DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Grafa virsotnes pakāpe

2020. gada 27. septembris

2020

Saturs

1. Grafa virsotnes pakāpes definīcija

Aplūkosim grafu $G = (VG; EG)$.

Par **grafa** G **virsotnes** u **pakāpi** sauc visu virsotnei u incidento šķautņu skaitu (t.i., visu virsotnes u blakusvirsotņu skaitu) un to apzīmē ar $\deg_G u$ vai $\deg u$. Tātad $\deg u = |N(u)|$, kur $N(u)$ - virsotnes u apkārtne. Acīmredzot, $0 \leq \deg u \leq n - 1$, kur $n = |G|$.

Grafa G virsotņu maksimālo un minimālo pakāpi apzīmē attiecīgi ar simboliem $\Delta(G)$ un $\delta(G)$:

$$\Delta(G) = \max_{u \in VG} \deg u, \quad \delta(G) = \min_{u \in VG} \deg u.$$

Acīmredzot, jebkurai grafa G virsotnei u ir spēkā nevienādības

$$\delta(G) \leq \deg u \leq \Delta(G).$$

Apskatīsim grafu G ar n virsotnēm. Virsotni $u \in VG$ sauc par

- **izolētu virsotni**, ja $\deg u = 0$;
- **gala virsotni** vai **nokarenu virsotni**, ja $\deg u = 1$;
- **dominējošo virsotni**, ja $\deg u = n - 1$;

Šķautni, kas ir incidenta gala virsotnei, sauc par **gala šķautni**.
Par **grafa G vidējo pakāpi** sauc

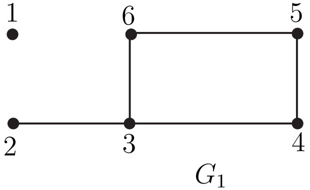
$$\overline{\deg}(G) = \frac{1}{|VG|} \sum_{u \in VG} \deg u.$$

Var pierādīt, ka

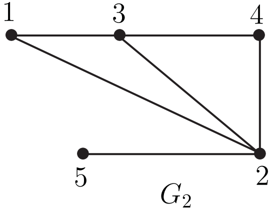
$$\delta(G) \leq \overline{\deg}(G) \leq \Delta(G).$$

2. Piemēri

1. zīmējumā attēlotā grafa G_1 virsotņu pakāpes: $\deg 1 = 0$, $\deg 2 = 1$, $\deg 3 = 3$, $\deg 4 = 2$, $\deg 5 = 2$, $\deg 6 = 2$. Grafā G_1 virsotne 1 ir izolēta virsotne, virsotne 2 - gala virsotne. Dominējošo virsotņu grafā G_1 nav. 2. zīmējumā attēlotā grafa G_2 virsotne 5 ir gala virsotne, virsotne 2 - dominējošā, jo $\deg 2 = 4$. Grafam G_2 nav izolētu virsotņu.



1. zīm.



2. zīm.

3. Lemma par rokasspiedieniem

3.1. teorēma.

[Lemma par rokasspiedieniem]

Grafa visu virsotņu pakāpju summa ir pāra skaitlis, kurš ir vienāds ar divkāršotu šķautņu skaitu, t.i.,

$$\sum_{u \in VG} \deg u = 2|EG|.$$

Šo lemmu var interpretēt šādi. Tā kā katrā rokasspiedienā piedalās divas rokas, tad visos rokasspiedienos kopējais paspiesto roku skaits ir pāra skaitlis, pie tam katra roka tiek uzskaitīta tik reižu, cik rokasspiedienos tā piedalījās.

No Lemmas par rokasspiedieniem izriet, ka

$$\overline{\deg}(G) = \frac{1}{|VG|} \sum_{u \in VG} \deg u = 2\,\frac{|EG|}{|VG|},$$

t.i., *grafa vidējā pakāpe ir vienāda ar divkāršotu grafa škautņu skaita un virsotņu skaita attiecību.*

