DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Pakāpju virknes

2023. gada 7. marts

2023

Saturs

1. Ievads

Pēc grafa virsotņu pakāpēm var spriest par tām vai citām grafa īpašībām, piemēram, ja sakarīga grafa visu virsotņu pakāpes ir pāra skaitlis, tad grafs satur Eilera ciklu. Tāpēc ir dabiski uzdot šādus jautājumus.

1. Vai eksistē grafs ar dotajām virsotņu pakāpēm un dotajām īpašībām (piemēram, sakarīgs grafs vai koks)?

2. Ja šāds grafs eksistē, tad kā to konstruēt?

Atbildes uz iepriekš uzdotajiem jautājumiem ir svarīgas arī no praktiskā viedokļa.

Apskatīsim tīklu, kas sastāv no informācijas glabāšanas un apstrādes centriem, daži no kuriem ir saistīti ar informācijas apmaiņas kanāliem. Informācijas apmaiņa starp diviem centriem notiek vai nu pa šos centrus savienojošo kanālu, ja, protams, tāds eksistē, vai arī izmantojot citus centrus un kanālus. Tīklu uzskata par darboties spējīgu, ja jebkuri divi centri var apmainīties ar informāciju.

Uzdevums: izveidot darboties spējīgu tīklu ar šādiem nosacījumiem:

- ir zināms, cik kanālu iziet no katra centra;
- tīklam ir jābūt maksimāli drošam attiecībā pret kanālu iziešanai no ierindas.

Dotajam tīklam piekārtosim grafu, kura virsotnes ir centri, bet šķautnes - kanāli. Iepriekš formulēto uzdevumu grafu teorijas valodā var formulēt šādi: *vai eksistē sakarīgs grafs ar dotajām virsotņu pakāpēm un iespējami maksimālo grafa šķautņu sakarīguma skaitli?*

2. Grafiskas virknes

Par ***n*-virkni** sauc veselu nenegatīvu skaitļu virkni

$$d = (d_1; d_2; \ldots; d_n).$$

n-virkni sauc par **grafisku *n*-virkni**, ja eksistē n-tās kārtas grafs, kura virsotņu pakāpes ir $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

Lai n-virkne d būtu grafiska ir nepieciešami (bet ne pietiekami), lai

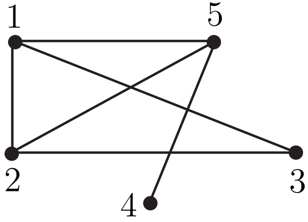
- $0 \leq d_i \leq n - 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$;
- $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ ir pāra skaitlis (skat. Lemmu par rokasspiedieniem);
- vismaz divi virknes d locekļi ir vienādi, ja $n \geq 2$.

n-virkni sauc par **pareizu *n*-virkni**, ja

1. $n - 1 \geq d_1 \geq d_2 \cdots \geq d_n$;
2. $d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ ir pāra skaitlis.

2.1. piemērs.

- 4-virkne $(3; 2; 6; 7)$ nav grafiska, jo visi tās locekļi ir dažādi.
- 5-virkne $(3; 3; 3; 2; 1)$ ir grafiska, jo, piemēram, 1. zīm. attēlotā grafa virsotņu pakāpes ir $3, 3, 3, 2, 1$.
- 6-virkne $d = (5; 3; 3; 2; 2; 1)$ ir pareiza.



1. zīm. Grafs, kurš atbilst grafiskai 5-virknei $(3; 3; 3; 2; 1)$

Vai virkne $(3; 3; 3; 1)$ ir pareiza? Vai virkne $(3; 3; 3; 1)$ ir grafiska?

3. Grafiskas virknes kritēriji

Pieņemsim, ka

$$d = (d_1; d_2; \ldots; d_n) \quad (n \geq 2).$$

ir pareiza n-virkne. Fiksēsim indeksu $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$. Apskatīsim $(n-1)$-virkni

$${}^i d = (c_1; c_2; \ldots; c_{n-1}),$$

kuru iegūst no virknes d, izsvītrojot tās i-to locekli, t.i.,

$$c_k = \begin{cases} d_k, & \text{ja} \quad k < i, \\ d_{k+1}, & \text{ja} \quad k \geq i, \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Tagad apskatīsim $(n-1)$-virkni

$$d^i = (p_1; p_2; \ldots; p_{n-1}),$$

kuru iegūst no virknes ${}^i d$, samazinot tās pirmos d_i locekļus par 1, t.i.,

$$p_k = \begin{cases} c_k - 1, & \text{ja} \quad k \leq d_i, \\ c_k, & \text{ja} \quad k > i, \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Virkni d_i sauc par **virknes d atvasināto virkni**.

