

DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

**Pārlase dziļumā
neorientētos grafos**

2022. gada 9. septembris

2022

Saturs

1. Pārlases dziļumā apraksts	4
2. Pārlases dziļumā piemērs	7
3. Pārlases dziļumā lietojumi	77
Literatūra	82

Pārlase dziļumā ir metode, kas, tāpat kā pārlase plašumā, arī ļauj noteikt grafa komponentes. Pārlasē dziļumā katra sakarīga grafa šķautne tiek pārlūkota tieši divas reizes. Pārlasei dziļumā ir arī citi svarīgi lietojumi.

1. Pārlases dziļumā apraksts

Apskatīsim grafu G ar vismaz vienu šķautni.

- Izvēlamies patvaļīgu dotā grafa G virsotni u un piešķiram tai iezīmi 1. Izveidosim orientētu koku T , kas sastāv no vienas virsotnes u . Koku T sauksim par **palmas koku**.
- Apskatām virsotnei u incidentu šķautni uv , šķautni uv nosaucam par “**skatītu**”, virsotnei v piešķiram iezīmi 2. Virsotni v saucam par **virsošnes u dēlu**. Virsotni u saucam par **virsošnes v tēvu** un rakstām $F(v) = u$. Pārejām uz virsotni v . *Palmas kokam T pievienojam loku $(u; v)$, kuru sauksim par **palmas koka daļu**.*
- Virsotne x . Pēdējā piešķirtā iezīme ir k .
 - Šķautne xy nav “skatīta”.
 - (1. akords)** Virsotnei y nav iezīmes. Uzskatām, ka šķautne xy ir “skatīta”. Virsotnei y piešķiram iezīmi $k + 1$. Virsotni y saucam par **virsošnes x dēlu**. Virsotni x saucam par **virsošnes y tēvu** un rakstām

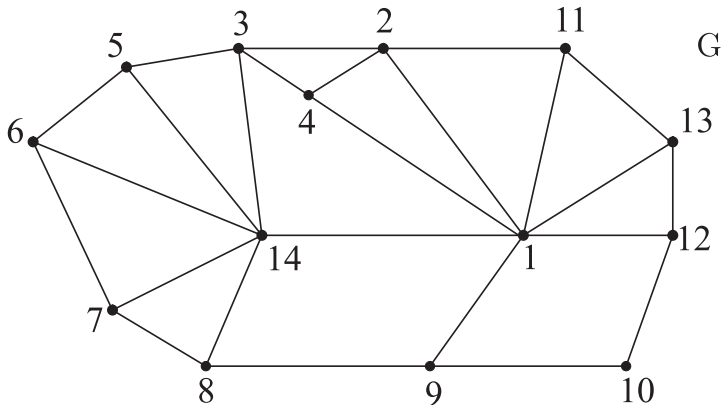
$F(y) = x$. Pārejam uz virsotni y . *Palmas kokam T pievienojam jaunu tā daļu - loku $(x; y)$* . Par x uzskatām y un pārejam uz 3. punktu.

- 3.1.2. **(2. akords)** Virsotnei y ir iezīme. Uzskatām, ka šķautne xy ir “skatīta”. *Palmas kokam T pievienojam loku $(x; y)$ un nosaucam to par **palmas zaru***. Pārejam uz 3. punktu.
- 3.2. **(3. akords)** Visas virsotnei x incidentās šķautnes xy ir “skatītas”. Atgriezāties pie virsotnes x tēva $F(x)$. Par x uzskatām $F(x)$ un pārejam uz 3. punktu.

4. Pārlasi dziļumā beidzam, kad esam atgriezušies virsotnē u un visas virsotnei u incidentās šķautnes ir jau “skatītas”. Virsotnes, kuras ieguva iezīmes, veido grafa G sakarīguma komponentes virsotņu kopu. Ja visas grafa G virsotnes ieguva iezīmes, tad G ir sakarīgs grafs.

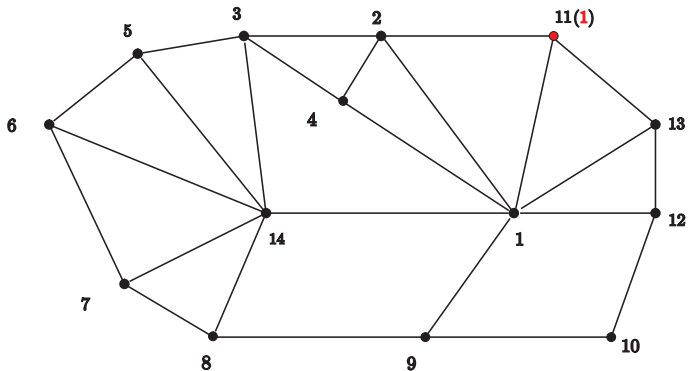
2. Pārslases dziļumā piemērs

2.1. piemērs. Pielietosim pārslasi dziļumā 1. zīm. attēlotajam grafam G , sākot ar virsotni 11.



1. zīm.

1. Virsotnei 11 piešķiram iezīmi 1.



2. zīm.

Saturs

Sākums

Beigas



Atpakaļ

Aizvērt

Pilns ekrāns

Izveidojam palmas koku, kas sastāv no vienas virsotnes 11.

•
11

3. zīm.

Saturs

Sākums

Beigas

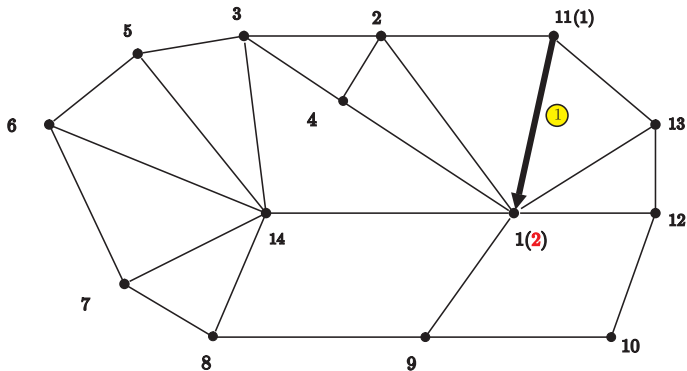


Atpakaļ

Aizvērt

Pilns ekrāns

2. Šķautne $\{11;1\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 1 nav iezīmes. Uzskatām, ka šķautne $\{11;1\}$ ir “skatīta”. Virsotnei 1 piešķiram iezīmi 2. Virsotnes 1 tēvs ir virsotne 11, $F(1) = 11$. Palmas kokam T pievienojam loku $(11;1)$. Grafā G pārejām uz virsotni 1. **(1. akords)**



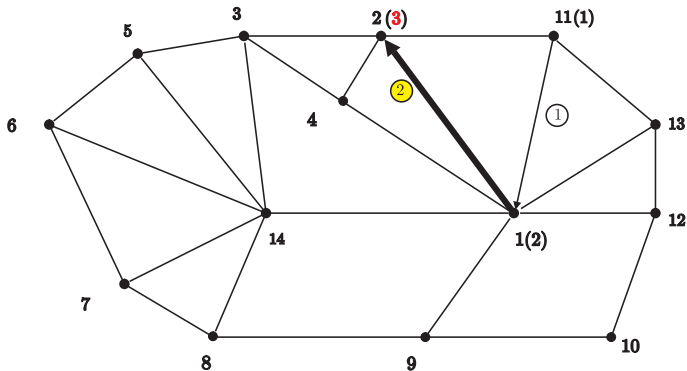
4. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā daļu $(11; 1)$.



5. zīm.

3. Šķautne $\{1; 2\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 2 nav iezīmes. Uzskatām, ka šķautne $\{1; 2\}$ ir “skatīta”. Virsotnei 2 piešķiram iezīmi 3. Virsotnes 2 tēvs ir virsotne 1, $F(2) = 1$. Palmas kokam T pievienojam loku $(1; 2)$. Grafā G pārejam uz virsotni 2. (1. akords)



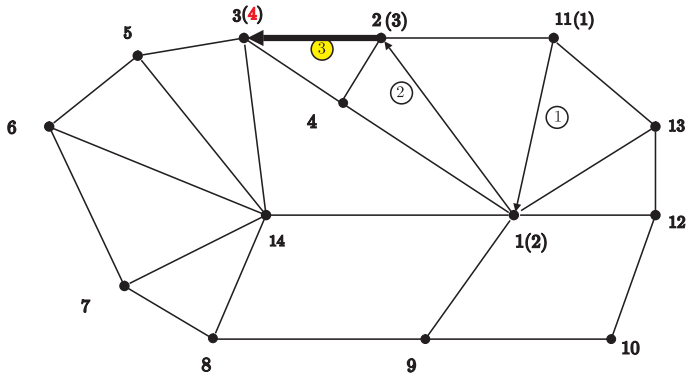
6. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā daļu (1;2).



