DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

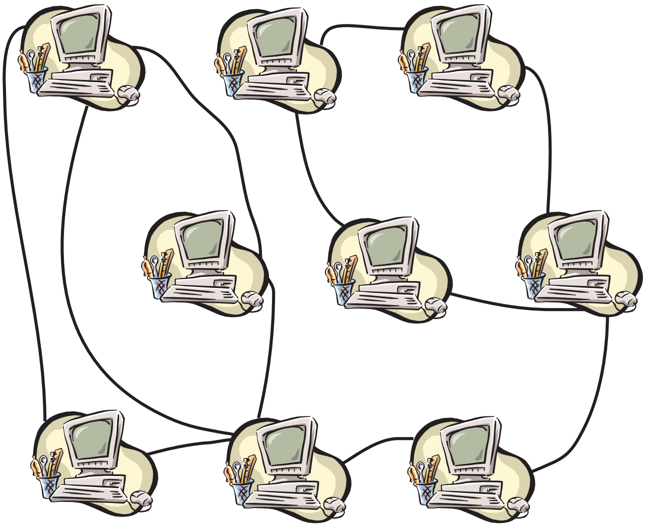
Grafa virsotņu un šķautņu sakarīgums

2020. gada 27. septembris

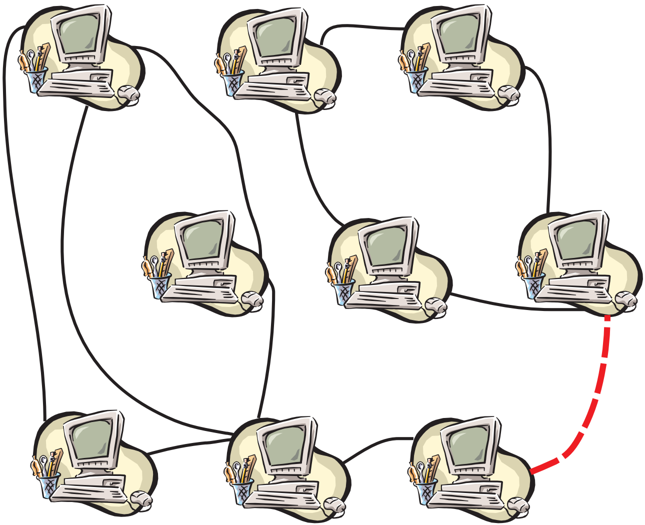
2020

Saturs

Vai šāds datortīkls ir drošs attiecībā pret kanālu iziešanu no ierindas (saprotot ar to jebkuru divu datoru spēju apmainīties ar informāciju pēc kanālu iziešanas no ierindas)?



1. zīm.



2. zīm.

1. Uzdevums par tīkla drošību

Apskatīsim tīklu, kas sastāv no informācijas glabāšanas un apstrādes centriem, daži no kuriem ir saistīti ar informācijas apmaiņas kanāliem. Informācijas apmaiņa starp diviem centriem notiek vai nu pa šos centrus savienojošo kanālu, ja, protams, tāds eksistē, vai arī izmantojot citus centrus un kanālus. Tīklu uzskata par darboties spējīgu, ja jebkuri divi centri var apmainīties ar informāciju. Ļoti svarīga ir tīkla drošība, t.i., tīkla darboties spējas saglabāšanās, izejot no ierindas tīkla elementiem, t.i., tīkla centriem vai (un) tīkla kanāliem. Mazāk drošs ir tāds tīkls, kurš kļūst darboties nespējīgs, izejot no ierindas mazākam tīkla elementu skaitam. Dotajam tīklam piekārtosim grafu, kura virsotnes ir centri, bet šķautnes ir kanāli. Tad darboties spējīgam tīklam atbilst sakarīgs grafs. Tīkla drošību grafu teorijas valodā raksturo grafa virsotņu un šķautņu sakarīgums.

2. Grafa virsotņu sakarīguma skaitlis

Grafa G virsotni v sauc par **sadales punktu** (vai **sasaistes punktu**), ja grafam $G - v$ ir vairāk komponenšu nekā grafam G.

- Ja v ir sakarīga grafa G sadales punkts, tad grafs $G - v$ ir nesakarīgs.

Par **grafa** G **virsotņu sakarīguma skaitli** $\varkappa(\mathbf{G})$ sauc vismazāko grafa G virsotņu skaitu, kuras atņemot no grafa G, iegūst nesakarīgu vai vienvirsotņu grafu.

- $\varkappa(G) = 0$ tad un tikai tad, kad G ir nesakarīgs vai vienvirsotņu grafs.
- $\varkappa(G) = 1$ tad un tikai tad, kad vai nu $G = K_2$, vai arī G ir sakarīgs grafs ar vismaz trim virsotnēm, kuram eksistē sadales punkts.

