DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Grafu teorijas pērles

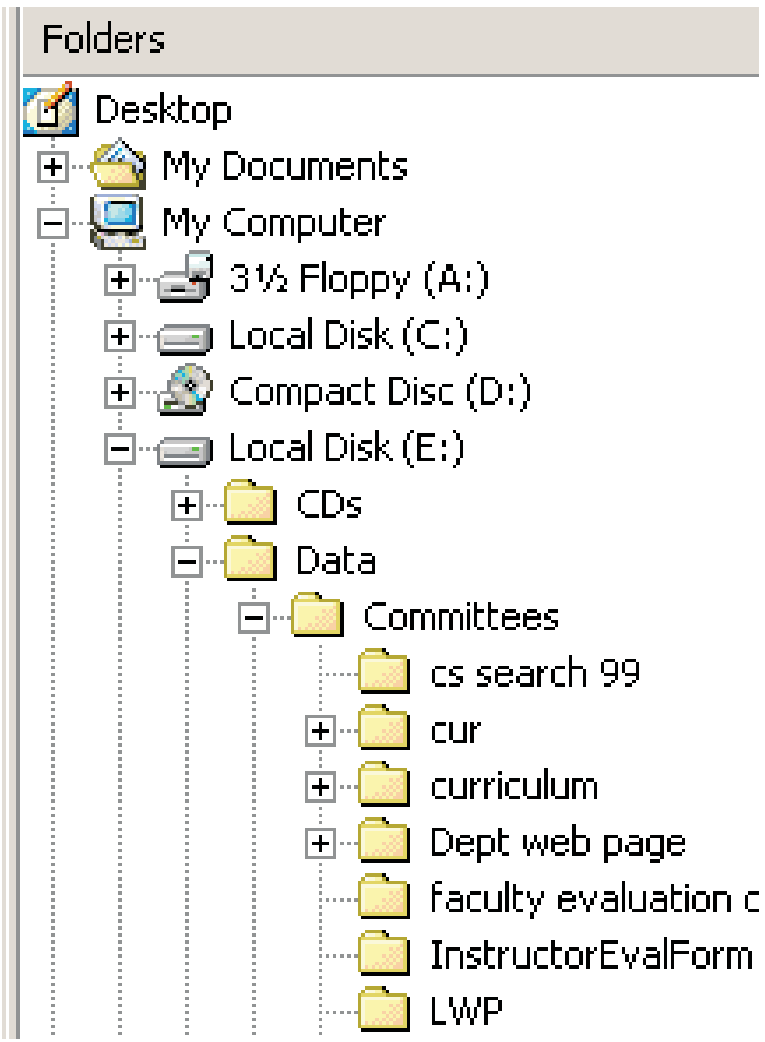
2019. gada 27. februāris

2019

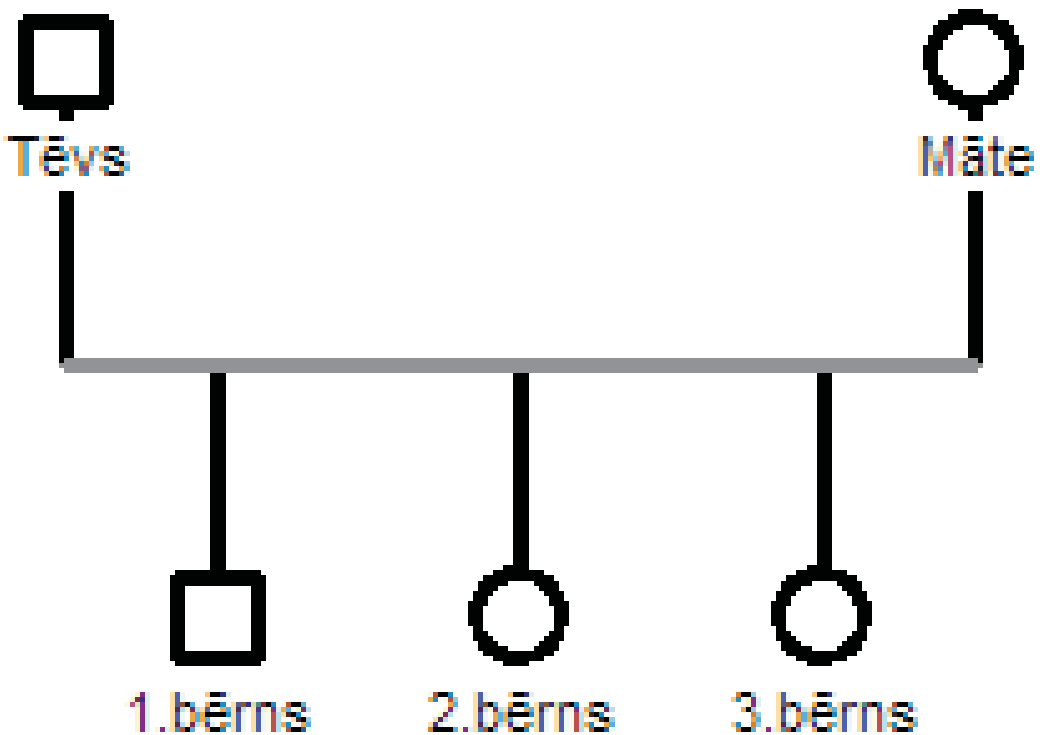
Saturs

1. Grafi mums apkārt

Failu un mapju (folderu) struktūra operētājsistēmas.



Šodien tik populārie dzimtas koki.



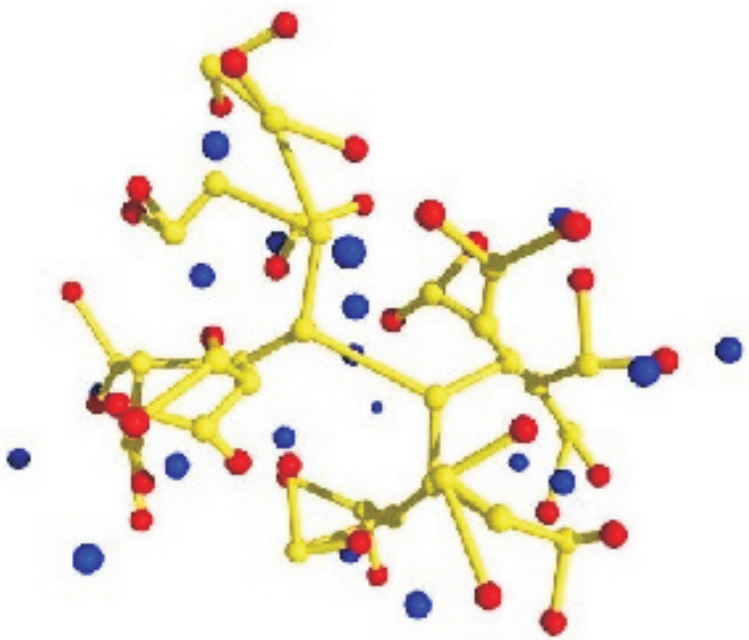
Ģimenes koka piemērs
ar trīs bērniem

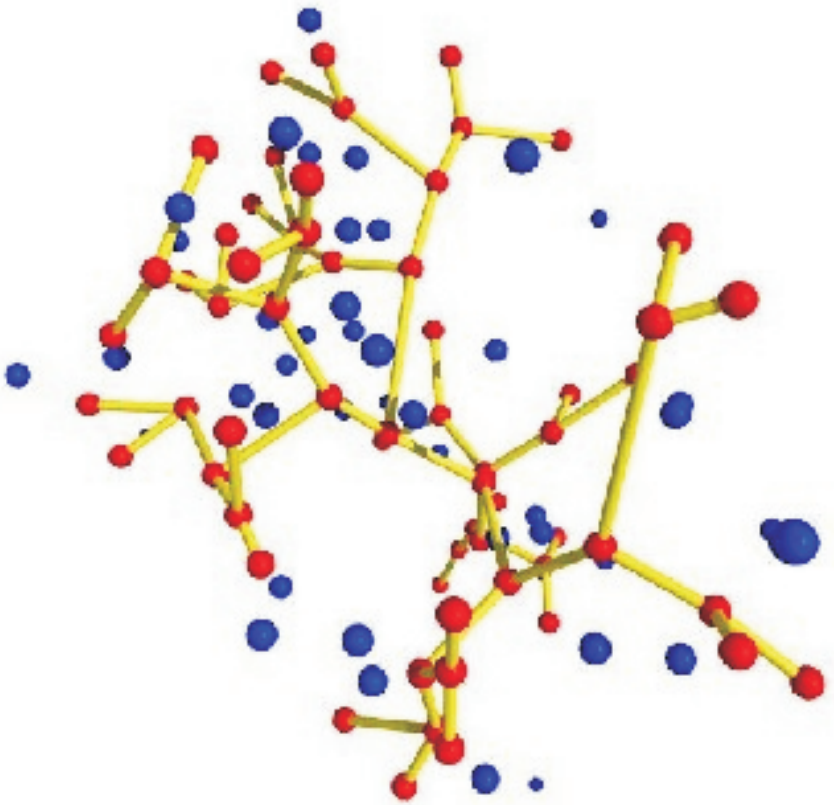
Valodas saimes.