7. zīm.

4. Šķautne $\{2; 3\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 3 nav iezīmes. Uzskatām, ka šķautne $\{2; 3\}$ ir “skatīta”. Virsotnei 3 piešķiram iezīmi 4. Virsotnes 3 tēvs ir virsotne 2, $F(3) = 2$. Palmas kokam T pievienojam loku $(2; 3)$. Grafā G pārejam uz virsotni 3. **(1. akords)**



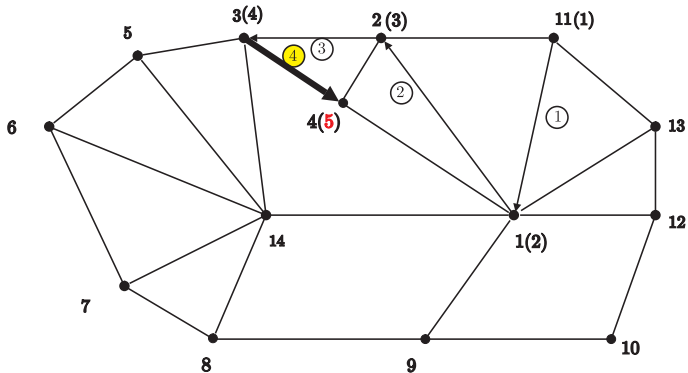
8. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā daļu $(2; 3)$.



9. zīm.

5. Šķautne $\{3; 4\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 4 nav iezīmes. Uzskatām, ka šķautne $\{3; 4\}$ ir “skatīta”. Virsotnei 4 piešķiram iezīmi 5. Virsotnes 4 tēvs ir virsotne 3, $F(4) = 3$. Palmas kokam T pievienojam loku $(3; 4)$. Grafā G pārejam uz virsotni 4. **(1. akords)**



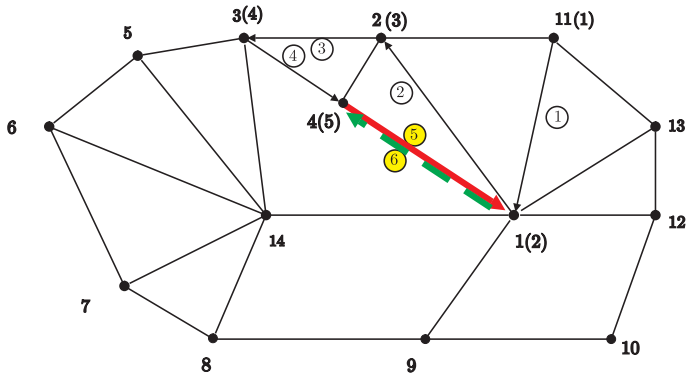
10. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā daļu (3;4).



11. zīm.

6. Šķautne $\{4;1\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 1 jau ir iezīme. Uzskatām, ka šķautne $\{4;1\}$ ir “skatīta”. Palmas kokam T pievienojam **palmas zaru** $(4;1)$. Grafā G paliekam virsotnē 4. **(2. akords)**



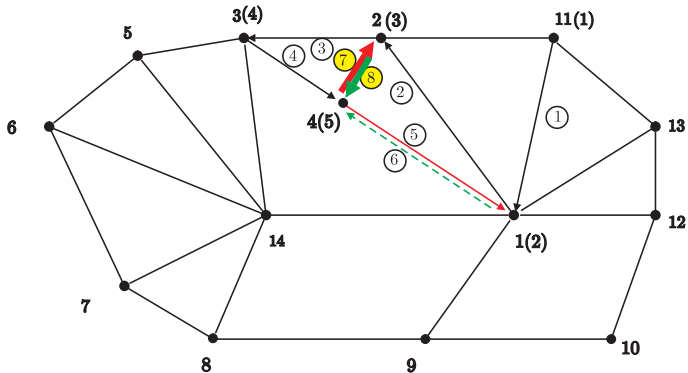
12. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā zaru (4; 1).



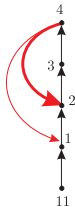
13. zīm.

7. Šķautne $\{4;2\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 2 jau ir iezīme. Uzskatām, ka šķautne $\{4;2\}$ ir “skatīta”. Palmas kokam T pievienojam **palmas zaru** $(4;2)$. Grafā G paliekam virsotnē 4. **(2. akords)**



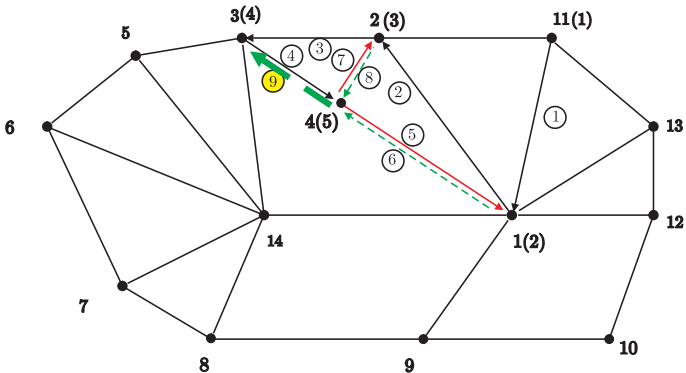
14. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā zaru (4; 2).



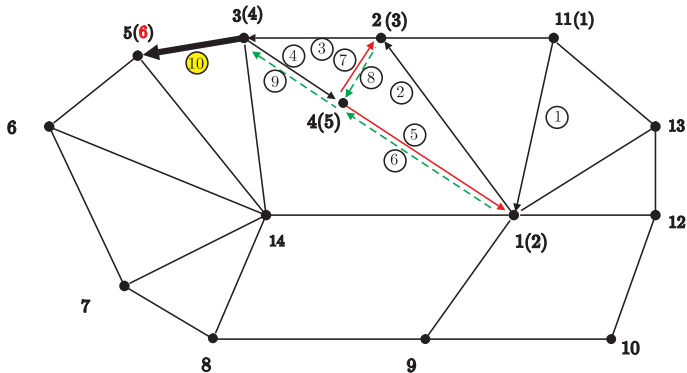
15. zīm.

- Tā kā visas virsotnei 4 incidentās šķautnes ir “skatītas”, tad pārejām uz virsotnes 4 tēvu - virsotni 3. **(3. akords)**



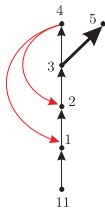
16. zīm.

8. Šķautne $\{3; 5\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 5 nav iezīmes. Uzskatām, ka šķautne $\{3; 5\}$ ir “skatīta”. Virsotnei 5 piešķiram iezīmi 6. Virsotnes 5 tēvs ir virsotne 3, $F(5) = 3$. Palmas kokam T pievienojam loku $(3; 5)$. Grafā G pārejam uz virsotni 5. **(1. akords)**



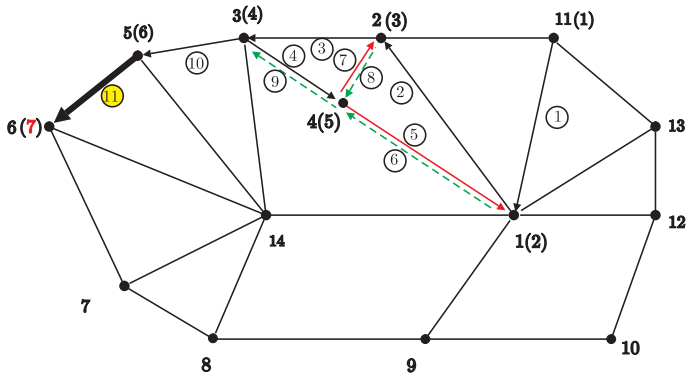
17. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā daļu $(3; 5)$.



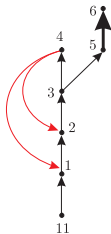
18. zīm.

9. Šķautne $\{5; 6\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 6 nav iezīmes. Uzskatām, ka šķautne $\{5; 6\}$ ir “skatīta”. Virsotnei 6 piešķiram iezīmi 7. Virsotnes 6 tēvs ir virsotne 5, $F(6) = 5$. Palmas kokam T pievienojam loku $(5; 6)$. Grafā G pārejam uz virsotni 6. (1. akords)



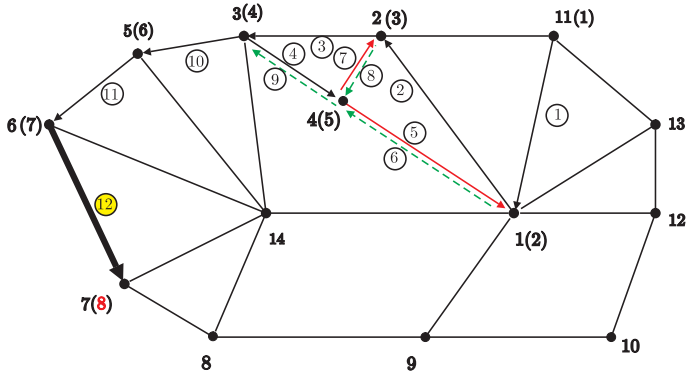
19. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā daļu (5; 6).



