

DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Planāri grafi

2022. gada 13. oktobris

2022

Saturs

1. Uzdevums par trim mājām un trim akām	4
2. Eilera formula	9
3. Maksimāli plakani grafi	27
4. Plakana multigrafa ģeometriski duālais pseidogرافs	31
5. Planaritātes kritēriji	34
5.1. Vāgnera teorēma	34
5.2. Pontrjagina-Kuratovska teorēma	36
6. Neplanāru grafu raksturojumi	40
6.1. Grafa krustošanās skaitlis	40
6.2. Grafa biezums	43
6.3. Grafa sagrozījuma skaitlis	46
6.4. Grafa virsotņu atņemšanas skaitlis	48

	3
7. Noderīgas saites	49
8. Terminu vārdnīca	50
Alfabētiskais rādītājs	51
Zīmējumu rādītājs	52
Literatūra	54

1. Uzdevums par trim mājām un trim akām

Dažos gadījumos ir svarīgi noskaidrot, vai dotajam grafam eksistē ģeometriskā interpretācija ar noteiktām īpašībām, piemēram, vai dotajam grafam eksistē ģeometriskā interpretācija, ka nekādām divām tās šķautnēm nav kopīgu punktu, izņemot, varbūt, to galavirsotnes.

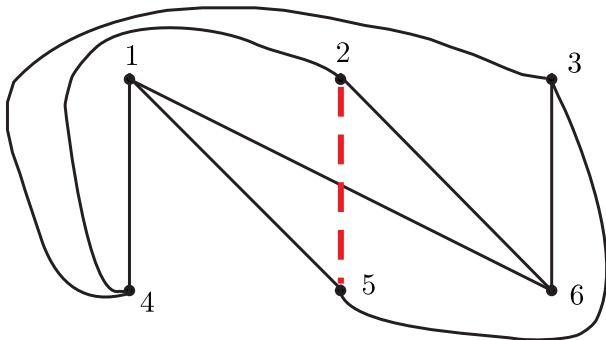
Uzdevums par radioelektronikas shēmu projektēšanu. Radioelektronikā shēmas elementi tiek izvietoti uz plakanas plates, kas nevada strāvu, un tiek savienoti ar strāvu vadošiem celiņiem, kas atrodas uz plates un nav izolēti. Tā kā strāvu vadošie celiņi nav izolēti, tad tie drīkst krustoties tikai kādā shēmas elementā. Vai ir iespējams realizēt doto shēmu uz plates vienas puses?

Līdzīgs uzdevums rodas, projektējot satiksmes shēmas, kas sastāv no dzelzceļa līnijām un autoceļiem un kurās nav vēlamas pārbrauktuves.

Par **plakanu grafu** sauc ģeometrisku grafu, kura nekādām divām šķautnēm nav kopīgu punktu, izņemot incidento abām šķautnēm virsotni, ja šīs šķautnes ir blakusšķautnes.

Par **planāru grafu** sauc grafu, kuram eksistē vismaz viena plakana ģeometriskā realizācija.

Tātad **uzdevumā par radioelektronikas shēmu projektēšanu** ir jānoskaidro vai shēmai atbilstošais grafs ir planārs, t.i., vai shēmai atbilstošajam grafam eksistē vismaz viena plakana ģeometriskā realizācija.

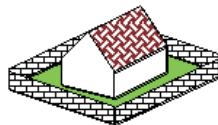
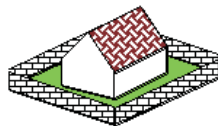


1. zīm. Uzdevums par trim mājām un trim akām

Nākamais uzdevums vedina uz domu, ka ir arī neplanāri grafi.

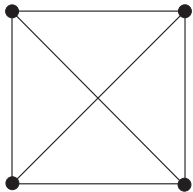
Uzdevums par trim mājām un trim akām. Dotas trīs mājas 1,2 un 3 un trīs akas 4,5 un 6 (skat. 1. zīm.). Māju iemītnieki nolēma iemīt taciņas no katras mājas līdz katrai akai tā, lai taciņas nekrustotos. Vai tas ir iespējams? Šo uzdevumu grafu teorijas valodā var formulēt šādi: *vai pilnais divdaļu grafs $K_{3,3}$ ir planārs?* Ja mēģināsim uzzīmēt šādas deviņas taciņas, tad cietīsim neveiksmi: viegli uzzīmēt astoņas taciņas, kas savstarpēji nekrustojas, taču devītā taciņa noteikti krustos vienu no jau uzzīmētajām astoņām taciņām. Tā nav nejaušība, jo turpmāk tiks pierādīts, ka pilnais divdaļu grafs $K_{3,3}$ nav planārs.

Dažkārt uzdevums par trim mājām un trim akām tiek formulēts kā **uzdevums par gāzi, ūdeni un elektrību**: vai ir iespējams savienot katru no trim mājām ar gāzes, ūdens un elektrības avotiem tā, lai piegādes līnijas nekrustotos (skat. 2. zīm.)?

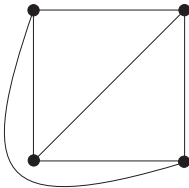


2. zīm. Uzdevums par gāzi, ūdeni un elektrību.

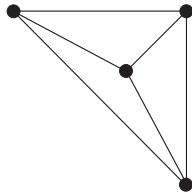
1.1. teorēma. [Vāgnera teorēma, 1936. g.] [1, 168. lpp.]
Jebkuram planāram grafam eksistē tāda plakana ģeometriskā interpretācija, kuras katra šķautne ir taisnes nogrieznis.



(a)



(b)



(c)

3. zīm. Pilnā grafa K_4 trīs ģeometriskās interpretācijas:

(a) - neplakana ģeometriskā interpretācija,

(b) - plakana ģeometriskā interpretācija, kuras viena šķautne nav taisnes nogrieznis,

(c) - plakana ģeometriskā interpretācija, kuras visas šķautnes ir taisnes nogriežņi.

