DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Grafi ar svariem (Belmana-Kalabas metode)

2020. gada 27. septembris

2020

Saturs

1. Belmana-Kalabas metodes apraksts

Belmana-Kalabas (*Bellman-Kalaba*) metode ļauj noteikt visīsākos maršrutus ***līdz dotajai*** orgrafa G virsotnei u ***no visām pārējām*** orgrafa G virsotnēm. Šo metodi drīkst pielietot orgrafam G ar ***patvaļīgiem svariem*** pie nosacījuma, ka ***orgrafam*** G ***nav negatīva svara kontūru***.

Pieņemsim, ka orgrafa G virsotnes ir $u_1, u_2, \ldots, u_n$, bet

$$\omega(G) = (\omega_{ij})$$

ir orgrafa svaru matrica. Tiks meklēti visīsākie maršruti orgrafā G līdz virsotnei u_p, kur $p \in \{1; 2; \ldots; n\}$, no visām pārējām orgrafa G virsotnēm.

Belmana-Kalabas metode.

1. Svaru matricas $\omega(G)$ p-to aili apzīmēsim ar

$$V^0 = (V_i^0)_{i=1,2,\ldots,n} = \begin{pmatrix} V_1^0 \\ V_2^0 \\ \ldots \\ V_n^0 \end{pmatrix}.$$

2. Katram $k = 1, 2, \ldots, n$ atrodam

$$V^k = (V_i^k)_{i=1,2,\ldots,n} = \begin{pmatrix} V_1^k \\ V_2^k \\ \ldots \\ V_n^k \end{pmatrix},$$

kur

$$V_i^k = \min_{j=1,2,\ldots,n} \left(\omega_{ij} + V_j^{k-1}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

kamēr $V^q = V^{q-1}$ kādam $q \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

2.1. V^q ir attālumu matricas $\rho(G)$ p-tā aile, citiem vārdiem sakot, V_i^q $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ir attālums no virsotnes u_i līdz virsotnei u_p, t.i., $V_i^q = \rho(u_i; u_p)$.

2.2. Ja $V_i^q = \infty$, tad virsotne u_p nav sasniedzama no virsotnes u_i. Ja $V_i^q \neq \infty$, tad visīsāko $(u_i; u_p)$-maršrutu atrod šādi:

– atrod $u_{j_1} \in \Gamma^+(u_i)$, ka

$$V_i^q - V_{j_1}^q = \omega(u_i; u_{j_1});$$

– atrod $u_{j_2} \in \Gamma^+(u_{j_1})$, ka

$$V_{j_1}^q - V_{j_2}^q = \omega(u_{j_1}; u_{j_2}) \text{ utt.;}$$

– pēc galīga skaita soļu atrod $u_{j_m} = u_p \in \Gamma^+(u_{j_{m-1}})$, ka

$$V_{j_{m-1}}^q - V_{j_m}^q = \omega(u_{j_{m-1}}; u_{j_m});$$

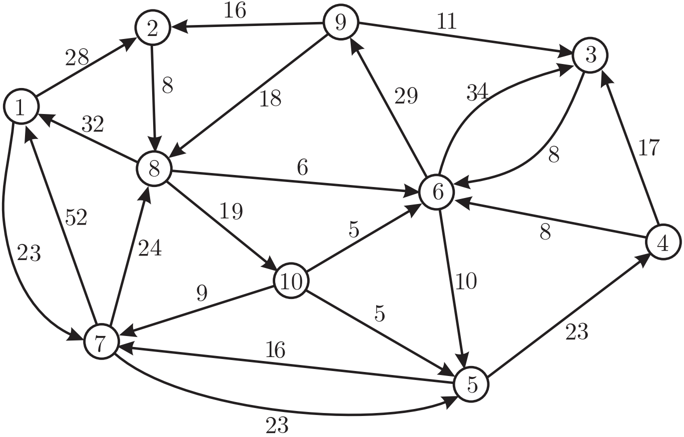
tad

$$u_i, u_{j_1}, u_{j_2}, \ldots, u_{j_m} = u_p$$

ir visīsākais $(u_i; u_p)$-maršruts.

