DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Pārlase plašumā neorientētos grafos

2025. gada 16. aprīlis

2025

Pārlase plašumā ir metode, kas ļauj noteikt, vai dotais grafs ir vai nav sakarīgs, un, ja nav, tad atrast tā komponentes. Pārlasei plašumā ir arī citi lietojumi grafu teorijā.

Pārlase plašumā. Apskatīsim grafu G.

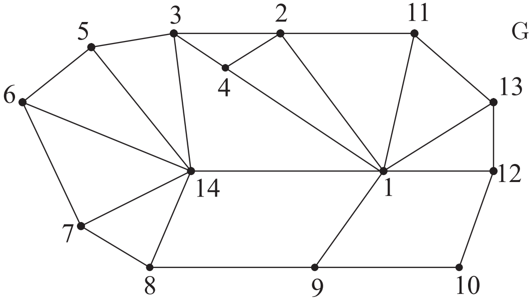
1. Izvēlamies patvaļīgu dotā grafa G virsotni u un piešķiram tai iezīmi 0.

2. Katrai virsotnes u blakusvirsotnei piešķiram iezīmi 1. Citiem vārdiem sakot, iezīmi 1 piešķiram visām virsotnes u apkārtnes virsotnēm.

3. Apskatām visu virsotņu ar iezīmi 1 apkārtnes, un šo apkārtņu virsotnēm, ja tām vēl nav piešķirta nekāda iezīme, piešķiram iezīmi 2 utt.

4. Metodes darbu beidzam, kad iezīmju piešķiršana grafa G virsotnēm vairs nav iespējama.

Ja iezīmes tika piešķirtas visām grafa G virsotnēm, tad G ir sakarīgs grafs. Pretējā gadījumā G ir nesakarīgs grafs.



Pielietosim pārlasi plašumā zīmējumā attēlotajam grafam G.

Grafa G virsotņu apkārtnes:

$N(1)$	2	4	9	11	12	13	14
$N(2)$	1	3	4	11			
$N(3)$	2	4	5	14			
$N(4)$	1	2	3				
$N(5)$	3	6	14				
$N(6)$	5	7	14				
$N(7)$	6	8	14				
$N(8)$	7	9	14				
$N(9)$	1	8	10				
$N(10)$	9	12					
$N(11)$	1	2	13				
$N(12)$	1	10	13				
$N(13)$	1	11	12				
$N(14)$	1	3	5	6	7	8	

Ja grafs G ir sakarīgs, tad pārlase plašumā ļauj konstruēt ***grafa*** G ***parciālkoku*** T_u ***ar sakni virsotnē*** u, kur u ir virsotne ar iezīmi 0. Mūsu piemērā $u = 11$.

Koks - sakarīgs grafs bez cikliem.

Koka sakne - iezīmēta koka virsotne.

Grafa G **karkasveida apakšgrafs** - grafa G apakšgrafs, kas satur visas grafa G virsotnes.

Grafa G **parciālkoks** - grafa G karkasveida apakšgrafs, kas ir koks.

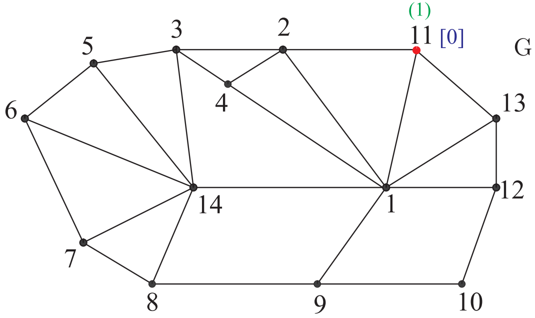
Koku T_u konstruē šādi:

- koka T_u virsotņu kopa ir vienāda ar grafa G virsotņu kopu;
- koka T_u virsotne u ir blakusvirsotne ar v $(u \neq v)$, ja virsotne v ieguva iezīmi, apskatot virsotnes u apkārtni.

Lietojot grafa G parciālkoku T_u, ir ērti atrast visīsākos maršrutus starp virsotni u (kuras ir iezīme ir 0) un visām pārējām grafa G virsotnēm. Tāpēc grafa G parciālkoku T_u sauc arī par ***grafa*** G ***visīsāko maršrutu, kas iziet no virsotnes*** u***, koku***.

