DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Neatkarīgas virsotņu kopas
Dominējošas virsotņu kopas
Kliķe
Virsotņu pārklājumi

2023. gada 15. marts

2023

Saturs

1. Neatkarīgas virsotņu kopas

Grafa G virsotņu kopas VG netukšu apakškopu S sauc par **neatkarīgu virsotņu kopu**, ja jebkuras divas virsotnes no S nav blakusvirsotnes, t.i., $\{u;v\} \notin EG$ jebkurām divām virsotnēm $u, v \in S$.

Neatkarīgu virsotņu kopu $S \subset VG$ sauc par

✓ **maksimālu**, ja nav nevienas citas neatkarīgas virsotņu kopas $\widetilde{S} \subset VG$, kas satur S kā īstu apakškopu, citiem vārdiem sakot, neatkarīgu virsotņu kopu $S \subset VG$ sauc par maksimālu, ja jebkurai neatkarīgai virsotņu kopai $\widetilde{S} \subset VG$, ka $\widetilde{S} \supset S$, ir spēkā $\widetilde{S} = S$;

✓ **vislielāko**, ja tās elementu skaits ir vislielākais starp visām neatkarīgu virsotņu kopām $\widetilde{S} \subset VG$, citiem vārdiem sakot, neatkarīgu virsotņu kopu $S \subset VG$ sauc par vislielāko, ja jebkurai neatkarīgai virsotņu kopai $\widetilde{S} \subset VG$ ir spēkā $|S| \geq |\widetilde{S}|$.

Par grafa G **virsotņu neatkarības skaitli** sauc vislielākās neatkarīgas virsotņu kopas elementu skaitu; šo skaitli apzīmē ar $\alpha_v(G)$.

- *Ja $S \subset VG$ ir neatkarīga virsotņu kopa, tad jebkura netukša apakškopa $S_1 \subset S$ arī ir neatkarīga virsotņu kopa.*
- *Ja u ir grafa G virsotne, tad $S = \{u\} \subset VG$ ir neatkarīga virsotņu kopa. Tātad jebkuram grafam G ir spēkā $\alpha_v(G) \geq 1$.*
- *Ja $S \subset VG$ ir neatkarīga virsotņu kopa, tad grafa G apakšgrafs H, kuru ir inducējusi virsotņu apakškopa $S \subset VG$, ir vienāds ar tukšo grafu O_s, kur $s = |S|$.*
- *Netukša grafa G neatkarīga virsotņu kopa $S \subset VG$ ir maksimāla tad un tikai tad, kad, pievienojot tai jebkuru citu virsotni $u \in VG \setminus S$, iegūtā virsotņu kopa $\widehat{S} = S \cup \{u\}$ nav neatkarīga.*

  Tā kā G nav vienāds ar tukšo grafu, tad tam eksistē vismaz viena šķautne. Tātad VG nav neatkarīga virsotņu kopa. Līdz ar to, ja $S \subset VG$ ir neatkarīga virsotņu kopa, tad $S \neq VG$ un eksistē virsotne $u \in VG \setminus S$.

  ▶ *Nepieciešamība.* Pieņemsim, ka S ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāda virsotne $u \in VG \setminus S$, ka virsotņu kopa $\widehat{S} = S \cup \{u\}$ ir neatkarīga. Tā kā

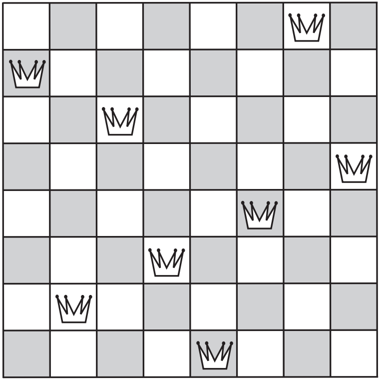
$\widehat{S} \supset S$, tad S *nav maksimāla* neatkarīga virsotņu kopa. Ieguvām pretrunu. Tātad, pievienojot kopai S jebkuru citu virsotni $u \in VG \setminus S$, iegūtā virsotņu kopa $\widehat{S} = S \cup \{u\}$ nav neatkarīga.