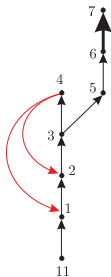
20. zīm.

10. Šķautne $\{6; 7\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 7 nav iezīmes. Uzskatām, ka šķautne $\{6; 7\}$ ir “skatīta”. Virsotnei 7 piešķiram iezīmi 8. Virsotnes 7 tēvs ir virsotne 6, $F(7) = 6$. Palmas kokam T pievienojam loku $(6; 7)$. Grafā G pārejām uz virsotni 7. (1. akords)



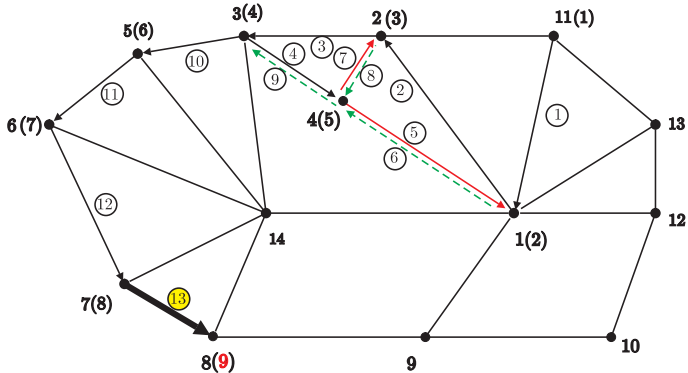
21. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā daļu (6; 7).



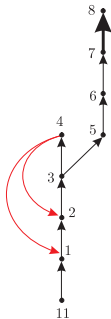
22. zīm.

11. Šķautne $\{7; 8\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 8 nav iezīmes. Uzskatām, ka šķautne $\{7; 8\}$ ir “skatīta”. Virsotnei 8 piešķiram iezīmi 9. Virsotnes 8 tēvs ir virsotne 7, $F(8) = 7$. Palmas kokam T pievienojam loku $(7; 8)$. Grafā G pārejām uz virsotni 8. **(1. akords)**



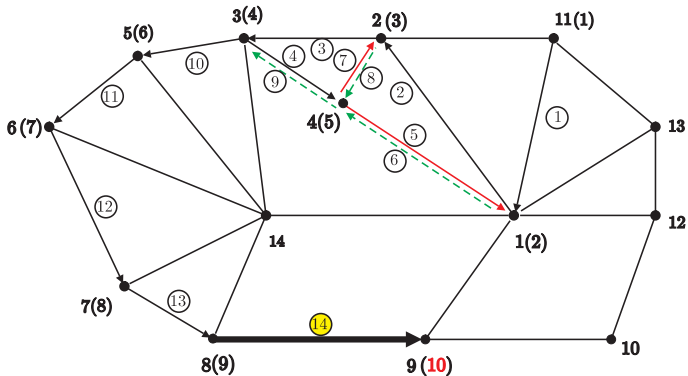
23. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā daļu (7; 8).



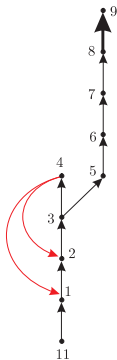
24. zīm.

12. Šķautne $\{8;9\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 9 nav iezīmes. Uzskatām, ka šķautne $\{8;9\}$ ir “skatīta”. Virsotnei 9 piešķiram iezīmi 10. Virsotnes 9 tēvs ir virsotne 8, $F(9) = 8$. Palmas kokam T pievienojam loku $(8;9)$. Grafā G pārejam uz virsotni 9. (1. akords)



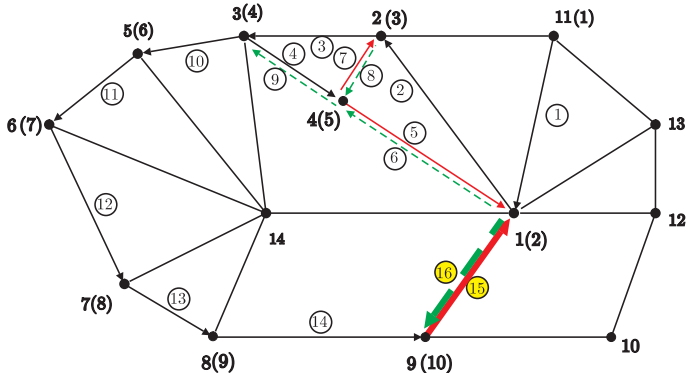
25. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā daļu (8;9).



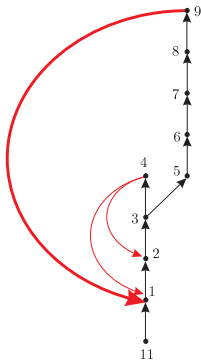
26. zīm.

13. Šķautne $\{9;1\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 1 jau ir iezīme. Uzskatām, ka šķautne $\{9;1\}$ ir “skatīta”. Palmas kokam T pievienojam **palmas zaru** $(9;1)$. Grafā G paliekam virsotnē 9. **(2. akords)**



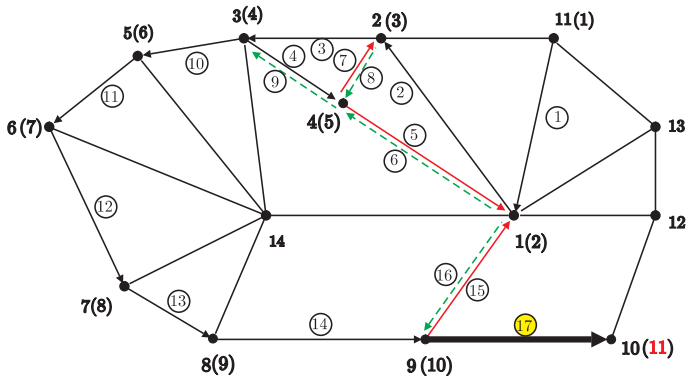
27. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā zaru (9; 1).



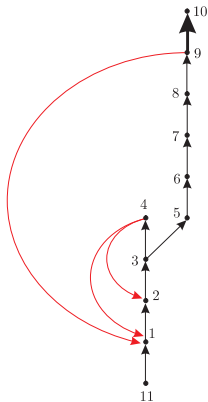
28. zīm.

14. Šķautne $\{9; 10\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 10 nav iezīmes. Uzskatām, ka šķautne $\{9; 10\}$ ir “skatīta”. Virsotnei 10 piešķiram iezīmi 11. Virsotnes 10 tēvs ir virsotne 9, $F(10) = 9$. Palmas kokam T pievienojam loku $(9; 10)$. Grafā G pārejam uz virsotni 10. (1. akords)



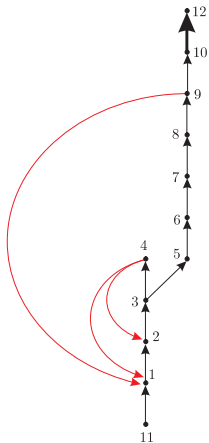
29. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā daļu (9; 10).



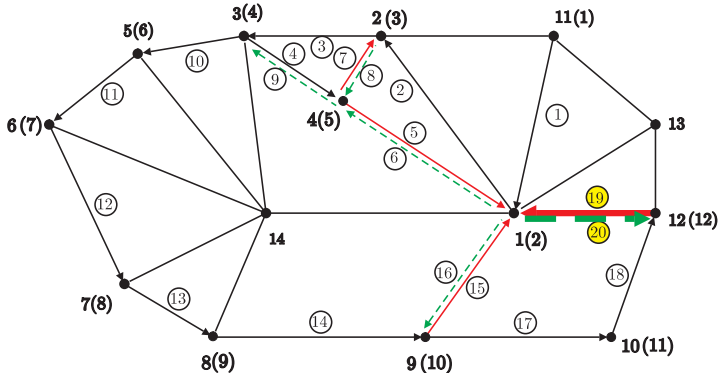
30. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā daļu (10; 12).