3.1. Havela–Hakimi teorēma

3.1. teorēma. [Havela (1955. g.) un Hakimi (1962. g.) teorēma] [1, 212. lpp.] *Pieņemsim, ka*

$$d = (d_1; d_2; \ldots; d_n) \quad (n \geq 2).$$

ir pareiza n-virkne.

1. *Ja kādam indeksam $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$ atvasinātā virkne d^i ir grafiska, tad arī virkne d ir grafiska.*
2. *Ja virkne d ir grafiska, tad atvasinātā virkne d^i ir grafiska jebkuram $i \in \{1; 2; \ldots; n\}$.*

3.1. piemērs. Apskatīsim pareizu 6-virkni

$$d = (5; 3; 3; 2; 2; 1) = (d_1; d_2; d_3; d_4; d_5; d_6).$$

Tad

$$
\begin{aligned}
&{}^1d = (3;3;2;2;1),\ d_1 = 5,\\
&d^1 = (\underbrace{3-1;3-1;2-1;2-1;1-1}_{5}) = (2;2;1;1;0);\\
&{}^2d = (5;3;2;2;1),\ d_2 = 3,\\
&d^2 = (\underbrace{5-1;3-1;2-1}_{3};2;1) = (4;2;1;2;1);\\
&{}^3d = (5;3;2;2;1),\ d_3 = 3,\\
&d^3 = (\underbrace{5-1;3-1;2-1}_{3};2;1) = (4;2;1;2;1);\\
&{}^4d = (5;3;3;2;1),\ d_4 = 2,\\
&d^4 = (\underbrace{5-1;3-1}_{2};3;2;1) = (4;2;3;2;1);\\
&{}^5d = (5;3;3;2;1),\ d_5 = 2,
\end{aligned}
$$

$$d^5 = (\underbrace{5-1; 3-1}_{2}; 3; 2; 1) = (4; 2; 3; 2; 1);$$

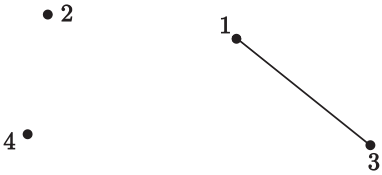
$${}^6d = (5; 3; 3; 2; 2),\ d_6 = 1,$$

$$d^6 = (\underbrace{5-1}_{1}; 3; 3; 2; 2) = (4; 3; 3; 2; 2).$$

Tagad virknei $d^1 = (2; 2; 1; 1; 0)$ atradīsim atbilstošo virkni $(d^1)^1$:

$${}^1(d^1) = (2; 1; 1; 0),\ (d^1)_1 = 2,$$

$$(d^1)^1 = (\underbrace{2-1; 1-1}_{2}; 1; 0) = (1; 0; 1; 0).$$



2. zīm. Grafs, kurš atbilst grafiskai 4-virknei (1;0;1;0)

Acīmredzot, virkne $(d^1)^1$ ir grafiska (skat. 2. zīm.). Tāpēc no 3.1. teorēmas seko, ka virkne d^1 ir grafiska. Vēlreiz pielietojot 3.1. teorēmu, secinām, ka arī dotā virkne d ir grafiska.

3.2. Erdeša–Halai teorēma

3.2. teorēma. **[Erdeša un Halai teorēma, 1960. g.]** *Pareiza n-virkne $d = (d_1; d_2; \ldots; d_n)$ $(n \geq 2)$ ir grafiska tad un tikai tad, kad jebkuram $k = 1, \ldots, n-1$ ir spēkā nevienādība*

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k; d_i\}. \tag{3.1}$$

Pieņemsim, ka $d = (d_1; d_2; \ldots; d_n)$ $(n \geq 2)$ ir pareiza n-virkne. Pieņemsim, ka $\mathcal{I} = \{1; 2; \ldots; n\}$, bet

$$m(d) = \max\{i \in \mathcal{I} : \ d_i \geq i - 1\};$$

skat. [4, 63. lpp.].

