\big) = B \cap f(X) \subset B$.

13° *Ja $A \subset X$ un $B \subset Y$, tad*

$$\big(f(A) = \emptyset \longleftrightarrow A = \emptyset\big),$$
$$\big(f^{-1}(B) = \emptyset \longleftrightarrow B \cap f(X) = \emptyset\big),$$
$$\big((f|_A)^{-1}(B) = A \cap f^{-1}(B)\big),$$
$$\big(f(A) \cap B = \emptyset \longleftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \emptyset\big).$$

14° *Attēlojums f ir sirjekcija tad un tikai tad, kad*

$$\forall B \subset Y : \ f\left(f^{-1}(B)\right) = B.$$

15° *Šādi apgalvojumi ir ekvivalenti:*

1. *attēlojums f ir injekcija;*
2. $\forall A \subset X : \ f^{-1}\left(f(A)\right) = A$*;*
3. $\forall A_1, A_2 \subset X : \ f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$*;*
4. $\forall A_1, A_2 \subset X : \ f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$*.*

16° *Attēlojumu kompozīcija ir asociatīva: jebkuriem attēlojumiem $f : Z \to Y$, $g : Y \to Z$ un $h : Z \to W$ ir spēkā*

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

17° *Jebkuriem attēlojumiem $f : X \to Y$ un $g : Y \to Z$ un patvaļīgai kopai $C \subset Z$ izpildās*

$$(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right).$$

18° *Jebkuram attēlojumam $f : X \to Y$ ir spēkā*

$$f \circ i_X = i_X \circ f = f.$$

19° *Ja attēlojumiem $f : X \to Y$ un $g : Y \to X$ izpildās $g \circ f = i_X$, tad f ir injekcija, bet g ir sirjekcija.*

20° *Ja attēlojumiem $f : X \to Y$ un $g : Y \to X$ izpildās $f \circ g = i_Y$ un $g \circ f = i_X$, tad f un g ir bijekcijas, pie tam $f^{-1} = g$ un $g^{-1} = f$.*

21° *Ja $f : X \to Y$ ir bijekcija, tad*

$$f \circ f^{-1} = i_Y, \;\; f^{-1} \circ f = i_X.$$

22° *Ja $f : X \to Y$ un $g : Y \to Z$ ir bijekcijas, tad arī $g \circ f : X \to Z$ ir bijekcija, pie tam*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

8. Kopu gredzeni

Pieņemsim, ka kopu saime $\mathfrak{N}$ satur vismaz vienu elementu.

Kopu saimi $\mathfrak{N}$ sauc par **kopu gredzenu**, ja

$$\forall A, B \in \mathfrak{N}: \quad A \setminus B \in \mathfrak{N}, \quad A \cup B \in \mathfrak{N}.$$

Kopu saimes $\mathfrak{N}$ elementu E sauc par **kopu saimes $\mathfrak{N}$ vienības elementu**, ja

$$\forall A \in \mathfrak{N}: \quad A \cap E = A.$$

Kopu gredzenu, kurā eksistē vienības elements, sauc par **kopu algebru**.

Kopu gredzenu $\mathfrak{N}$ sauc par **σ-gredzenu**, ja jebkurai kopu virknei $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$, ka $A_i \in \mathfrak{N}$ ($i \in \mathbb{N}$), ir spēkā $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{N}$.

σ-gredzenu, kurā eksistē vienības elements, sauc par **σ-algebru**.

Kopu saimi $\mathfrak{N}$ sauc par **kopu pusgredzenu**, ja

1. $\emptyset \in \mathfrak{N}$;
2. $\forall A, B \in \mathfrak{N}: \ A \cap B \in \mathfrak{N}$;

3. jebkurai kopai $A \in \mathfrak{N}$ un patvaļīgai kopas A apakškopai A_1 eksistē tādas kopas $A_2, \ldots, A_n \in \mathfrak{N}$, ka $\{A_i\}_{i=1}^n$ ir savstarpēji šķirtu kopu saime, kura veido kopas A pārklājumu.

Apskatīsim kopu gredzenu īpašības.

1° *Ja $\mathfrak{N}$ ir kopu gredzens, tad $\emptyset \in \mathfrak{N}$.*

2° *Pieņemsim, ka kopu saime $\mathfrak{N}$ satur vismaz vienu elementu. Šādi apgalvojumi ir ekvivalenti.*

1. *$\mathfrak{N}$ ir kopu gredzens.*
2. $\forall A, B \in \mathfrak{N}: \quad A \triangle B \in \mathfrak{N}, \quad A \cap B \in \mathfrak{N}.$
3. $\forall A, B \in \mathfrak{N}: \quad A \triangle B \in \mathfrak{N}, \quad A \cup B \in \mathfrak{N}.$
4. $\forall A, B \in \mathfrak{N}: \quad A \triangle B \in \mathfrak{N}, \quad A \setminus B \in \mathfrak{N}.$