0. solis. Sāksim pārlasi plašumā ar virsotni 11. Tai pieškirsim iezīmi 0, virsotnei 11 piešķirsim numuru 1 - pirmā virsotne, kurai tika piešķirta iezīme. Virsotni 11 izsvītrosim no virsotņu saraksta:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 ~~11~~ 12 13 14



Apzīmējumi: skaitlis bez iekavām - grafa G virsotnes apzīmējums, skaitlis kvadrātiekavās - iezīme, skaitlis apaļajās iekavās - iezīmes piešķiršanas kārtas numurs.

Izveidosim vienvirsotņu koku T_{11} ar sakni virsotnē 11:

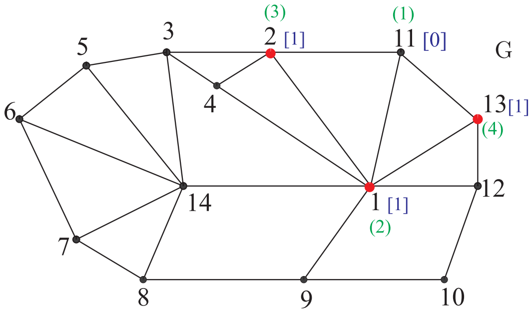
[0] 11 (1)

1. solis. Apskatīsim virsotnes 11 apkārtni $N(11)$:

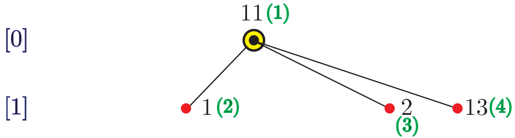
$N(11)$	1	2	13
Iezīme	1	1	1
Iezīmes piešķiršanas kārtas numurs	2	3	4
Virsotne, no kuras tika iegūta iezīme	11	11	11

Virsotnes, kuras ieguva iezīmes, izsvītrojam no virsotņu saraksta:

$\cancel{1}$ $\cancel{2}$ 3 4 5 6 7 8 9 10 $\cancel{11}$ 12 $\cancel{13}$ 14



Atjaunojam koku T_{11}:



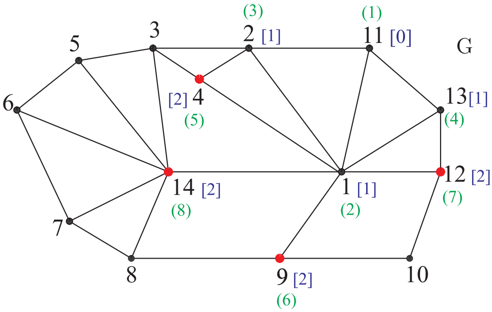
2. solis. Virsotnes, kuras ieguva iezīmi 1, sakārtojam augošā secībā: 1,2,13, un secīgi apskatām to apkārtnes.

2.1. solis. Apskatīsim virsotnes 1 apkārtni $N(1)$, un no tās izsvītrosim virsotnes, kurām ir jau piešķirta iezīme:

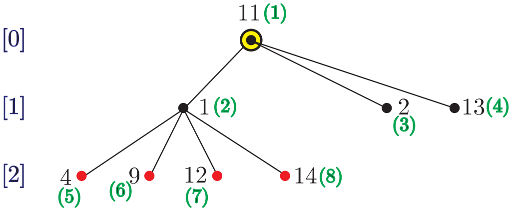
$N(1)$	~~2~~	4	9	~~11~~	12	~~13~~	14
Iezīme		2	2		2		2
Iezīmes piešķiršanas kārtas numurs		5	6		7		8
Virsotne, no kuras tika iegūta iezīme		1	1		1		1

Virsotnes, kuras ieguva iezīmes, izsvītrojam no virsotņu saraksta:

~~1~~ ~~2~~ 3 ~~4~~ 5 6 7 8 ~~9~~ 10 ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~ ~~14~~



Atjaunojam koku T_{11}.