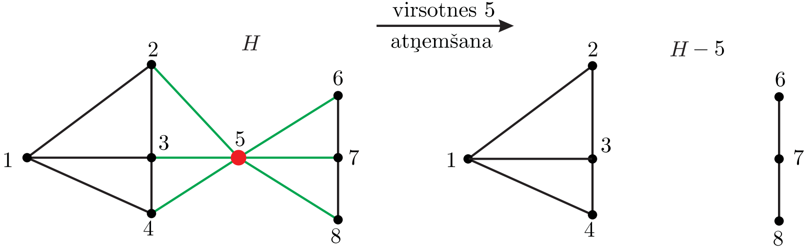
- $\varkappa(G) = k$, kur $k \geq 2$, tad un tikai tad, kad G ir sakarīgs grafs ar vismaz $k+1$ virsotnēm, pie tam
   1. atņemot no grafa G jebkuras tā s $(1 \leq s < k)$ virsotnes, iegūst sakarīgu grafu (ar vismaz divām virsotnēm),
   2. atņemot no grafa G kādas tā k virsotnes, iegūst nesakarīgu vai vienvirsotņu grafu.

Atzīmēsim, ka nosacījumu 1. var aizstāt ar ekvivalentu nosacījumu

$1'$. atņemot no grafa G jebkuras tā $k-1$ virsotnes, iegūst sakarīgu grafu (ar vismaz divām virsotnēm).

► Acīmredzot, no 1. izriet $1'$. Pierādīsim, ka no $1'$. izriet 1. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tādas s $(1 \leq s < k)$ virsotnes $u_1, u_2, \ldots, u_s$, ka, atņemot šīs virsotnes no grafa G, iegūstam nesakarīgu grafu. Ja $s = k-1$, tad nonākam pretrunā ar nosacījumu $1'$. Pieņemsim, ka $(1 \leq s < k-1)$. Fiksēsim kādas $(k-1)-s$ virsotnes $u_{s+1}, \ldots, u_{k-1}$. Tad, atņemot no grafa G $k-1$ virsotnes $u_1, \ldots, u_{k-1}$, iegūsim nesakarīgu grafu, jo virsotnes atņemšanas operācija grafa komponenšu skaitu nesamazina. Ieguvām pretrunu ar nosacījumu $1'$. Tātad pieņēmums nav patiess, un no 1′. izriet 1.◀

2.1. piemērs. $\varkappa(K_1) = 0$, $\varkappa(K_n) = n - 1$ $(n \geq 1)$, $\varkappa(C_n) = 2$ $(n \geq 3)$.



3. zīm. Grafs H, kura virsotne 5 ir tā sadales punkts

2.2. piemērs. 3. zīm. attēlotais grafs H kļūs nesakarīgs, ja no tā atņemt virsotni 5. Tādēļ $\varkappa(H) = 1$. Virsotne 5 ir grafa H sadales punkts.

No iepriekš teiktā izriet, ka grafa G virsotņu sakarīguma skaitli $\varkappa(G)$ atrod šādi.

1) Ja G ir nesakarīgs vai vienvirsotņu grafs, tad $\varkappa(G) = 0$. Ja G ir sakarīgs grafs ar vismaz divām virsotnēm, tad $\varkappa(G) \geq 1$.

2) Pieņemsim, ka G ir sakarīgs grafs ar vismaz divām virsotnēm. Tātad $\varkappa(G) \geq 1$.

   Ja $G = K_2$, tad $\varkappa(G) = 1$, jo saskaņā ar 3.1. teorēmu

$$\varkappa(G) \leq \delta(G) = \min_{u \in VG} \deg u = 1.$$

   Pieņemsim, ka G ir sakarīgs grafs ar vismaz trim virsotnēm.

   Ja eksistē tāda virsotne, ka, atņemot šo virsotni, iegūst nesakarīgu grafu, tad $\varkappa(G) = 1$.

   Ja, atņemot jebkuru grafa virsotni, nonākam pie sakarīga grafa, tad $\varkappa(G) \geq 2$.

3) Pieņemsim, ka G ir tāds sakarīgs grafs ar vismaz trim virsotnēm, ka, atņemot jebkuru grafa virsotni, nonākam pie sakarīga grafa. Tātad $\varkappa(G) \geq 2$.

Ja grafam G ir tieši trīs virsotnes, tad $\varkappa(G) = 2$, jo saskaņā ar 3.1. teorēmu

$$\varkappa(G) \leq \delta(G) = \min_{u \in VG} \deg u \leq 2.$$

Pieņemsim, ka G ir tāds sakarīgs grafs ar vismaz četrām virsotnēm, ka, atņemot jebkuru grafa virsotni, nonākam pie sakarīga grafa.

Ja eksistē tādas divas virsotnes, ka, atņemot šīs virsotnes, iegūst nesakarīgu grafu, tad $\varkappa(G) = 2$.

Ja, atņemot jebkuras divas grafa virsotnes, nonākam pie sakarīga grafa, tad $\varkappa(G) \geq 3$.

4) Pieņemsim, ka G ir tāds sakarīgs grafs ar vismaz četrām virsotnēm, ka, atņemot jebkuras divas grafa virsotnes, nonākam pie sakarīga grafa. Tātad $\varkappa(G) \geq 3$.

Ja grafam G ir tieši četras virsotnes, tad $\varkappa(G) = 3$, jo saskaņā ar 3.1. teorēmu

$$\varkappa(G) \leq \delta(G) = \min_{u \in VG} \deg u \leq 3.$$

Pieņemsim, ka G ir tāds sakarīgs grafs ar vismaz piecām virsotnēm, ka, atņemot jebkuras divas grafa virsotnes, nonākam pie sakarīga grafa.

