

Diskrētā matemātika

Dr.math., doc. A. Gricāns

Eksāmena jautājumi (2003./2004. studiju gads)

- 1. Grafu teorijas pamatjēdzieni (I).** Grafs. Grafa virsotnes un šķautnes. Grafa kārta. $(n; m)$ -grafs. Blakusvirsotnes. Blakusšķautnes. Virsotņu un šķautņu incidence. Virsotnes apkārtne. Grafa ģeometriskā interpretācija. Piemēri. Grafu izomorfisms. Izomorfu un neizomorfu grafu piemēri. Iezīmēti un neiezīmēti grafi. Visu n -kārtas iezīmēto grafu skaita formula (paskaidrot, kā tiek iegūta šī formula). Grafu piemēri (tukšie grafi, pilnie grafi, Petersena grafs, vienkāršie cikli un ķēdes, riteņi, regulāru daudzskaldņu grafi, divdaļu grafi, pilnie divdaļu grafi). Apakšgrafs. Karkasveidīgs apakšgrafs. Operācijas ar grafiem (virsotnes atņemšana, šķautnes atņemšana).
- 2. Grafu teorijas pamatjēdzieni (II).** Grafa virsotnes pakāpe. Izolēta virsotne. Gala virsotne. Dominējoša virsotne. Lemma par rokasspiedieniem un tās sekas. Teorēma par virsotnēm ar vienādām pakāpēm (ar pierādījumu). Uzdevums par draugiem. Teorēma par izolētām un dominējošām virsotnēm. Piemērs par šahistiem. Grafa pakāpe. Regulāri grafi. Kubiski grafi. Sakarības starp regulāra grafa virsotņu un šķautņu skaitu. Regulāru grafu piemēri. Grafa saistības un incidences matricas. Piemēri. Grafa vispārinājumi (grafs ar cilpām, multigrafs, pseidografs, hipergrafs).
- 3. Sakarīgi grafi (I).** Maršruts. Maršruta garums. Maršruta sākums un beigas. Ciklisks maršruts. Vaļējs maršruts. Ķēde. Vienkārša ķēde. Cikls. Vienkāršs cikls. ℓ -cikls. Trijstūris. Sakarīgs grafs. Grafa komponente. Grafa sakarīguma apgabals. Paskaidrot ar piemēru, kā, lietojot saistības matricu, var atrast visu $(u; v)$ -maršrutu ar doto garumu skaitu. Pārlase plašumā un tās lietojumi. Ilustrēt pārlasi plašumā ar piemēru. Pārlase dziļumā un tās lietojumi. Ilustrēt pārlasi dziļumā ar piemēru.
- 4. Sakarīgi grafi (II).** Uzdevums par tīkla drošību. Grafa sadales punkts. Grafa virsotņu sakarīguma skaitlis $\kappa(G)$. Piemēri. Grafa tilts. Grafa šķautņu sakarīguma skaitlis $\lambda(G)$. Piemēri. Saistība starp $\kappa(G)$ un $\lambda(G)$.
- 5. Visīsākie maršruti grafā ar svariem.** Grafa šķautņu svaru funkcija. Šķautnes svars. Grafs ar svariem. Grafa svaru funkcija. Visīsākais $(u; v)$ -maršruts grafā ar svariem. Paskaidrot, kāpēc visīsākais maršruts starp divām grafa ar svariem virsotnēm vienmēr eksistē. Attālums starp divām grafa ar svariem virsotnēm. Attāluma īpašības. Virsotnes ekscentrisitāte. Grafa diametrs. Grafa rādiuss. Grafa centrālās un perifērijas virsotnes. Uzdevums par sabiedrisko iestāžu optimālu izvietojumu. Floida metode. Piemēri.
- 6. Koki.** Koks. Koka kritēriji. Mežs. Sakņotie koki. Uzdevums par elektropārvades līniju projektēšanu. Grafa karkass (parciālmežs). Grafa parciālkoks. Kraskala metode. Prīmas metode. Ilustrēt šīs metodes ar piemēriem.
- 7. Planāri grafi.** Uzdevums par trim mājām un trim akām. Plakans grafs. Planārs grafs. Uzdevuma par trim mājām un trim akām formulējums grafu teorijas valodā. Grafa skaldnes. Eilera teorēma. Neplanāru grafu piemēri. Šķautnes sadalīšanas operācija. Homeomorfi grafi. Pontrjagina-Kuratovska teorēma. Šķautnes savilkšanas operācija. Grafa G savilkšana par grafu H . Vāgnera teorēma.
- 8. Eilera grafi.** Uzdevums par Kēnigsbergas tiltiem un tā formulējums grafu teorijas valodā. Eilera cikls. Eilera grafs. Eilera grafa kritērijs (Eilera teorēma). Piemēri. Eilera ķēde. Puseilera grafs. Puseilera grafa kritērijs. Piemēri. Flerī metode. Ilustrēt šo metodi ar piemēru.