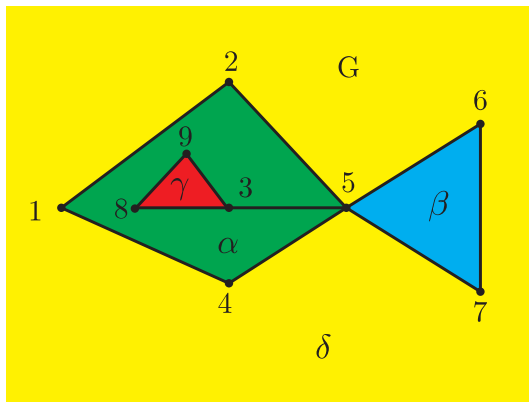
2. Eilera formula

Apskatīsim plakānu grafu G . Par **grafa G skaldni** sauc maksimālo (attiecībā pret plaknes apakškopu saimē definēto attieksmi \subset) plaknes apakškopu, ka jebkurus divus šīs apakškopas punktus var savienot ar lauztu līniju $L : A_0 A_1 A_2 \dots A_t$ tā, ka lauztā līnija L , izņemot varbūt tās galapunktus A_0 un A_t , nekrusto nevienu grafā G šķautni. Par **grafa G skaldnes robežu** sauc plaknes apakškopu, kas sastāv no visām šai skaldnei piederošajiem grafā G šķautņu punktiem. Ja α ir grafā G skaldne, tad tās robežu apzīmē ar $\partial\alpha$. Ja α ir grafā G skaldne, tad plaknes apakškopu $\alpha \setminus \partial\alpha$ sauc par **skaldnes α iekšieni**. Grafā G skaldni, kuras robeža ir trijstūris, arī sauc par **trijstūri**. Plakāna grafā G skaldnes, kurām ir kopīga šķautne, sauc par **blakusskaldnēm**.

2.1. teorēma.

1. *Jebkurš plaknes punkts pieder vismaz vienai plakāna grafā G skaldnei.*
2. *Visas plakāna grafā G skaldnes ir ierobežotas, izņemot vienu, kuru sauc par **grafa G ārējo skaldni**.*

3. Pieņemsim, ka α ir plakana grafa G patvaļīga skaldne, bet e ir kāda šī grafa šķautne. Ir spēkā šādi apgalvojumi.
- (a) Vai nu šķautne e atrodas uz skaldnes α robežas, vai arī šķautnei e nav kopīgu punktu ar skaldni α , izņemot varbūt šķautnes e galavirsotnes.
- (b) Ja šķautne e pieder kādam grafa G vienkāršam ciklam, tad šķautne e ir kopīga tieši divām grafa G skaldnēm (t.i., šķautne e atrodas tieši uz divu grafa G skaldņu robežas).
- (c) Ja šķautne e nepieder nevienam grafa G vienkāršam ciklam, tad šķautne e atrodas uz vienas un tikai vienas grafa G skaldnes robežas.
4. Jebkura plakana grafa šķautne ir kopīga ne vairāk kā divām šī grafa skaldnēm.
5. Ja katras plakana grafa G ($|G| \geq 3$) skaldnes robeža ir vienkāršs cikls, tad katra šī grafa šķautne ir kopīga tieši divām dotā grafa skaldnēm.



4. zīm. Grafam G ir 4 skaldnes: α , β , γ - grafa G iekšējās skaldnes, δ - grafa G ārējā skaldne.

2.1. piemērs. 4. zīm. attēlots sakarīgs plakans grafs G ar 4 skaldnēm α , β , γ un δ , pie tam δ ir grafa G ārējā skaldne.

2.2. teorēma. [Eilera teorēma, 1758. g.] *Jebkuram sakarīgam plakanam grafam G ir spēkā vienādība*

$$n - m + f = 2, \quad (2.1)$$

kur n ir visu grafa G virsotņu skaits, m ir visu grafa G šķautņu skaits, bet f ir visu grafa G skaldņu skaits. Vienādību (2.1) sauc par **Eilera formulu**.

► Teorēmas pierādījuma ideja ir šāda. Apskata grafa G karkasu T , t.i., tādu grafa G apakšgrafu T , ka T ir koks un $VT = VG$. Karkasa T virsotņu, šķautņu un skaldņu skaitu apzīmēsim ar attiecīgi n_0 , m_0 un f_0 . Tā kā T ir grafa G karkass, tad $n_0 = n$. Saskaņā ar koka kritēriju $m_0 = n_0 - 1$. Acīmredzot, kokam T ir tikai viena skaldne (- ārējā), t.i., $f_0 = 1$. Tā kā $n_0 - m_0 + f = n_0 - (n_0 - 1) + 1 = 2$, tad karkasam T Eilera formula ir spēkā. Tālāk karkasam T pievienojam trūkstošās grafa G šķautnes. Pieņemsim, ka karkasam T ir jāpievieno s trūkstošās grafa G šķautnes. Ar H_i ($i = 0, 1, \dots, s$) apzīmēsim grafu, kuru iegūst, pievienojot karkasam T i trūkstošās grafa G šķautnes. Acīmredzot, $H_0 = T$, bet $H_s = G$. Ar n_i , m_i un f_i apzīmēsim grafa

H_i attiecīgi virsotņu, šķautņu un skaldņu skaitu. Katrā solī virsotņu skaits nemainās, savukārt gan šķautņu, gan skaldņu skaits palielinās par 1:

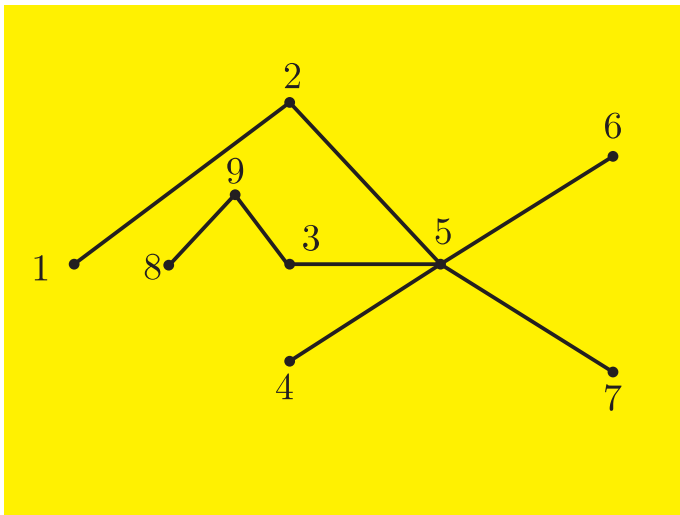
$$n_{i+1} = n_i, \quad m_{i+1} = m_i + 1, \quad f_{i+1} = f_i + 1.$$