Pietiekamība. Pieņemsim, ka S ir neatkarīga virsotņu kopa, ka, pievienojot kopai S jebkuru citu virsotni $u \in VG \setminus S$, iegūtā virsotņu kopa $\widehat{S} = S \cup \{u\}$ nav neatkarīga. Pierādīsim, ka neatkarīga virsotņu kopa S ir maksimāla. Pieņemsim pretējo, ka neatkarīga virsotņu kopa S nav maksimāla. Tad eksistē tāda neatkarīga virsotņu kopa $\widetilde{S}$, ka $\widetilde{S} \underset{\neq}{\supset} S$. Tāpēc eksistē virsotne u, ka $u \in \widetilde{S}$, bet $u \notin S$. Apskatīsim kopu $\widehat{S} = S \cup \{u\}$. Tā kā $\widetilde{S} \supset \widehat{S} = S \setminus \{u\} \supset S$ un kopa $\widetilde{S}$ ir neatkarīga, tad arī kopa $\widehat{S} = S \cup \{u\}$ ir neatkarīga. Ieguvām pretrunu. Tātad S ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa.◀

- *Jebkura neatkarīga virsotņu kopa $S \subset VG$ iekļaujas kādā maksimālā neatkarīgā virsotņu kopā $S_1 \subset VG$.*
- *Ja $G_1, G_2, \ldots, G_k$ ir visas grafa G komponentes, tad*

$$\alpha_v(G) = \alpha_v(G_1) + \alpha_v(G_2) + \cdots + \alpha_v(G_k).$$

- *Jebkura vislielākā neatkarīga virsotņu kopa grafā G ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa šajā grafā. Apgriezts apgalvojums nav spēkā.*



1. zīm. Viens no uzdevuma par 8 šaha dāmām atrisinājumiem.

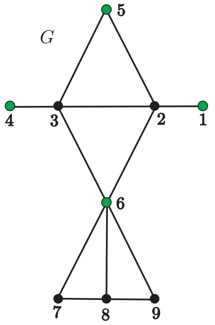
Neatkarīgas virsotņu kopas interpretācija spēļu teorijā.

Pieņemsim, ka grafa G virsotnes attēlo spēles pozīcijas, pie tam divas virsotnes ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, kad eksistē gājiens starp atbilstošajām pozīcijām. *Neatkarīga virsotņu kopa $S \subset VG$ raksturo tādu pozīciju kopu, ka ir nepieciešams vairāk nekā 1 gājiens, lai no jebkuras šīs kopas pozīcijas nokļūtu jebkurā citā šīs kopas pozīcijā.*

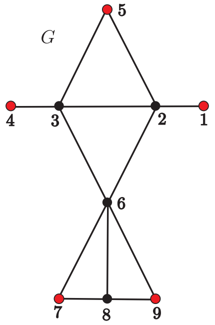
Uzdevums par 8 šaha dāmām. *Uz šaha dēļa izvietot vislielāko dāmu skaitu tā, lai tās neuzbruktu viena otru.*

Apskatīsim grafu G, kura virsotnes atbilst šaha dēļa rūtiņām, pie tam divas virsotnes ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, kad vai nu tās atrodas uz vienas šaha dēļa horizontāles, vai nu tās atrodas un vienas šaha dēļa vertikāles, vai arī tās atrodas uz vienas šaha dēļa diagonāles. Uzdevumu par 8 šaha dāmām grafu teorijas valodā var formulēt šādi: *atrast grafa G vislielāko neatkarīgu virsotņu kopu.* Acīmredzot, dāmu skaits nevar būt lielāks par 8, jo pretējā gadījumā tās atrastos uz vienas horizontāles vai vertikāles. Izrādās, ka uz šaha dēļa var izvietot

8 dāmas tā, lai tās neuzbruktu viena otrai (skat. 1. zīm.). Tātad grafā G vislielākā neatkarīgu virsotņu kopa sastāv no 8 virsotnēm, tāpēc $\alpha_v(G) = 8$.



2. zīm. Grafa G virsotņu kopa $\{1; 4; 5; 6\}$ ir šī grafa maksimāla (bet ne vislielākā) neatkarīga virsotņu kopa.



3. zīm. Grafa G virsotņu kopa $\{1; 4; 5; 7; 9\}$ ir šī grafa vislielākā (un tātad arī maksimāla) neatkarīga virsotņu kopa.

1.1. piemērs.

1. $\alpha_v(O_n) = n$.
2. $\alpha_v(K_{p,q}) = \max\{p; q\}$.
3. $\alpha_v(K_n) = 1$.
4. Apskatīsim 2. zīm. attēloto grafu G.
   (a) Grafa G virsotņu kopa $S = \{1; 4; 5; 6\}$ ir neatkarīga virsotņu kopa (2. zīm. virsotnes no S ir iekrāsotas zaļā krāsā), jo jebkuras divas virsotnes no S nav blakusvirsotnes. Virsotņu kopa S ir maksimāla, jo, pievienojot tai jebkuru citu grafa G virsotni, iegūtā virsotņu kopa vairs nebūs neatkarīga. Tātad $\alpha_v(G) \geq 4$. Vai virsotņu kopa S ir vislielākā? Nē.
   (b) Grafa G virsotņu kopa $S_1 = \{1; 4; 5; 7; 9\}$ arī ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa (3. zīm. virsotnes no S_1 ir iekrāsotas sarkanā krāsā). Var pierādīt, ka S_1 ir vislielākā neatkarīga virsotņu kopa, jo jebkuru 6 grafa G virsotņu kopa nav neatkarīga. Tātad $\alpha_v(G) = 5$.