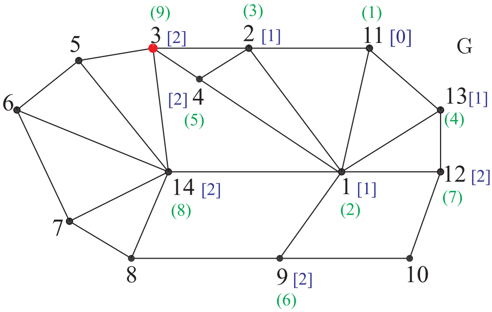


2.2. solis. Apskatīsim virsotnes 2 apkārtni $N(2)$, un no tās izsvītrosim virsotnes, kurām ir jau piešķirta iezīme:

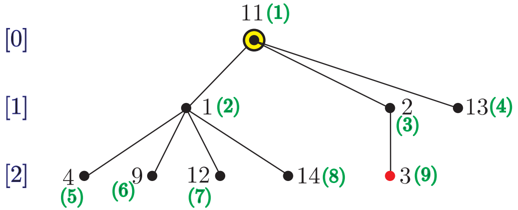
$N(2)$	$\cancel{1}$	3	$\cancel{4}$	$\cancel{1}1$
Iezīme		2		
Iezīmes piešķiršanas kārtas numurs		9		
Virsotne, no kuras tika iegūta iezīme		2		

Virsotnes, kuras ieguva iezīmes, izsvītrojam no virsotņu saraksta:

$\cancel{1}$ $\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\cancel{4}$ 5 6 7 8 $\cancel{9}$ 10 $\cancel{1}1$ $\cancel{1}2$ $\cancel{1}3$ $\cancel{1}4$



Atjaunojam koku T_{11}.



2.3. solis. Apskatīsim virsotnes 13 apkārtni $N(13)$, un no tās izsvītrosim virsotnes, kurām ir jau piešķirta iezīme:

$N(13)$	$\cancel{1}$	$\cancel{11}$	$\cancel{12}$
Iezīme			
Iezīmes piešķiršanas kārtas numurs			
Virsotne, no kuras tika iegūta iezīme			

Nevienai apkārtnes $N(13)$ virsotnei iezīme netiek piešķirta. Izsvītroto (neizsvītroto) virsotņu saraksts paliek iepriekšējais.

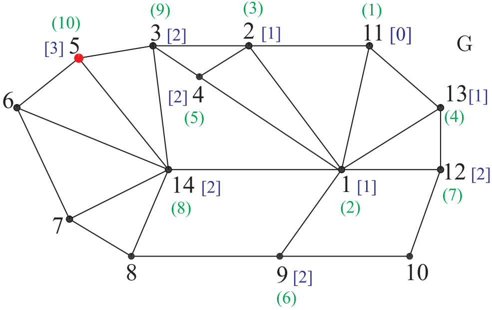
3. solis. Virsotnes, kuras ieguva iezīmi 2, sakārtojam augošā secībā: 3,4,9,12,14, un secīgi apskatām to apkārtnes.

3.1. solis. Apskatīsim virsotnes 3 apkārtni $N(3)$, un no tās izsvītrosim virsotnes, kurām ir jau piešķirta iezīme:

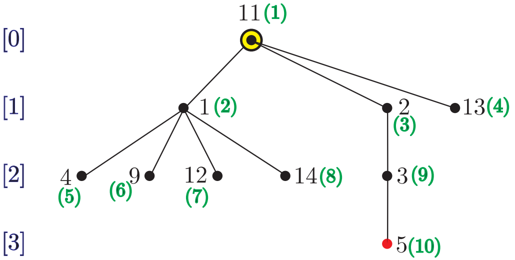
$N(3)$	$\cancel{2}$	$\cancel{4}$	5	$\cancel{1}4$
Iezīme			3	
Iezīmes piešķiršanas kārtas numurs			10	
Virsotne, no kuras tika iegūta iezīme			3	

Virsotnes, kuras ieguva iezīmes, izsvītrojam no virsotņu saraksta:

$$\cancel{1}\ \ \cancel{2}\ \ \cancel{3}\ \ \cancel{4}\ \ \cancel{5}\ 6\ 7\ 8\ \ \cancel{9}\ 10\ \ \cancel{1}1\ \ \cancel{1}2\ \ \cancel{1}3\ \ \cancel{1}4$$



Atjaunojam koku T_{11}.