Tā kā Eilera formula ir spēkā karkasam T , tad tā būs spēkā arī jebkuram grafam H_i (un tātad arī grafam $G!$), jo

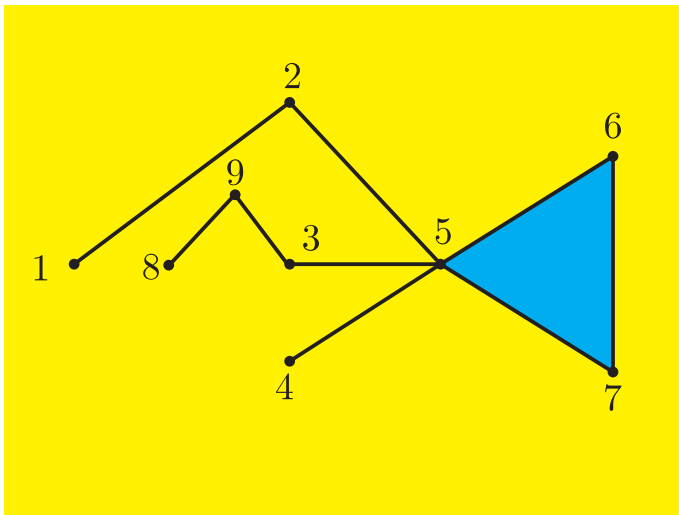
$$n_{i+1} - m_{i+1} + f_{i+1} = n_i - (m_i + 1) + (f_i + 1) = n_i - m_i + f_i \\ (i = 0, 1, \dots, s - 1). \blacktriangleleft$$

2.2. piemērs. Tālāk ir sniegta Eilera teorēmas pierādījuma ilustrācija 4. zīm. attēlotajam grafam G :

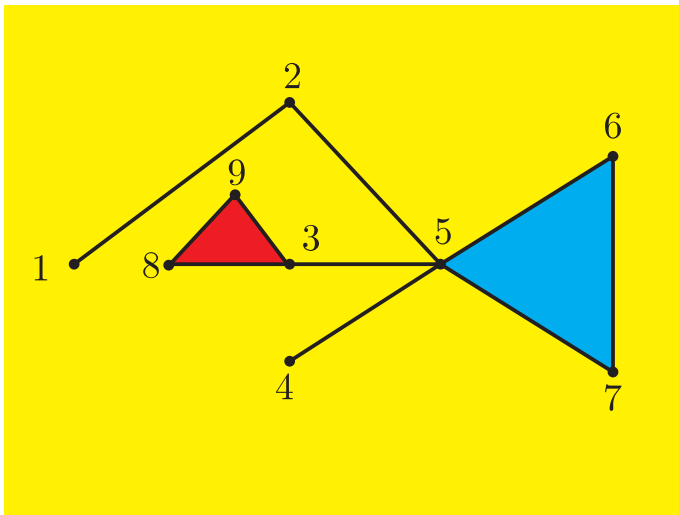
$$\begin{aligned} H_0 = T : \quad n_0 = 9, \quad m_0 = 8, \quad f_0 = 1, \quad n_0 - m_0 + f_0 = 2, \\ H_1 : \quad n_1 = 9, \quad m_1 = 9, \quad f_1 = 2, \quad n_1 - m_1 + f_1 = 2, \\ H_2 : \quad n_2 = 9, \quad m_2 = 10, \quad f_2 = 3, \quad n_2 - m_2 + f_2 = 2, \\ H_3 = G : \quad n_3 = 9, \quad m_3 = 11, \quad f_3 = 4, \quad n_3 - m_3 + f_3 = 2. \end{aligned}$$



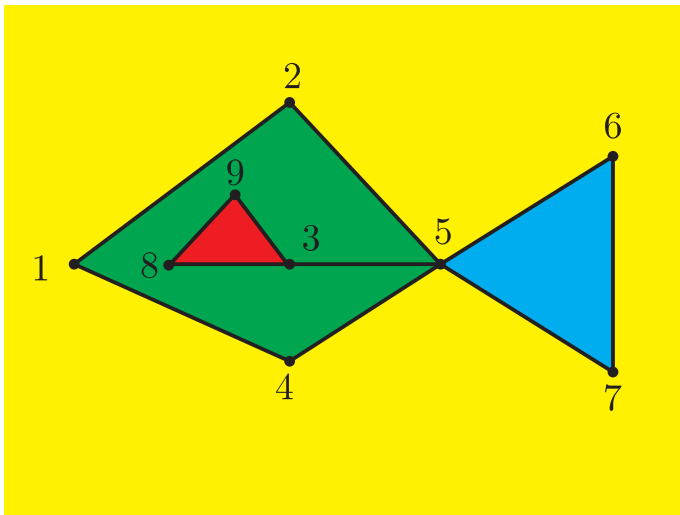
5. zīm.



6. zīm.



7. zīm.



8. zīm.

2.3. piemērs. 8. zīm. attēlotajam grafam:

$$\begin{aligned}n &= 9, & m &= 11, & f &= 4, \\n - m + f &= 9 - 11 + 4 = 2.\end{aligned}$$

2.4. piemērs. Telekomunikāciju firma nolēma izvietot katrā pilsētas kvartālā vienu telefona automātu. Cik telefona automātu tiks uzstādīts, ja pilsētā ir 155 krustojumi un 260 ielu posmi starp krustojumiem?

Aplūkosim grafu G , kura virsotnes atbilst krustojumiem, bet šķautnes - ielu posmiem starp krustojumiem. Tad G ir plakans grafs, kura iekšējām skaldnēm atbilst pilsētas kvartāli. Saskaņā ar Eilera formulu grafam G ir

$$f = m - n + 2 = 260 - 155 + 2 = 107$$

skaldnes: 106 iekšējās skaldnes un 1 ārējā skaldne. Tātad pilsētā tiks uzstādīti 106 telefona automāti.

2.1. piezīme. *Eilera formulas vispārinājums patvaļīgam plakanam grafam:*

$$n - m + f = k + 1,$$

kur

*n ir visu grafa G virsotņu skaits,
m ir visu grafa G šķautņu skaits,
f ir visu grafa G skaldņu skaits,
k ir visu grafa G komponentu skaits.*

Atzīmēsim vairākus svarīgus apgalvojumus, kas izriet no Eilera formulas.