2. Dominējošas virsotņu kopas

Grafa G virsotņu kopas VG netukšu apakškopu S sauc par **dominējošu virsotņu kopu**, ja jebkura virsotne no $VG \setminus S$ ir blakusvirsotne ar kādu virsotni no apakškopas S.

Par **grafa kodolu** sauc jebkuru šī grafa dominējošu neatkarīgu virsotņu kopu.

Dominējošu virsotņu kopu $S \subset VG$ sauc par

✓ **minimālu**, ja tā nesatur nevienu īstu dominējošu virsotņu apakškopu, citiem vārdiem sakot, dominējošu virsotņu kopu $S \subset VG$ sauc par minimālu, ja jebkurai dominējošai virsotņu kopai $\widetilde{S} \subset VG$, ka $\widetilde{S} \subset S$, ir spēkā $\widetilde{S} = S$;

✓ **vismazāko**, ja tās elementu skaits ir vismazākais starp visām dominējošu virsotņu kopām $\widetilde{S} \subset VG$, citiem vārdiem sakot, dominējošu virsotņu kopu $S \subset VG$ sauc par vismazāko, ja jebkurai dominējošai virsotņu kopai $\widetilde{S} \subset VG$ ir spēkā $|S| \leq |\widetilde{S}|$.

Par grafa G **virsotņu dominēšanas skaitli** sauc vismazākās dominējošas virsotņu kopas elementu skaitu; šo skaitli apzīmē ar $\delta_0(G)$.

- *Jebkura dominējoša virsotņu kopa $S \subset VG$ satur minimālu dominējošu virsotņu kopu.*
- *Grafa G visu virsotņu kopa VG ir dominējoša virsotņu kopa, tāpēc $\delta_0(G) \leq |VG|$.*
- *Ja u ir grafa G dominējoša virsotne, tad $S = \{u\} \subset VG$ ir vismazākā dominējoša virsotņu kopa un $\delta_0(G) = 1$.*
- *Ja virsotņu kopa $S \subset VG$ satur grafa G dominējošu virsotni, tad S ir dominējoša virsotņu kopa.*
- *Dominējoša virsotņu kopa $S \subset VG$, kas satur vismaz divas virsotnes, ir minimāla tad un tikai tad, kad, atņemot tai jebkuru virsotni $u \in S$, iegūtā virsotņu kopa $\widehat{S} = S \backslash \{u\}$ nav dominējoša.*

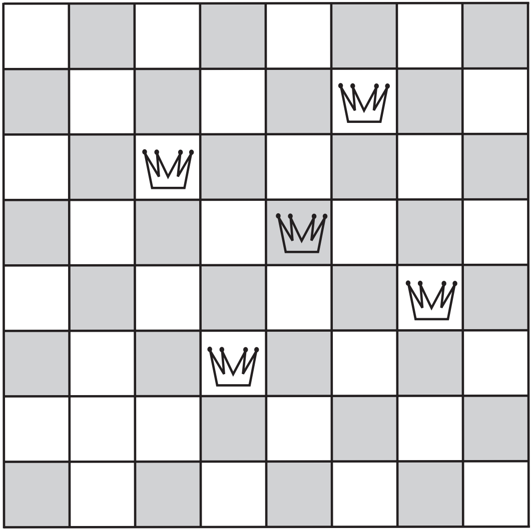
  ▶ *Nepieciešamība.* Pieņemsim, ka S ir minimāla dominējoša virsotņu kopa. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāda virsotne $u \in S$, ka virsotņu kopa $\widehat{S} = S \setminus \{u\}$ ir dominējoša. Tā kā $\widehat{S} \subset S$, tad S *nav minimāla* dominējoša virsotņu kopa. Ieguvām pretrunu. Tātad, atņemot no kopas S jebkuru virsotni $u \in S$, iegūtā virsotņu kopa $\widehat{S} = S \setminus \{u\}$ nav dominējoša.