Ja eksistē tādas trīs virsotnes, ka, atņemot šīs virsotnes, iegūst nesakarīgu grafu, tad $\varkappa(G) = 3$.

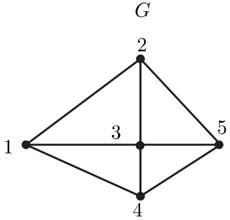
Ja, atņemot jebkuras trīs grafa virsotnes, nonākam pie sakarīga grafa, tad $\varkappa(G) \geq 4$.

Tā grafam G ar n virsotnēm vienmēr ir spēkā $0 \leq \varkappa(G) \leq n - 1$, tad pēc galīga skaita soļu atradīsim $\varkappa(G)$. Atzīmēsim, ņemot vērā 3.1. teorēmu, ka jebkuram grafam G ir spēkā

$$0 \leq \varkappa(G) \leq \delta(G) \leq n - 1,$$

kur $\delta(G)$ ir grafa G minimālā virsotņu pakāpe.

2.3. piemērs. Atradīsim 4. zīm. attēlotā grafa G virsotņu sakarīguma skaitli $\varkappa(G)$.

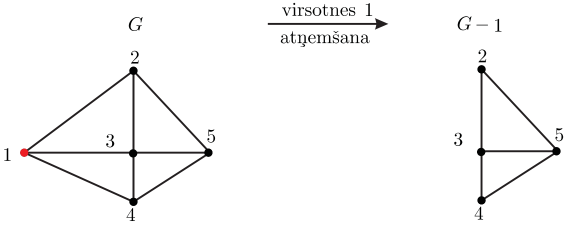


4. zīm.

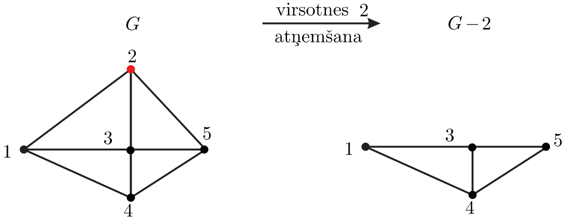
1. Tā kā G ir sakarīgs grafs ar 5 virsotnēm, tad $\varkappa(G) \geq 1$. Tā kā grafa virsotņu minimālā pakāpe $\delta(G) = 3$, tad saskaņā ar 3.1. teorēmu $\varkappa(G) \leq 3$. Tātad

$$1 \leq \varkappa(G) \leq 3.$$

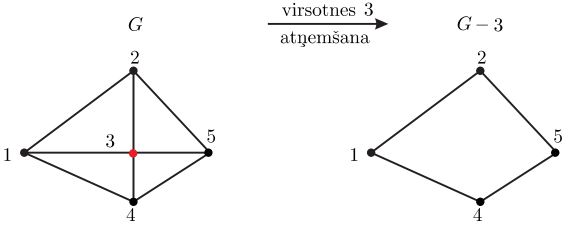
2. Atņemsim no grafa G vienu virsotni.



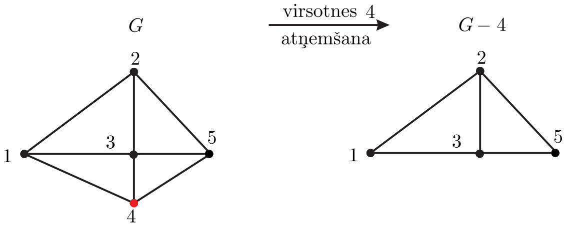
5. zīm. Grafs $G - 1$ ir sakarīgs



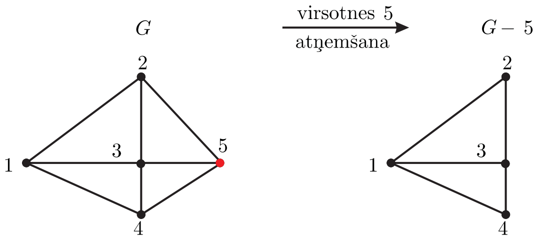
6. zīm. Grafs $G - 2$ ir sakarīgs



7. zīm. Grafs $G - 3$ ir sakarīgs



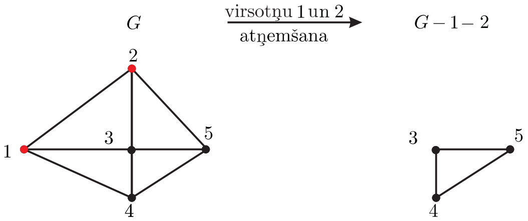
8. zīm. Grafs $G - 4$ ir sakarīgs



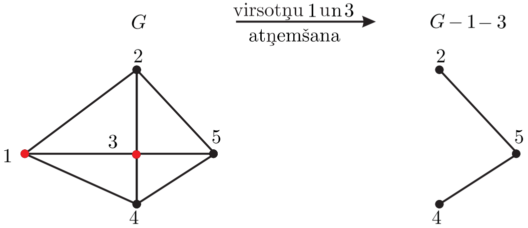
9. zīm. Grafs $G - 5$ ir sakarīgs

Tātad $\varkappa(G) \geq 2$, jo, atņemot no grafa G jebkuru virsotni, iegūstam sakarīgu grafu.