3.3. teorēma. ([4, 92. lpp.]). *Pareiza n-virkne $d = (d_1; d_2; \ldots; d_n)$ $(n \geq 2)$ ir grafiska tad un tikai tad, kad jebkuram $k = 1, \ldots, m(d)$ ir spēkā nevienādība (3.1).*

3.2. piemērs. Apskatīsim pareizu 6-virkni

$$d = (5; 3; 3; 2; 2; 1).$$

3.1. piemērā noskaidrojām, ka šī virkne ir grafiska. Pierādīsim to vēlreiz, tikai šoreiz lietosim 3.3. teorēmu.

i	1	2	3	4	5	6
$i-1$	0	1	2	3	4	5
d_i	5	3	3	2	2	1
$d_i \overset{?}{\geq} i-1$	$5 \geq 0$	$3 \geq 1$	$3 \geq 2$	$2 < 3$	$2 < 4$	$1 < 5$

Tātad

$$m(d) = \max\{1; 2; 3\} = 3.$$

Tāpēc, lai noskaidrotu, lietojot 3.3. teorēmu, vai virkne d ir grafiska, ir nepieciešami un pietiekami pārliecināties, ka nevienādība (3.1) ir spēkā jebkuram indeksam $k = 1, 2, 3$.

Tā kā

$$
\begin{aligned}
5 = d_1 \leq \\
&\leq 1(1-1) + \min\{1;3\} + \min\{1;3\} + \min\{1;2\}+ \\
&\qquad + \min\{1;2\} + \min\{1;1\} = \\
&\qquad\qquad = 0+1+1+1+1+1 = 5,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8 = d_1 + d_2 \leq \\
\leq 2(2-1) + \min\{2;3\} + \min\{2;2\} + \min\{2;2\} + \min\{2;1\} = \\
= 2+2+2+2+1 = 9,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
11 = d_1+d_2+d_3 \leq 3(3-1)+\min\{3;2\}+\min\{3;2\}+\min\{3;1\} = \\
= 6+2+2+1 = 11,
\end{aligned}
$$

tad dotā virkne d ir grafiska. Taču kā konstruēt grafu, kura virsotņu pakāpes ir $5, 3, 3, 2, 2, 1$? Atbilde uz šo jautājumu tiks sniegta nākamajā paragrāfā.

4. Pietiekamie nosacījumi, lai pareiza virkne būtu grafiska virkne

4.1. teorēma. [3, 118. lpp.] *Ja pareiza n-virkne*

$$d = (d_1; d_2; \ldots; d_n)$$

1. *nesatur nulles elementus, t.i.,* $d_1 \neq 0, d_2 \neq 0, \ldots, d_n \neq 0$,
2. *izpildās nevienādība*

$$n \geq \frac{(d_1 + d_n + 1)^2}{4d_n}, \tag{4.2}$$

tad d ir grafiska virkne.

Teorēmas nosacījumi ir pietiekami, bet nav nepieciešami, lai pareiza virkne būtu grafiska virkne.

4.1. piemērs. Saskaņā ar 3.1. piemēru pareiza 6-virkne

$$d = (5; 3; 3; 2; 2; 1) = (d_1; d_2; d_3; d_4; d_5; d_6).$$

ir grafiska, taču nevienādība (4.2) neizpildās (pārliecinieties patstāvīgi).

5. ℓ-procedūra

Apskatīsim pareizu n-virkni

$$d = (d_1; d_2; \ldots; d_n) \quad (n \geq 2).$$

ℓ-procedūra ir metode, kas ļauj gan konstatēt, vai virkne d ir grafiska, gan arī konstruēt grafu ar virsotņu pakāpēm $d_1, d_2, \ldots, d_n$, ja virkne d ir grafiska.

ℓ-procedūra balstās uz 3.1. teorēmu.