1. sekas. *Jebkuram izliektam daudzskaldnim ir spēkā vienādība (2.1).*

► Centrāli projicēsim izliektu daudzskaldni D uz apvilktu ap šo daudzskaldni sfēru S (projicēšanas centrs - sfēras centrs). Pieņemsim, ka \tilde{D} ir daudzskaldņa D attēls šajā projicēšanā. Figūru \tilde{D} projicēsim plaknē P , lietojot stereogrāfisko projekciju, uzskatot, ka sfēras ziemeļpols neatrodas uz daudzskaldņa D šķautnes attēla. Figūras \tilde{D} attēls stereogrāfiskajā projekcijā $\tilde{\tilde{D}}$ ir plakans sakarīgs grafs, tāpēc tam ir spēkā Eilera formula. Acīmredzot, ka šī formula ir spēkā arī dotajam daudzskaldnim. ◀

2. sekas. *Jebkuram sakarīgam planāram grafam G ar vismaz 3 virsotnēm ir spēkā nevienādība*

$$m \leq 3n - 6.$$

► Tā kā grafa G plakanajā realizācijā H jebkura šķautne ir kopīga ne vairāk kā divām skaldnēm, tad

$$2m \geq m_1 + m_2 + \cdots + m_f,$$

kur $2m$ ir divkārsšots šķautņu skaits, bet m_s ($s = 1, 2, \dots, f$) ir s -tās skaldnes šķautņu skaits. Tā kā grafā H katra skaldne ir ierobežota ar vismaz 3 šķautnēm, tad

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_f \geq \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_f = 3f.$$

Tātad $2m \geq 3f$. Ņemot vērā Eilera formulu, iegūsim

$$2 = n - m + f \leq n - m + \frac{2m}{3},$$

no kurienes izriet

$$2 \leq n - m + \frac{2m}{3} \quad \text{jeb} \quad 3n - 3m + 2m \geq 6 \quad \text{jeb} \quad m \leq 3n - 6. \quad \blacktriangleleft$$

3. sekas. *Jebkurā planārā grafā G eksistē virsotne, kuras pakāpe nav lielāka par 5.*

► Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāds planārs grafs G , ka jebkurai tā virsotnei u ir spēkā $\deg u \geq 6$. Apskatīsim kādu grafa G komponenti G_0 . Acīmredzot, G_0 ir sakarīgs planārs grafs, pie tam jebkurai grafa G_0 virsotnei u ir spēkā $\deg u \geq 6$. Pieņemsim, ka G_0 ir $(n_0; m_0)$ -grafs. Ņemot vērā Lemmu par rokaspiedieniem, iegūsim

$$6n_0 \leq \sum_{u \in V G_0} \deg u = 2m_0,$$

no kurienes izriet, ka $3n_0 \leq m_0$. Saskaņā ar 1. sekām $m_0 \leq 3n_0 - 6$. Tātad $3n_0 \leq 3n_0 - 6$ jeb $-6 \geq 0$. Ieguvām pretrunu. Tātad pieņēmums nav patiess, un jebkurā planārā grafā G eksistē virsotne, kuras pakāpe nav lielāka par 5. ◀

4. sekas. Grafi K_5 un $K_{3,3}$ nav planāri.

► a) Pieņemsim pretējo, ka grafs K_5 ir planārs. Tad ir jāizpildās nevienādībai $m \leq 3n - 6$. Tā kā pilnā grafa K_5 virsotņu skaits ir $n = 5$, bet šķautņu skaits ir $m = 10$, tad ir jāizpildās $10 \leq 3 \cdot 5 - 6$ jeb $10 \leq 9$. Taču pēdējā nevienādība nav patiesa. Tātad pilnais grafs K_5 nav planārs.

b) Pieņemsim pretējo, ka grafs $K_{3,3}$ ir planārs. Tā kā grafa $K_{3,3}$ plakanajā realizācijā jebkura šķautne ir kopīga ne vairāk kā divām skaldnēm, tad

$$2m \geq m_1 + m_2 + \cdots + m_f,$$

kur $2m$ ir divkārsots šķautņu skaits, bet m_s ($s = 1, 2, \dots, f$) ir s -tās skaldnes šķautņu skaits. Tā kā grafā $K_{3,3}$ nav trijstūru, tad tā plakanajā realizācijā katra skaldne ir ierobežota ar vismaz 4 šķautnēm. Tāpēc

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_f \geq \underbrace{4 + 4 + \cdots + 4}_f = 4f.$$

Tātad $2m \geq 4f$ jeb $m \geq 2f$. Tā kā grafs $K_{3,3}$ ir planārs, tad saskaņā ar Eilera formulu $n - m + f = 2$ jeb $6 - 9 + f = 2$ jeb $f = 5$. Tāpēc $9 \geq 2 \cdot 5 = 10$. Ieguvām pretrunu. Tātad pieņēmums nav patiess, un grafs $K_{3,3}$ nav planārs. ◀

5. sekas. Ja sakarīga plakana $(n; m)$ -grafa G katras skaldnes robeža ir r -cikls (t.i., vienkāršs cikls ar garumu r), tad $m = \frac{r(n-2)}{r-2}$.

► Tā kā katras grafa G skaldnes robeža ir vienkāršs cikls, tad saskaņā ar 2.1. teorēmas 5. apgalvojumu katra grafa G šķautne ir kopīga tieši divām grafa G skaldnēm. Tāpēc

$$2m = m_1 + m_2 + \cdots + m_f = \underbrace{r + r + \cdots + r}_f = fr,$$

kur $m_s = r$ ($s = 1, 2, \dots, f$) ir grafa G s -tās skaldnes šķautņu skaits. Ņemot vērā Eilera formulu, iegūsim

$$n - m + \frac{2m}{r} = 2 \quad \text{jeb} \quad nr - mr + 2m = 2r \quad \text{jeb} \quad m = \frac{r(n-2)}{r-2}. \quad \blacktriangleleft$$

3. Maksimāli plakani grafi

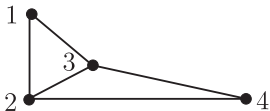
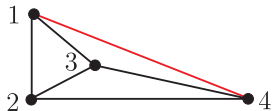
Sakarīgu planāru (plakanu) grafu G ($|G| \geq 3$) sauc par **maksimālu planāru (plakanu) grafu**, ja, pievienojot grafam G jebkuru šķautni e , iegūtais grafs $G + e$ nav planārs (plakans).