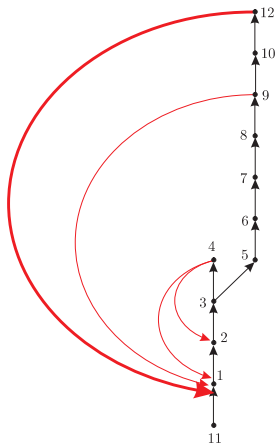
32. zīm.

16. Šķautne $\{12; 1\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 1 jau ir iezīme. Uzskatām, ka šķautne $\{12; 1\}$ ir “skatīta”. Palmas kokam T pievienojam **palmas zaru** $(12; 1)$. Grafā G paliekam virsotnē 12. (**2. akords**)



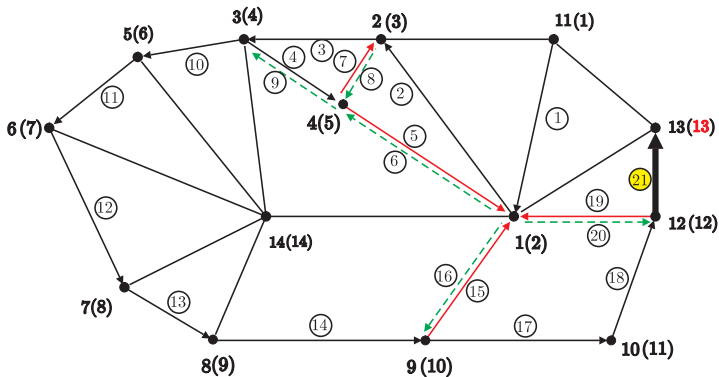
33. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā zaru (12; 1).



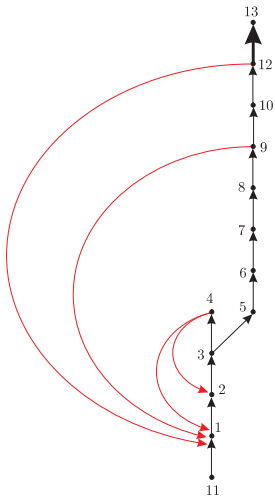
34. zīm.

17. Šķautne $\{12; 13\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 13 nav iezīmes. Uzskatām, ka šķautne $\{12; 13\}$ ir “skatīta”. Virsotnei 13 piešķiram iezīmi 13. Virsotnes 13 tēvs ir virsotne 12, $F(13) = 12$. Palmas kokam T pievienojam loku $(12; 13)$. Grafā G pārejam uz virsotni 13.
(1. akords)



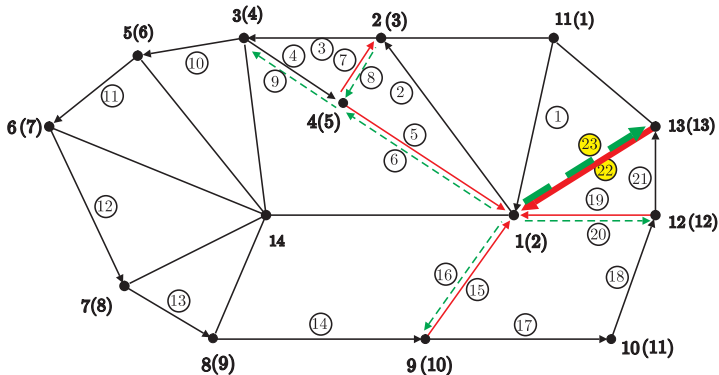
35. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā daļu (12; 13).



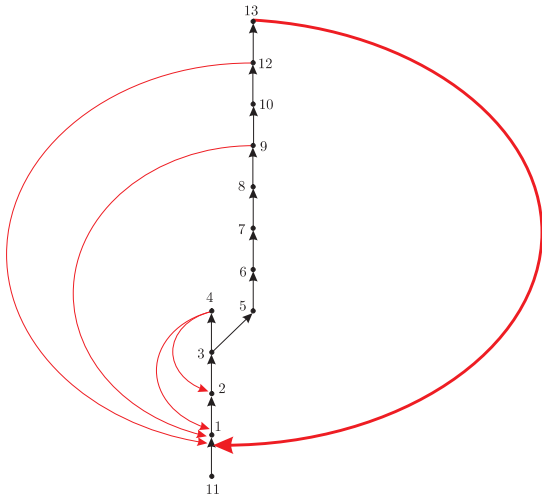
36. zīm.

18. Šķautne $\{13; 1\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 1 jau ir iezīme. Uzskatām, ka šķautne $\{13; 1\}$ ir “skatīta”. Palmas kokam T pievienojam **palmas zaru** $(13; 1)$. Grafā G paliekam virsotnē 13. **(2. akords)**



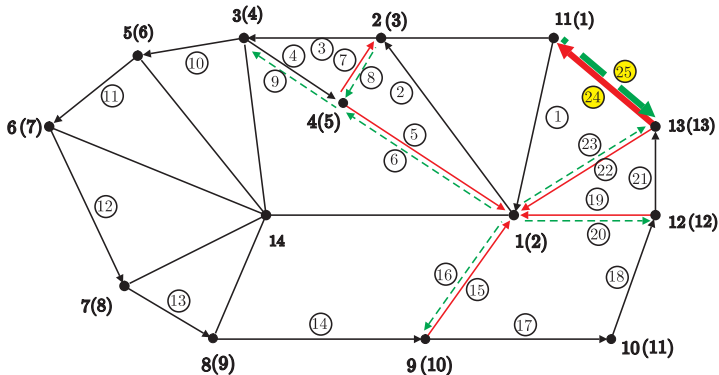
37. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā zaru (13; 1).



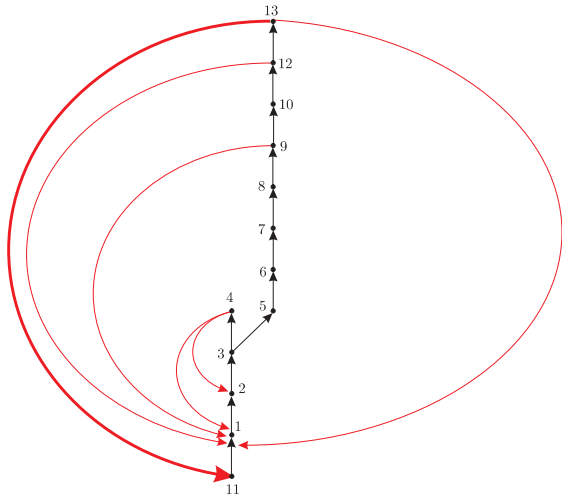
38. zīm.

19. Šķautne $\{13; 11\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 11 jau ir iezīme. Uzskatām, ka šķautne $\{13; 11\}$ ir “skatīta”. Palmas kokam T pievienojam **palmas zaru** $(13; 11)$. Grafā G paliekam virsotnē 13. (**2. akords**)



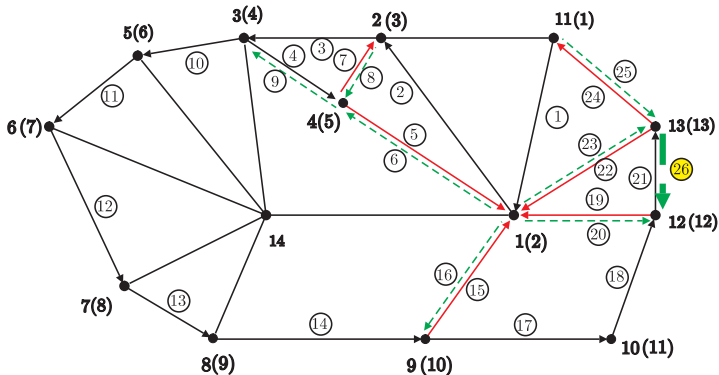
39. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā zaru (13; 11).



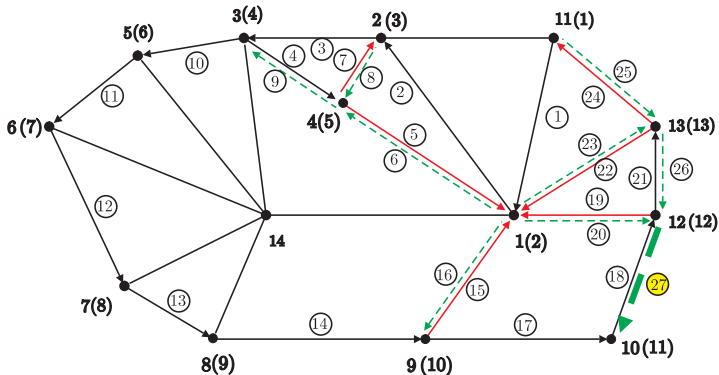
40. zīm.