3.2. solis. Apskatīsim virsotnes 4 apkārtni $N(4)$, un no tās izsvītrosim virsotnes, kurām ir jau piešķirta iezīme:

$N(4)$	$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$
Iezīme			
Iezīmes piešķiršanas kārtas numurs			
Virsotne, no kuras tika iegūta iezīme			

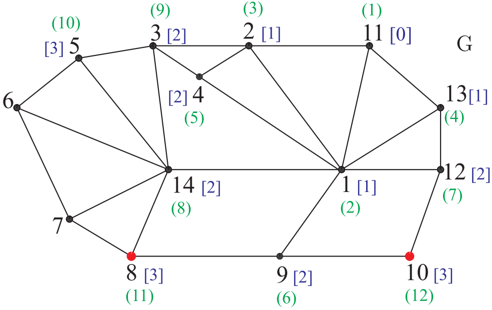
Nevienai apkārtnes $N(4)$ virsotnei iezīme netiek piešķirta. Izsvītroto (neizsvītroto) virsotņu saraksts paliek iepriekšējais.

3.3. solis. Apskatīsim virsotnes 9 apkārtni $N(9)$, un no tās izsvītrosim virsotnes, kurām ir jau piešķirta iezīme:

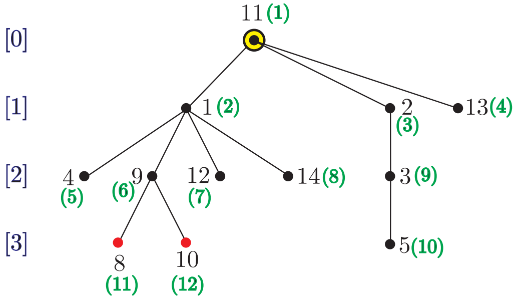
$N(9)$	$\cancel{1}$	8	10
Iezīme		3	3
Iezīmes piešķiršanas kārtas numurs		11	12
Virsotne, no kuras tika iegūta iezīme		9	9

Virsotnes, kuras ieguva iezīmes, izsvītrojam no virsotņu saraksta:

$$\cancel{1}\ \ \cancel{2}\ \ \cancel{3}\ \ \cancel{4}\ \ \cancel{5}\ 6\ 7\ \ \cancel{8}\ \ \cancel{9}\ \ \cancel{10}\ \ \cancel{11}\ \ \cancel{12}\ \ \cancel{13}\ \ \cancel{14}$$



Atjaunojam koku T_{11}.



3.4. solis. Apskatīsim virsotnes 12 apkārtni $N(12)$, un no tās izsvītrosim virsotnes, kurām ir jau piešķirta iezīme:

$N(12)$	$\cancel{1}$	$\cancel{10}$	$\cancel{13}$
Iezīme			
Iezīmes piešķiršanas kārtas numurs			
Virsotne, no kuras tika iegūta iezīme			

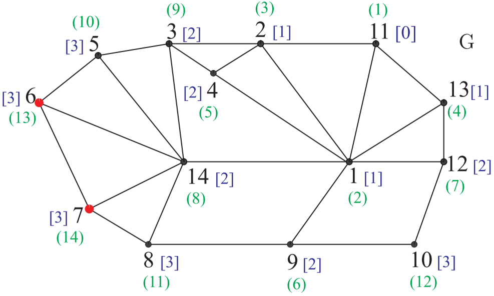
Nevienai apkārtnes $N(12)$ virsotnei iezīme netiek piešķirta. Izsvītroto (neizsvītroto) virsotņu saraksts paliek iepriekšējais.

3.5. solis. Apskatīsim virsotnes 14 apkārtni $N(14)$, un no tās izsvītrosim virsotnes, kurām ir jau piešķirta iezīme:

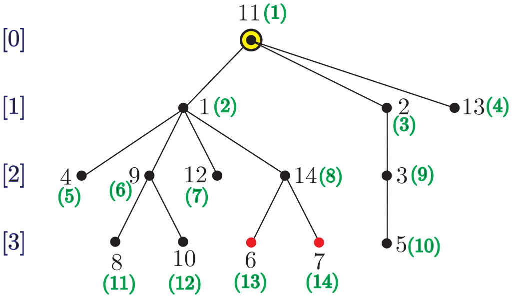
$N(14)$	$\cancel{1}$	$\cancel{3}$	$\cancel{5}$	6	7	$\cancel{8}$
Iezīme				3	3	
Iezīmes piešķiršanas kārtas numurs				13	14	
Virsotne, no kuras tika iegūta iezīme				14	14	

Virsotnes, kuras ieguva iezīmes, izsvītrojam no virsotņu saraksta:

$\cancel{1}$ $\cancel{2}$ $\cancel{3}$ $\cancel{4}$ $\cancel{5}$ $\cancel{6}$ $\cancel{7}$ $\cancel{8}$ $\cancel{9}$ $\cancel{10}$ $\cancel{11}$ $\cancel{12}$ $\cancel{13}$ $\cancel{14}$



Atjaunojam koku T_{11}.