Ja apzīmēt [3, 5. lpp]

$$\varepsilon(G) = \frac{|EG|}{|VG|},$$

tad

$$\overline{\deg}(G) = 2\,\varepsilon(G).$$

4. Grafa nepāra pakāpes virsotņu skaits

4.1. teorēma. *Jebkurā grafā nepāra pakāpes virsotņu skaits ir pāra skaitlis.*

▶ Pieņemsim pretējo, ka nepāra pakāpes virsotņu skaits ir nepāra skaitlis. Tā kā pāra pakāpes virsotņu pakāpju summa ir pāra skaitlis (neatkarīgi no tā, vai pāra pakāpes virsotņu skaits ir pāra vai nepāra skaitlis), tad visu grafa virsotņu pakāpju summa būs nepāra skaitlis, kas ir pretrunā ar lemmu par rokasspiedieniem. Tātad nepāra pakāpes virsotņu skaits ir pāra skaitlis.◀

4.1. piemērs. Vai 11 pilsētas var savienot ar ceļiem tā, lai no katras pilsētas izietu (uz citu pilsētu) tieši 5 ceļi?

▶ Ņemot vērā pēdējo teorēmu, atbilde uz šo jautājumu ir noliedzoša.◀

5. Teorēma par vienādām pakāpēm

5.1. teorēma. *Jebkurā grafā G, $|G| \geq 2$, eksistē divas virsotnes ar vienādām pakāpēm.*

▶ Apzīmēsim grafa G kārtu ar n. Tad $|G| = n \geq 2$. Ja u ir patvaļīga grafa G virsotne, tad $\deg u \in \{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$.

Ir iespējami divi gadījumi.

1) Grafā G eksistē dominējošā virsotne. Tad grafam G nav izolētu virsotņu. Šajā gadījumā, ja u ir patvaļīga grafa G virsotne, tad $\deg u \in \{1; 2; \ldots; n-1\}$.

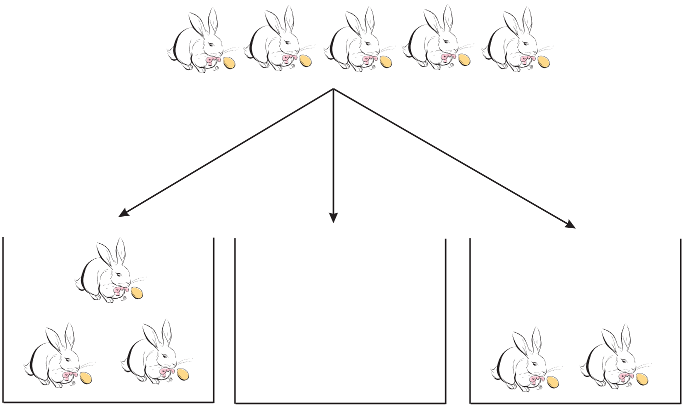
2) Grafam G nav dominējošo virsotņu. Šajā gadījumā, ja v ir patvaļīga grafa G virsotne, tad $\deg v \in \{0; 1; 2; \ldots; n-2\}$.

Abos gadījumos sadalīsim n virsotnes $n-1$ grupās tā, lai vienā grupā atrastos tās un tikai tās virsotnes, kurām ir viena un tā pati pakāpe. Izmantojot **Dirihlē principu**, iegūsim, ka vismaz vienā no grupām atradīsies vismaz divas virsotnes, jo virsotņu ir vairāk nekā grupu. Tātad vismaz divām virsotnēm ir vienāda pakāpe.◀

5.1. piemērs. Klasē mācās 25 skolēni. Pierādīt, ka vismaz diviem skolēniem ir vienāds draugu skaits (uzskata, ja A draudzējas ar B, tad B arī draudzējas ar A, t.i., draudzība ir abpusēja).

► Apskatīsim grafu G, kura virsotnes ir skolēni un kura divas virsotnes ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, ja attiecīgie skolēni draudzējas. No 5.1. teorēmas izriet, ka eksistē divas virsotnes ar vienādām pakāpēm, t.i., eksistē divi skolēni, kuriem ir vienāds draugu skaits.◄

Dirihlē princips: ***ja vairāk kā*** n ***priekšmetus sadalīt*** n ***grupās, tad atradīsies vismaz viena grupa, kura saturēs vismaz divus priekšmetus.***



6. Teorēma par grafu, kurā tikai divām virsotnēm ir vienādas pakāpes

6.1. teorēma. *Ja grafā G , $|\mathbf{G}| \geq \mathbf{2}$, tikai divām virsotnēm ir vienādas pakāpes, tad vai nu šajā grafā eksistē izolēta virsotne, vai arī šajā grafā eksistē dominējoša virsotne.*

► a) Apzīmēsim grafa G kārtu ar n. Tad $|G| = n \geq 2$. Ja u ir patvaļīga grafa G virsotne, tad $\deg u \in \{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$.