- Tā kā visas virsotnei 13 incidentās šķautnes ir “skatītas”, tad pārejām uz virsotnes 13 tēvu - virsotni 12. **(3. akords)**



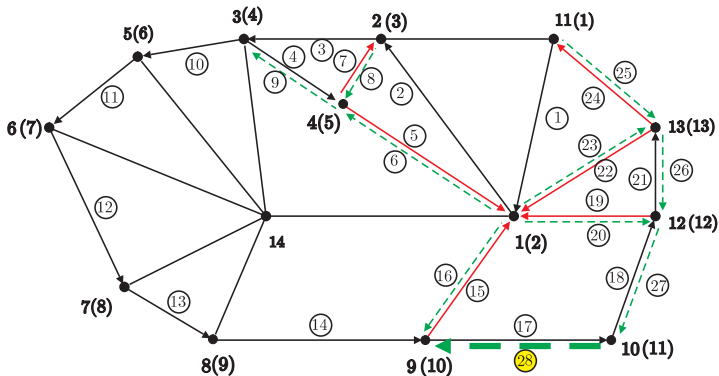
41. zīm.

- Tā kā visas virsotnei 12 incidentās šķautnes ir “skatītas”, tad pārejām uz virsotnes 12 tēvu - virsotni 10. **(3. akords)**



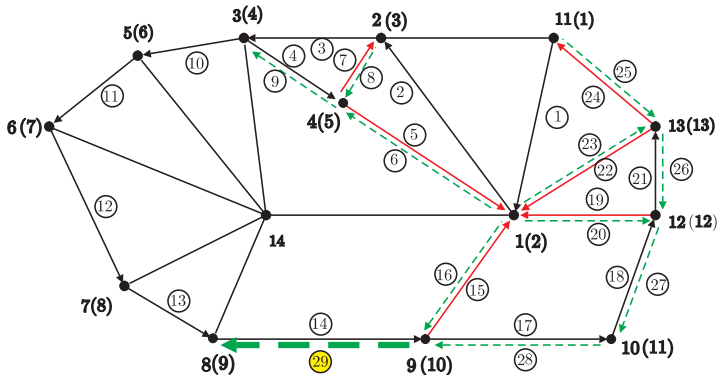
42. zīm.

- Tā kā visas virsotnei 10 incidentās šķautnes ir “skatītas”, tad pārejām uz virsotnes 10 tēvu - virsotni 9. (**3. akords**)



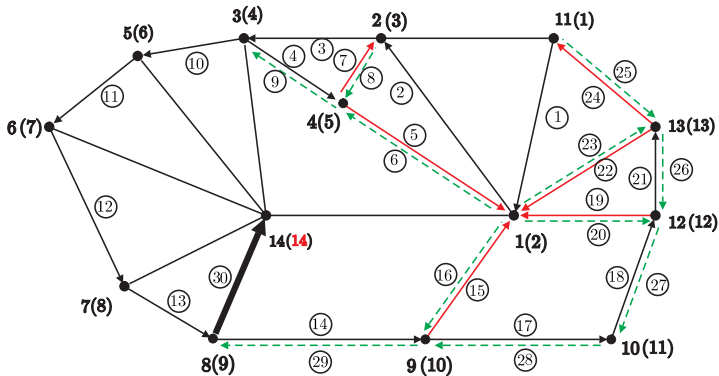
43. zīm.

- Tā kā visas virsotnei 9 incidentās šķautnes ir “skatītas”, tad pārejām uz virsotnes 9 tēvu - virsotni 8. (**3. akords**)



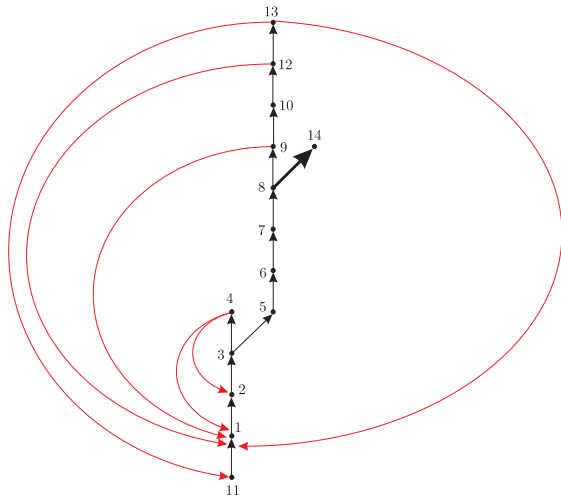
44. zīm.

20. Šķautne $\{8;14\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 14 nav iezīmes. Uzskatām, ka šķautne $\{8;14\}$ ir “skatīta”. Virsotnei 14 piešķiram iezīmi 14. Virsotnes 14 tēvs ir virsotne 8, $F(14) = 8$. Palmas kokam T pievienojam loku $(8;14)$. Grafā G pārejam uz virsotni 14. (1. akords)



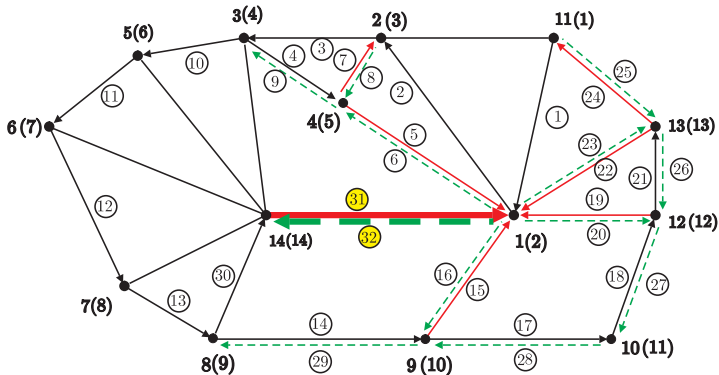
45. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā daļu (8; 14).



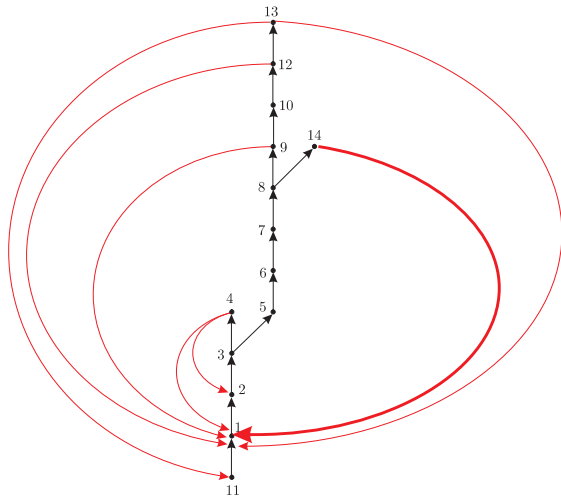
46. zīm.

21. Šķautne $\{14; 1\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 1 jau ir iezīme. Uzskatām, ka šķautne $\{14; 1\}$ ir “skatīta”. Palmas kokam T pievienojam **palmas zaru** $(14; 1)$. Grafā G paliekam virsotnē 14. (**2. akords**)



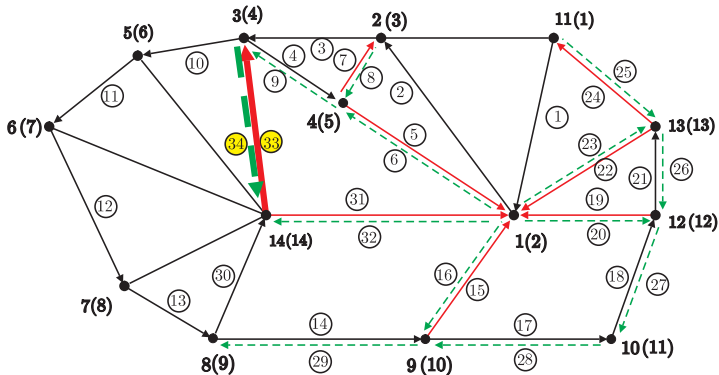
47. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā zaru (14; 1).



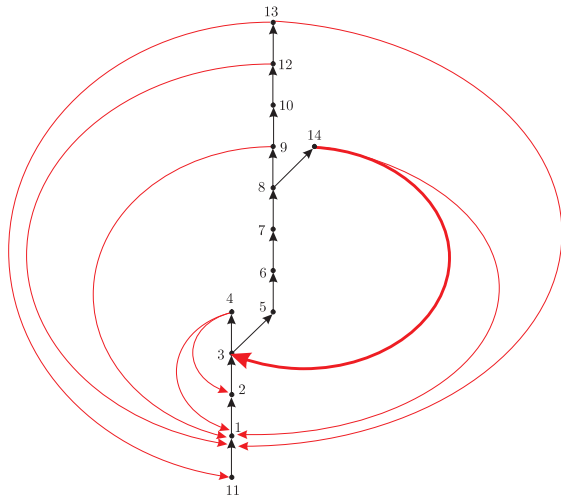
48. zīm.