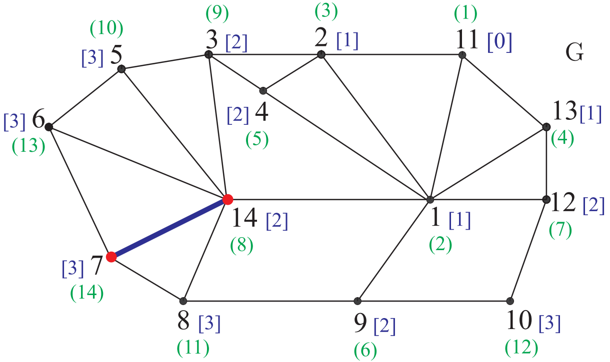


Tā kā visas grafa G virsotnes ir ieguvušas iezīmes, tad pārlasi plašumā beidzam! Grafs G ir sakarīgs grafs!

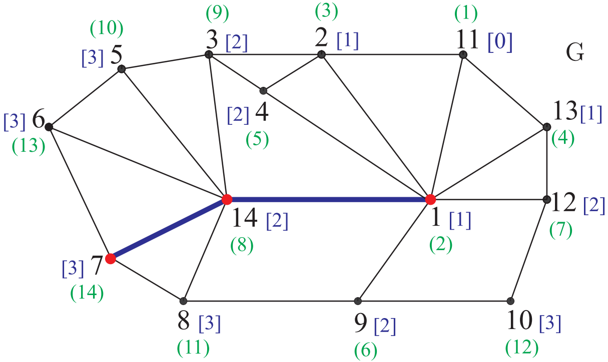
Atradīsim visīsāko maršrutu, kas savieno virsotnes 11 un 7.

Apskatām maršruta beigu virsotni 7. Virsotne 7 ieguva iezīmi 3. Tātad visīsākā $(11; 7)$-maršruta garums ir 3.

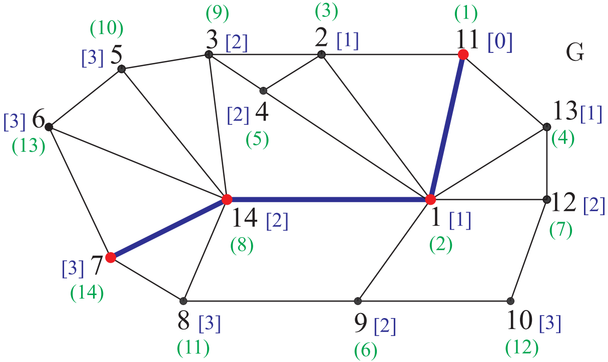
Virsotne 14 pieder virsotnes 7 apkārtnei un tās iezīme ir 2.



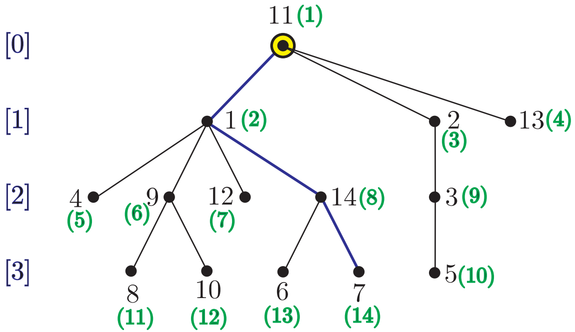
Virsotne 1 pieder virsotnes 14 apkārtnei un tās iezīme ir 1.



Virsotne 11 pieder virsotnes 1 apkārtnei un tās iezīme ir 0.