2. Piemērs

Atradīsim attālumus līdz 1. zīm. attēlotā orgrafa G virsotnei $u_p = 5$ no visām pārējām šī orgrafa virsotnēm, un noteiksim visīsāko $(2; 5)$-maršrutu, lietojot Belmana-Kalabas metodi.


16
11
28
8
18
29
34
32
8
17
6
52
19
5
8
23
24
10
9
5
23
16
23
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

1. zīm.

0. solis. Svaru matricas

$$\omega(G) = \begin{pmatrix} 0 & 28 & \infty & \infty & \infty & \infty & 23 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 17 & 0 & \infty & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 23 & 0 & \infty & 16 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 34 & \infty & 10 & 0 & \infty & \infty & 29 & \infty \\ 52 & \infty & \infty & \infty & 23 & \infty & 0 & 24 & \infty & \infty \\ 32 & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 0 & \infty & 19 \\ \infty & 16 & 11 & \infty & \infty & \infty & \infty & 18 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 5 & 9 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

piektā aile:

$$V^0 = \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \\ \infty \\ \infty \\ 0 \\ 10 \\ 23 \\ \infty \\ \infty \\ 5 \end{pmatrix}.$$

1. solis. Sastādām matricu

$$M^1 = \left(\omega_{ij} + V_j^0\right),$$

kuras i-to rindiņu iegūst, saskaitot matricas $\omega(G)$ i-to rindiņas elementus ar attiecīgajiem matricas V^0 elementiem. Matricas M^1 rindiņu minimumi kalpos veidos matricu V^1. Atrodam matricu M^1:

$$\begin{array}{cccccccccc}
0+\infty & 28+\infty & \infty+\infty & \infty+\infty & \infty+0 & \infty+10 & 23+23 & \infty+\infty & \infty+\infty & \infty+5 \\
\infty+\infty & 0+\infty & \infty+\infty & \infty+\infty & \infty+0 & \infty+10 & \infty+23 & 8+\infty & \infty+\infty & \infty+5 \\
\infty+\infty & \infty+\infty & 0+\infty & \infty+\infty & \infty+0 & 8+10 & \infty+23 & \infty+\infty & \infty+\infty & \infty+5 \\
\infty+\infty & \infty+\infty & 17+\infty & 0+\infty & \infty+0 & 8+10 & \infty+23 & \infty+\infty & \infty+\infty & \infty+5 \\
\infty+\infty & \infty+\infty & \infty+\infty & 23+\infty & 0+0 & \infty+10 & 16+23 & \infty+\infty & \infty+\infty & \infty+5 \\
\infty+\infty & \infty+\infty & 34+\infty & \infty+\infty & 10+0 & 0+10 & \infty+23 & \infty+\infty & 29+\infty & \infty+5 \\
52+\infty & \infty+\infty & \infty+\infty & \infty+\infty & 23+0 & \infty+10 & 0+23 & 24+\infty & \infty+\infty & \infty+5 \\
32+\infty & \infty+\infty & \infty+\infty & \infty+\infty & \infty+0 & 6+10 & \infty+23 & 0+\infty & \infty+\infty & 19+5 \\
\infty+\infty & 16+\infty & 11+\infty & \infty+\infty & \infty+0 & \infty+10 & \infty+23 & 18+\infty & 0+\infty & \infty+5 \\
\infty+\infty & \infty+\infty & \infty+\infty & \infty+\infty & 5+0 & 5+10 & 9+23 & \infty+\infty & \infty+\infty & 0+5
\end{array}$$

jeb

$$\begin{array}{ccccccccccl}
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 46 & \infty & \infty & \infty & \min = 46 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \min = \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 18 & \infty & \infty & \infty & \infty & \min = 18 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 18 & \infty & \infty & \infty & \infty & \min = 18 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 39 & \infty & \infty & \infty & \min = 0 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 10 & 10 & \infty & \infty & \infty & \infty & \min = 10 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 23 & \infty & 23 & \infty & \infty & \infty & \min = 23 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 16 & \infty & \infty & \infty & 24 & \min = 16 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \min = \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 15 & 32 & \infty & \infty & 5 & \min = 5
\end{array}
\Longrightarrow V^1 = \begin{pmatrix} 46 \\ \infty \\ 18 \\ 18 \\ 0 \\ 10 \\ 23 \\ 16 \\ \infty \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Tā kā $V^1 \neq V^0$, tad pārejam pie nākamā soļa.