22. Šķautne $\{14; 3\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 3 jau ir iezīme. Uzskatām, ka šķautne $\{14; 3\}$ ir “skatīta”. Palmas kokam T pievienojam **palmas zaru** $(14; 3)$. Grafā G paliekam virsotnē 14. **(2. akords)**



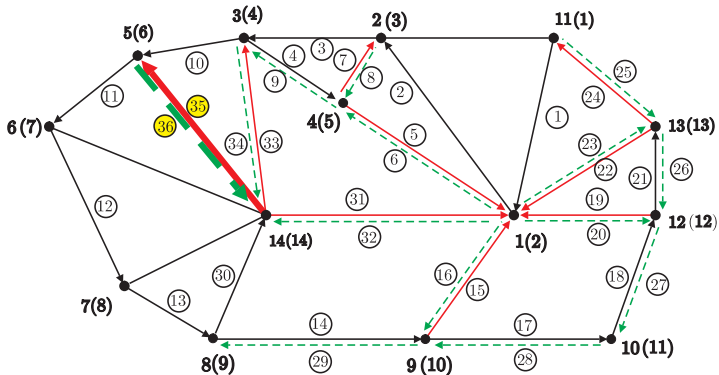
49. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā zaru (14; 3).



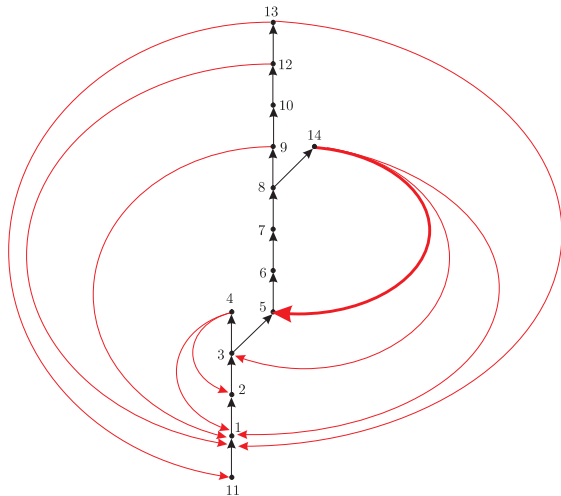
50. zīm.

23. Šķautne $\{14; 5\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 5 jau ir iezīme. Uzskatām, ka šķautne $\{14; 5\}$ ir “skatīta”. Palmas kokam T pievienojam **palmas zaru** $(14; 5)$. Grafā G paliekam virsotnē 14. **(2. akords)**



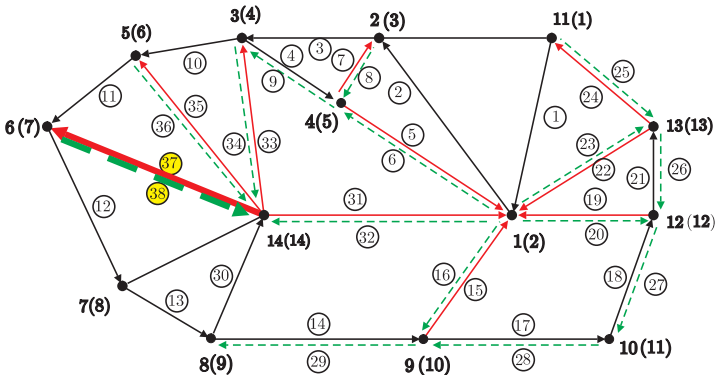
51. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā zaru (14;5).



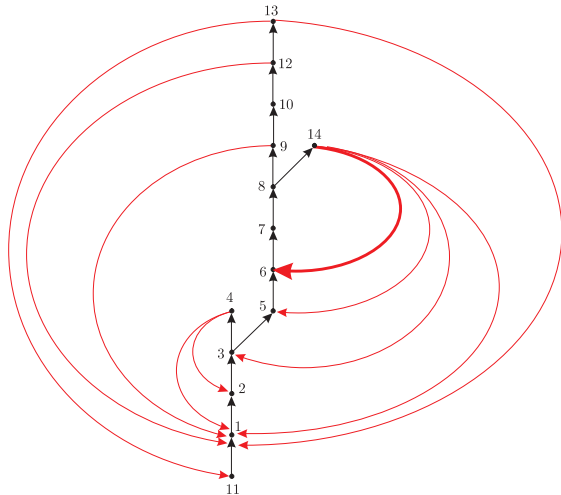
52. zīm.

24. Šķautne $\{14;6\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 6 jau ir iezīme. Uzskatām, ka šķautne $\{14;6\}$ ir “skatīta”. Palmas kokam T pievienojam **palmas zaru** $(14;6)$. Grafā G paliekam virsotnē 14. **(2. akords)**



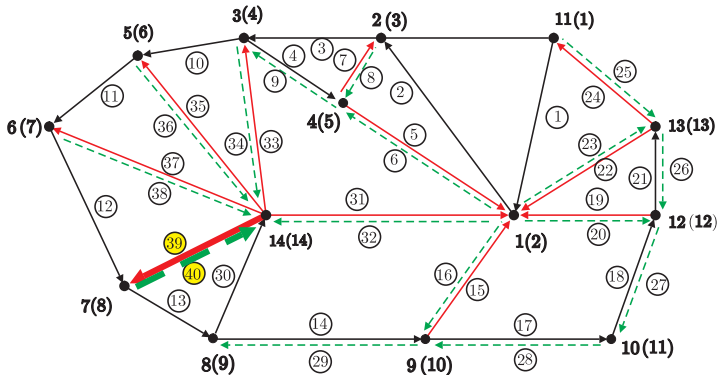
53. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā zaru (14;6).



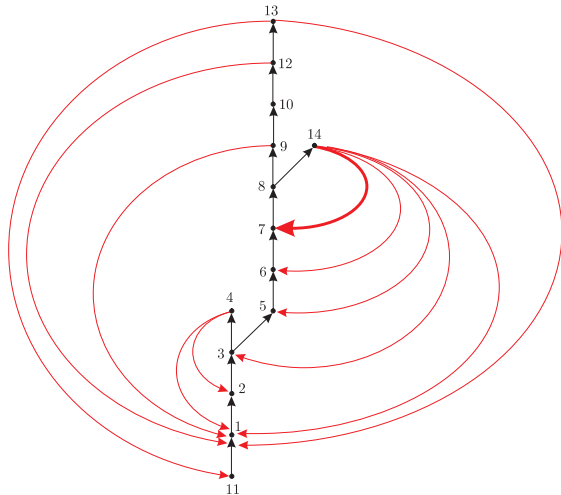
54. zīm.

25. Šķautne $\{14; 7\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 7 jau ir iezīme. Uzskatām, ka šķautne $\{14; 7\}$ ir “skatīta”. Palmas kokam T pievienojam **palmas zaru** $(14; 7)$. Grafā G paliekam virsotnē 14. (**2. akords**)



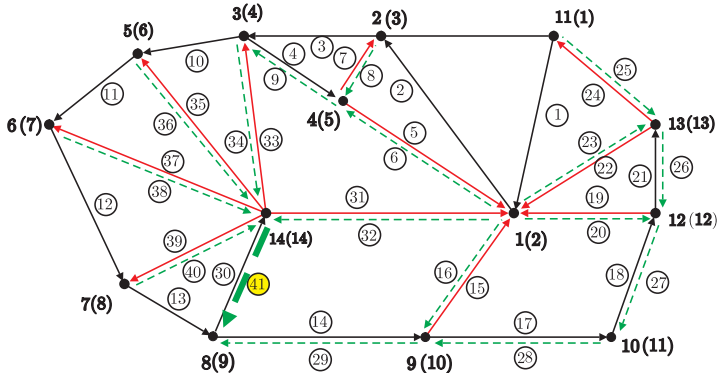
55. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā zaru (14; 7).



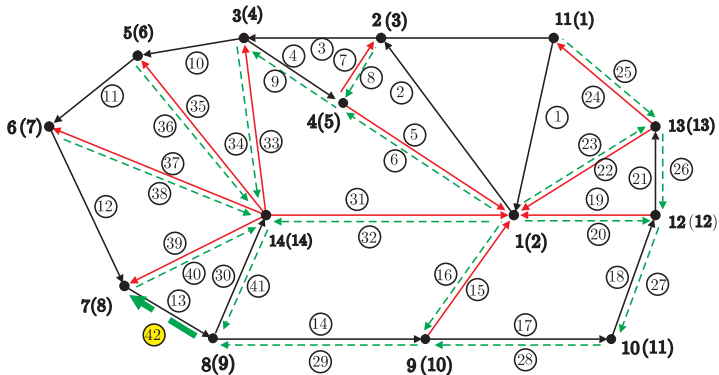
56. zīm.