Ja $n = 2$, tad, acīmredzot, vai nu $G = K_2$, vai arī $G = O_2$. Ja $G = K_2$, tad abas grafa G virsotnes ir dominējošas virsotnes. Ja $G = O_2$, tad abas grafa G virsotnes ir izolētas virsotnes. Tātad, ja $n = 2$, tad vai nu šajā grafā eksistē izolēta virsotne, vai arī šajā grafā eksistē dominējoša virsotne.

Pieņemsim, ka $n \geq 3$. Saskaņā ar doto tieši divām grafa G virsotnēm ir vienādas pakāpes. Tāpēc grafa virsotņu pakāpes pieņems $n-1$ savstarpēji dažādas vērtības no n teorētiski iespējamajām vērtībām $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Līdz ar to starp grafa virsotņu pakāpēm noteikti būs 0 vai $n-1$. Bez tam starp grafa virsotņu pakāpēm vienlaicīgi nevar būt 0 un $n-1$, jo grafs nevar vienlaicīgi saturēt izolētu virsotni un dominējošu virsotni. Tādējādi vai nu šajā grafā eksistē virsotne ar pakāpi 0 (izolēta virsotne), vai arī šajā grafā eksistē virsotne ar pakāpi $n-1$ (dominējoša virsotne).◄

6.1. piezīme. Ja grafā G , $|\mathbf{G}| \geq \mathbf{2}$, tikai divām virsotnēm ir vienādas pakāpes, tad ***nevar apgalvot***, ka vai nu šajā grafā eksistē tieši viena izolēta virsotne, vai arī šajā grafā eksistē tieši viena dominējoša virsotne. Piemēram, grafā O_2 eksistē divas izolētas virsotnes, bet grafā K_2 eksistē divas dominējošas virsotnes.

6.2. teorēma. *Ja grafā G , $|\mathbf{G}| \geq \mathbf{3}$, tikai divām virsotnēm ir vienādas pakāpes, tad vai nu šajā grafā eksistē tieši viena izolēta virsotne, vai arī šajā grafā eksistē tieši viena dominējoša virsotne.*

► Apzīmēsim grafa G kārtu ar n. Tad $|G| = n \geq 3$. Ja u ir patvaļīga grafa G virsotne, tad $\deg u \in \{0; 1; 2; \ldots; n-1\}$. No 6.1. teorēmas izriet, ka vai nu šajā grafā eksistē izolēta virsotne, vai arī šajā grafā eksistē dominējoša virsotne.

1. *Pierādīsim, ka, ja grafam G eksistē izolēta virsotne, tad tā ir tikai viena.* Skaidrs, ka 3 un vairāk izolētas virsotnes nevar būt, jo tas ir pretrunā ar doto, ka grafam ir tieši divas virsotnes ar vienādām pakāpēm. Pierādīsim, ka grafam G nevar būt tieši divas izolētas virsotnes. Pieņemsim pretējo, ka grafam G ir tieši divas izolētas virsotnes. Apskatīsim grafa G apakšgrafu H, kuru ir inducējusi pārējo $n-2$ virsotņu kopa. Apakšgrafa H visu virsotņu pakāpes ir savstarpēji dažādas.

   (a) Ja apakšgrafam H ir tikai viena virsotne, tad grafā G ir 3 virsotnes, un visas tās ir izolētas. Ieguvām pretrunu ar pieņēmumu, ka grafam G ir tieši divas izolētas virsotnes.

   (b) Pieņemsim, ka apakšgrafam H ir vismaz divas virsotnes. Saskaņā ar 5.1. teorēmu apakšgrafā H eksistē vismaz divas virsotnes ar vienādām pakāpēm, kas ir pretrunā ar to, ka apakšgrafa H visu virsotņu pakāpes ir savstarpēji dažādas.