Ceļu tīkli.

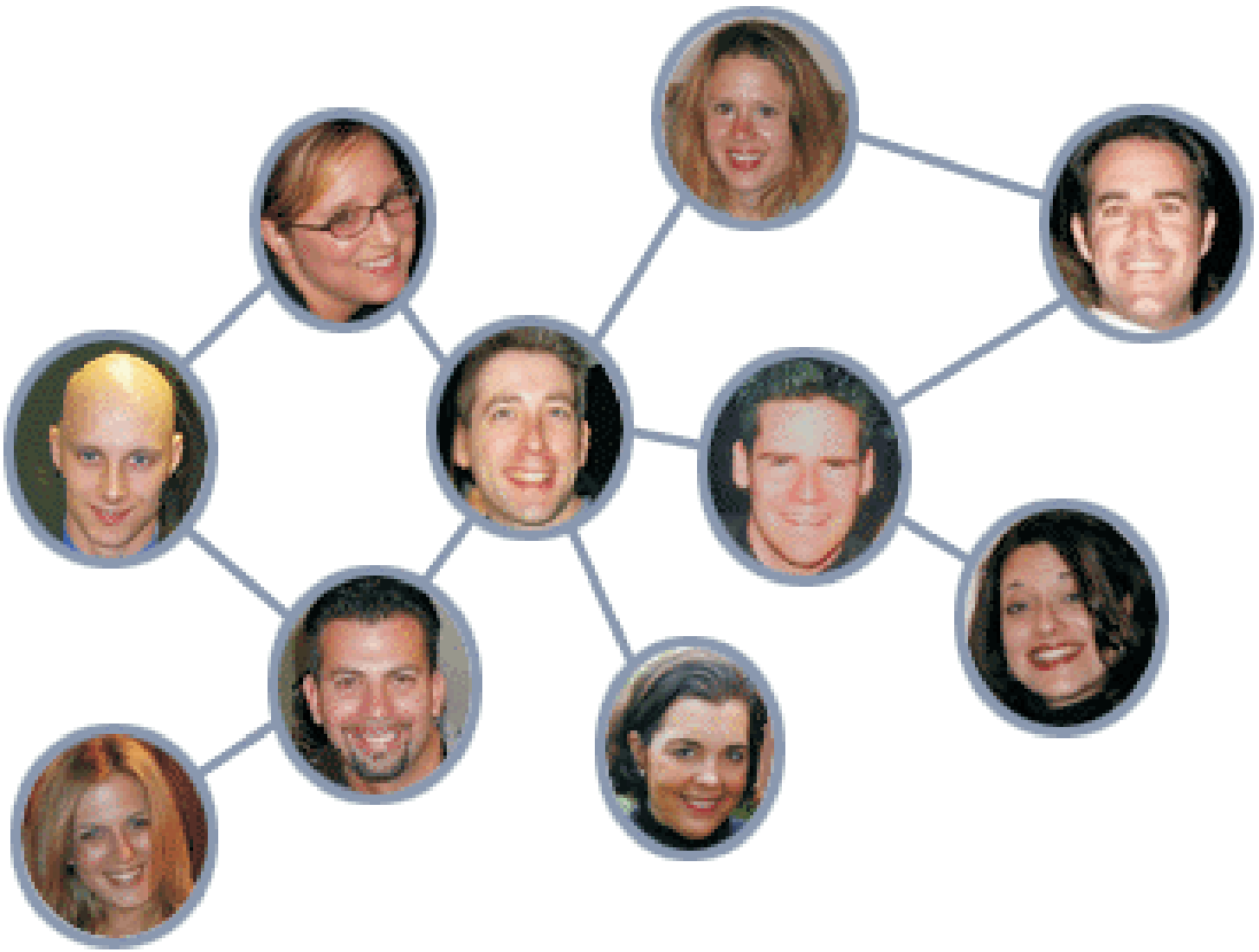

ESTONIA
RUSSIA
LITHUANIA
BELARUS
TALLINA
TARTU
PLESKAVA
ST. PET.
MASKV.
VILŅA
KAUNA
VARŠAVA
KLAIPĒDA
Graphics by Ints T.
Ainaži
Salacgrīva
Valmiera
Cēsis
Limbaži
Valka
Rūjiena
Mazsalca
Aloja
Seda
Strenči
Zilaiskalns
Smiltene
Ape
Žiguri
Viļaka
Kuprava
Balvi
Gulbene
Abrene
Jaunpiebalga
Cesvaine
Madona
Lubāna
Kārsava
Ērgļi
Līgatne
Sigulda
Vangaži
Rīga
Jūrmala
Saulkrasti
Salaspils
Ogre
Aizkraukle
Jēkabpils
Krāslava
Daugavpils
Rēzekne
Ilūkste
Subate
Aknīste
Nereta
Līvāni
Viesīte
Malta
Dagda
Žilupe
Viļāni
Varakļāni
Plaviņas
Skrīveri
Koknese
Jaunjelgava
Baldone
Ozolnieki
Jelgava
Bauska
Eleja
Auce
Bēne
Dobele
Saldus
Skrunda
Brocēni
Kandava
Talsi
Valdemārpils
Ventspils
Dundaga
Rojas
Pilte
Stende
Kuldīga
Alsunga
Sabile
Tukums
Pāvilosta
Aizpute
Durbe
Grobiņa
Liepāja
Priekule
Vaiņode
Kalnciems
Olaine
Iecava
Ķegums
Mālpils
Ādažu
Salacgrīva
Aloja
Zilaiskalns
Smiltene
Līgatne
Cēsis
Valmiera
Valka
Rūjiena
Mazsalca
Seda
Strenči
Ape
Žiguri
Viļaka
Kuprava
Balvi
Gulbene
Abrene
Jaunpiebalga
Cesvaine
Madona
Lubāna
Kārsava
Ērgļi
Līgatne
Sigulda
Vangaži
Rīga
Jūrmala
Saulkrasti
Salaspils
Ogre
Aizkraukle
Jēkabpils
Krāslava
Daugavpils
Rēzekne
Ilūkste
Subate
Aknīste
Nereta
Līvāni
Viesīte
Malta
Dagda
Žilupe
Viļāni
Varakļāni
Plaviņas
Skrīveri
Koknese
Jaunjelgava
Baldone
Ozolnieki
Jelgava
Bauska
Eleja
Auce
Bēne
Dobele
Saldus
Skrunda
Brocēni
Kandava
Talsi
Valdemārpils
Ventspils
Dundaga
Rojas
Pilte
Stende
Kuldīga
Alsunga
Sabile
Tukums
Pāvilosta
Aizpute
Durbe
Grobiņa
Liepāja
Priekule
Vaiņode
Kalnciems
Olaine
Iecava
Ķegums
Mālpils
A1
A2
A3
A4
A5
A6
A7
A8
A9
A10
A11
A12
A13

Molekulu struktūra.