Sakarīgu plakanu grafu G ($|G| \geq 3$) sauc par **plakanu triangulāciju**, ja jebkura tā skaldne (ārējo ieskaitot) ir trijstūris.

3.1. teorēma. *Sakarīgs plakans grafs G ($|G| \geq 3$) ir maksimāls plakans grafs tad un tikai tad, kad G ir plakana triangulācija.*

1. sekas. *Ja G ir maksimāls plakans $(n; m)$ -grafs, tad $m = 3n - 6$ un $f = 2n - 4$.*

► Ja G ir maksimāls plakans $(n; m)$ -grafs, tad saskaņā ar 3.1. teorēmu G ir plakana triangulācija, un tāpēc katras grafa G skaldnes robeža ir 3-cikls. Lietojot 2.2. teorēmas 5. sekas, iegūsim, ka $m = \frac{3(n-2)}{3-2}$ jeb $m = 3n - 6$. No Eilera formulas atrodam, ka $f = 2 - n + m = 2n - 4$. ◀

(a) G (b) $H = G + \{1; 4\}$

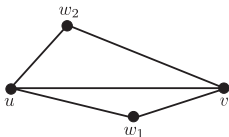
9. zīm. Grafs G nav maksimāls plakans grafs, jo, pievienojot tam šķautni $\{1; 4\}$, iegūst plakānu grafu $H = G + \{1; 4\}$. Grafs H ir plakana triangulācija.

2. sekas. Ja G ir plakana triangulācija ar vismaz četrām virsotnēm, tad jebkurai grafa G virsotnei u ir spēkā $\deg u \geq 3$.

► Apskatīsim patvaļīgu grafa G virsotni u .

Pierādīsim, ka virsotnei u eksistē blakusvirsotne v . Pieņemsim pretējo, ka virsotnei u nav nevienas blakusvirsotnes. Tad grafs G saturēs komponenti G_1 ($VG_1 = \{u\}$, $EG_1 = \emptyset$) un vismaz vienu atšķirīgu no G_1 komponenti, jo grafam G ir vismaz četras

virsošnes. Ieguvām pretrunu, jo grafs G , būdams plakana triangulācija, ir sakarīgs. Tātad pieņēmus nav patiess, un grafa G virsošnei u eksistē blakusvirsošne v .



10. zīm.

Tā kā šķautne uv pieder kādai grafa G skaldnei Γ_1 , bet jebkura grafa G skaldne ir trijstūris (jo G ir plakana triangulācija), tad eksistē tāda grafa G virsošne w_1 ($w_1 \neq u$, $w_1 \neq v$), ka trijstūris u, v, w_1, u ir skaldnes Γ_1 robeža. Tā kā G ir plakana triangulācija, t.i., katra grafa G skaldne ir trijstūris, tad katras grafa G skaldnes robeža ir vienkāršs cikls. Saskaņā ar 2.1. teorēmas 5. apgalvojumu šķautne uv pieder vēl kādai grafa G skaldnei Γ_2 ar robežu uvw_2u ($w_2 \neq u$, $w_2 \neq v$). Pierādīsim, ka $w_1 \neq w_2$. Pieņemsim pretējo, ka $w_1 = w_2$. Tad viena no skaldnēm Γ_1

vai Γ_2 ir iekšējā, bet otra ārējā. Tā kā grafs G ir sakarīgs, tad grafam G ir tikai 3 virsotnes, kas ir pretrunā ar to, ka grafam G ir vismaz 4 virsotnes. Tātad pieņēmums nav patiess, un līdz ar to $w_1 \neq w_2$. Tādējādi patvaļīga grafa G virsotne ir blakusvirsotne ar 3 dažādām grafa G virsotnēm v , w_1 un w_2 , t.i., $\deg u \geq 3$. ◀

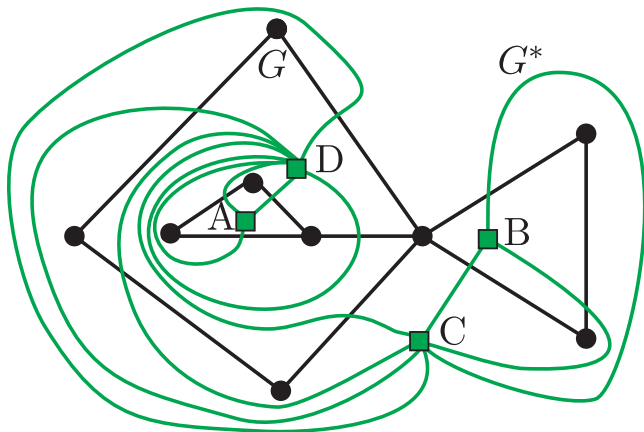
4. Plakana multigrafa ģeometriski duālais pseidogرافs

Jebkurai plakana multigrafam G var piekārtot plakana pseidogرافu G^* šādi.

- Katras multigrafa G skaldnes α_i ($i = 1, 2, \dots, f$; f ir grafa G skaldņu skaits) iekšienē izvēlēsimies punktu u_i^* ($i = 1, 2, \dots, f$). Punkti u_i^* ($i = 1, 2, \dots, f$) kalpos par pseidogرافa G^* virsotnēm.
- Katrai multigrafa G šķautnei e piekārtosim nepārtrauktu līniju e^* bez paškrustošanās punktiem, ka
 - līnija e^* savieno punktus u_i^* , kuri pieder tām skaldnēm (vienai vai divām), kuru robeža satur šķautni e ;
 - līnija e^* krusto šķautni e , bet neiet caur šķautnes e virsotnēm.

Visas šādā veidā iegūtās līnijas e^* kalpos par pseidogرافa G^* šķautnēm, pie tam līnijas e^* var izvēlēties tā, ka tās savstarpēji nekrustosies, izņemot varbūt šo līniju galapunktos.

Plakanam multigrafam G piekārtoto plakano pseidogrfu G^* sauc par **multigrafa G ģeometriski duālo grafu**.



11. zīm. Plakans grafs G un tā ģeometriski duālais grafs G^* .

Atzīmēsim dažas pseidografa G^* īpašības.