2. solis. Sastādām matricu

$$M^2 = \left(\omega_{ij} + V_j^1\right),$$

kuras i-to rindiņu iegūst, saskaitot matricas $\omega(G)$ i-to rindiņas elementus ar attiecīgajiem matricas V^1 elementiem. Matricas M^2 rindiņu minimumi kalpos veidos matricu V^2. Atrodam matricu M^2:

$$\begin{array}{cccccccccc}
0+46 & 28+\infty & \infty+18 & \infty+18 & \infty+0 & \infty+10 & 23+23 & \infty+16 & \infty+\infty & \infty+5 \\
\infty+46 & 0+\infty & \infty+18 & \infty+18 & \infty+0 & \infty+10 & \infty+23 & 8+16 & \infty+\infty & \infty+5 \\
\infty+46 & \infty+\infty & 0+18 & \infty+18 & \infty+0 & 8+10 & \infty+23 & \infty+16 & \infty+\infty & \infty+5 \\
\infty+46 & \infty+\infty & 17+18 & 0+18 & \infty+0 & 8+10 & \infty+23 & \infty+16 & \infty+\infty & \infty+5 \\
\infty+46 & \infty+\infty & \infty+18 & 23+18 & 0+0 & \infty+10 & 16+23 & \infty+16 & \infty+\infty & \infty+5 \\
\infty+46 & \infty+\infty & 34+18 & \infty+18 & 10+0 & 0+10 & \infty+23 & \infty+16 & 29+\infty & \infty+5 \\
52+46 & \infty+\infty & \infty+18 & \infty+18 & 23+0 & \infty+10 & 0+23 & 24+16 & \infty+\infty & \infty+5 \\
32+46 & \infty+\infty & \infty+18 & \infty+18 & \infty+0 & 6+10 & \infty+23 & 0+16 & \infty+\infty & 19+5 \\
\infty+46 & 16+\infty & 11+18 & \infty+18 & \infty+0 & \infty+10 & \infty+23 & 18+16 & 0+\infty & \infty+5 \\
\infty+46 & \infty+\infty & \infty+18 & \infty+18 & 5+0 & 5+10 & 9+23 & \infty+16 & \infty+\infty & 0+5
\end{array}$$

jeb

$$\begin{array}{ccccccccccl}
46 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 46 & \infty & \infty & \infty & \min = 46 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 24 & \infty & \infty & \min = 24 \\
\infty & \infty & 18 & \infty & \infty & 18 & \infty & \infty & \infty & \infty & \min = 18 \\
\infty & \infty & 35 & 18 & \infty & 18 & \infty & \infty & \infty & \infty & \min = 18 \\
\infty & \infty & \infty & 41 & 0 & \infty & 39 & \infty & \infty & \infty & \min = 0 \\
\infty & \infty & 52 & \infty & 10 & 10 & \infty & \infty & \infty & \infty & \min = 10 \\
98 & \infty & \infty & \infty & 23 & \infty & 23 & 40 & \infty & \infty & \min = 23 \\
78 & \infty & \infty & \infty & \infty & 16 & \infty & 16 & \infty & 24 & \min = 16 \\
\infty & \infty & 29 & \infty & \infty & \infty & \infty & 34 & \infty & \infty & \min = 29 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 15 & 32 & \infty & \infty & 5 & \min = 5
\end{array}
\Longrightarrow V^2 = \begin{pmatrix} 46 \\ 24 \\ 18 \\ 18 \\ 0 \\ 10 \\ 23 \\ 16 \\ 29 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Tā kā $V^2 \neq V^1$, tad pārejam pie nākamā soļa.