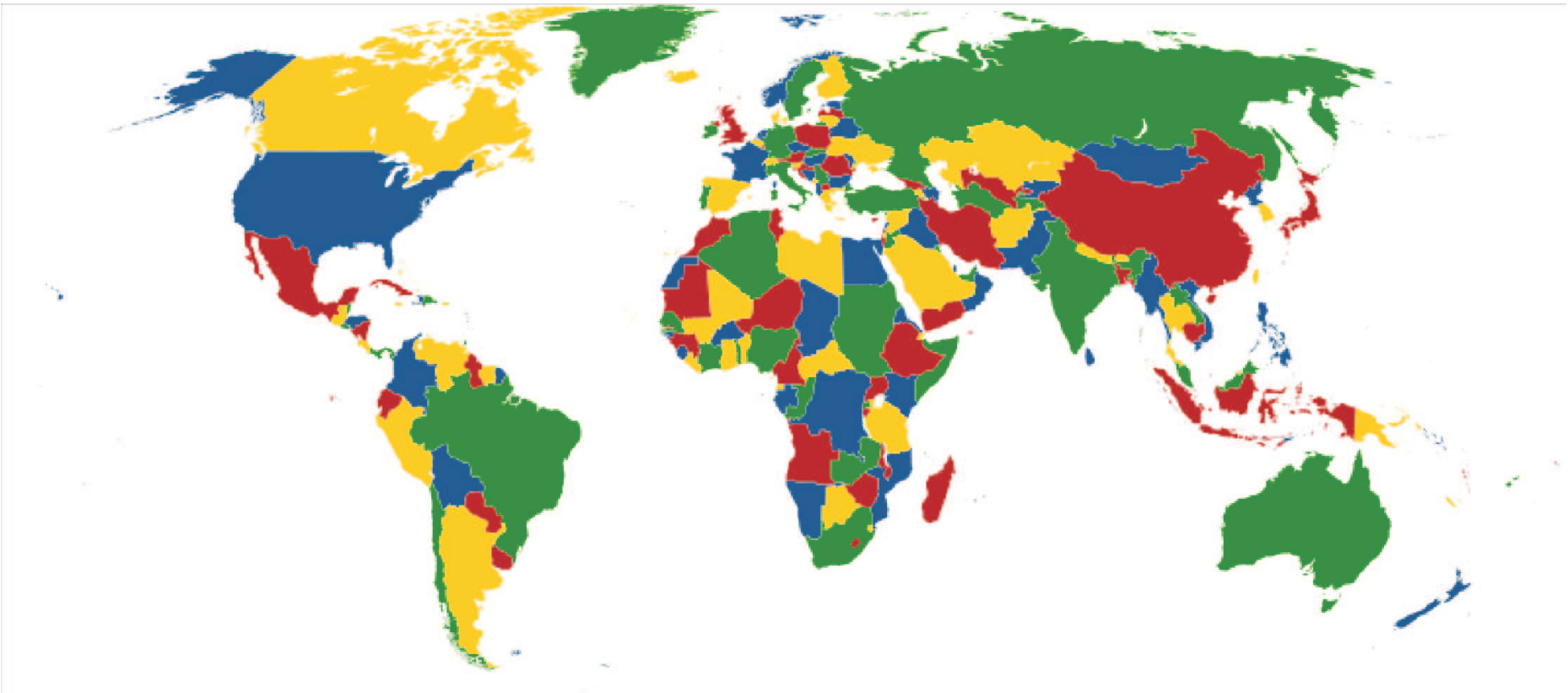




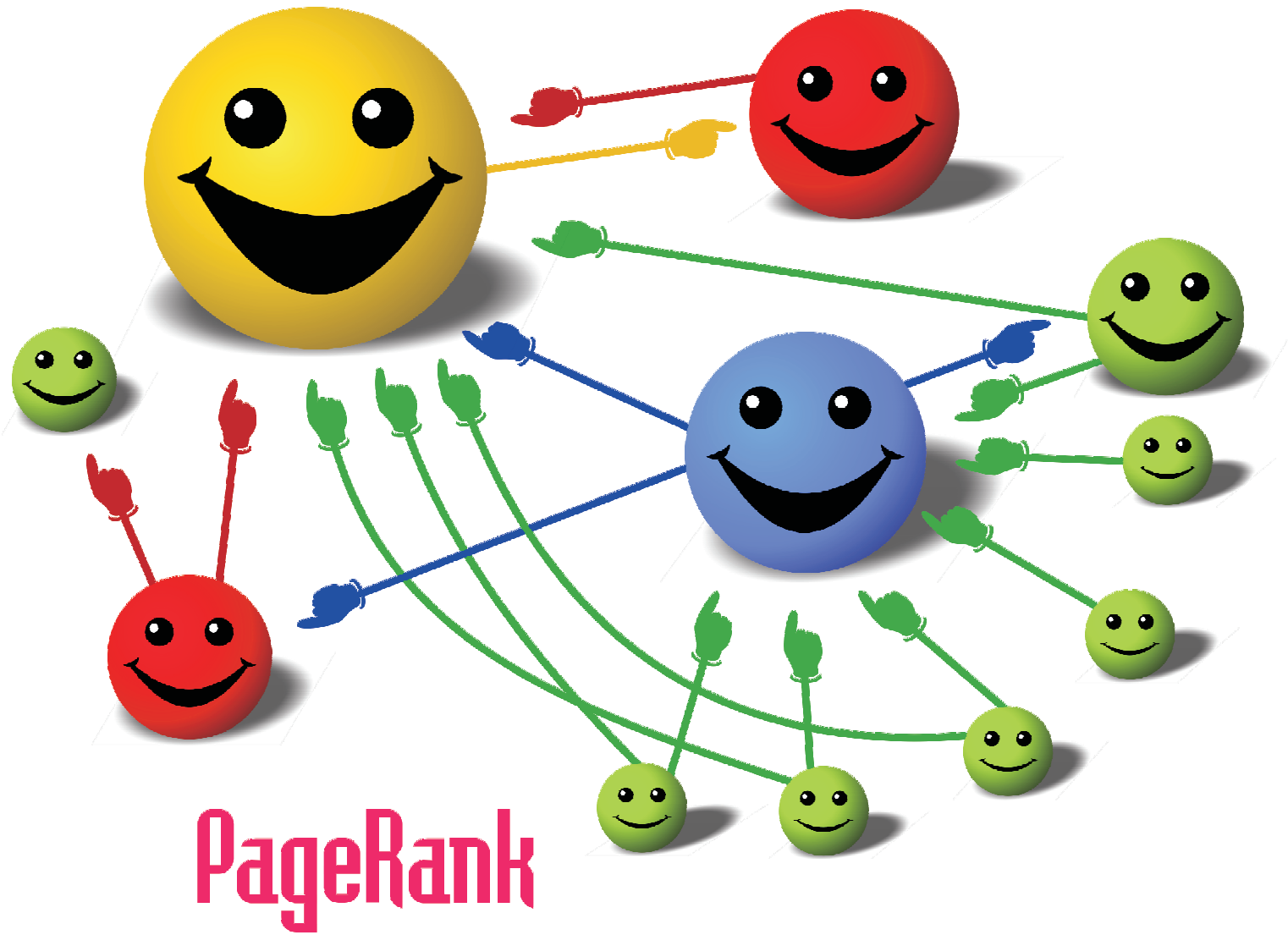
Draudzības attieksme.



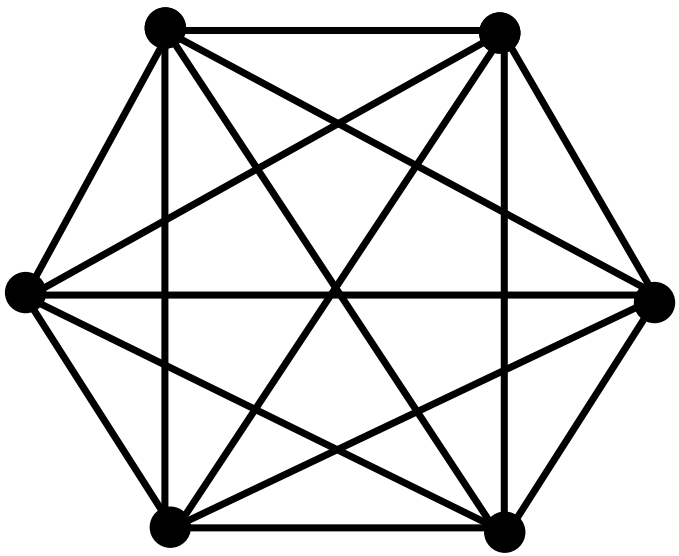
Karšu krāsošana.



Google web lapu ranga noteikšanā tiek izmantotas grafu teorijas metodes.