Pieņemsim, ka konstruējamā grafa G virsotņu kopa ir

$$V = \{1; 2; \ldots; n\}$$

un katram $u \in V$ ir piekārtots nenegatīvs vesels skaitlis - iezīme $d(u)$, ka $0 \leq d(u) \leq n - 1$. Ar $S(u)$ apzīmēsim V apakškopu, kas sastāv no $d(u)$ atšķirīgām no u virsotnēm ar vislielākajām iezīmēm. Apakškopa $S(u)$ nav noteikta viennozīmīgi.

ℓ-procedūra.

1. Pieņemsim, ka $d(i) = d_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
2. Fiksēsim patvaļīgu virsotni u ar pozitīvu iezīmi (šo virsotni sauksim par **vadošo virsotni**).
3. Apskatīsim V apakškopu $S(u)$.
4. Virsotni u un katru virsotni no $S(u)$ savienosim ar šķautni.
5. Izmainīsim virsotnes u un katras virsotnes no $S(u)$ iezīmes: uzskatīsim, ka virsotnes u iezīme ir vienāda ar 0, bet katras virsotnes no $S(u)$ iezīmi samazināsim par 1.
6. Ja kādas virsotnes iezīme ir negatīva, tad virkne d nav grafiska. ℓ-procedūru beidzam. Pretējā gadījumā (t.i., ja visu virsotņu iezīmes ir veseli nenegatīvi skaitļi) rīkojamies šādi.
   (a) Ja visu virsotņu iezīmes ir vienādas ar 0, tad ℓ-procedūru beidzam. Dotā virkne ir grafiska. Esam konstruējuši grafu ar virsotnēm $1, 2, \ldots, n$ un to pakāpēm attiecīgi $d_1, d_2, \ldots, d_n$.
   (b) Ja ne visu virsotņu iezīmes ir vienādas ar 0, tad pārejam pie 2. punkta.

5.1. piemērs. 3.2. piemērā tika konstatēts, ka 6-virkne

$$d = (5; 3; 3; 2; 2; 1)$$

ir grafiska. Lietojot ℓ-procedūru, konstruēsim grafu G ar virsotnēm $1, 2, 3, 4, 5, 6$ un to pakāpēm attiecīgi $d_1 = 5, d_2 = 3, d_3 = 3, d_4 = 2, d_5 = 2, d_6 = 1$.

0. solis. Pieņemsim, ka

$$d(1) = 5,\ d(2) = 3,\ d(3) = 3,\ d(4) = 2,\ d(5) = 2,\ d(6) = 1.$$

1. solis. Par vadošo virsotni izvēlēsimies virsotni 1 ar pozitīvu iezīmi $d(1) = 5$. Apskatīsim virsotņu kopu $S(1) = \{2; 3; 4; 5; 6\}$, kura sastāv no $d(1) = 5$ atšķirīgām no 1 virsotnēm, kuru iezīmes ir vislielākās. Virsotni 1 savienojam ar katru no virsotnēm $2, 3, 4, 5, 6$ ar šķautni. Izmainām virsotnes 1 un virsotņu $2, 3, 4, 5, 6$ iezīmes:

$$\underline{d(1) = 0},\ \underline{d(2) = 3 - 1 = 2},\ \underline{d(3) = 3 - 1 = 2},$$
$$\underline{d(4) = 2 - 1 = 1},\ \underline{d(5) = 2 - 1 = 1},\ \underline{d(6) = 1 - 1 = 0}.$$

2. solis. Par vadošo virsotni izvēlēsimies virsotni 2 ar pozitīvu iezīmi $d(2) = 2$. Apskatīsim virsotņu kopu $S(2) = \{3; 4\}$, kura sastāv no $d(2) = 2$ atšķirīgām no 2 virsotnēm, kuru iezīmes ir vislielākās. Virsotni 2 savienojam ar katru no virsotnēm $3, 4$ ar šķautni. Izmainām virsotnes 2 un virsotņu $3, 4$ iezīmes:

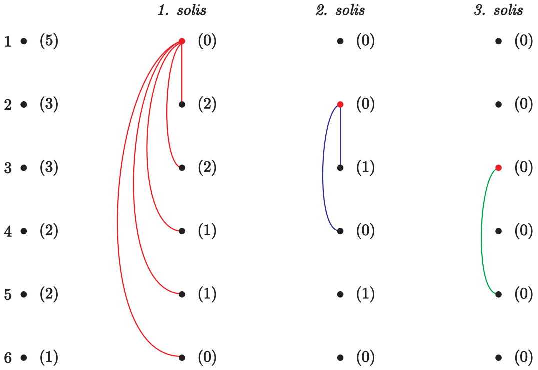
$$\underline{d(2) = 0}, \ \underline{d(3) = 2 - 1 = 1}, \ \underline{d(4) = 1 - 1 = 0}.$$