- Tā kā visas virsotnei 14 incidentās šķautnes ir “skatītas”, tad pārejām uz virsotnes 14 tēvu - virsotni 8. (**3. akords**)



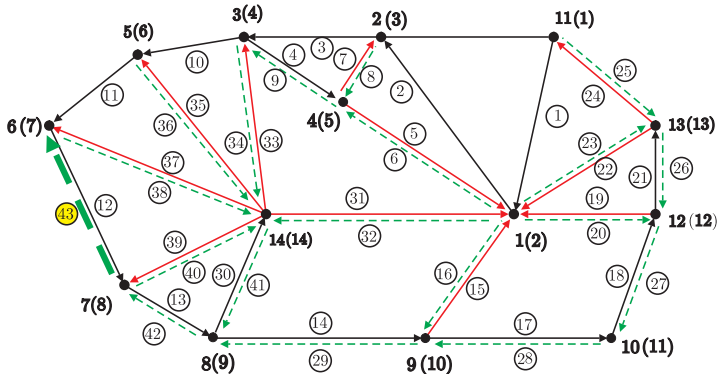
57. zīm.

- Tā kā visas virsotnei 8 incidentās šķautnes ir “skatītas”, tad pārejām uz virsotnes 8 tēvu - virsotni 7. (**3. akords**)



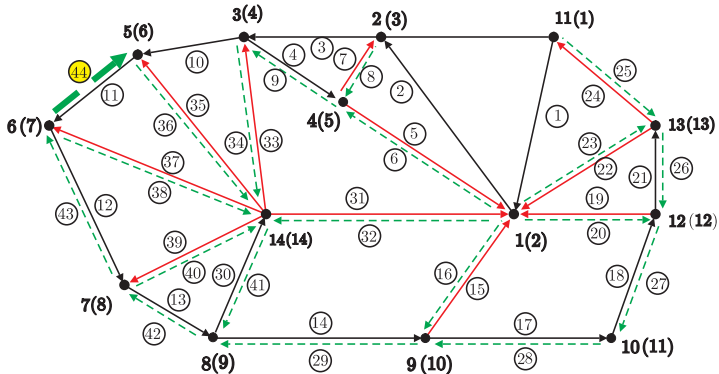
58. zīm.

- Tā kā visas virsotnei 7 incidentās šķautnes ir “skatītas”, tad pārejām uz virsotnes 7 tēvu - virsotni 6. (**3. akords**)



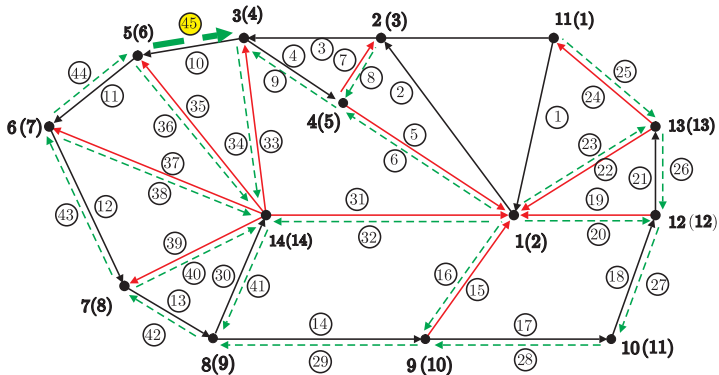
59. zīm.

- Tā kā visas virsotnei 6 incidentās šķautnes ir “skatītas”, tad pārejām uz virsotnes 6 tēvu - virsotni 5. (**3. akords**)



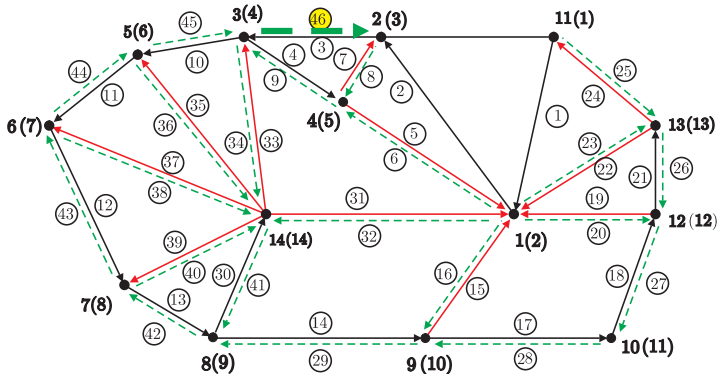
60. zīm.

- Tā kā visas virsotnei 5 incidentās šķautnes ir “skatītas”, tad pārejām uz virsotnes 5 tēvu - virsotni 3. (**3. akords**)



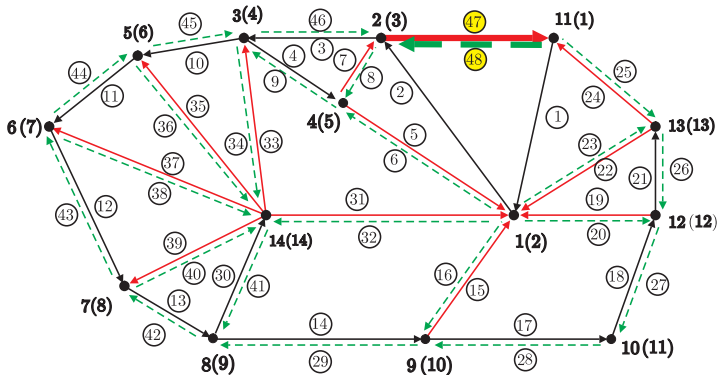
61. zīm.

- Tā kā visas virsotnei 3 incidentās šķautnes ir “skatītas”, tad pārejām uz virsotnes 3 tēvu - virsotni 2. (**3. akords**)



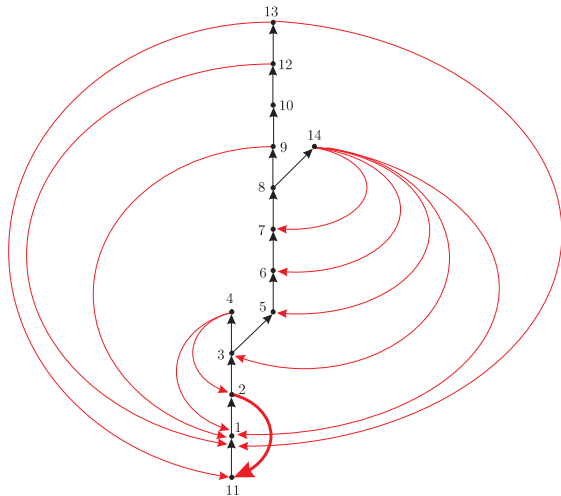
62. zīm.

26. Šķautne $\{2; 11\}$ vēl nav skatīta. Virsotnei 11 jau ir iezīme. Uzskatām, ka šķautne $\{2; 11\}$ ir “skatīta”. Palmas kokam T pievienojam **palmas zaru** $(2; 11)$. Grafā G paliekam virsotnē 2. (**2. akords**)



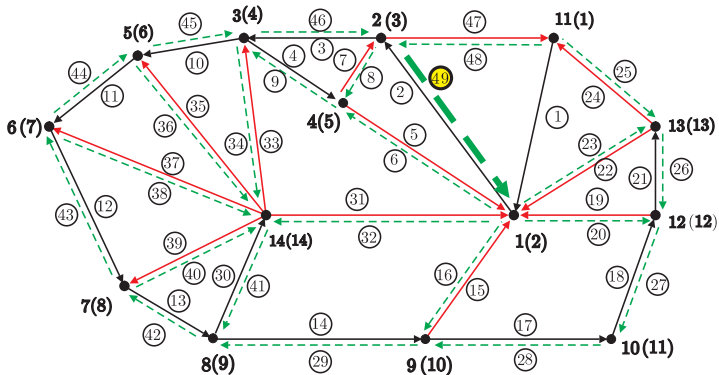
63. zīm.

Palmas kokam pievienojam tā zaru (2; 11).