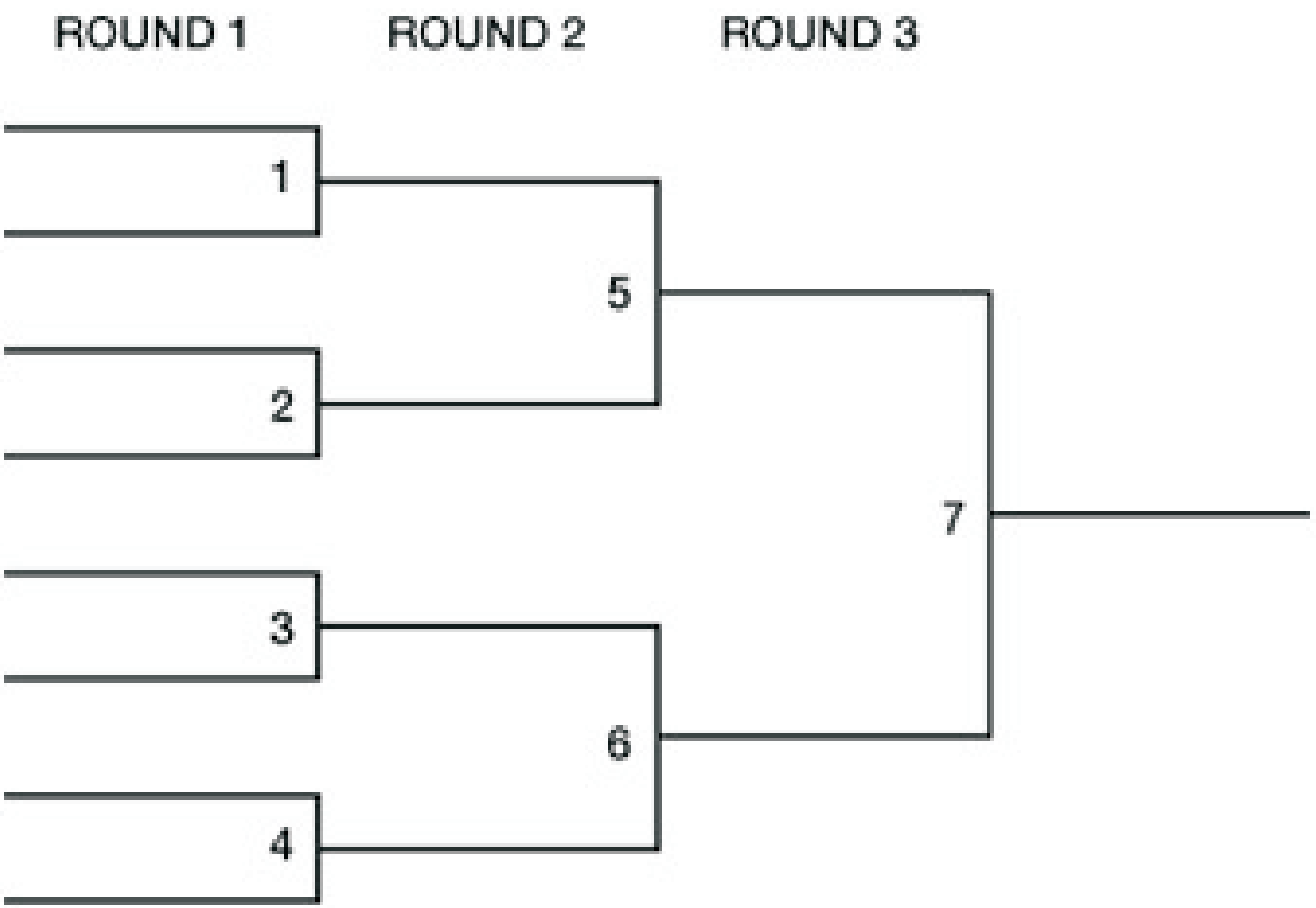


Apļa turnīrs - katra tiekas ar katru.

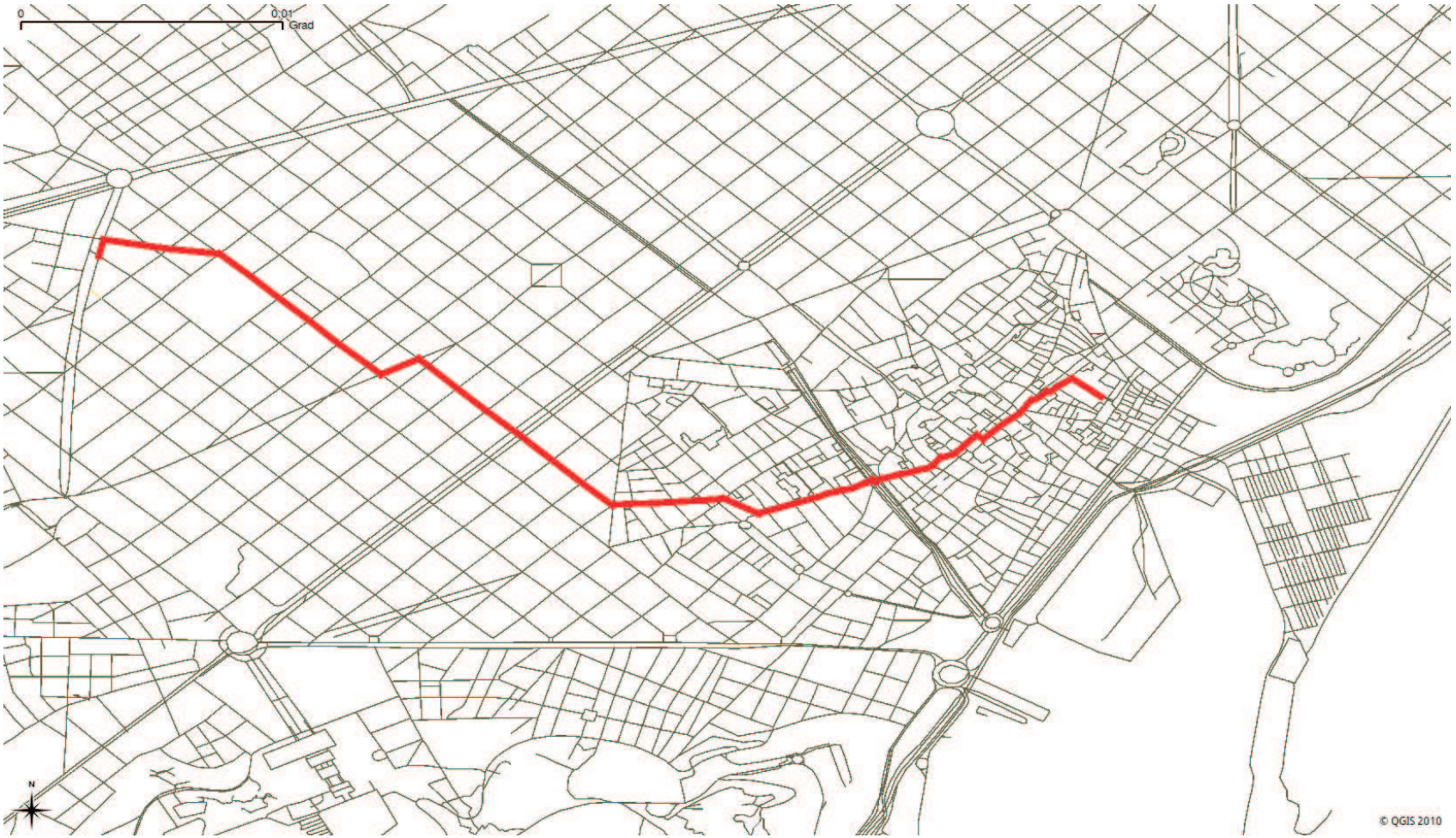


Ja ir divi apļi, tad katrs tiekas ar katru divas reizes.

Izslēgšanas turnīrs.



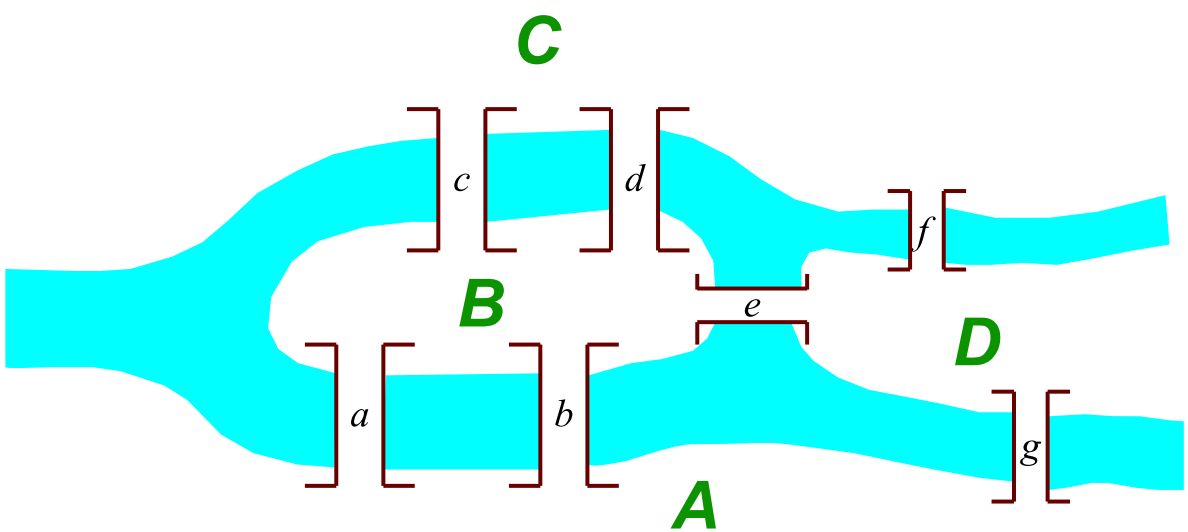
Navigācijā ir nepieciešams atrast visīsākos maršrutus.

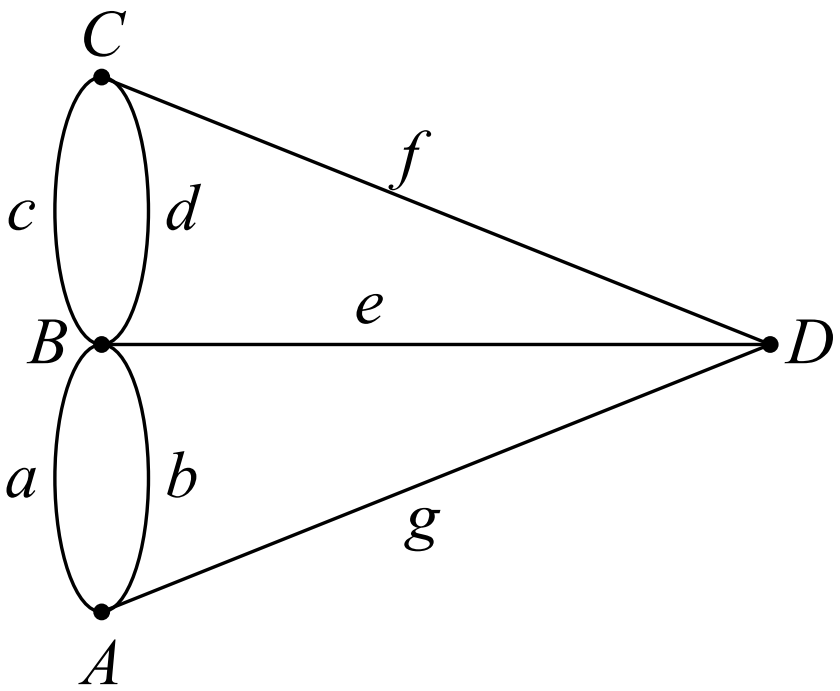


2. Eilera uzdevums par Kēnigsbergas tiltiem

1736. gadā Leonards Eilers publicēja darbu par Kēnigsbergas tiltiem, kurā pirmo reizi tika matemātiski formulēts un atrisināts grafu teorijas uzdevums.