3. solis. Par vadošo virsotni izvēlēsimies virsotni 3 ar pozitīvu iezīmi $d(3) = 1$. Apskatīsim virsotņu kopu $S(3) = \{5\}$, kura sastāv no $d(3) = 1$ atšķirīgas no 3 virsotnes ar vislielāko iezīmi. Virsotnes 3 un 5 savienojam ar šķautni. Izmainām virsotņu 3 un 5 iezīmes:

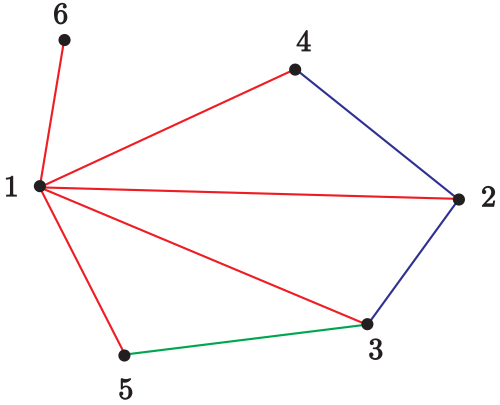
$$\underline{d(3) = 0}, \ \underline{d(5) = 1 - 1 = 0}.$$

Tā kā visu virsotņu iezīmes ir vienādas ar 0, tad ℓ-procedūru beidzam.

3. zīm. ir sniegta iepriekš apskatītās ℓ-procedūras ilustrācija, savukārt 4. zīm. ir attēlots grafs G, kurš atbilst grafiskai 6-virknei (5;3;3;2;2;1).



3. zīm. ℓ-procedūras pielietošana 6-virknei (5;3;3;2;2;1)



4. zīm. Grafs G, kurš atbilst grafiskai 6-virknei (5;3;3;2;2;1)

6. Grafisku virkņu realizācija grafu ar papildīpašībām veidā

Šajā paragrāfā apskatīsim nosacījumus, pie kuriem doto n-virkni $d = (d_1; d_2; \ldots; d_n)$ var realizēt grafa ar virsotņu pakāpēm $d_1, d_2, \ldots, d_n$ veidā tā, lai tas būtu

- sakarīgs grafs,
- koks, t.i., sakarīgs grafs bez cikliem,
- sakarīgs grafs ar maksimāli iespējamo šķautņu sakarīguma skaitli;
- Eilera grafs.

6.1. Grafisku virkņu realizācija sakarīga grafa veidā

6.1. teorēma. *Pareizu grafisku n-virkni* $d = (d_1; d_2; \ldots; d_n)$ $(n \geq 2)$ *var realizēt sakarīga grafa ar virsotņu pakāpēm* $d_1, d_2, \ldots, d_n$ *veidā tad un tikai tad, kad* $d_n > 0$ *un ir spēkā nevienādība*

$$\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2(n-1). \tag{6.3}$$

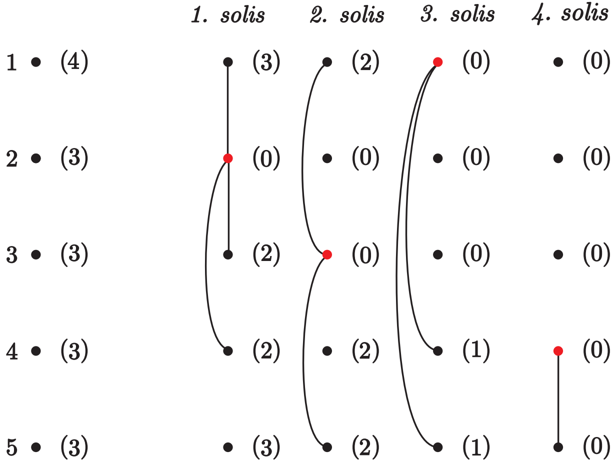
Ja iepriekš minētie nosacījumi izpildās, tad ℓ*-procedūra, kuras katrā solī par vadošo virsotni izvēlas virsotni ar* ***vismazāko pozitīvo iezīmi****, noved pie sakarīga grafa.*