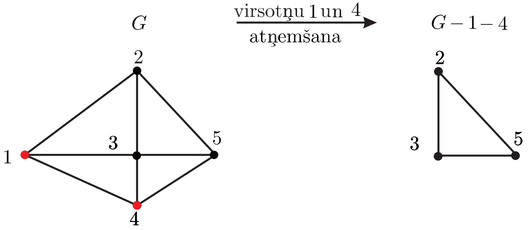
3. Atņemsim no grafa G divas virsotnes.



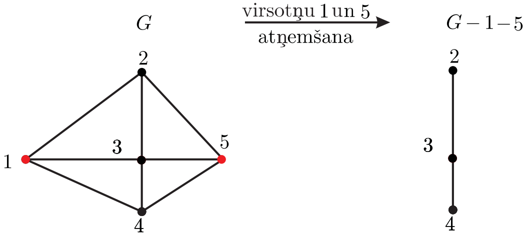
10. zīm. Grafs $G-1-2$ ir sakarīgs



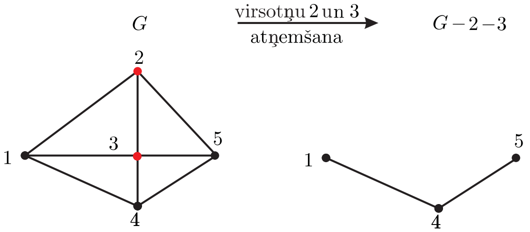
11. zīm. Grafs $G-1-3$ ir sakarīgs



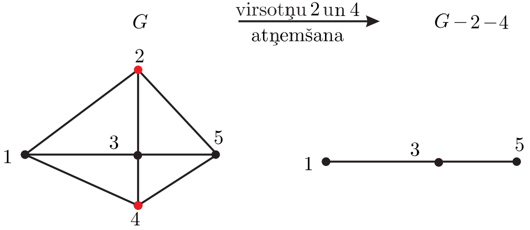
12. zīm. Grafs $G - 1 - 4$ ir sakarīgs



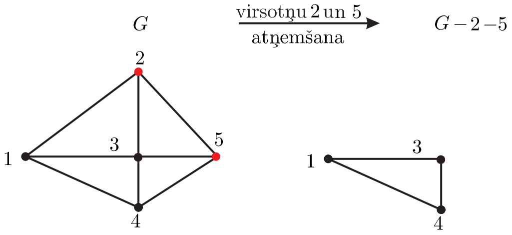
13. zīm. Grafs $G - 1 - 5$ ir sakarīgs



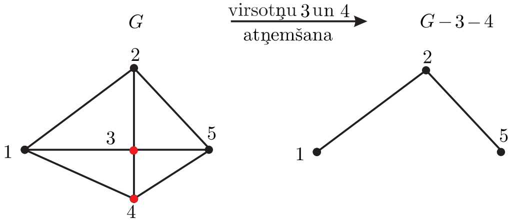
14. zīm. Grafs $G - 2 - 3$ ir sakarīgs



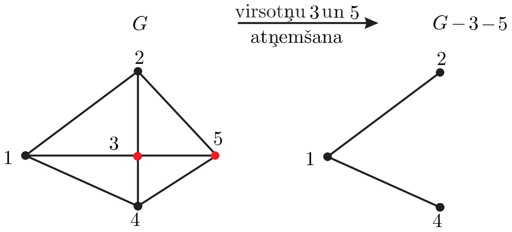
15. zīm. Grafs $G - 2 - 4$ ir sakarīgs



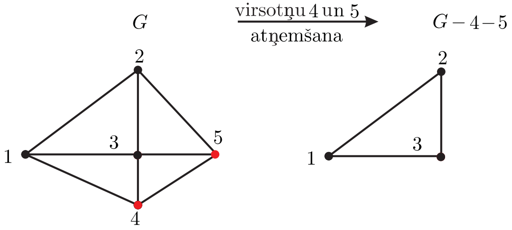
16. zīm. Grafs $G - 2 - 5$ ir sakarīgs



17. zīm. Grafs $G - 3 - 4$ ir sakarīgs



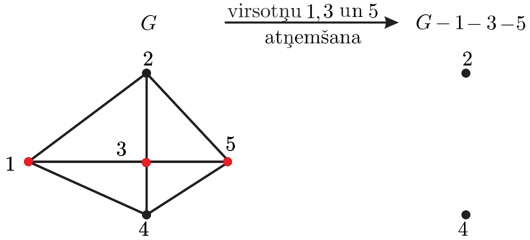
18. zīm. Grafs $G - 3 - 5$ ir sakarīgs



19. zīm. Grafs $G - 4 - 5$ ir sakarīgs

Tātad $\varkappa(G) \geq 3$, jo, atņemot no grafa G jebkuras 2 virsotnes, iegūstam sakarīgu grafu. Tā kā $\varkappa(G) \leq 3$, tad $\varkappa(G) = 3$.