3. solis. Sastādām matricu

$$M^3 = \left(\omega_{ij} + V_j^2\right),$$

kuras i-to rindiņu iegūst, saskaitot matricas $\omega(G)$ i-to rindiņas elementus ar attiecīgajiem matricas V^2 elementiem. Matricas M^3 rindiņu minimumi kalpos veidos matricu V^3. Atrodam matricu M^3:

$$\begin{array}{cccccccccc}
0+46 & 28+24 & \infty+18 & \infty+18 & \infty+0 & \infty+10 & 23+23 & \infty+16 & \infty+29 & \infty+5 \\
\infty+46 & 0+24 & \infty+18 & \infty+18 & \infty+0 & \infty+10 & \infty+23 & 8+16 & \infty+29 & \infty+5 \\
\infty+46 & \infty+24 & 0+18 & \infty+18 & \infty+0 & 8+10 & \infty+23 & \infty+16 & \infty+29 & \infty+5 \\
\infty+46 & \infty+24 & 17+18 & 0+18 & \infty+0 & 8+10 & \infty+23 & \infty+16 & \infty+29 & \infty+5 \\
\infty+46 & \infty+24 & \infty+18 & 23+18 & 0+0 & \infty+10 & 16+23 & \infty+16 & \infty+29 & \infty+5 \\
\infty+46 & \infty+24 & 34+18 & \infty+18 & 10+0 & 0+10 & \infty+23 & \infty+16 & 29+29 & \infty+5 \\
52+46 & \infty+24 & \infty+18 & \infty+18 & 23+0 & \infty+10 & 0+23 & 24+16 & \infty+29 & \infty+5 \\
32+46 & \infty+24 & \infty+18 & \infty+18 & \infty+0 & 6+10 & \infty+23 & 0+16 & \infty+29 & 19+5 \\
\infty+46 & 16+24 & 11+18 & \infty+18 & \infty+0 & \infty+10 & \infty+23 & 18+16 & 0+29 & \infty+5 \\
\infty+46 & \infty+24 & \infty+18 & \infty+18 & 5+0 & 5+10 & 9+23 & \infty+16 & \infty+29 & 0+5
\end{array}$$

jeb

$$\begin{array}{ccccccccccl}
46 & 52 & \infty & \infty & \infty & \infty & 46 & \infty & \infty & \infty & \min = 46 \\
\infty & 24 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 24 & \infty & \infty & \min = 24 \\
\infty & \infty & 18 & \infty & \infty & 18 & \infty & \infty & \infty & \infty & \min = 18 \\
\infty & \infty & 35 & 18 & \infty & 18 & \infty & \infty & \infty & \infty & \min = 18 \\
\infty & \infty & \infty & 41 & 0 & \infty & 39 & \infty & \infty & \infty & \min = 0 \\
\infty & \infty & 52 & \infty & 10 & 10 & \infty & \infty & 58 & \infty & \min = 10 \\
98 & \infty & \infty & \infty & 23 & \infty & 23 & 40 & \infty & \infty & \min = 23 \\
78 & \infty & \infty & \infty & \infty & 16 & \infty & 16 & \infty & 24 & \min = 16 \\
\infty & 40 & 29 & \infty & \infty & \infty & \infty & 34 & 29 & \infty & \min = 29 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 15 & 32 & \infty & \infty & 5 & \min = 5
\end{array}
\Longrightarrow V^3 = \begin{pmatrix} 46 \\ \boxed{24} \\ 18 \\ 18 \\ 0 \\ 10 \\ 23 \\ 16 \\ 29 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Tā kā $V^3 = V^2$, tad Belmana-Kalabas metodes darbu beidzam! Matrica V^3 ir ne kas cits, kā attālumu matricas $\rho(G)$ piektā aile. Attālums no virsotnes 2 līdz virsotnei 5 ir vienāds ar $\rho(2;5) = V_2^3 = 24$.

Atradīsim visīsāko $(2;5)$-maršrutu. Tā kā

$\Gamma^+(2) = \{8\}$ un

$$V_2^3 - V_8^3 = 24 - 16 = 8 = \omega(2;8),$$

tad $u_{j_1} = 8$;

$\Gamma^+(8) = \{1;6;10\}$ un

$$V_8^3 - V_1^3 = 16 - 46 = -30 \neq 32 = \omega(8;1),$$
$$V_8^3 - V_6^3 = 16 - 10 = 6 = \omega(8;6),$$
$$V_8^3 - V_{10}^3 = 16 - 5 = 11 \neq 19 = \omega(8;10),$$

tad $u_{j_2} = 6$;

$\Gamma^+(6) = \{3;5\}$ un

$$V_6^3 - V_3^3 = 10 - 18 = -8 \neq 34 = \omega(6;3),$$
$$V_6^3 - V_5^3 = 10 - 0 = 10 = \omega(6;5),$$

tad $u_{j_3} = 5$;

tāpēc

$$u_i, u_{j_1}, u_{j_2}, u_{j_3} = u_p \quad \text{jeb} \quad 2, 8, 6, 5$$

ir visīsākais $(2;5)$-maršruts ar garumu $V_2^3 = 24$.