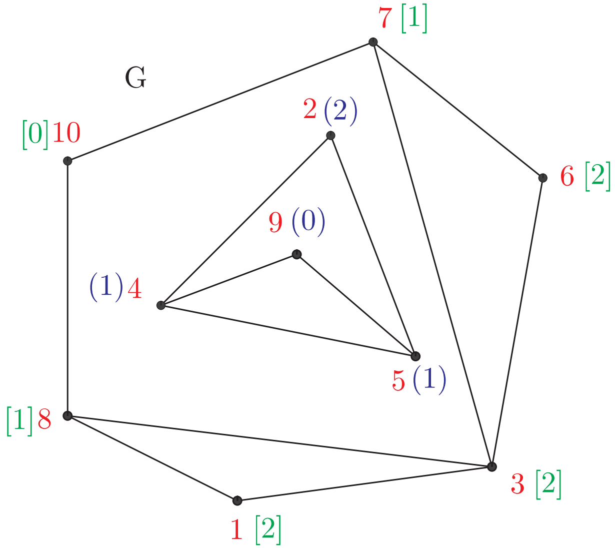
Tātad 11,1,14,7 ir visīsākais $(11;7)$***-maršruts. Tā garums ir vienāds ar virsotnes 7 iezīmi 3.***



Visīsāko $(11;7)$-maršrutu 11,1,14,7 ir ērti noteikt ar parciālkoka T_{11} palīdzību.

Visīsākā $(11;7)$-maršruta garums ir vienāds ar virsotnes 7 iezīmi 3, citiem vārdiem sakot, attālums no virsotnes 11 līdz virsotnei 7 ir vienāds ar virsotnes 7 iezīmi 3.

Pieņemsim, ka pārlases plašumā rezultātā tika konstatēts, ka G nav sakarīgs grafs. Lai atrastu grafa G komponentes, var rīkoties šādi. Apskatīsim patvaļīgu grafa G virsotni, kurai nav iezīmes (tāda virsotne eksistē, jo grafs G nav sakarīgs), un pielietosim atkārtotu pārlasi plašumā. Ja otrās pārlases plašumā rezultātā iezīmes tiks piešķirtas visām grafa G virsotnēm, tad grafam G ir divas komponentes. Pretējā gadījumā grafam G ir vismaz trīs komponentes. Pieņemsim, ka otrās pārlases plašumā rezultātā tika konstatēts, ka grafam G ir vismaz trīs komponentes. Apskatīsim patvaļīgu grafa G virsotni, kurai nav iezīmes (tāda virsotne eksistē, jo otrās pārlases rezultātā ne visām virsotnēm tika piešķirtas iezīmes) un pielietosim trešo pārlasi plašumā. utt. Pēc galīga skaita pārlašu plašumā veikšanas iezīmes tiks piešķirtas visām grafa G virsotnēm, pie tam grafam G būs tik komponenšu, cik pārlašu plašumā tika veikts; grafa G virsotnes, kurām iezīmes tika piešķirtas vienas un tās pašas pārlases plašumā rezultātā, veidos grafa G sakarīguma apgabalu.


7 [1]
G
2 (2)
[0] 10
6 [2]
9 (0)
(1) 4
5 (1)
[1] 8
3 [2]
1 [2]

Grafa G, skat. 31. lpp., visām virsotnēm tika piešķirtas iezīmes tikai pēc otrās pārlases plašumā. Apzīmējumi 31. lpp.: skaitlis bez iekavām - grafa G virsotnes apzīmējums, skaitlis kvadrātiekavās - pirmās pārlases plašumā iezīme, skaitlis apaļajās iekavās - otrās pārlases plašumā iezīme. Tāpēc grafam G ir divas komponentes G_1 un G_2 ar virsotņu kopām

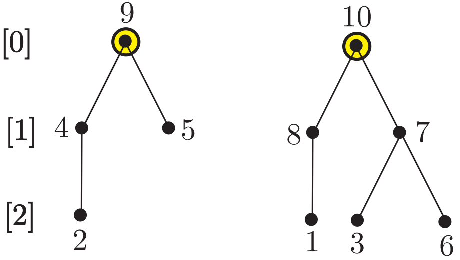
$$V_1 = \{2; 4; 5; 9\},$$
$$V_2 = \{1; 3; 6; 7; 8; 10\}.$$

Pieņemsim, ka visas grafa G virsotnes ieguva iezīmes pēc s pārlasēm plašumā. Spriežot līdzīgi kā iepriekš, var konstruēt grafa G ***grafa*** G ***parciālmežu*** $T_{u_1,\dots,u_s}$ ***ar saknēm virsotnēs*** $u_1, \dots, u_s$, kur $u_1, \dots, u_s$ ir virsotnes, no kurām tika uzsāktas pārlases plašumā.