Atzīmēsim, ka no $\varkappa(G) = 3$ izriet, ka eksistē tādas 3 grafa G virsotnes, ka, atņemot šīs virsotnes, iegūsim nesakarīgu grafu. Tiešām, ja no grafa G atņemt, piemēram, virsotnes 1, 3 un 5, tad iegūsim nesakarīgu grafu (skat. 20. zīm.).



20. zīm. Grafs $G-1-3-5$ ir nesakarīgs

3. Grafa šķautņu sakarīguma skaitlis

Grafa G šķautni e sauc par **tiltu**, ja grafam $G - e$ ir vairāk komponenšu nekā grafam G. Ja e ir sakarīga grafa G tilts, tad grafs $G - e$ ir nesakarīgs.

Tilta galavirsotne ir sadales punkts, ja grafā ir citas šai virsotnei incidentas virsotnes.

Pieņemsim, ka G ir sakarīgs grafs ar vismaz vienu šķautni (tātad grafam G ir vismaz divas virsotnes). Par **grafa G šķautņu sakarīguma skaitli $\lambda(\mathbf{G})$** sauc vizmazāko grafa G šķautņu skaitu, kuras atņemot no grafa G, iegūst nesakarīgu grafu. Uzskata, ka nesakarīga grafa vai vienvirsotņu grafa šķautņu sakarīguma skaitlis ir vienāds ar 0.

- $\lambda(G) = 0$ tad un tikai tad, kad G ir nesakarīgs vai vienvirsotņu grafs.
- $\lambda(G) = 1$ tad un tikai tad, kad G ir sakarīgs grafs, kuram eksistē tilts (un līdz ar to grafam G ir vismaz divas virsotnes).

- $\lambda(G) = k$, kur $k \geq 2$, tad un tikai tad, kad G ir sakarīgs grafs ar vismaz $k+1$ virsotnēm, pie tam
    1. atņemot no grafa G jebkuras tā s $(1 \leq s < k)$ šķautnes, iegūst sakarīgu grafu,
    2. atņemot no grafa G kādas tā k šķautnes, iegūst nesakarīgu grafu.
- $\lambda(K_1) = 0$, $\lambda(K_n) = n-1$ $(n \geq 1)$, $\lambda(C_n) = 2$ $(n \geq 3)$.

Spriežot līdzīgi, kā 9. lappusē, var pierādīt, ka nosacījumu 1. var aizstāt ar ekvivalentu nosacījumu

1′. atņemot no grafa G jebkuras tā $k-1$ šķautnes, iegūst sakarīgu grafu.

No iepriekš teiktā izriet, ka grafa G šķautņu sakarīguma skaitli $\lambda(G)$ atrod šādi.

1) Ja G ir nesakarīgs vai vienvirsotņu grafs, tad $\lambda(G) = 0$. Ja G ir sakarīgs grafs ar vismaz divām virsotnēm, tad $\lambda(G) \geq 1$.

2) Pieņemsim, ka G ir sakarīgs grafs ar vismaz divām virsotnēm. Tātad $\lambda(G) \geq 1$.

   Ja $G = K_2$, tad $\lambda(G) = 1$, jo saskaņā ar 3.1. teorēmu

$$\lambda(G) \leq \delta(G) = \min_{u \in VG} \deg u = 1.$$

   Pieņemsim, ka G ir sakarīgs grafs ar vismaz trim virsotnēm.

   Ja eksistē tāda šķautne, ka, atņemot šo šķautni, iegūst nesakarīgu grafu, tad $\lambda(G) = 1$.

   Ja, atņemot jebkuru grafa šķautni, nonākam pie sakarīga grafa, tad $\lambda(G) \geq 2$.

3) Pieņemsim, ka G ir tāds sakarīgs grafs ar vismaz trim virsotnēm, ka, atņemot jebkuru grafa šķautni, nonākam pie sakarīga grafa. Tātad $\lambda(G) \geq 2$.

Ja grafam G ir tieši trīs virsotnes, tad $\varkappa(G) = 2$, jo saskaņā ar 3.1. teorēmu

$$\lambda(G) \le \delta(G) = \min_{u \in VG} \deg u \le 2.$$

Pieņemsim, ka G ir tāds sakarīgs grafs ar vismaz četrām virsotnēm, ka, atņemot jebkuru grafa šķautni, nonākam pie sakarīga grafa.

Ja eksistē tādas divas šķautnes, ka, atņemot šīs šķautnes, iegūst nesakarīgu grafu, tad $\lambda(G) = 2$.

Ja, atņemot jebkuras divas grafa šķautnes, nonākam pie sakarīga grafa, tad $\lambda(G) \ge 3$.

4) Pieņemsim, ka G ir tāds sakarīgs grafs ar vismaz četrām virsotnēm, ka, atņemot jebkuras divas grafa šķautnes, nonākam pie sakarīga grafa. Tātad $\lambda(G) \ge 3$.