6.1. piemērs. Apskatīsim pareizu 5-virkni $d = (4; 3; 3; 3; 3)$. Atzīmēsim, ka

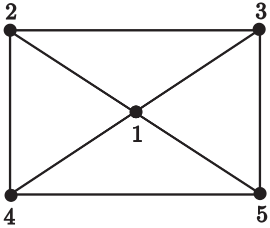
$$4 + 3 + 3 + 3 + 3 = 16 > 8 = 2(5-1),$$

t.i., izpildās nevienādība (6.3). Saskaņā ar 6.1. teorēmu, ja d ir grafiska virkne, tad to var realizēt sakarīga grafa veidā, ja pielietot ℓ-procedūru tā, kā tas ir aprakstīts 6.1. teorēmā.

Atzīmēsim, ka nav nepieciešamības atsevišķi pārbaudīt, vai virkne d ir grafiska, jo to ļaus konstatēt ℓ-procedūra. 5. zīm. ilustrē ℓ-procedūru, kas noved pie sakarīga grafa G (skat. 6. zīm.), kurš atbilst grafiskai 5-virknei (4;3;3;3;3).



5. zīm. ℓ-procedūras pielietošana 5-virknei (4;3;3;3;3). Ar sarkanu krāsu ir atzīmētas vadošās virsotnes katrā solī



6. zīm. 5-virknes (4;3;3;3;3) realizācija sakarīga grafa veidā

6.2. Grafisku virkņu realizācija koka veidā

6.2. teorēma. *n-virkni $d = (d_1; d_2; \ldots; d_n)$ $(n \geq 2)$ var realizēt koka ar virsotņu pakāpēm $d_1, d_2, \ldots, d_n$ veidā tad un tikai tad, kad $d_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ un ir spēkā vienādība*

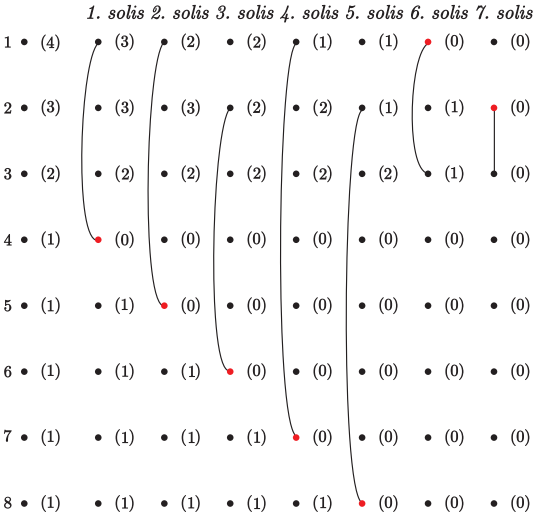
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1). \tag{6.4}$$

Ja iepriekš minētie nosacījumi izpildās, tad ℓ-procedūra, kuras katrā solī par vadošo virsotni izvēlas virsotni ar vismazāko pozitīvo iezīmi, noved pie koka.

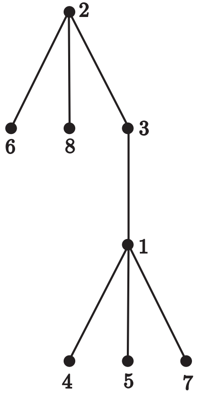
6.2. piemērs. Apskatīsim pareizu 8-virkni $d = (4; 3; 2; 1; 1; 1; 1; 1)$. Atzīmēsim, ka

$$4 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14 = 2(7-1),$$

t.i., izpildās nevienādība (6.4). Saskaņā ar 6.2. teorēmu virkne d ir grafiska, un to var realizēt koka veidā, ja pielietot ℓ-procedūru tā, kā tas ir aprakstīts 6.2. teorēmā. 7. zīm. ilustrē ℓ-procedūru, kas noved pie koka G (skat. 8. zīm.), kurš atbilst grafiskai 8-virknei (4;3;2;1;1;1;1;1).