3° *Ja $\mathfrak{N}$ ir kopu gredzens, tad jebkurai kopu virknei $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, ka $A_i \in \mathfrak{N}$ $(i \in \overline{n})$, ir spēkā $\bigcap\limits_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{N}$ un $\bigcup\limits_{i=1}^n A_i \in \mathfrak{N}$.*

4° *Ja $\mathfrak{N}$ ir σ-algebra, tad jebkurai kopu virknei $\{A_i\}_{i=1}^\infty$, ka $A_i \in \mathfrak{N}$ $(i \in \mathbb{N})$, ir spēkā $\bigcap\limits_{i=1}^\infty A_i \in \mathfrak{N}$.*

5° *Jebkurš kopu gredzens ir kopu pusgredzens, bet ne otrādi.*

6° *Jebkurš kopu gredzenu (kopu algebru, σ-gredzenu, σ-algebru) šķēlums ir kopu gredzens (attiecīgi kopu algebra, σ-gredzens, σ-algebra).*

7° *Pieņemsim, ka kopu saime $\mathfrak{N}$ satur vismaz vienu elementu, bet $X = \bigcup \mathfrak{N}$ ir kopu saimes $\mathfrak{N}$ apvienojums. Eksistē vienīgs kopu gredzens (kopu algebra, σ-gredzens, σ-algebra) $\mathcal{R}(\mathfrak{N})$, ka*

1. $\mathfrak{N} \subset \mathcal{R}(\mathfrak{N})$;
2. *ja $\mathfrak{M}$ ir kopu gredzens (attiecīgi kopu algebra, σ-gredzens, σ-algebra) un $\mathfrak{M} \supset \mathfrak{N}$, tad $\mathfrak{M} \supset \mathcal{R}(\mathfrak{N})$.*

Kopu saimi $\mathcal{R}(\mathfrak{N})$ sauc par ***minimālo kopu gredzenu (attiecīgi kopu algebru, σ-gredzenu, σ-algebru) pār kopu saimi $\mathfrak{N}$.***

Minimālais kopu gredzens (kopu algebra, σ-gredzens, σ-algebra) $\mathcal{R}(\mathfrak{N})$ ir visu kopu gredzenu (attiecīgi kopu algebra, σ-gredzens, σ-algebra) $\mathfrak{M}$, ka $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M} \subset \mathcal{P}(X)$, šķēlums.

8° *Minimālais kopu gredzens pār kopu pusgredzenu $\mathfrak{N}$ sastāv no visām tām un tikai tām kopām A, ka*

1. $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, *kur* $A_i \in \mathfrak{N}$ $(i \in \overline{n})$;

2. $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ *ir savstarpēji šķirtu kopu saime.*

9° *Apskatīsim attēlojumu* $f : X \to Y$. *Pieņemsim, ka* $\mathfrak{N} \subset \mathcal{P}(Y)$, *bet*

$$f^{-1}(\mathfrak{N}) = \big\{A \in \mathcal{P}(X) : \ \ A = f^{-1}(B),\ B \in \mathfrak{N}\big\}.$$

Ja $\mathfrak{N}$ *ir kopu gredzens (kopu algebra,* σ*-gredzens,* σ*-algebra), tad* $f^{-1}(\mathfrak{N})$ *arī ir kopu gredzens (attiecīgi kopu algebra,* σ*-gredzens,* σ*-algebra).*

Ja $\mathcal{R}(\mathfrak{N})$ *ir minimālais kopu gredzens (kopu algebra,* σ*-gredzens,* σ*-algebra) pār kopu saimi* $\mathfrak{N}$, *tad*

$$f^{-1}\big(\mathcal{R}(\mathfrak{N})\big) = \big\{A \in \mathcal{P}(X) : \ \ A = f^{-1}(B),\ B \in \mathcal{R}(\mathfrak{N})\big\}$$

ir minimālais kopu gredzens (attiecīgi kopu algebra, σ*-gredzens,* σ*-algebra) pār kopu saimi* $f^{-1}(\mathfrak{N})$.

10° *Pieņemsim, ka* $\mathfrak{N}$ *ir kopu pusgredzens. Apskatīsim kopas*

$$A, A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{N},$$

ka $A_1, \ldots, A_n \subset A$ *un* $\{A_i\}_{i=1}^n$ *ir savstarpēji šķirtu kopu saime. Tad eksistē tādas kopas* $A_{n+1}, \ldots, A_k$ $(k \geq n)$, *ka* $\{A_j\}_{j=1}^k$ *ir savstarpēji šķirtu kopu saime, kas veido kopas* A *pārklājumu.*

11° *Pieņemsim, ka* $\mathfrak{N}$ *ir kopu pusgredzens. Apskatīsim kopas*

$$A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{N}.$$

Tad eksistē tāda savstarpēji šķirtu kopu saime $\{B_j\}_{j=1}^k$, $B_j \in \mathfrak{N}$ $(j \in \overline{k})$, *ka jebkurai kopai* A_i $(i \in \overline{n})$ *var atrast indeksu apakškopu* $S_i \subset \overline{k}$, *ka* $A_i = \bigcup\limits_{j \in S_i} B_j$.