Uzdevums par Kēnigsbergas tiltiem. Vai var šķērsot katru no septiņiem Kenigsbergas tiltiem, kas savieno upes Prēgeles krastus tikai vienu reizi un atgriezties izejas punktā?





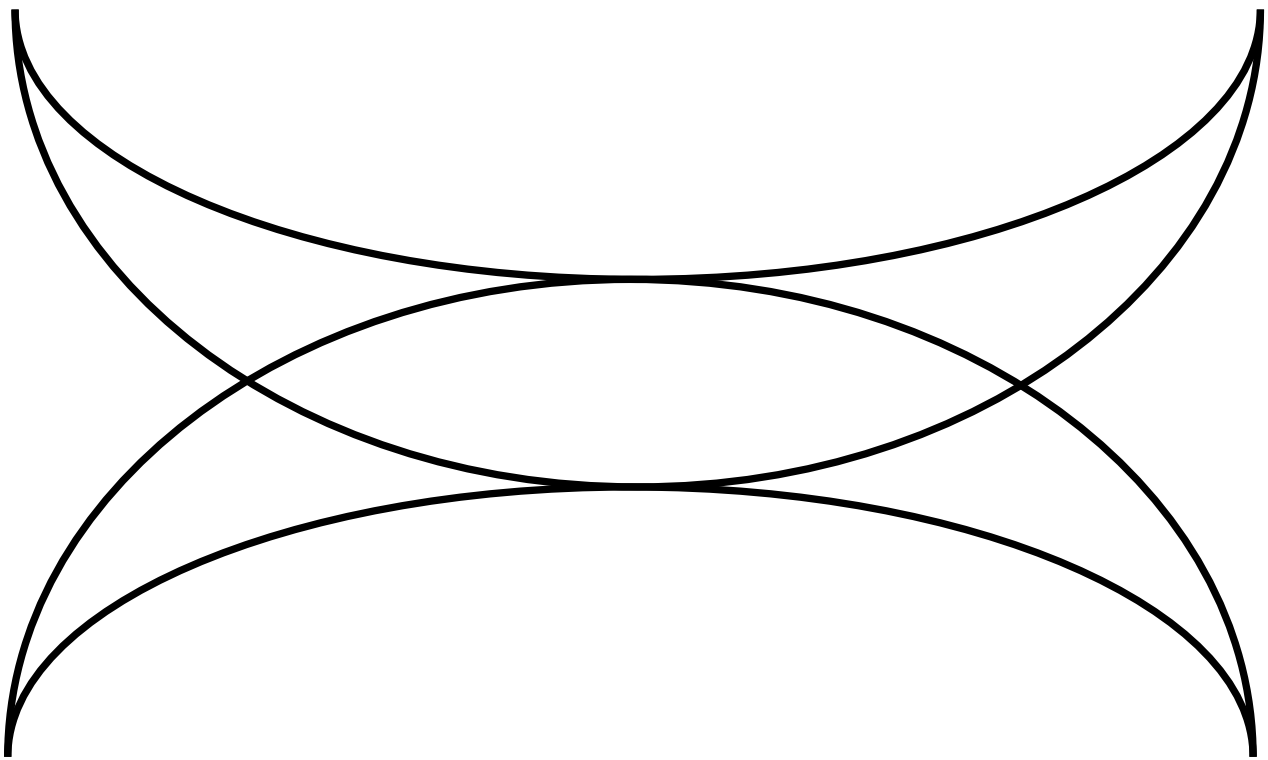
Šeit A, B, C, D ir sauszemes daļas. Divas sauszemes daļas tiek savienotas ar šķautni, ja ir tilts starp šīm sauszemes daļām.

Eilera teorēma. Šāds maršruts eksistē, ja

- grafs ir sakarīgs (t.i., sastāv no viena gabala),
- no katras virsotnes iziet pāra skaits šķautņu.

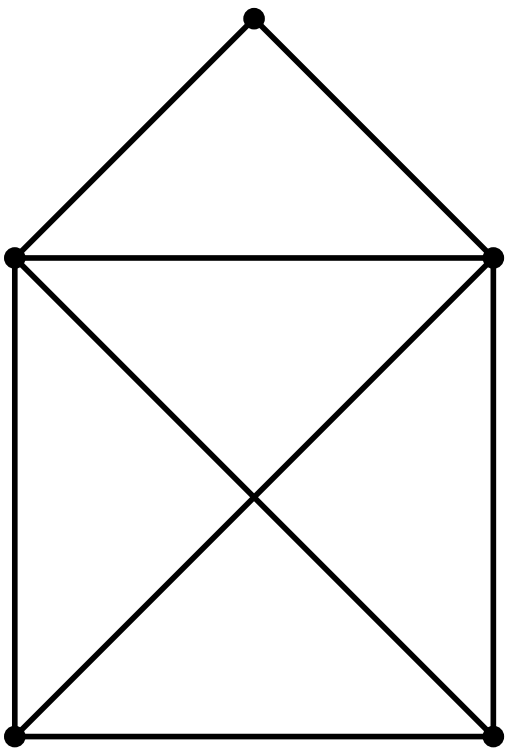
Tātad uzdevumam par Kēnigsbergas tiltiem nav atrisinājuma!

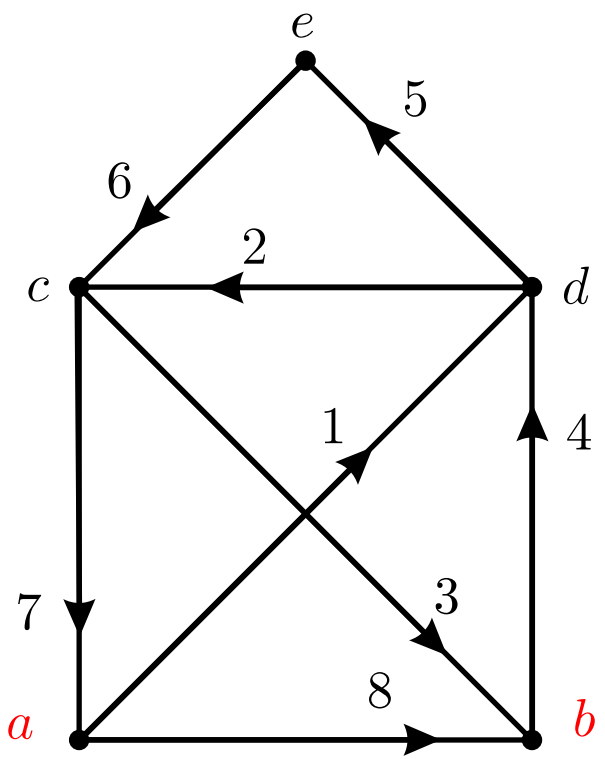
Piemērs. Vai var uzzīmēt Muhameda zobenus, neatraujot zīmuli no papīra un katru līniju velkot tikai vienu reizi?