3. Piezīmes

3.1. piezīme. Belmana-Kalabas metodi var pielietot arī orgrafam ar patvaļīgiem svariem, kuram nav negatīva svara kontūru.

3.2. piezīme. Ja virsotne u_p ir sasniedzama no virsotnes u_i $(i \neq p)$, tad Belmana-Forda metode ļauj atrast visīsāko maršrutu no virsotnes u_i līdz virsotnei u_p. ***Kā noteikt, vai virsotne*** u_p ***ir sasniedzama no virsotnes*** u_i***?*** Atbilde uz šo jautājumu ir šāda:

- ja $V_i^q = \infty$, tad virsotne u_p ***nav*** sasniedzama no virsotnes u_i;
- ja $V_i^q \neq \infty$, tad virsotne u_p ***ir*** sasniedzama no virsotnes u_i.

Mūsu piemērā $q = 3$ un $V_i^3 \neq \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, 10)$, tāpēc virsotne $u_p = 5$ ir sasniedzama no jebkuras orgrafa virsotnes.

3.3. piezīme. Visīsākos $(u_i; u_p)$-maršrutus var noteikt arī šādi. Konstruēsim matricu

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \\ \theta_5 \\ \theta_6 \\ \theta_7 \\ \theta_8 \\ \theta_9 \\ \theta_{10} \end{pmatrix},$$

kur θ_i $(i \neq 5)$ ir vienāds ar matricas M^3 i-tās rindiņas elementa M^3_{ij}, kuram $M^3_{ij} = V^3_i$, otro indeksu j, ka $j \neq i$. Ja $i = 5$, tad uzskatām, ka $\theta_i = \theta_5 = 5$.

Tā kā $V_1^3 = 46 = M_{11}^3 = M_{17}^3$, tad $\theta_1 = 7$;
tā kā $V_2^3 = 24 = M_{22}^3 = M_{28}^3$, tad $\theta_2 = 8$;
tā kā $V_3^3 = 18 = M_{33}^3 = M_{36}^3$, tad $\theta_3 = 6$;
tā kā $V_4^3 = 18 = M_{44}^3 = M_{46}^3$, tad $\theta_4 = 6$;
tā kā $V_5^3 = 0 = M_{55}^3$, tad $\theta_5 = 5$;
tā kā $V_6^3 = 10 = M_{65}^3 = M_{66}^3$, tad $\theta_6 = 5$;
tā kā $V_7^3 = 23 = M_{75}^3 = M_{77}^3$, tad $\theta_7 = 5$;
tā kā $V_8^3 = 16 = M_{86}^3 = M_{88}^3$, tad $\theta_8 = 6$;
tā kā $V_9^3 = 29 = M_{93}^3 = M_{99}^3$, tad $\theta_9 = 3$;
tā kā $V_{10}^3 = 5 = M_{10,5}^3 = M_{10,10}^3$, tad $\theta_{10} = 5$.

Tātad

$$\theta = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Tā kā

$$\theta_2 = 8,\ \theta_8 = 6,\ \theta_6 = 5,$$

tad visīsākais (2;5)-maršruts ir

$$2, 8, 6, 5$$

ar garumu

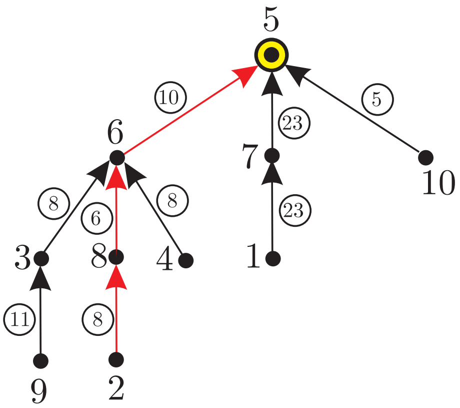
$$V_2^3 = \rho(2;5) = w_{28} + w_{86} + w_{65} = 8 + 6 + 10 = 24.$$

Matrica θ ļauj konstruēt arī visīsāko maršrutu līdz virsotnei $u_p = 5$ orientētu parciālkoku $\widetilde{T}_5$.