1. Pseidografā G^* cilpas atbilst multigrafa G tiltiem.
2. Pseidografā G^* kārtējās šķautnes atbilst tām multigrafa G skaldnēm, kurām ir vismaz divas kopīgas šķautnes.
3. Pseidografs G^* vienmēr ir sakarīgs.
4. Ja G ir multigrafs bez tiltiem, tad G^* arī ir multigrafs.
5. Ja multigrafam G ir n virsotnes, m šķautnes un f skaldnes, tad pseidografam G^* ir $n^* = f$ virsotnes, $m^* = m$ šķautnes un $f^* = n$ skaldnes.

5. Planaritātes kritēriji

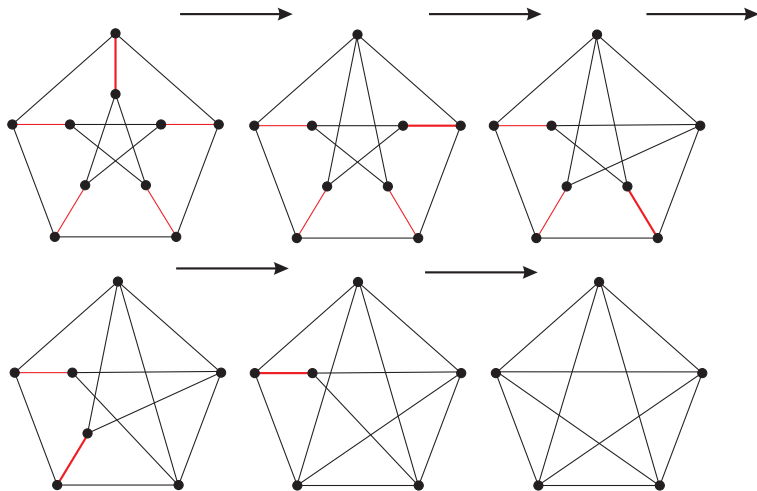
5.1. Vāgnera teorēma

Saka, ka **grafu G var savilkt par grafu H** , ja grafu H var iegūt no grafa G , pielietojot grafam G galīgu skaitu šķautnes savilkšanas operāciju.

5.1. teorēma. [Vāgnera teorēma, 1937. g.][1, 169. lpp.] *Grafs ir planārs tad un tikai tad, kad tam nav apakšgrafu, kurus var savilkt par grafu K_5 vai $K_{3,3}$.*

5.1. piemērs. Tā kā Petersena grafu var savilkt par pilno grafu K_5 (skat. 12. zīm.), tad saskaņā ar Vāgnera teorēmu¹ *Petersena grafs ir neplanārs grafs.*

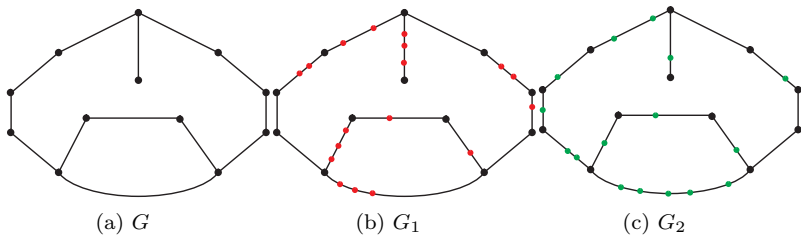
¹Petersena grafam eksistē apakšgrafs - pats Petersena grafs, kuru var savilkt par pilno grafu K_5 .



12. zīm. Petersena grafu var savilkt par pilno grafu K_5 .

5.2. Pontrjagina-Kuratovska teorēma

Divus grafus G_1 un G_2 sauc par **homeomorfiem grafiem**, ja tos var iegūt no kāda grafa G , sadalot grafa G šķautnes.

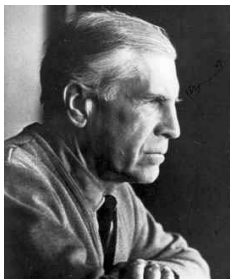


13. zīm. Grafi G_1 un G_2 ir homeomorfi, jo tie ir iegūti no grafa G , sadalot tā šķautnes.

Pirmo planaritātes kritēriju neatkarīgi viens no otra ieguva L. Pontrjagins 1927. gadā un K. Kuratovskis 1930. gadā.

5.2. teorēma. [Pontrjagina-Kuratovska teorēma][1, 160. lpp.]

Grafis ir planārs tad un tikai tad, kad tam nav apakšgrafu, kuri ir homeomorfi grafam K_5 vai $K_{3,3}$.



14. zīm. L. Pontrjagins

L. Pontrjagins (1908-1988) - padomju matemātiķis. 14 gadu vecumā negadījumā zaudēja redzi. 1929. gadā beidza Maskavas universitāti. 1958. gadā kļuva par PSRS Zinātņu akadēmijas akadēmiķi.

Galvenie pētījumu virzieni:

- diferenciālvienādojumu teorija,
- topoloģija,
- svārstību teorija,
- vadības teorija,
- variāciju rēķini,
- algebra.

1932. gadā ieguva nozīmīgus rezultātus Beti grupu teorijā. Sniedza nozīmīgu ieguldījumu homotopiju teorijā (Pontrjagina klases). Izveidoja optimālo procesu matemātisko teoriju (Pontrjagina maksimuma princips). Planāru grafu kritērijs ir atrodams Pontrjagina nepublicētās piezīmēs, tāpēc 5.2. teorēmu dažkārt sauc arī par Kuratovska teorēmu, neminot Pontrjagina vārdu.

K. Kuratovskis (**Kazimierz Kuratowski, 1896-1980**) - poļu matemātiķis, viens no galvenajiem poļu topoloģiskās skolas pārstāvjiem.

Galvenie pētījumu virzieni:

- topoloģija,
- grafu teorija,
- kopu teorija,
- reālā mainīgā funkciju teorija.

Attīstīja topoloģiskās telpas aksiomātiku, pētīja plaknes topoloģiju, topoloģijas saistību ar analītisko funkciju teoriju.

Poļu matemātikas biedrības prezidents (1946-1953).

Planāru grafu kritērijs ir viņa vislabāk pazīstamais rezultāts.



15. zīm. K. Kuratovskis

6. Neplanāru grafu raksturojumi

6.1. Grafa krustošanās skaitlis

Par **grafa G krustošanās skaitli** $cr(G)$ sauc vismazāko divu šķautņu krustošanās skaitu punktos, kas ir atšķirīgi no virsotnēm, realizējot šo grafu uz plaknes.