Ja grafam G ir tieši četras virsotnes, tad $\varkappa(G) = 3$, jo saskaņā ar 3.1. teorēmu

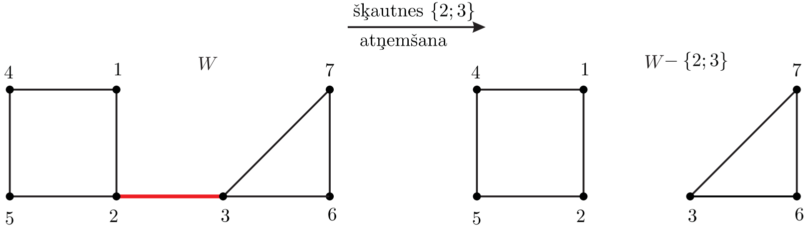
$$\lambda(G) \le \delta(G) = \min_{u \in VG} \deg u \le 3.$$

Pieņemsim, ka G ir tāds sakarīgs grafs ar vismaz piecām virsotnēm, ka, atņemot jebkuras divas grafa šķautnes, nonākam pie sakarīga grafa.

Ja eksistē tādas trīs šķautnes, ka, atņemot šīs šķautnes, iegūst nesakarīgu grafu, tad $\lambda(G) = 3$.

Ja, atņemot jebkuras trīs grafa šķautnes, nonākam pie sakarīga grafa, tad $\lambda(G) \geq 4$.

Tā grafam G ar n virsotnēm vienmēr ir spēkā $0 \leq \varkappa(G) \leq n-1$, tad pēc galīga skaita soļu atradīsim $\lambda(G)$.



21. zīm. Grafs W, kura šķautne $\{2;5\}$ ir tā tilts

3.1. piemērs. 21. zīm. attēlotais grafs W kļūs nesakarīgs, ja no tā atņemt šķautni $\{2;3\}$. Tādēļ $\lambda(W)=1$. Šķautne $\{2;3\}$ ir grafa G tilts, bet šīs šķautnes galavirsotnes 2 un 3 ir grafa G sadales punkti.

3.2. piemērs. Ja atņemt patvaļīgu šķautni no 3. zīm. attēlotā grafa H, tad iegūsim sakarīgu grafu. Taču, ja no grafa H atņemt, piemēram, šķautnes $\{6;5\}$ un $\{6;7\}$, tad iegūsim nesakarīgu grafu. Tātad $\lambda(H)=2$.

3.1. piezīme. Atgriežoties pie uzdevuma par tīkla drošību, var secināt, ka centri, kas atbilst grafa sadales punktiem, un kanāli, kas atbilst grafa tiltiem, ir tīkla visnedrošākās vietas - atliek vismaz vienam šādam centram vai kanālam iziet no ierindas un tīkls kļūs darboties nespējīgs.

3.1. teorēma. *Jebkuram grafam G ir spēkā nevienādības*

$$\varkappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G),$$

kur $\delta(G)$ ir grafa G virsotņu minimālā pakāpe.

Tātad, ja $\varkappa(G) = \delta(G)$, tad $\lambda(G) = \varkappa(G)$.

3.3. piemērs. Grafa G (skat. 4. zīm.), kuru apskatījām 2.3. piemērā, virsotņu sakarīguma sskaitlis $\varkappa(G) = 3$, bet minimālā virsotņu pakāpe $\delta(G) = 3$, tāpēc $\lambda(G)$.

4. Datorprogrammas *Mathematica* izmantošana

Izmantojot datorprogrammu *Mathematica*, var atrast dotā grafa:

- virsotņu sakarīguma skaitli,
- šķautņu sakarīguma skaitli,
- sadales punktus,
- tiltus.

Ar *Mathematica 5.2* atradīsim grafu H, G un W (skat. 3. zīm., 4. zīm. un 21. zīm. attiecīgi) virsotņu sakarīguma skaitli, šķautņu sakarīguma skaitli, sadales punktus un tiltus.

1. Izveidojam jaunu *Mathematica* failu, piemēram,
`vertex-edge-connectivity.nb`

2. Šajā failā pievienojam paketi:

```
In[1]:= <<DiscreteMath`Combinatorica`
```

Grafs H (skat. 3. zīm.)

3. Lai izveidotu grafu H, vispirms izveidojam tukšo grafu ar 8 virsotnēm:

In[2]:= O8=EmptyGraph[8]

Out[2]:= –Graph:<0,8,Undirected>–

4. Izveidojam grafu H:

In[3]:= H=AddEdges[O8,{{1;2},{1;3},{1;4},{2;3},{3;4},{2;5},{3;5},{4;5},{5;6},{5;7},{5;8},{6;7},{7;8}}]

Out[3]:= –Graph:<8,5,Undirected>–

tukšajam grafam $O8$ pievienojot šķautnes

$$\{1;2\},\{1;3\},\{1;4\},\{2;3\},\{3;4\},\{2;5\},\{3;5\},\{4;5\},$$
$$\{5;6\},\{5;7\},\{5;8\},\{6;7\},\{7;8\}.$$

5. Atrodam grafa H virsotņu sakarīguma skaitli:

In[4]:= VertexConnectivity[H]

Out[4]:= 1

6. Atrodam grafa H šķautņu sakarīguma skaitli:

In[5]:= EdgeConnectivity[H]

Out[5]:= 2

7. Atrodam grafa H sadales punktu 5:

In[6]:= ArticulationVertices[H]