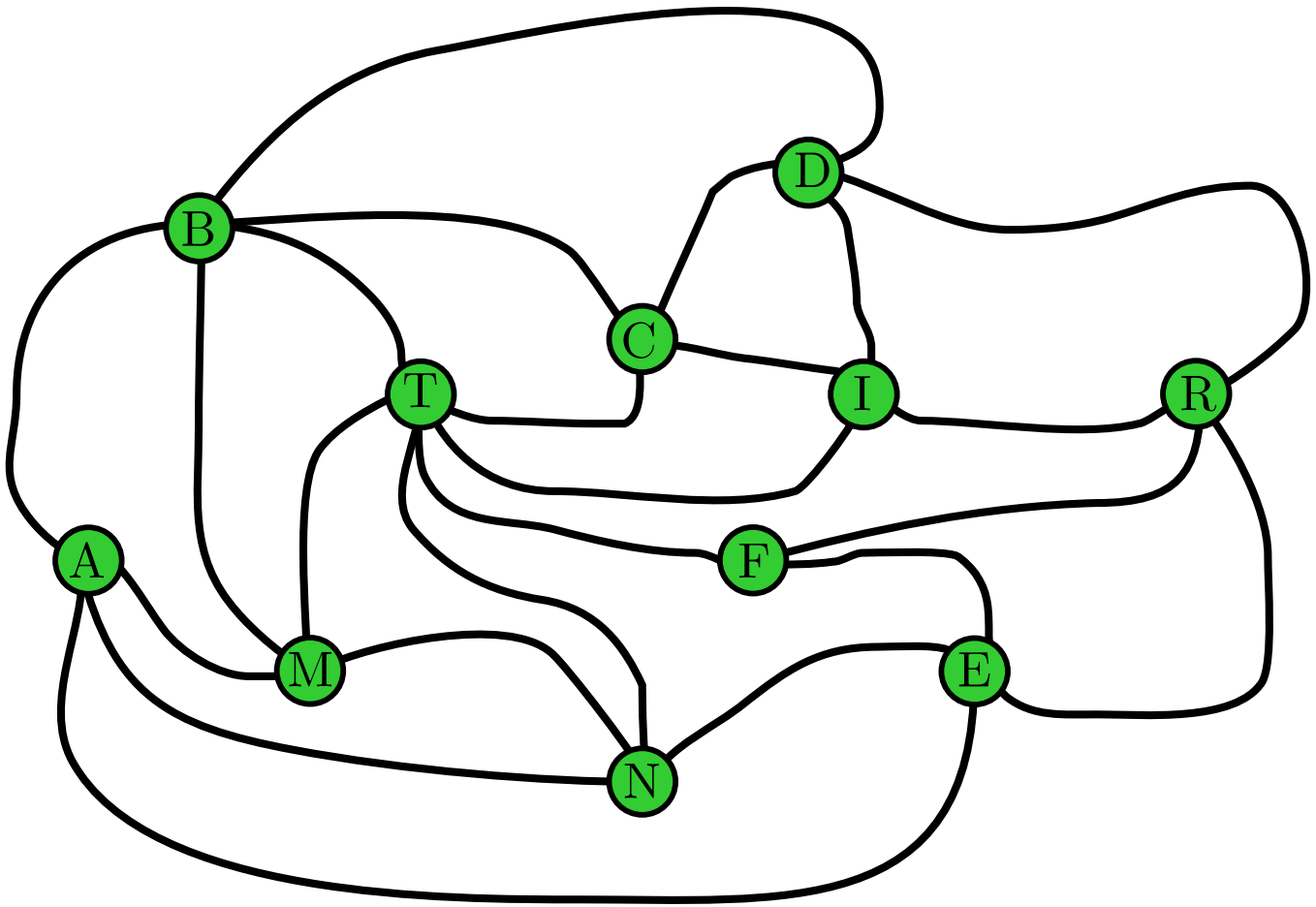
Teorēma. Ja grafā no visām virsotnēm, izņemot divas, iziet pāra skaits šķautņu, tad katru šķautni var apiet tieši vienu reizi, pie tam maršruta sākums un beigas atrodas vienā no šīm divām virsotnēm.

Piemērs. var uzzīmēt "mājiņu", neatraujot zīmuli no lapas un katru līniju velkot tikai vienu reizi?

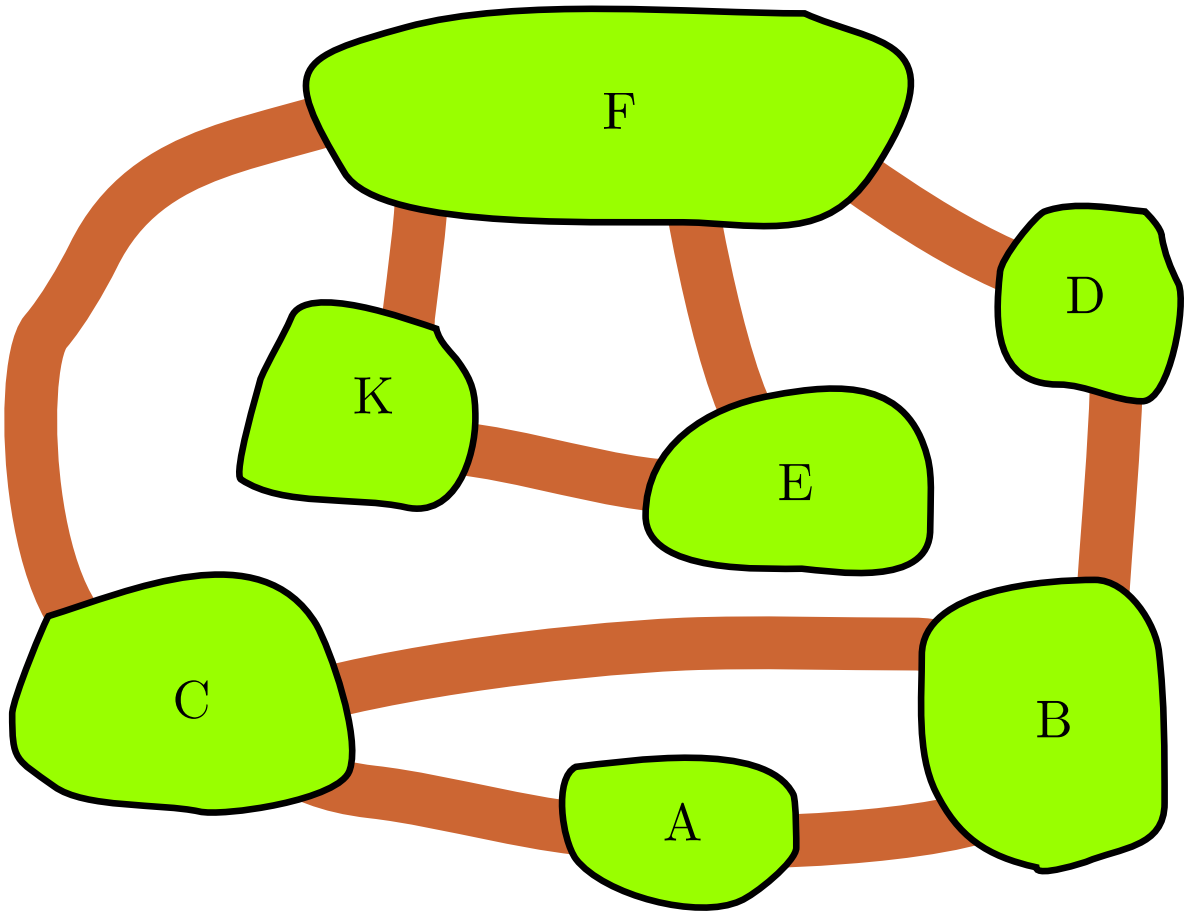




Piemērs. Nelielā birzī atrodas zaķis. Viņš izlēcis no paslēptuves un skrējis no koka pie koka, atstādams pēdas, un beidzot paslēpies zem viena no kokiem. Kur zaķis atrodas patlaban? Zem kura koka viņš bija paslēpies sākumā?



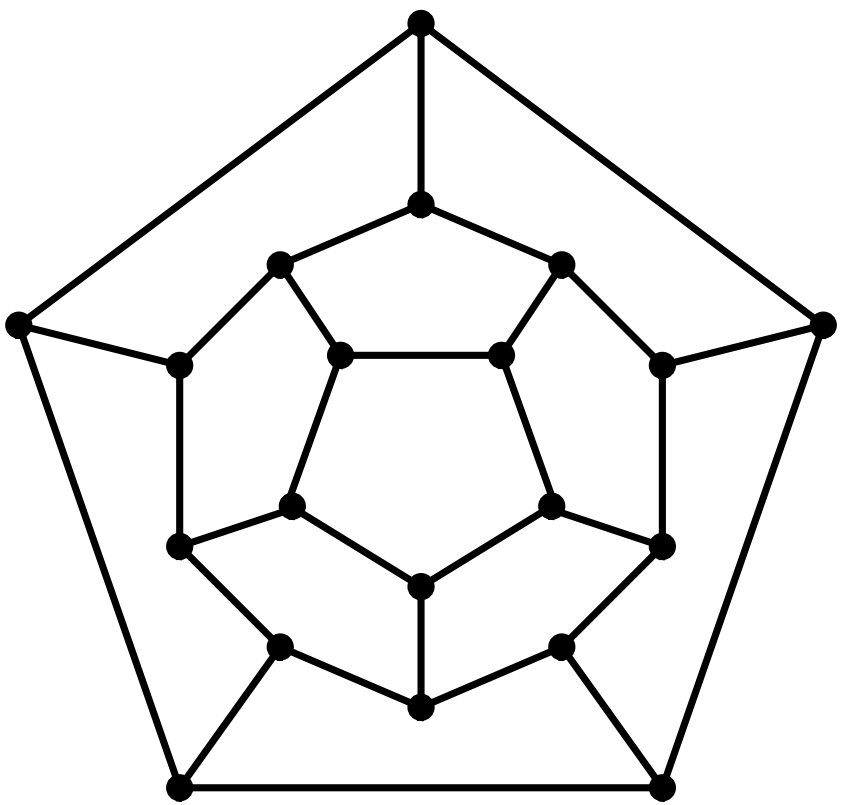
Piemērs. Ezerā atrodas septiņas salas, kuras savstarpēji savienotas ar tiltiem. Uz kuras salas no motorlaivas jāizsēdina tūristi, lai viņi varētu pāriet pār katru tiltu tieši vienu reizi? No kuras salas motorlaivā pēc tam šie tūristi jāuzņem?