Pietiekamība. Pieņemsim, ka S ir dominējoša virsotņu kopa, ka, atņemot tai jebkuru virsotni $u \in S$, iegūtā virsotņu kopa $\widehat{S} = S \backslash \{u\}$ nav dominējoša. Pierādīsim, ka dominējoša virsotņu kopa S ir minimāla. Pieņemsim pretējo, ka dominējoša virsotņu kopa S nav minimāla. Tad eksistē tāda dominējoša virsotņu kopa $\widetilde{S}$, ka $\widetilde{S} \subsetneqq S$. Tāpēc eksistē virsotne u, ka $u \in S$, bet $u \notin \widetilde{S}$. Apskatīsim kopu $\widehat{S} = S \setminus \{u\}$. Tā kā $\widetilde{S} \subset \widehat{S} = S \setminus \{u\} \subset S$ un kopa $\widetilde{S}$ ir dominējoša, tad arī kopa $\widehat{S} = S \setminus \{u\}$ ir dominējoša. Ieguvām pretrunu. Tātad S ir minimāla dominējoša virsotņu kopa.◀

Dominējošas virsotņu kopas interpretācija spēļu teorijā. Pieņemsim, ka grafa G virsotnes attēlo spēles pozīcijas, pie tam divas virsotnes ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, kad eksistē gājiens starp atbilstošajām pozīcijām. *Dominējoša virsotņu kopa $S \subset VG$ raksturo tādu pozīciju kopu, ka no jebkuras šīs kopas pozīcijas ar 1 vienu gājienu var nokļūt jebkurā citā pozīcijā, kas nepieder šai kopai.*

Uzdevums par 5 šaha dāmām. *Uz šaha dēļa izvietot vismazāko dāmu skaitu tā, lai jebkurš šaha dēļa luciņš būtu pakļauts uzbrukumam.*

Apskatīsim grafu G, kura virsotnes atbilst šaha dēļa rūtiņām, pie tam divas virsotnes ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, kad vai nu tās atrodas uz vienas šaha dēļa horizontāles, vai nu tās atrodas un vienas šaha dēļa vertikāles, vai arī tās atrodas uz vienas šaha dēļa diagonāles. Uzdevumu par 5 šaha dāmām grafu teorijas valodā var formulēt šādi: *atrast vizmazāko dominējošo virsotņu kopu grafā* G. Izrādās, ka vismazākā dominējoša virsotņu kopa grafā G sastāv no 5 virsotnēm. 4. zīm. ir attēlots viens no uzdevuma par 5 šaha dāmām atrisinājumiem.



4. zīm. Viens no uzdevuma par 5 šaha dāmām atrisinājumiem.

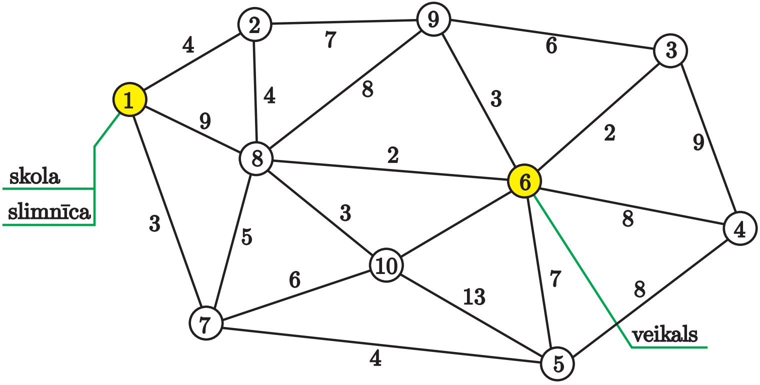
Uzdevums par sabiedrisko iestāžu izvietošanu. *Pieņemsim, ka dotajā apdzīvotu vietu rajonā ir jāizvieto sabiedriskās iestādes (skolas, slimnīcas, veikalus, bibliotēkas, policiju utt.) tā, lai*

1. *attālums no jebkuras apdzīvotās vietas līdz kādai sabiedriskai iestādei nepārsniegtu doto lielumu;*
2. *sabiedriskajām iestādēm ir jābūt izvietotām kompakti, t.i., apdzīvoto vietu skaitam, kurās tiks izvietotas sabiedriskās iestādes, ir jābūt pēc iespējas mazākam.*

Apskatīsim grafu G, kura virsotnes atbilst apdzīvotām vietām, pie tam divas dažādas virsotnes ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, kad attālums starp atbilstošajām apdzīvotām vietām nepārsniedz doto lielumu. Uzdevumu par sabiedrisko iestāžu izvietošanu grafu teorijas valodā var formulēt šādi: *atrast vismazāko dominējošo virsotņu kopu grafā* G. Ja S ir vismazākā dominējoša virsotņu kopa grafā G, tad sabiedriskās iestādes ir jāizvieto apdzīvotās vietās, kas atbilst kopas S virsotnēm, pie tam tā, lai katrā šādā apdzīvotā vietā atrastos vismaz viena sabiedriskā iestāde.