Out[6]:= {5}

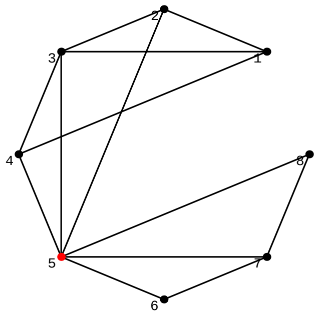
8. Grafam H nav tiltu:

In[7]:= Bridges[H]

Out[7]:= {}

9. Uzzīmējam grafu H un izdalām sarkanā krāsā tā sadales punktu 5:

In[8]:= ShowGraph[SetGraphOptions[H,{{5, VertexColor → Red}}],
VertexNumber → On]



22. zīm. Ar *Mathematica* uzzīmēts grafs H

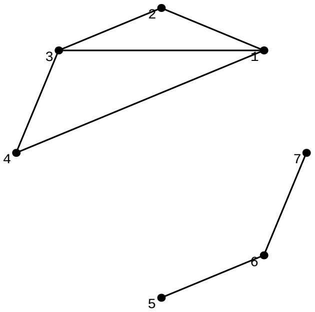
Out[8]:= –Graphics–

10. Izveidojam grafu $H - 5$:

In[9]:= Hdelete5=DeleteVertex[H,5]

11. Uzzīmējam grafu $H - 5$:

In[10]:= ShowGraph[Hdelete5,VertexNumber→On]



23. zīm. Ar *Mathematica* uzzīmēts grafs $H - 5$

Out[10]:= –Graphics–

Grafs G (skat. 4. zīm.)

12. Lai izveidotu grafu G, vispirms izveidojam tukšo grafu ar 5 virsotnēm:

In[11]:= O5=EmptyGraph[5]

Out[11]:= –Graph:<0,5,Undirected>–

13. Izveidojam grafu G:

In[12]:= G=AddEdges[O5,{{1; 2}, {1; 3}, {1; 4}, {2; 3}, {3; 4}, {2; 5}, {3; 5}, {4; 5}}]

Out[12]:= –Graph:<13,8,Undirected>–

tukšajam grafam $O5$ pievienojot šķautnes

$$\{1;2\}, \{1;3\}, \{1;4\}, \{2;3\}, \{3;4\}, \{2;5\}, \{3;5\}, \{4;5\}.$$

14. Atrodam grafa G virsotņu sakarīguma skaitli:

In[13]:= VertexConnectivity[G]

Out[13]:= 3

15. Atrodam grafa G šķautņu sakarīguma skaitli:

In[14]:= EdgeConnectivity[G]

Out[14]:= 3

16. Grafam G nav sadales punktu:

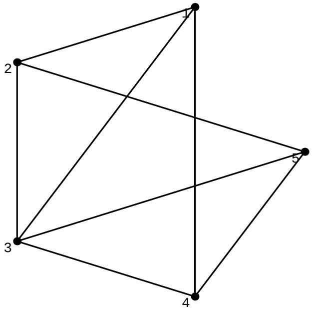
```
In[15]:= ArticulationVertices[G]
Out[15]:= {}
```

17. Grafam G nav tiltu:

```
In[16]:= Bridges[G]
Out[16]:= {}
```

18. Uzzīmējam grafu G:

```
In[17]:= ShowGraph[G,VertexNumber→On]
```



24. zīm. Ar *Mathematica* uzzīmēts grafs G

Out[17]:= –Graphics–

Grafs W (skat. 21. zīm.)

19. Lai izveidotu grafu W, vispirms izveidojam tukšo grafu ar 7 virsotnēm:

In[18]:= O7=EmptyGraph[7]

Out[18]:= –Graph:<0,7,Undirected>–

20. Izveidojam grafu W:

In[19]:= W=AddEdges[O7,{{4; 1}, {4; 5}, {5; 2}, {1; 2}, {2; 3}, {3; 7}, {3; 6}, {6; 7}}]

Out[19]:= –Graph:<8,7,Undirected>–

tukšajam grafam $O7$ pievienojot šķautnes

$$\{4;1\},\{4;5\},\{5;2\},\{1;2\},\{2;3\},\{3;7\},\{3;6\},\{6;7\}.$$

21. Atrodam grafa W virsotņu sakarīguma skaitli:

In[20]:= VertexConnectivity[W]

Out[20]:= 1

22. Atrodam grafa W šķautņu sakarīguma skaitli:

In[21]:= EdgeConnectivity[W]

Out[21]:= 1

23. Atrodam grafa W sadales punktus:

In[22]:= ArticulationVertices[W]

Out[22]:= $\{2, 3\}$

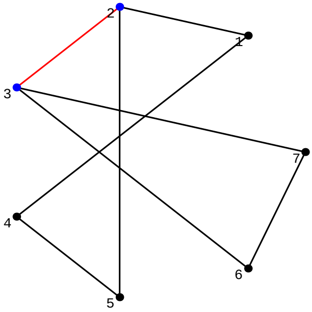
24. Atrodam grafa W tiltu:

In[23]:= Bridges[W]

Out[23]:= $\{\{2, 3\}\}$

25. Uzzīmējam grafu W; izdalām sarkanā krāsā tā tiltu $\{2; 3\}$; izdalām zilā krāsā tā sadales punktus 2 un 3:

In[24]:= ShowGraph[SetGraphOptions[W, {{{2, 3}, EdgeColor → Red},
{2, 3, VertexColor → Blue}}], VertexNumber → On]