Mežs - grafs bez cikliem.

Meža saknes - iezīmētas meža virsotnes - pa vienai katrā komponentē.

Grafa G parciālmežs - grafa G karkasveida apakšgrafs, kas ir mežs.



1. zīm. 31. lpp. attēlotā grafa parciālmežs $T_{9,10}$.

Kontroljautājumi: izvēlies pareizo atbildi!

1. **Pārlase plašumā ir**
   (a) dzīves veids,
   (b) grafu attēlošanas paņēmiens,
   (c) grafu teorijas metode,
   (d) kredītiestāžu darbības metode.
2. **Pārlasi plašumā var pielietot**
   (a) tikai sakarīgiem grafiem,
   (b) visiem grafiem,
   (c) tikai grafiem bez cikliem,
   (d) tikai nesakarīgiem grafiem.
3. **Grafu teorijā par koku sauc**
   (a) grafu bez cikliem,
   (b) sakarīgu grafu ar 1 ciklu,
   (c) skuju koku,
   (d) sakarīgu grafu bez cikliem,
   (e) grafu ar cikliem,
   (f) sakarīgu grafu ar cikliem.

4. **Grafu teorijā par mežu sauc**
   (a) grafu bez cikliem,
   (b) sakarīgu grafu ar 1 ciklu,
   (c) skuju koku mežu,
   (d) sakarīgu grafu bez cikliem,
   (e) grafu ar cikliem,
   (f) sakarīgu grafu ar cikliem.
5. **Pārlasi plašumā var sākt**
   (a) tikai pāra pakāpes virsotnē,
   (b) jebkurā virsotnē,
   (c) tikai nepāra pakāpes virsotnē,
   (d) tikai izolētā virsotnē.
6. **Pārlases plašumā rezultātā visas virsotnes vienmēr iegūst iezīmes:**
   (a) pareizi,
   (b) nepareizi.

7. **Pārlases plašumā rezultātā divas dažādas virsotnes u un v ieguva vienu un to pašu iezīmi. Tad u un v**
   (a) obligāti ir blakusvirsotnes,
   (b) var arī nebūt blakusvirsotnes

8. **Grafam ir 16 virsotnes. Vai pēc vienas pārlases plašumā grafa virsotne varēja iegūt iezīmi 16?**
   (a) Varēja.
   (b) Nevarēja.

9. **Pārlases plašumā pirmajai virsotnei piešķir iezīmi**
   (a) -1,
   (b) 0,
   (c) 1.

10. **Pieņemsim, ka pēc 5 pārlasēm plašumā ne visas grafa virsotnes ieguva iezīmes, bet pēc 6 pārlasēm plašumā visas grafa virsotnes ieguva iezīmes. Tad grafa komponenšu skaits ir**
    (a) 5,
    (b) 6,
    (c) 7,
    (d) 8.

11. **Pieņemsim, ka pēc pārlases plašumā virsotne w ieguva iezīmi 17. Pārlase plašumā tika sākta no virsotnes u. Attālums starp virsotnēm u un w ir**
    (a) 15,
    (b) 16,
    (c) 17,
    (d) 18,
    (e) 19.

12. **Sakarīgam grafam ir 16 virsotnes. Tad grafa G sakņotā parciālkoka T_u virsotņu skaits ir**
    (a) 15,
    (b) 16,
    (c) 17,
    (d) 18,
    (e) 19.

13. **Pēc pārlases plašumā virsotne u ieguva iezīmi 1, bet virsotne v ieguva iezīmi 2. Vai attālums starp virsotnēm u un v var būt vienāds 4?**
    (a) Var būt.
    (b) Nevar būt.

14. **Pieņemsim, ka u un v ir sakarīga grafa blakusvirsotnes. Vai pēc pārlases plašumā virsotnēm u un v tiks piešķirtas vienādas iezīmes?**
    (a) Jā, vienmēr.
    (b) Nē, ne vienmēr.