2.1. piemērs. Pieņemsim, ka apdzīvotu vietu rajonam atbilst grafs G ar svariem (skat. 5. zīm.; šis grafs jau tika aplūkots paragrāfā "Floida metode"), kura svaru matrica ir

$$\omega(G) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 & 9 & \infty & \infty \\ 4 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 4 & 7 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & 9 & \infty & 2 & \infty & \infty & 6 & \infty \\ \infty & \infty & 9 & 0 & 8 & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 8 & 0 & 7 & 4 & \infty & \infty & 13 \\ \infty & \infty & 2 & 8 & 7 & 0 & \infty & 2 & 3 & 5 \\ 3 & \infty & \infty & \infty & 4 & \infty & 0 & 5 & \infty & 6 \\ 9 & 4 & \infty & \infty & \infty & 2 & 5 & 0 & 8 & 3 \\ \infty & 7 & 6 & \infty & \infty & 3 & \infty & 8 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 13 & 5 & 6 & 3 & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$



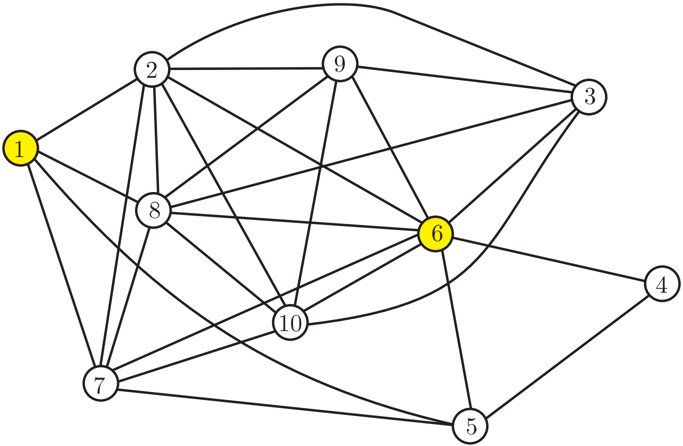
5. zīm. Grafs G ar svariem, kas atbilst apdzīvoto vietu rajonam.

Grafa G attālumu matrica:

$$\rho(G) = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{4} & 12 & 15 & \boxed{7} & 10 & \boxed{3} & \boxed{8} & 11 & 9 \\ \boxed{4} & 0 & \boxed{8} & 14 & 11 & \boxed{6} & \boxed{7} & \boxed{4} & \boxed{7} & \boxed{7} \\ 12 & \boxed{8} & 0 & 9 & 9 & \boxed{2} & 9 & \boxed{4} & \boxed{5} & \boxed{7} \\ 15 & 14 & 9 & 0 & \boxed{8} & \boxed{8} & 12 & 10 & 11 & 13 \\ \boxed{7} & 11 & 9 & \boxed{8} & 0 & \boxed{7} & \boxed{4} & 9 & 10 & 10 \\ 10 & \boxed{6} & \boxed{2} & \boxed{8} & \boxed{7} & 0 & \boxed{7} & \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{5} \\ \boxed{3} & \boxed{7} & 9 & 12 & \boxed{4} & \boxed{7} & 0 & \boxed{5} & 10 & \boxed{6} \\ \boxed{8} & \boxed{4} & \boxed{4} & 10 & 9 & \boxed{2} & \boxed{5} & 0 & \boxed{5} & \boxed{3} \\ 11 & \boxed{7} & \boxed{5} & 11 & 10 & \boxed{3} & 10 & \boxed{5} & 0 & \boxed{8} \\ 9 & \boxed{7} & \boxed{7} & 13 & 10 & \boxed{5} & \boxed{6} & \boxed{3} & \boxed{8} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pieņemsim, ka dotajā apdzīvoto vietu rajonā ir jāizvieto 3 sabiedriskās iestādes: skolu, slimnīcu, veikalu, pie tam attālums no jebkuras apdzīvotās vietas līdz kādai sabiedriskai iestādei nedrīkst pārsniegt 8. Apskatīsim grafu H, kura virsotnes atbilst apdzīvotām vietām, pie tam divas dažādas virsotnes ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, kad attālums starp atbilstošajām apdzīvotām vietām nav lielāks par 8. Grafa H (skat. 6. zīm.) kaimiņmatrica:

$$B(H) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



6. zīm. Grafs H, kura virsotnes atbilst apdzīvotām vietām, pie tam divas dažādas virsotnes ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, kad attālums starp atbilstošajām apdzīvotām vietām nav lielāks par 8.