25. zīm. Ar *Mathematica* uzzīmēts grafs W

Out[24]:= –Graphics–

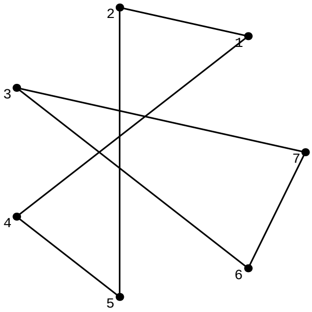
26. Izveidojam grafu $H - \{2; 3\}$:

In[25]:= Wdeleteedge23=DeleteEdge[W,{2, 3}]

Out[25]:= –Graph:<7,7,Undirected>–

27. Uzzīmējam grafu $H - \{2; 3\}$:

In[26]:= ShowGraph[Wdeleteedge23,VertexNumber→On]



26. zīm. Ar *Mathematica* uzzīmēts grafs $W - \{2; 3\}$

Out[26]:= –Graphics–

5. Virsotņu k-sakarīgi grafi

Grafu G sauc par **virsotņu k-sakarīgu grafu** (vai **k-sakarīgu grafu**), ja $\varkappa(G) \geq k$.

- Grafs G ir vienkārtsakarīgs, t.i., $\varkappa(G) \geq 1$, tad un tikai tad, kad tas ir sakarīgs grafs ar vismaz divām virsotnēm.
- Grafs G ir divkārtsakarīgs, t.i., $\varkappa(G) \geq 2$, tad un tikai tad, kad tas ir sakarīgs grafs ar vismaz trim virsotnēm, ka, atņemot jebkuru grafa virsotni, nonākam pie sakarīga grafa. Citiem vārdiem sakot, grafs G ir divkārtsakarīgs tad un tikai tad, kad tas ir sakarīgs grafs ar vismaz trim virsotnēm, kuram nav sadales punktu.
- Grafs G ir k-sakarīgs ($k \geq 2$), t.i., $\varkappa(G) \geq k$, tad un tikai tad, kad tas ir sakarīgs grafs ar vismaz $k+1$ virsotnēm, ka, atņemot jebkuras tā $k-1$ virsotnes, nonākam pie sakarīga grafa.

5.1. teorēma. **[Vitnija teorēma, 1952. g.]** [2, 147. lpp.] *Grafs G ir k-sakarīgs tad un tikai tad, kad jebkuras divas tā dažādas virsotnes savieno vismaz k savstarpēji nekrustojošās ķēdes.*

6. Šķautņu k-sakarīgi grafi

Grafu G sauc par **šķautņu k-sakarīgu grafu**, ja $\lambda(G) \geq k$.

- Grafs G ir šķautņu vienkārtsakarīgs, t.i., $\lambda(G) \geq 1$, tad un tikai tad, kad tas ir sakarīgs grafs ar vismaz divām virsotnēm.
- Grafs G ir šķautņu divkārtsakarīgs, t.i., $\lambda(G) \geq 2$, tad un tikai tad, kad tas ir sakarīgs grafs ar vismaz trim virsotnēm, ka, atņemot jebkuru grafa šķautni, nonākam pie sakarīga grafa. Citiem vārdiem sakot, grafs G ir šķautņu divkārtsakarīgs tad un tikai tad, kad tas ir sakarīgs grafs ar vismaz trim virsotnēm, kuram nav tiltu.
- Grafs G ir šķautņu k-sakarīgs ($k \geq 2$), t.i., $\lambda(G) \geq k$, tad un tikai tad, kad tas ir sakarīgs grafs ar vismaz $k + 1$ virsotnēm, ka, atņemot jebkuras tā $k - 1$ šķautnes, nonākam pie sakarīga grafa.

Alfabētiskais rādītājs

Zīmējumu rādītājs

Noderīgas saites

[1] **Weisstein, Eric W.** "Graph Theory" From MathWorld–A Wolfram Web Resource
http://mathworld.wolfram.com/topics/GraphTheory.html

[2] **Sriram V. Pemmaraju and Steven S. Skiena.** This package contains all the programs from the book, "Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory in Mathematica", by Sriram V. Pemmaraju and Steven S. Skiena, Cambridge University Press, 2003.
http://www.cs.uiowa.edu/~sriram/Combinatorica/NewCombinatorica.m
Pilns *Mathematica* paketes *Combinatorica* apraksts.

[3] **Marco Liverani.** Grafi e ottimizzazione combinatoria con Mathematica.
www.mat.uniroma3.it/users/liverani/doc/mathematica_grafi.pdf
Kompakts *Mathematica* paketes *Combinatorica* apraksts. Apskatīta tikai daļa komandu. Resurss ir itāļu valodā.

Literatūra

[1] J. Dambītis, Modernā grafu teorija, Datorzinību Centrs, Rīga, 2002. http://susurs.mii.lu.lv/Graphlab/Education/grafuTeorijaLatvija/DAMBITIS/

[2] В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич, Лекции по теории графов, Москва, Наука, 1990. 43