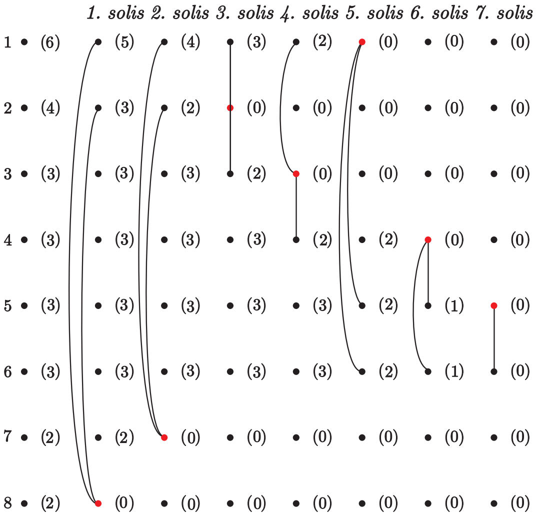
7. zīm. ℓ-procedūras pielietošana 8-virknei (4;3;2;1;1;1;1;1). Ar sarkanu krāsu ir atzīmētas vadošās virsotnes katrā solī



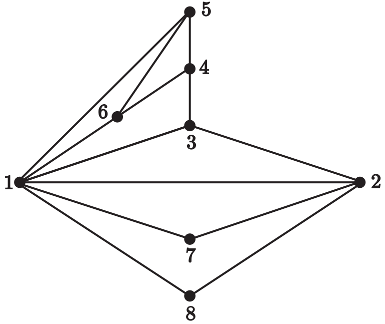
8. zīm. 8-virknes (4;3;2;1;1;1;1;1) realizācija koka veidā

6.3. Grafisku virkņu realizācija sakarīga grafa ar maksimālo šķautņu sakarīguma skaitli veidā

6.3. teorēma. **[Venga teorēma, 1976. g.]** *Jebkuru pareizu grafisku n-virkni $d = (d_1; d_2; \ldots; d_n)$, ka $d_n > 1$, var realizēt sakarīga grafa G ar maksimālo šķautņu sakarīguma skaitli $\lambda(G) = d_n$ un virsotņu pakāpēm $d_1, d_2, \ldots, d_n$ veidā. Ja iepriekš minētie nosacījumi izpildās, tad ℓ-procedūra, kuras katrā solī par vadošo virsotni izvēlas virsotni ar vismazāko pozitīvo iezīmi, noved pie sakarīga grafa ar maksimālo šķautņu sakarīguma skaitli.*



9. zīm. ℓ-procedūras pielietošana 8-virknei (6;4;3;3;3;3;2;2). Ar sarkanu krāsu ir atzīmētas vadošās virsotnes katrā solī



10. zīm. 8-virknes (6;4;3;3;3;3;2;2) realizācija sakarīga grafa G ar maksimāli iespējamo škautņu sakarīguma skaitli $\lambda(G) = 2$ veidā

6.3. piemērs. Apskatīsim pareizu 8-virkni $d = (6; 4; 3; 3; 3; 3; 2; 2)$. Tā kā visi virknes d locekļi ir lielāki par 1, tad saskaņā ar 6.3. teorēmu, ja virkne d ir grafiska, tad to var realizēt sakarīga grafa G ar maksimāli iespējamo škautņu sakarīguma skaitli $\lambda(G) = 2$ veidā, ja pielietot ℓ-procedūru tā, kā tas ir aprakstīts 6.3. teorēmā. Atzīmēsim, ka nav nepieciešamības atsevišķi pārbaudīt, vai virkne d ir grafiska, jo to ļaus konstatēt ℓ-procedūra. 9. zīm. ilustrē ℓ-procedūru, kas noved pie sakarīga grafa G ar maksimāli iespējamo škautņu sakarīguma skaitli $\lambda(G) = 2$ (skat. 10. zīm.), kurš atbilst grafiskai 8-virknei (6;4;3;3;3;3;2;2).

6.1. piezīme. Atgādināsim, ka $\lambda(G) \leq \delta(G)$, kur $\delta(G)$ ir grafa G virsotņu minimālā pakāpe. Tāpēc iepriekšējā teorēmā $\lambda(G) = d_n$ ir maksimāli iespējamais grafa G šķautņu sakarīguma skaitlis, bet 6.3. piemērā $\lambda(G) = d_8 = 2$.