Grafa H virsotņu kopas apakškopa $S_1 = \{1; 6\}$, $S_2 = \{6; 7\}$, $S_3 = \{6; 8\}$ ir vismazākās dominējošas virsotņu kopas (atzīmēsim, ka vismazākā dominējoša virsotņu kopa nevar sastāvēt tikai no vienas virsotnes, jo grafā H nav dominējošas virsotnes). Tāpēc viens no uzdevuma par sabiedriskajām iestādēm atrisinājumiem varētu būt šāds: virsotnē 1 izvietojam skolu un slimnīcu, bet virsotnē 6 izvietojam veikalu. Pie šāda sabiedrisko iestāžu izvietojuma 1) attālums no jebkuras apdzīvotās vietas līdz kādai sabiedriskai iestādei nepārsniegs 8, 2) tiek izmantots vismazākais apdzīvoto vietu skaits, kurās tiek izvietotas sabiedriskās iestādes. Protams, ka virsotnēs 1 un 6 (6 un 7; 6 un 8) sabiedriskās iestādes var izvietot savādāk, galvenais, lai katrā šādā virsotnē būtu izvietota vismaz viena sabiedriskā iestāde.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
skola, slimnīca (virsotne 1)	0	4	12	15	7	10	3	8	11	9
veikals (virsotne 6)	10	6	2	8	7	0	2	2	3	5

Tabulā ir uzrādīti apdzīvoto vietu attālumi līdz sabiedriskajām iestādēm (ar sarkanu krāsu ir izcelti tie attālumi no apdzīvotajām vietām līdz sabiedriskajām iestādēm, kuri nepārsniedz 8). Redzam, ka attālums no jebkuras apdzīvotās vietas līdz kādai sabiedriskai iestādei nepārsniedz 8. Piemēram, attālums no virsotnes 10 līdz veikalam (virsotne 6) ir 5, bet attālums līdz skolai un slimnīcai (virsotne 1) ir 9.

Atgādināsim, ka grafa G centrālās virsotnes ir 6 un 8, bet perifērijas virsotnes ir 1 un 4. Redzam, ka atšķirībā no uzdevuma par sabiedrisko iestāžu visoptimālāko izvietošanu, šajā gadījumā sabiedriskās iestādes var tikt izvietotas arī perifērijas virsotnē, kas nav centrālā virsotne (virsotne 1).

3. Saistība starp dominējošām un neatkarīgām virsotņu kopām

3.1. teorēma.

1. *Maksimāla neatkarīga virsotņu kopa $S \subset VG$ ir minimāla dominējoša virsotņu kopa.*
2. *Dominējoša neatkarīga virsotņu kopa $S \subset VG$ ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa.*
3. *Neatkarīga virsotņu kopa $S \subset VG$ ir dominējoša virsotņu kopa tad un tikai tad, kad tā ir maksimāla virsotņu kopa. Citiem vārdiem sakot, grafa G virsotņu kopa $S \subset VG$ ir grafa G kodols tad un tikai tad, kad S ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa grafā G.*
4. *$\delta_0(G) \leq \alpha_v(G)$, t.i., grafa G virsotņu dominēšanas skaitlis nepārsniedz grafa G virsotņu neatkarības skaitli.*

▶ 1. Pieņemsim, ka S ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa.

- Pierādīsim, ka S *ir **dominējoša** virsotņu kopa.* Pieņemsim pretējo, ka S nav dominējoša virsotņu kopa, t.i., eksistē tāda virsotne $u \in VG \setminus S$, ka u nav blakusvirsotne ne ar vienu kopas S virsotni. Tāpēc $\widehat{S} = S \cup \{u\}$ ir neatkarīga virsotņu kopa, pie tam $\widehat{S} \supset S$ un $\widehat{S} \neq S$. Tātad S nav maksimāla virsotņu kopa. Ieguvām pretrunu. Tātad S ir dominējoša virsotņu kopa.

- Pierādīsim, ka *S ir **minimāla** dominējoša virsotņu kopa*. Pieņemsim pretējo, ka S nav minimāla dominējoša virsotņu kopa. Tad eksistē tāda dominējoša virsotņu kopa S_1, ka $S_1 \subsetneqq S$. Tātad eksistē virsotne u, ka $u \in S$, bet $u \notin S_1$. Tā kā virsotņu kopa S_1 ir dominējoša, tad jebkura virsotne no $VG \setminus S_1$ (tātad arī u, jo $u \notin S_1$) ir blakusvirsotne ar kādu virsotni no S_1. Pieņemsim, ka u ir blakusvirsotne ar virsotni $v \in S_1 \subset S$. Tātad divas kopas S ir virsotnes u un v ir blakusvirsotnes. Ieguvām pretrunu ar virsotņu kopas S neatkarību. Tātad S ir minimāla dominējoša virsotņu kopa.

2. Ja $G = O_n$, tad $S = VG$ ir vienīgā dominējoša neatkarīga virsotņu kopa grafā G un tā ir vienīgā maksimāla neatkarīga virsotņu kopa grafā G. Šajā gadījumā apgalvojums ir spēkā.