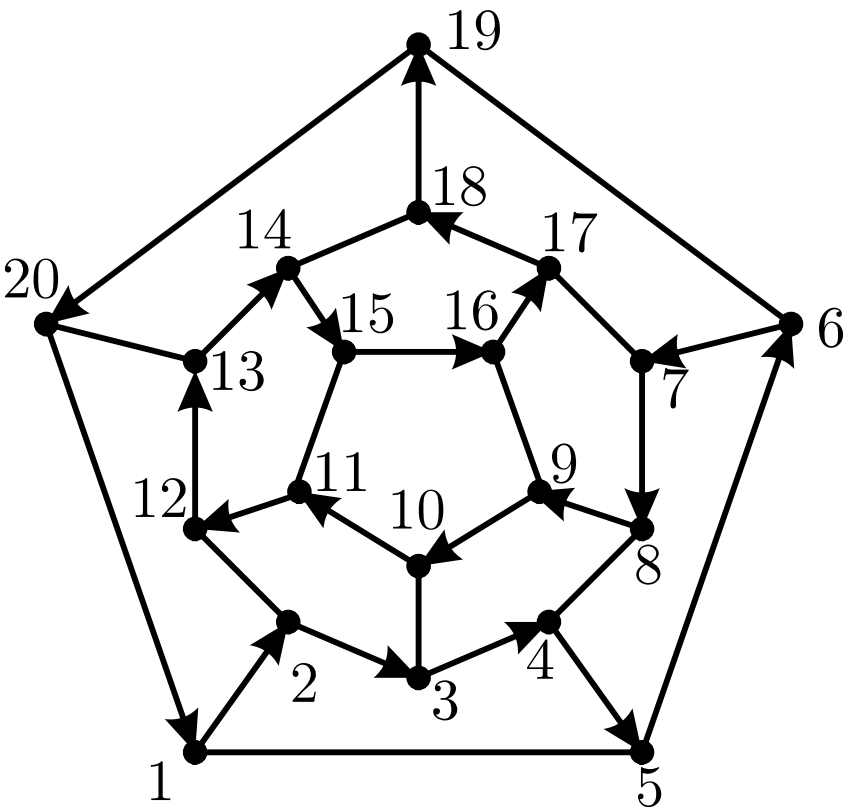


3. "Ceļojums apkārt pasaulei"

1859. gadā īru matemātiķis Viljams Hamiltons piedāvāja saistošu uzdevumu **"Ceļojums apkārt pasaulei"**: jāatrod tāds ceļojuma maršruts starp dodekaedra virsotnēm, katrai no kurām ir piekārtota kāda pasaulslavena pilsēta, tā, lai katra no šīm pilsētām tiktu apmeklēta tieši vienu reizi un ceļojums beigtos tajā pilsētā, kurā šis ceļojums tika uzsākts.


THE PUZZLE MUSEUM
THE ICOSIAN GAME
ICOSIAN GAME




19
18
14
17
20
15
16
6
13
7
12
11
9
10
8
2
4
3
1
5

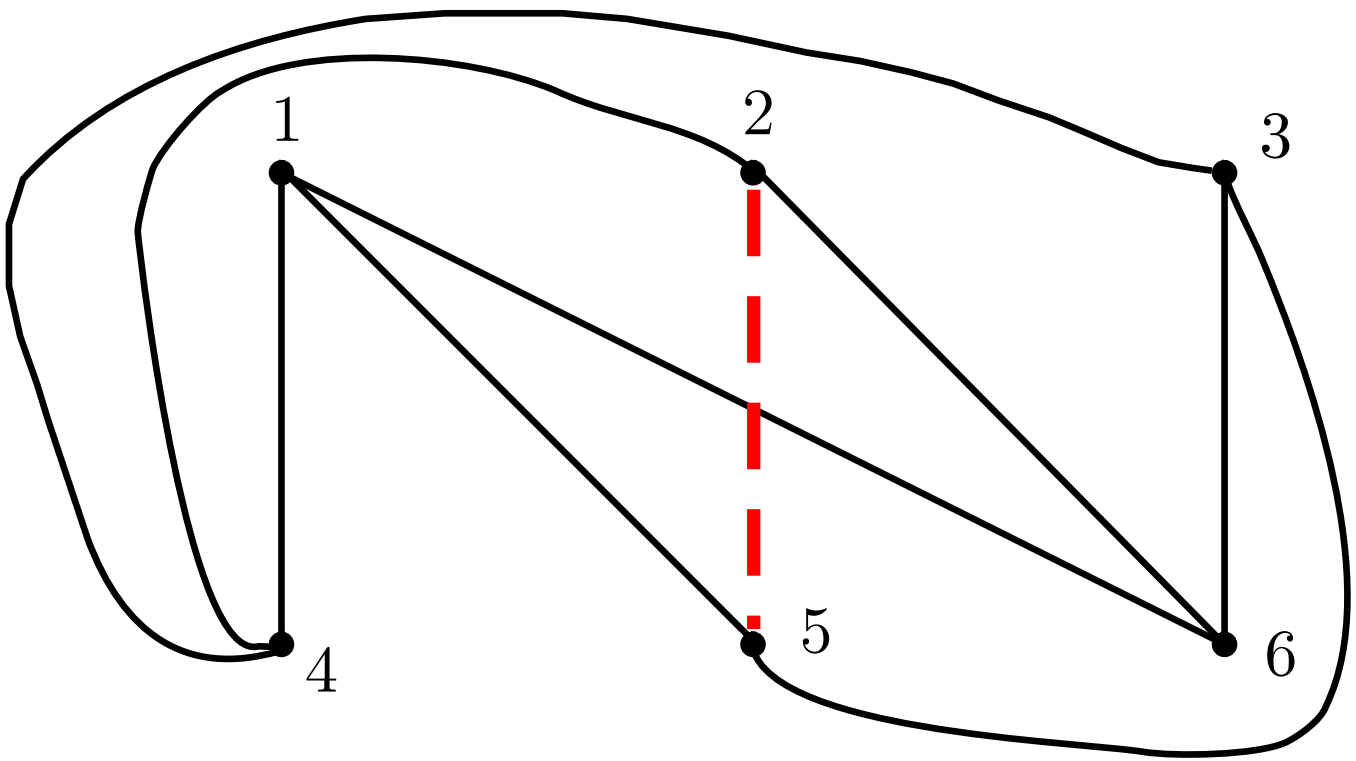
4. "Bruņinieka ceļojums"

Uzdevums **"Bruņinieka ceļojums"**: bruņiniekam zirgā jāapceļo šaha dēļa veidā izveidots laukums tā, lai viņš pabūtu katrā pozīcijā tikai vienu reizi un atgrieztos izejas pozīcijā.

18	59	50	1	48	15	22	63
51	2	17	60	21	64	47	14
58	19	4	49	16	23	62	45
3	52	57	20	61	46	13	24
34	5	40	53	36	25	44	11
39	56	35	8	41	12	29	26
6	33	54	37	28	31	10	43
55	38	7	32	9	42	27	30

5. Uzdevums par trim mājām un trim akām

Uzdevums par trim mājām un trim akām. Dotas trīs mājas 1,2 un 3 un trīs akas 4,5 un 6. Māju iemītnieki nolēma iemīt taciņas no katras mājas līdz katrai akai tā, lai taciņas nekrustotos. Vai tas ir iespējams?

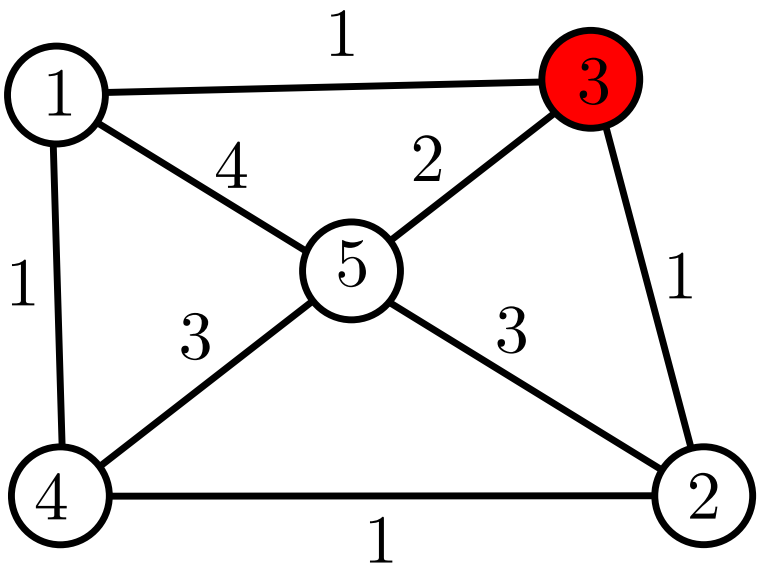


Uzdevums par radioelektronikas shēmu projektēšanu. Shēmas elementi tiek izvietoti uz plakanas plates, kas nevada strāvu, un tiek savienoti ar strāvu vadošiem celiņiem, kas atrodas uz plates un nav izolēti. Tā kā strāvu vadošie celiņi nav izolēti, tad tie drīkst krustoties tikai kādā shēmas elementā. Vai ir iespējams realizēt doto shēmu uz plates vienas puses?