9. **Hamiltona grafi.** Hamiltona uzdevums “Ceļojums apkārt pasaulei”. Hamiltona cikls. Hamiltona grafs. Hamiltona ķēde. Pushamiltona grafs. Piemēri. Diraka teorēma. Piemērs par bērnodārza grupu. Hamiltona cikla neeksistences teorēma. Hamiltona ķēdes neeksistences teorēma. Atrisināt uzdevumu: vai ir iespējams gar riņķa līniju novietot 1999 naturālus skaitļus tā, lai jebkuru blakus skaitļu summa būtu nepāra skaitlis?

10. **Grafu krāsošana.**

(a) *Grafa virsotņu krāsošana.* Grafa virsotņu k -krāsojums. Grafa virsotņu regulārs k -krāsojums. Grafa hromatiskais skaitlis. k -hromatisks grafs. Bihromatisks grafs. Piemēri. Uzdevums par optimālu sarakstu sastādīšanu. Uzdevums par iekārtu sadali. Virsotņu krāsošanas skopā metode. Ilustrēt šo metodi ar piemēru.

(b) *Grafa šķautņu krāsošana.* Grafa šķautņu k -krāsojums. Grafa šķautņu regulārs k -krāsojums. Grafa hromatiskais indekss. Šķautņu k -hromatisks grafs. Piemēri.

(c) *Grafa skaldņu krāsošana.* Grafa skaldņu k -krāsojums. Grafa skaldņu regulārs k -krāsojums. Piemēri. Četru krāsu hipotēze un tās vēsturisks apskats.

11. **Pakāpju virknes.**

Pareiza n -virkne. Grafiska n -virkne. Grafiskas virknes kritēriji. ℓ -procedūra. Grafisku virkņu realizācija grafu ar papildīpašībām veidā (sakarīga grafa veidā, grafa ar maksimālu šķautņu sakarīguma skaitli veidā, koka veidā, Eilera grafa veidā). Piemēri.

12. **Neatkarība. Pārklājumi (I).**

Neatkarīgas virsotņu kopas. Dominējošas virsotņu kopas. Saistība starp neatkarīgām un dominējošām virsotņu kopām. Kliķe. Grafa virsotņu pārklājumi. Piemēri. Neatkarīgas šķautņu kopas (sapārojumi). Grafa šķautņu pārklājumi. Piemēri.

13. **Neatkarība. Pārklājumi (II).**

Uzdevums par precībām un tā formulējums kombinatorikas terminos. Kopu sistēmas transversāļu skaits. Uzdevuma par precībām formulējums grafu teorijas valodā. Uzdevums par norīkojumiem. Pilni sapārojumi divdaļu grafos. Uzdevums par dejām. Pilni sapārojumi regulāros divdaļu grafos. Piemēri.

14. **Orgrafi.**

Orgrafa definīcija. Blakusvirsotnes. Blakusloki. Virsotņu un loku incidence. Virsotnes ieejošā un izejošā apkārtne. Orgrafa ģeometriskā interpretācija. Piemēri. Orgafu izomorfisms. Iezīmēti un neiezīmēti grafi. Orgrafa pamats. Visu n -kārtas iezīmēto orgrafu skaita formula (paskaidrot, kā tiek iegūta šī formula). Orgrafa virsotnes pozitīvā un negatīvā puspakāpe. Orgrafa virsotnes pakāpe. Lemmas par rokaspiedieniem analogs orgrafiem. Pārlase plašumā orgrafos. Eilera orgrafi. Hamiltona orgrafi.

Eksāmenā jāatskatās par 7. patstāvīgo darbu!