Pieņemsim, ka G ir netukšs grafs. Pieņemsim, ka S ir dominējoša neatkarīga virsotņu kopa. Atzīmēsim, ka $S \subsetneq VG$, jo G ir netukšs grafs un S ir neatkarīga kopa. Pierādīsim, ka S *ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa.* Jāpierāda, ka, pievienojot kopai S jebkuru citu virsotni u ($u \neq v$ jebkurai virsotnei $v \in S$), iegūtā virsotņu kopa $\widehat{S} = S \cup \{u\}$ nav neatkarīga. Pieņemsim pretējo, ka $\widehat{S} = S \cup \{u\}$ ir neatkarīga virsotņu kopa kādai virsotnei $u \in VG \setminus S$. Tāpēc virsotne u nav blakusvirsotne ne ar vienu kopas S virsotni. Saskaņā ar doto virsotņu kopa S ir dominējoša. Tāpēc jebkura kopas $VG \setminus S$ virsotne ir blakusvirsotne ar kādu kopas S virsotni. Tā kā $u \in VG \setminus S$, tad arī virsotne u ir blakusvirsotne ar kādu kopas S virsotnei. Ieguvām pretrunu. Tātad S ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa.

3. *Nepieciešamība.* Pieņemsim, ka $S \subset VG$ ir neatkarīga dominējoša virsotņu kopa. No 2. apgalvojuma izriet, ka S ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa. *Pietiekamība.* Pieņemsim, ka $S \subset VG$ ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa. No 1. apgalvojuma izriet, ka S ir dominējoša virsotņu kopa.

4. Apskatīsim kādu maksimālu neatkarīgu virsotņu kopu $S \subset VG$. Atzīmēsim, ka šāda virsotņu kopa vienmēr eksistē: virsotņu kopa $S_1 =$

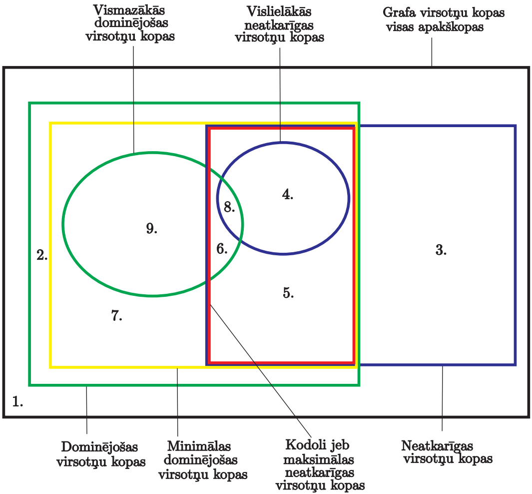
$\{u\}$ (u ir fiksēta grafa G virsotne) ir neatkarīga, un tāpēc tā iekļaujās maksimālā neatkarīgā virsotņu kopā S. Tā kā S ir neatkarīga virsotņu kopa, tad $|S| \leq \alpha_v(G)$. Saskaņā ar 1. apgalvojumu S ir dominējoša virsotņu kopa, tāpēc $\delta_0(G) \leq |S|$. Tātad $\delta_0(G) \leq \alpha_v(G)$.◄

3.1. piezīme. a) Saskaņā ar 3.1. teorēmu dominējoša neatkarīga virsotņu kopa $S \subset VG$ ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa. Taču tā var nebūt vislielākā neatkarīga virsotņu kopa. Piemēram, 1. zīm. attēlotā grafa G virsotņu kopa $\{1; 4; 5; 6\}$ ir gan dominējoša, gan maksimāla neatkarīga virsotņu kopa, taču tā nav vislielākā neatkarīga virsotņu kopa grafā G.

b) Dominējoša virsotņu kopa vispār var nebūt neatkarīga virsotņu kopa. Piemēram, 1. zīm. attēlotā grafa G virsotņu kopa $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ ir dominējoša virsotņu kopa, taču šī kopa nav neatkarīga virsotņu kopa.

Saistība starp dominējošām (minimālām, vismazākajām) virsotņu kopām un neatkarīgām (maksimālām, vislielākajām) virsotņu kopām ir attēlota 7. zīm., ņemot vērā 3.1. teorēmu. Tabulā ir norādīti konkrēti grafi (attiecīgajos zīmējumos), kuru virsotņu kopas (sarkanā krāsā) ilustrē gadījumus, kas atbilst katram no 7. zīm. attēlotajiem 9 apgabaliem; 3.1. piemērā ir sniegts attiecīgs detalizēts apraksts.