- $cr(G) = 0$ tad un tikai tad, kad G ir planārs grafs.

-

$$cr(K_n) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{n}{2} \right] \left[\frac{n-1}{2} \right] \left[\frac{n-2}{2} \right] \left[\frac{n-3}{2} \right].$$

Piemēram, tā kā

$$cr(K_5) \leq \frac{1}{4} \left[\frac{5}{2} \right] \left[\frac{5-1}{2} \right] \left[\frac{5-2}{2} \right] \left[\frac{5-3}{2} \right] = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

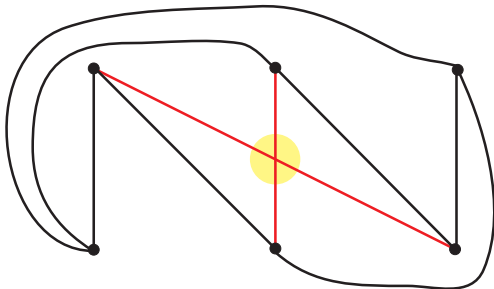
un K_5 nav planārs grafs, tad $cr(K_5) = 1$, t.i., pilnā grafa K_5 krustošanās skaitlis ir vienāds ar 1 (skat. 17. zīm.).

$$\text{cr}(K_{p,q}) \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{q}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{q-1}{2} \right\rfloor.$$

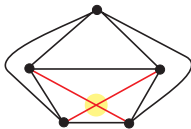
Piemēram, tā kā

$$\text{cr}(K_{3,3}) \leq \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{3-1}{2} \right\rfloor = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

un grafs $K_{3,3}$ nav planārs grafs, tad $\text{cr}(K_{3,3}) = 1$, t.i., pilnā divdaļu grafa $K_{3,3}$ krustošanās skaitlis ir vienāds ar 1 (skat. 16. zīm.).



16. zīm. $\text{cr}(K_{3,3}) = 1$



17. zīm. $\text{cr}(K_5) = 1$

6.2. Grafa biezums

Atgriezīsimies pie uzdevuma par radioelektronikas shēmu projektēšanu. Ja shēmai atbilstošais grafs nav planārs, tad kāds ir minimālais viensusēju plašu skaits, kas ir nepieciešams, lai realizētu shēmu?

Par **grafa G biezumu** $t(G)$ sauc vismazāko grafa G planāro apakšgrafu skaitu, kuru apvienojums vienāds ar G .

Tātad, ja shēmai atbilstošā grafa biezums ir vienāds ar s , tad vismazākais viensusēju plašu skaits, kas ir nepieciešams, lai realizētu shēmu, ir vienāds ar s .

- $t(G) = 1$ tad un tikai tad, kad G ir planārs skaitlis.
- Ja G ir sakarīgs $(n; m)$ -grafs, tad

$$t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n-6} \right\rceil, \quad t(G) \geq \left\lceil \frac{m+3n-7}{3n-6} \right\rceil,$$

kur $\lceil x \rceil$ ir vismazākais veselais skaitlis, kas ir lielāks vai vienāds par x , bet $\lfloor x \rfloor$ ir vislielākais veselais skaitlis, kas ir mazāks vai vienāds par x .

- Pilnā grafa K_n biežums [3, 2. lpp.]:

$$t(K_n) = \begin{cases} 1, & 1 \leq n \leq 4, \\ 2, & 5 \leq n \leq 8, \\ 3, & 9 \leq n \leq 10, \\ \left\lfloor \frac{n+2}{6} \right\rfloor, & n > 10. \end{cases}$$

- Pilnā divdaļu grafa $K_{p,p}$ biežums:

$$t(K_{p,p}) = \left\lfloor \frac{p+5}{4} \right\rfloor.$$

Piemēram,

$$t(K_{3,3}) = \left\lfloor \frac{3+5}{4} \right\rfloor = 2.$$

6.1. piemērs. Inženieris Bērziņš izveidoja radioelektronikas shēmu, kas sastāv no 200 elementiem un 2000 vadītājiem, kas savieno šos elementus. Vai šo shēmu var realizēt uz vienusējās plates? Ja atbilde uz iepriekšējo jautājumu ir noliedzoša, vai shēmu var realizēt 3 vienusēju plašu apvienojuma veidā?

Apskatīsim grafu G , kas atbilst shēmai. Tad

$$n = 200, \quad m = 2000.$$

1) Šo shēmu nevar realizēt uz vienusējās plates. Tiešām, ja pieņemt pretējo, ka shēmu var realizēt uz vienusējās plates, tad G ir sakarīgs planārs grafs, un tāpēc saskaņā ar **2. sekām** no **Eilera teorēmas** ir jāizpildās $m \leq 3n - 6$, taču

$$m = 2000 > 594 = 3 \cdot 200 - 6 = 3n - 6.$$

2) Tā kā $t(G) \geq \left\lceil \frac{m}{3n - 6} \right\rceil = \left\lceil \frac{2000}{594} \right\rceil = \lceil 3,36 \dots \rceil = 4$, tad shēmas realizēšanai ir jāizmanto vismaz 4 vienusēju plašu apvienojumu, līdz ar to šo shēmu nevar realizēt 3 vienusēju plašu apvienojuma veidā.

6.3. Grafa sagrozījuma skaitlis

Par grafa G sagrozījuma skaitli $\text{sk}(G)$ sauc vismazāko grafa G šķautņu skaitu, kuras atņemot, grafs G kļūst par planāru grafu.

- $\text{sk}(G) = 0$ tad un tikai tad, kad G ir planārs skaitlis.

-

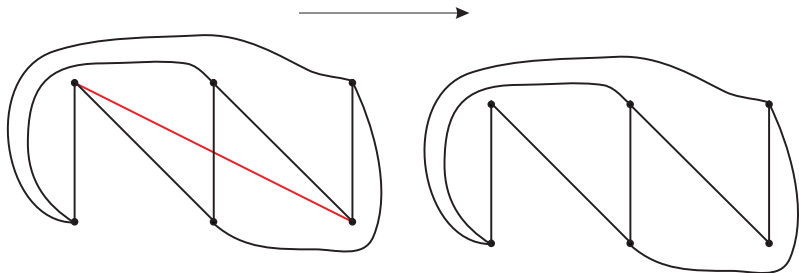
$$\text{sk}(K_n) = \frac{n(n-1)}{2} - 3n + 6, \quad n \geq 3.$$

Piemēram,

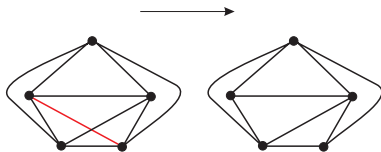
$$\text{sk}(K_5) = \frac{5(5-1)}{2} - 3 \cdot 5 + 6 = 1,$$

t.i., pilnā grafa K_5 sagrozījuma skaitlis ir vienāds ar 1.