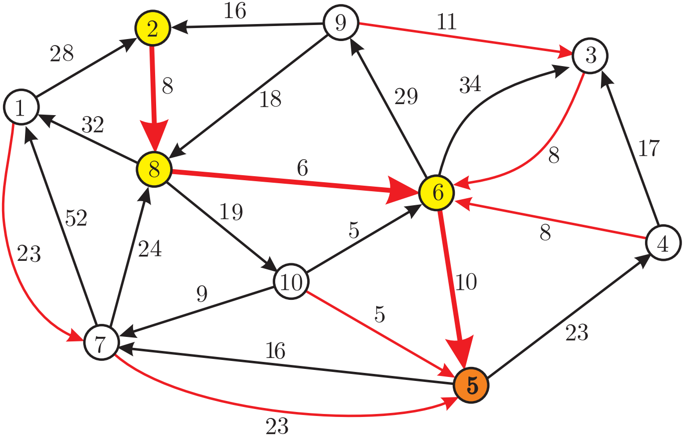
Virsotne u_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Iezīme θ_i	7	8	6	6	5	5	5	6	3	5

Parciālkoka $\widetilde{T}_5$ loki un to svari:

Loki	(1;7)	(2;8)	(3;6)	(4;6)	(6;5)	(7;5)	(8;6)	(9;3)	(10;5)
Svari	23	8	8	8	10	23	6	11	5



2. zīm. Parciālkoks $\widetilde{T}_5$.



16
9
11
2
28
3
8
1
18
29
34
32
8
17
8
6
6
19
52
5
8
4
23
24
10
10
9
5
23
7
16
5
23

3. zīm.

3.4. piezīme. Kā jau iepriekš tika minēts, tad matrica V^3 ir attālumu matricas piektā kolonna:

$$\rho(G) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 28 & 76 & 69 & 46 & 42 & 23 & 36 & 71 & 55 \\ 40 & 0 & 48 & 47 & 24 & 14 & 36 & 8 & 43 & 27 \\ 86 & 53 & 0 & 41 & 18 & 8 & 34 & 55 & 37 & 74 \\ 86 & 53 & 17 & 0 & 18 & 8 & 34 & 55 & 37 & 74 \\ 68 & 76 & 40 & 23 & 0 & 31 & 16 & 40 & 60 & 59 \\ 78 & 45 & 34 & 33 & 10 & 0 & 26 & 47 & 29 & 66 \\ 52 & 75 & 63 & 46 & 23 & 30 & 0 & 24 & 59 & 43 \\ 32 & 51 & 40 & 39 & 16 & 6 & 28 & 0 & 35 & 19 \\ 50 & 16 & 11 & 52 & 29 & 19 & 45 & 18 & 0 & 37 \\ 61 & 50 & 39 & 28 & 5 & 5 & 9 & 33 & 34 & 0 \end{pmatrix}, \; V^3 = \begin{pmatrix} 46 \\ 24 \\ 18 \\ 18 \\ 0 \\ 10 \\ 23 \\ 16 \\ 29 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Ja pielietot dotajam grafam Floida metodi, tad iegūsim matricu P^{10}. Iepriekš atrastā matrica θ *nav vienāda* ar matricas P^{10} piekto kolonnu:

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 5 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 5 & 6 & 8 & 10 & 2 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 4 & 6 & 4 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 6 & 5 & 6 & 6 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 5 & 7 & 8 & 7 & 7 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 6 & 5 & 6 & 8 & 10 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 9 & 5 & 6 & 3 & 5 & 9 & 9 & 8 \\ 7 & 9 & 6 & 5 & 10 & 10 & 10 & 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}, \ \theta = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 6 \\ 6 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$