6.4. Grafisku virkņu realizācija Eilera grafa veidā

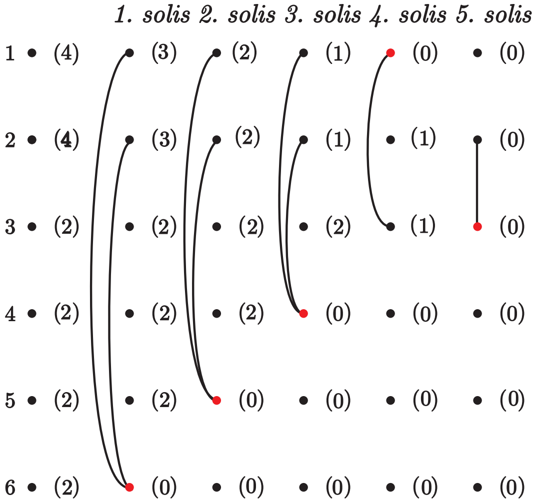
No Eilera teorēmas un 6.1. teorēmas izriet šāda teorēma.

6.4. teorēma. *Pareizu grafisku n-virkni $d = (d_1; d_2; \ldots; d_n)$ $(n \geq 3)$ var realizēt Eilera grafa ar virsotņu pakāpēm $d_1, d_2, \ldots, d_n$ veidā tad un tikai tad, kad d_i $(i = 1, 2 \ldots, n)$ ir pozitīvs pāra skaitlis un ir spēkā nevienādība (6.3). Ja iepriekš minētie nosacījumi izpildās, tad ℓ-procedūra, kuras katrā solī par vadošo virsotni izvēlas virsotni ar vismazāko pozitīvo iezīmi, noved pie Eilera grafa.*

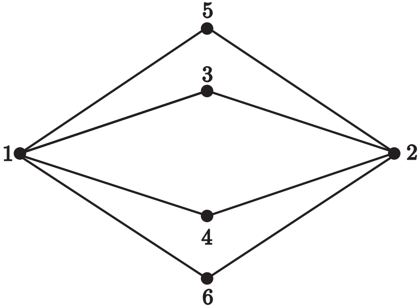
6.4. piemērs. Apskatīsim pareizu 6-virkni $d = (4; 4; 2; 2; 2; 2)$. Tā kā visi virknes d locekļi ir pozitīvi pāra skaitļi un ir spēkā nevienādība

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 4 + 4 + 2 + 2 + 2 + 2 = 16 > 10 = 2(6 - 1) = 2(n - 1),$$

tad saskaņā ar 6.4. teorēmu, ja virkne d ir grafiska, tad to var realizēt Eilera grafa veidā, ja pielietot ℓ-procedūru tā, kā tas ir aprakstīts 6.4. teorēmā. Atzīmēsim, ka nav nepieciešamības atsevišķi pārbaudīt, vai virkne d ir grafiska, jo to ļaus konstatēt ℓ-procedūra. 11. zīm. ilustrē ℓ-procedūru, kas noved pie Eilera grafa G (skat. 12. zīm.), kurš atbilst grafiskai 6-virknei $(4; 4; 2; 2; 2; 2)$. Grafs G satur Eilera ciklu: 2,6,1,5,2,4,1,3,2.



11. zīm. ℓ-procedūras pielietošana 6-virknei (4;4;2;2;2;2). Ar sarkanu krāsu ir atzīmētas vadošās virsotnes katrā solī



12. zīm. 6-virknes (4;4;2;2;2;2) realizācija Eilera grafa G veidā. Eilera cikls: 2,6,1,5,2,4,1,3,2

Alfabētiskais rādītājs

Zīmējumu rādītājs

Literatūra

[1] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов*. Наука, Москва, 1990. 9

[2] Vasudev C. *Graph Theory with Applications*. New Age International (P) Ltd., 2006.

[3] Melnikov O., Sarvanov V., Tyshkevich R., Yemelichev V., Zverovich I. *Exercises in graph theory*. Springer, 1998. 16

[4] Mahadev N.V.R. and Peled U.N. *Threshold Graphs and Related Topics*. Academic Press, 1995. 13