Līdzīgs uzdevums rodas, **projektējot satiksmes shēmas**, kas sastāv no dzelzceļa līnijām un autoceļiem un kurās nav vēlamas pārbrauktuves.

Grafus, kuru nekādas šķautnes nekrustojas, sauc par **plakaniem grafiem**.

6. Visīsākie maršruti



Attālumu matrica:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{matrix}$$

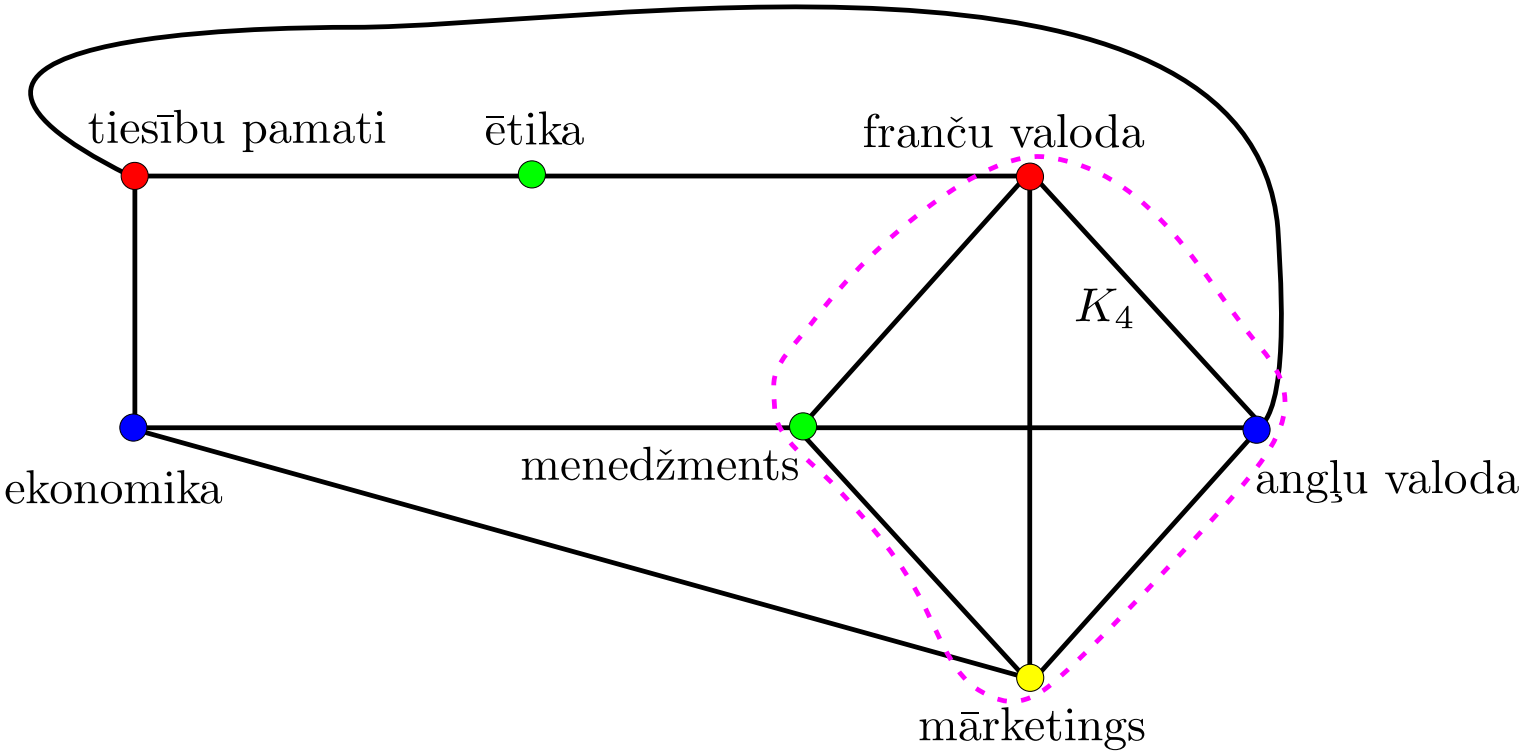
Uzdevums par sabiedrisko iestāžu optimālāko izvietošanu. Dotajā apdzīvotu vietu rajonā ir optimāli jāizvieto sabiedriskās iestādes (skolas, slimnīcas, veikalus, bibliotēkas, policiju utt.), ar to saprotot, ka attālumam no šīm iestādēm līdz vistālāk apdzīvotajām vietām ir jābūt vismazākajam.

Atbilde. Sabiedriskās iestādes ir optimāli izvietot centrālajās virsotnēs.

7. Uzdevums lekciju saraksta sastādīšanu

Piemērs. Noteikt visīsāko laiku, kādā var nolasīt 7 lekcijas (tiesību pamati, angļu valoda, franču valoda, ekonomika, menedžments, mārketings, ētika), ja katras lekcijas ilgums ir 1 stunda, pie tam dažas lekcijas nevar tikt lasītas vienlaicīgi. Tabulā ar zvaigznīti ir atzīmētas lekcijas, kas nevar tikt lasītas vienlaicīgi.

	Tie	Ang	Fra	Eko	Men	Mār	Ēti
Tie		*		*			*
Ang	*		*		*	*	
Fra		*			*	*	*
Eko	*				*	*	
Men		*	*	*		*	
Mār		*	*	*	*		
Ēti	*		*				



Lekciju saraksts, kas ļauj nolasīt 7 lekcijas 4 stundās:

1. franču valoda, tiesību pamati (sarkanās lekcijas);
2. angļu valoda, ekonomika (zilās lekcijas);
3. ētika, menedžments (zaļās lekcijas);
4. mārketings (dzeltenā lekcija).

8. Ceļu krāsošanas problēma

Problēma. Ceļotājs nonāk labirintā, no kura viņam jānokļūst noteiktā vietā (galamērķī). No katra krustojuma iziet k ceļi, katrs no kuriem ir nokrāsots vienā no k krāsām. Balss no augšas var ceļotājam pateikt priekšā, pa kādas krāsas ceļiem ir jāiet, lai nonāktu galamērķī. Taču balss no augšas nezina, kurā krustojumā atrodas ceļotājs. Dažiem labirintu tipiem ir iespējama tāda krāsu virkne, kas novedīs ceļotāju galamērķī, neatkarīgi no tā, kurā krustojumā atrodas ceļotājs.

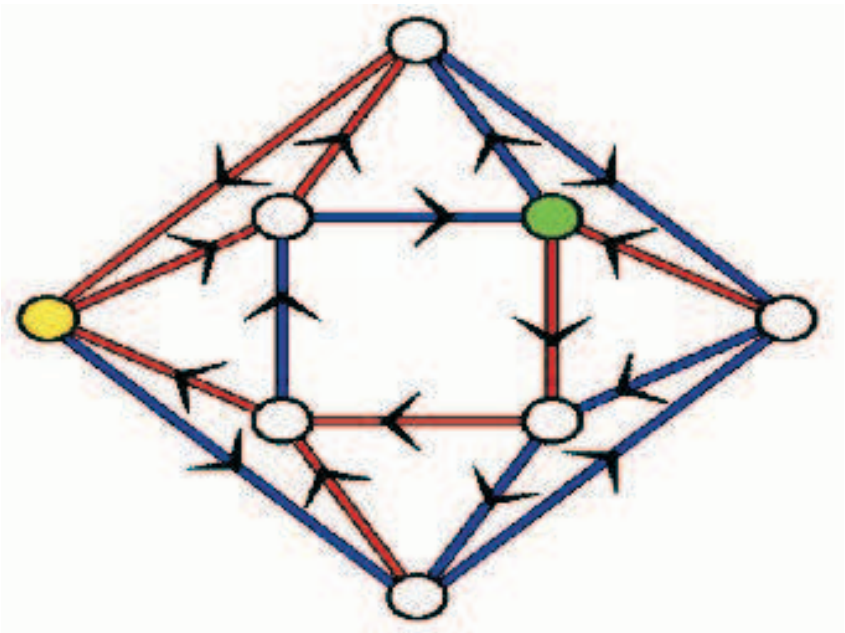
Šī problēma tika noformulēta 1970. gadā.

2008. gadā to atrisināja izraēliešu matemātiķis Abrahams Thahtmans.

Piemērs. Pieņemsim, ka ceļotājam jānokļūst dzeltenajā virsotnē. Balsij no augšas jāsaka

zils-sarkans- sarkans

iespējams, vairākas reizes. Lai kur arī neatrastos ceļotājs, viņš vienmēr nonāks dzeltenajā virsotnē.



Šis matemātiskais rezultāts, iespējams, ļaus nākotnē izveidot tādus tīklus, kas ļaus garantēti nogādāt noklīdušos sūtījumus noteiktā vietā.