   Abos iespējamos gadījumos ieguvām pretrunu. Tātad pieņēmums nav patiess, un līdz ar to, ja grafam G eksistē izolēta virsotne, tad tā ir tikai viena.

2. *Pierādīsim, ka, ja grafam G eksistē dominējoša virsotne, tad tā ir tikai viena.* Skaidrs, ka 3 un vairāk dominējošas virsotnes nevar būt, jo tas ir pretrunā ar doto, ka grafam ir tieši divas virsotnes ar vienādām pakāpēm. Pierādīsim, ka grafam G nevar būt tieši divas dominējošas virsotnes. Pieņemsim pretējo, ka grafam G ir tieši divas dominējošas virsotnes. Apskatīsim grafa G papildgrafu $\overline{G}$. Tad grafā $\overline{G}$, $|\overline{G}| \geq 3$, būs tieši divas izolētas virsotnes. Šajā gadījumā, spriežot līdzīgi kā iepriekš (tikai šoreiz attiecībā pret grafu $\overline{G}$), nonāksim pie pretrunas. Tātad, ja grafam G eksistē dominējoša virsotne, tad tā ir tikai viena.

Tādējādi vai nu grafā G eksistē tieši viena izolēta virsotne, vai arī grafā G eksistē tieši viena dominējoša virsotne.◀

6.1. piemērs. Šaha turnīrs risinās pēc riņķa sistēmas, un tajā piedalās 11 dalībnieki. Turnīra laikā noskaidrojās, ka tieši divi tā dalībnieki ir izspēlējuši vienādu skaitu partiju. Pierādīt, ka tādā gadījumā vai nu tieši viens šahists nav izspēlējis nevienu partiju, vai arī tieši viens turnīra dalībnieks ir izspēlējis visas partijas.

▶ Apskatīsim grafu G, kura virsotnes ir šahisti un kura divas virsotnes ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, ja attiecīgie šahisti ir izspēlējuši partiju. Tā kā $11 > 3$ un saskaņā ar doto tieši divām grafa virsotnēm ir vienādas pakāpes, tad no 6.2. teorēmas izriet, ka vai nu šajā grafā eksistē tieši viena izolēta virsotne, vai arī šajā grafā eksistē tieši viena dominējoša virsotne, t.i., vai nu tieši viens šahists nav izspēlējis nevienu partiju, vai arī tieši viens turnīra dalībnieks ir izspēlējis visas partijas.◀

6.2. piezīme. Ja G ir $(n; m)$-grafs ar virsotņu kopu

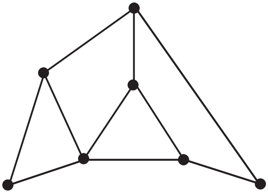
$$VG = \{u_1; u_2; \ldots; u_n\},$$

tad grafa G šķautņu grafs $L(G)$ ir $(m; s)$-grafs, kur

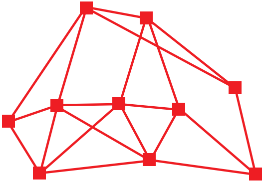
$$s = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} (\deg u_i)^2\right) - m.$$

Apskatīsim 3.(a) zīm. attēloto grafu G. Grafs G ir $(n; m)$ grafs, kur $n = 7$, $m = 10$, bet tā virsotņu pakāpes ir 2, 3, 4, 3, 3, 3 un 2. Tāpēc tā šķautņu grafs $L(G)$ (skat. 3.(b) zīm.) ir $(m; s)$-grafs, kur $m = 10$, bet

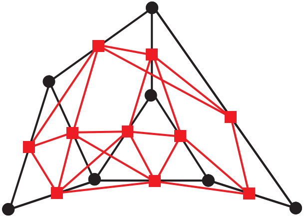
$$s = \frac{1}{2}\left(2^2 + 3^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2 + 2^2\right) - 10 = 20.$$



(a) G



(b) $L(G)$



(c) G un $L(G)$

3. zīm. Grafs G un tā šķautņu grafs $L(G)$.

Zīmējumu rādītājs

Literatūra

[1] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов*. Наука, Москва, 1990.

[2] Vasudev C. *Graph Theory with Applications*. New Age International (P) Ltd., 2006.

[3] Diestel R. *Graph Theory*. Springer, 2000. 8