- $\text{sk}(K_{3,3}) = 1$, *t.i., pilnā divdaļu grafa $K_{3,3}$ sagrozījuma skaitlis ir vienāds ar 1.*



18. zīm. $sk(K_{3,3}) = 1$



19. zīm. $sk(K_5) = 1$

6.4. Grafa virsotņu atņemšanas skaitlis

Par grafa G virsotņu atņemšanas skaitli $\phi(G)$ sauc vismazāko grafa G virsotņu skaitu, kuras atņemot, grafs G kļūst par planāru grafu.

- $\phi(G) = 0$ tad un tikai tad, kad G ir planārs skaitlis.
- Pilnā grafa virsotņu atņemšanas skaitlis [2, 3. lpp.]:

$$\phi(K_n) = \begin{cases} 0, & 1 \leq n \leq 4, \\ n - 4, & n \geq 5. \end{cases}$$

- Pilnā divdaļu grafa $K_{p,q}$ virsotņu atņemšanas skaitlis [2, 3. lpp.]:

$$\phi(K_{p,q}) = \begin{cases} 0, & 1 \leq \min\{p; q\} \leq 2, \\ \min\{p; q\} - 2, & \min\{p; q\} \geq 3. \end{cases}$$

7. Noderīgas saites

- <http://www.planarity.net/> Interaktīva spēle “Planarity”, kura piedāvā atrast dotā grafa plakanu ģeometrisko interpretāciju.
- **Wikipedia** Interneta enciklopēdija.
- **The MacTutor History of Mathematics archive** Matemātikas vēstures resursi.
- **MathWorld** Grafu teorijas resursi.

8. Terminu vārdnīca

grafa krustošanās skaitlis

graph crossing number

число скрещиваний графа

grafa biezums

thickness (or depth) of a graph

толщина графа

grafa sagrozījuma skaitlis

skewness of a graph

искаженность графа

grafa virsotņu atņemšanas skaitlis

vertex deletion number of a graph

вершинная искаженность графа

Alfabētiskais rādītājs

blakusskaldnes, 9

formula

Eilera, 12

grafa

ārējā skaldne, 9

biezums, 43

krustošanās skaitlis, 40

sagrozījuma skaitlis, 46

virsoņu atņemšanas skaitlis,
48

grafs

plakans, 4

planārs, 5

skaldne, 9

skaldnes iekšiene, 9

teorēma

Eilera, 12

Pontrjagina-Kuratovska, 37

Vāgnera, 8, 34

trijstūris, 9

uzdevums

par shēmām, 4

par trim mājām un trim akām,
6

Zīmējumu rādītājs

1. zīm. Uzdevums par trim mājām un trim akām	5
2. zīm. Uzdevums par gāzi, ūdeni un elektrību	7
3. zīm. Pilnā grafa K_4 trīs ģeometriskās interpretācijas: (a) - neplakana ģeometriskā interpretācija, (b) - plakana ģeometriskā interpretācija, kuras viena šķautne nav taisnes nogrieznis, (c) - plakana ģeometriskā interpretācija, kuras visas šķautnes ir taisnes nogriežņi	8
4. zīm. Grafam G ir 4 skaldnes: α, β, γ - grafa G iekšējās skaldnes, δ - grafa G ārējā skaldne	11
5. zīm. Ilustrācija Eilera formulas pierādījumam: 1. solis	14
6. zīm. Ilustrācija Eilera formulas pierādījumam: 2. solis	15
7. zīm. Ilustrācija Eilera formulas pierādījumam: 3. solis	16
8. zīm. Ilustrācija Eilera formulas pierādījumam: 4. solis	17

9. zīm. Grafis G nav maksimāls plakans grafs, jo, pievienojot tam šķautni $\{1; 4\}$, iegūst plakānu grafu $H = G + \{1; 4\}$. Grafis H ir maksimāls plakans grafs, jo, pievienojot tam jebkuru šķautni, iegūsim neplanāru grafu. Grafis H ir plakana triangulācija.	28
10. zīm.	29
11. zīm. Plakans grafs G un tā ģeometriski duālais grafs G^*	32
12. zīm. Petersena grafu var savilkt par pilno grafu K_5 . . .	35
13. zīm. Grafi G_1 un G_2 ir homeomorfi, jo tie ir iegūti no grafā G , sadalot tā šķautnes	36
14. zīm. L. Pontrjagins	38
15. zīm. K. Kuratovskis	39
16. zīm. $cr(K_{3,3}) = 1$	42
17. zīm. $cr(K_5) = 1$	42
18. zīm. $sk(K_{3,3}) = 1$	47
19. zīm. $sk(K_5) = 1$	47

Literatūra

- [1] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов*. Наука, Москва, 1990. 8, 34, 37
- [2] Candido F.X. de Mendonca N. and Erico F. Xavier and Jorge Stolfi and Luerbio Faria and Celina M. H. de Figueiredo. The vertex deletion number and splitting number of a triangulation of $C_n \times C_m$. <http://www.ic.unicamp.br/~reltech/1999/99-15.pdf>. 48
- [3] Michael B. Dillencourt and David Eppstein and Daniel S. Hirschberg. Geometric Thickness of Complete Graphs. *J. Graph Algorithms and Applications*, 4, 5, 2000. <http://arxiv.org/abs/math/9910185v1>. 44
- [4] Holm J., Rotenberg E. Fully-dynamic planarity testing in polylogarithmic time. *Proceedings of the 52nd Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, pages 167–180, 2020. <https://arxiv.org/abs/1911.03449>.

- [5] Боголюбов А.Н. *Математики. Механики. Биографический справочник*. Наукова думка, Киев, 1983.
- [6] Мельников О.И. *Занимательные задачи по теории графов*. ТетраСистемс, Минск, 2001.