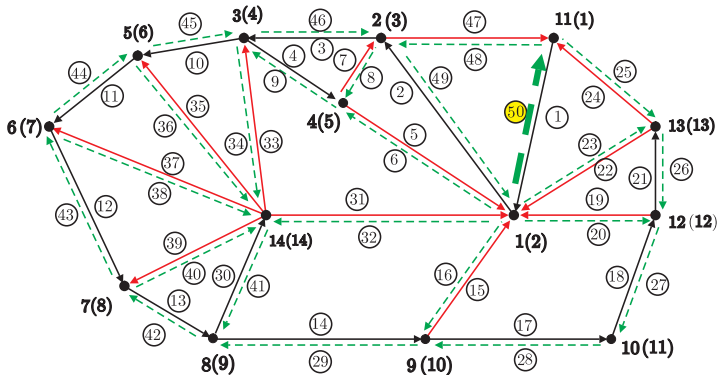
64. zīm.

- Tā kā visas virsotnei 2 incidentās šķautnes ir “skatītas”, tad pārejām uz virsotnes 2 tēvu - virsotni 1. (**3. akords**)



65. zīm.

- Tā kā visas virsotnei 1 incidentās šķautnes ir “skatītas”, tad pārejām uz virsotnes 1 tēvu - virsotni 11. (**3. akords**)



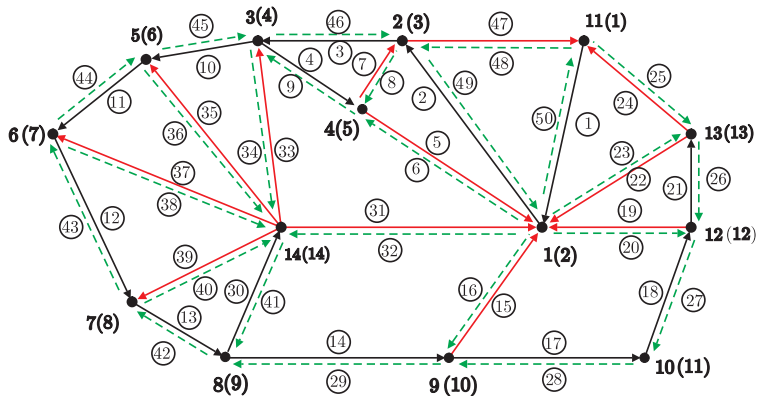
66. zīm.

Tā kā esam atgriezušies izejas virsotnē, tad pārlasi dziļumā beidzam!

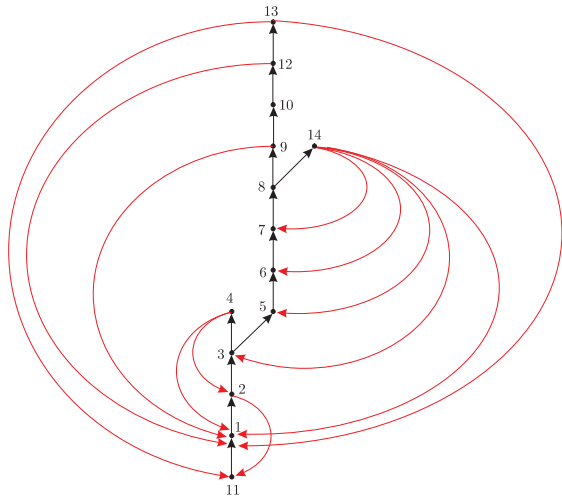
Apskatītā pārlase dziļumā ir attēlota 67. zīm. (apzīmējumi:

- skaitlis bez iekavām - grafa G virsotnes apzīmējums,
- skaitlis apaļajās iekavās - iezīme,
- skaitlis riņķītī - šķautņu aplūkošanas secība),

bet atbilstošais palmas koks T ar palmas zariem ir attēlots 68. zīm. Tā kā katra grafa G virsotne ir ieguvusi iezīmi, tad grafs G ir sakarīgs.



67. zīm. Pārlase dziļumā.



68. zīm. Palmas koks ar palmas zariem.

$F(1) = 11$	1 tēvs ir 11	11 dēls ir 1
$F(2) = 1$	2 tēvs ir 1	1 dēls ir 2
$F(3) = 2$	3 tēvs ir 2	2 dēls ir 3
$F(4) = 3$	4 tēvs ir 3	3 dēls ir 4
$F(5) = 3$	5 tēvs ir 3	3 dēls ir 5
$F(6) = 5$	6 tēvs ir 5	5 dēls ir 6
$F(7) = 6$	7 tēvs ir 6	6 dēls ir 7
$F(8) = 7$	8 tēvs ir 7	7 dēls ir 8
$F(9) = 8$	9 tēvs ir 8	8 dēls ir 9
$F(10) = 9$	10 tēvs ir 9	9 dēls ir 10
Virsoņi 11 nav tēva!		
$F(12) = 10$	12 tēvs ir 10	10 dēls ir 12
$F(13) = 12$	13 tēvs ir 12	12 dēls ir 13
$F(14) = 8$	14 tēvs ir 8	8 dēls ir 14

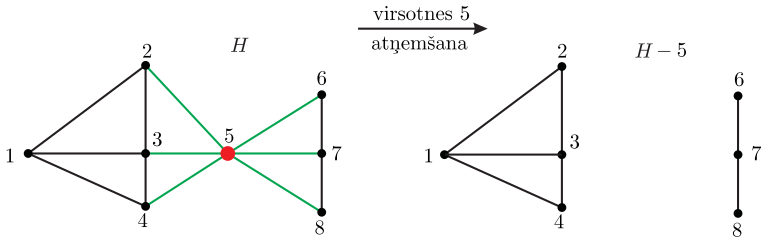
3. Pārlases dziļumā lietojumi

1. Pārlase dziļumā ļauj noteikt, vai dotais grafs ir sakarīgs: grafs ir sakarīgs tad un tikai tad, kad visas tā virsotnes ir ieguvušas iezīmes.

Mūsu piemērā apskatītais grafs ir sakarīgs, jo visas tā virsotnes ieguva iezīmes!

2. Pārlase dziļumā ļauj noteikt, vai vai dotā virsotne ir sadales punkts.

- Virsoṭni u sauc par **grafa G sadales punktu**, ja grafam $G - u$ ir vairāk komponentu nekā grafam G .



69. zīm. Virsotne 5 ir grafa sadales punkts.

- Pieņemsim, ka sakarīgā grafā G ir veikta pārlase dziļumā ar pirmo virsotni u_0 . Virsotne u_0 ir grafa G sadales punkts tad un tikai tad, kad virsotnei u_0 ir vismaz divi dēli.

Mūsu piemērā apskatītajā grafā virsotne 11 nav sadales punktu, jo tai ir tikai viens dēls - virsotne 1!

Lietojot pārlasses dziļumā iegūto informāciju, var noteikt, vai virsotne u ($u \neq u_0$) ir grafa G sadales punkts. Detalizētāk ar šo jautājumu var iepazīties pēc grāmatas [2, 327.-334. lpp.]

Viegli pārlicināties, lietojot sadales punkta definīciju, ka mūsu piemērā apskatītajam grafam nav sadales punktu!

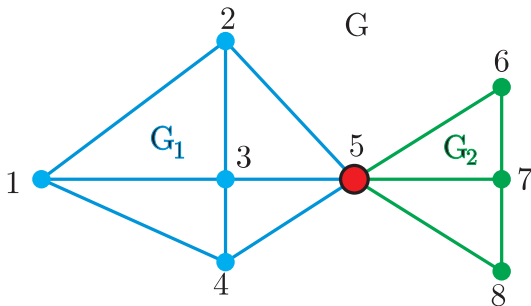
3. Pieņemsim, ka sakarīgā grafā G ir veikta pārlase dziļumā. Pārlase dziļumā ļauj noteikt grafā G divsakarīgas komponentes.

- Grafs G ir **divsakarīgs** tad un tikai tad, kad tam ir vismaz 3 virsotnes un tam nav sadales punktu.
- Grafa G maksimālus divsakarīgus apakšgrafus sauc par **grafa G divsakarīgām komponentēm**.

Par grafa divsakarīgo komponentu izdalīšanu, lietojot pārlasi dziļumā, var iepazīties pēc iepriekš minētās grāmatas.

Tā kā mūsu piemērā apskatītajam grafam ir 14 virsotnes un tam nav sadales punktu, tad dotais grafs ir divsakarīgs!

70. zīm. attēlotais grafs G nav divsakarīgs, jo tam ir 8 virsotnes un sadales punkts 5. Grafam G ir divas divsakarīgas komponentes G_1 un G_2 .



70. zīm.

Literatūra

- [1] Dambītis J. *Modernā grafu teorija*. Datorzinību Centrs, Rīga, 2002. <http://susurs.mii.lu.lv/Graphlab/Education/grafuTeorijaLatvija/DAMBITIS/>.
- [2] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов*. Наука, Москва, 1990. 79