		Dominējoša virsotņu kopa	Minimāla dominējoša virsotņu kopa	Vismazākā dominējoša virsotņu kopa	Neatkarīga virsotņu kopa	Maksimāla neatkarīga virsotņu kopa	Vislielākā neatkarīga virsotņu kopa
1.	8. zīm.	-	-	-	-	-	-
2.	9. zīm.	+	-	-	-	-	-
3.	10. zīm.	-	-	-	+	-	-
4.	11. zīm.	+	+	-	+	+	+
5.	12. zīm.	+	+	-	+	+	-
6.	13. zīm.	+	+	+	+	+	-
7.	14. zīm.	+	+	-	-	-	-
8.	15. zīm.	+	+	+	+	+	+
9.	16. zīm.	+	+	+	-	-	-



7. zīm. Saistība starp dominējošām (minimālām, vismazākajām) virsotņu kopām un neatkarīgām (maksimālām, vislielākajām) virsotņu kopām.

3.1. piemērs.

1. gadījums. Virsotņu kopa $S = \{1; 2; 3\}$ (skat. 8. zīm.):

1. *nav* dominējoša virsotņu kopa, jo, piemēram, virsotne $8 \in VG \setminus S$ nav blakusvirsotne ne ar vienu kopas S virsotni;
2. *nav* minimāla dominējoša virsotņu kopa, jo tā nav dominējoša virsotņu kopa;
3. *nav* vismazākā dominējoša virsotņu kopa, jo tā nav dominējoša virsotņu kopa;
4. *nav* neatkarīga virsotņu kopa, jo šīs kopas virsotnes 1 un 2 ir blakusvirsotnes;
5. *nav* maksimāla neatkarīga virsotņu kopa, jo tā nav neatkarīga virsotņu kopa;
6. *nav* vislielākā neatkarīga virsotņu kopa, jo tā nav neatkarīga virsotņu kopa.

2. gadījums. Virsotņu kopa $S = \{2; 4; 5; 6; 8\}$ (skat. 9. zīm.):

1. *ir* dominējoša virsotņu kopa, jo jebkura virsotne no $VG \setminus S$ ir blakusvirsotne ar kādu kopas S virsotni;
2. *nav* minimāla dominējoša virsotņu kopa, jo eksistē dominējoša virsotņu kopa $S_1 = \{2; 4; 6; 8\}$, ka $S_1 \subsetneqq S$;
3. *nav* vismazākā dominējoša virsotņu kopa, jo tā nav minimāla virsotņu kopa;
4. *nav* neatkarīga virsotņu kopa, jo šīs kopas virsotnes 2 un 4 ir blakusvirsotnes;
5. *nav* maksimāla neatkarīga virsotņu kopa, jo tā nav neatkarīga virsotņu kopa;
6. *nav* vislielākā neatkarīga virsotņu kopa, jo tā nav neatkarīga virsotņu kopa.

3. gadījums. Virsotņu kopa $S = \{1; 3\}$ (skat. 10. zīm.):

1. *nav* dominējoša virsotņu kopa, jo, piemēram, virsotne 8 nav blakusvirsotne ne ar vienu kopas S virsotni;
2. *nav* minimāla dominējoša virsotņu kopa, jo tā nav dominējoša virsotņu kopa;
3. *nav* vismazākā dominējoša virsotņu kopa, jo tā nav dominējoša virsotņu kopa;
4. *ir* neatkarīga virsotņu kopa, jo šīs kopas virsotnes 1 un 3 nav blakusvirsotnes;
5. *nav* maksimāla neatkarīga virsotņu kopa, jo eksistē neatkarīga virsotņu kopa $S_1 = \{1; 3; 9\}$, ka $S_1 \supsetneq S$;
6. *nav* vislielākā neatkarīga virsotņu kopa, jo tā nav maksimāla virsotņu kopa.

4. gadījums. Virsotņu kopa $S = \{1; 3; 7; 9\}$ (skat. 11. zīm.):

1. *ir* dominējoša virsotņu kopa, jo jebkura virsotne no $VG \setminus S = \{2; 4; 5; 6; 8\}$ ir blakusvirsotne ar kādu kopas S virsotni;
2. *ir* minimāla dominējoša virsotņu kopa, jo, atņemot no kopas S jebkuru tās virsotni, iegūsim virsotņu kopu, kas nav dominējoša;
3. *nav* vismazākā dominējoša virsotņu kopa, jo eksistē dominējoša virsotņu kopa $\{5\}$, kuras elementu skaits ir mazāks par kopas S elementu skaitu;
4. *ir* neatkarīga virsotņu kopa, jo jebkuras divas šīs kopas virsotnes nav blakusvirsotnes;
5. *ir* maksimāla neatkarīga virsotņu kopa, jo, pievienojot kopai S jebkuru citu virsotni $u \in VG \setminus S = \{2, 4, 5, 6, 8\}$, iegūsim virsotņu kopu, kas nav neatkarīga;
6. *ir* vislielākā neatkarīga virsotņu kopa, jo neeksistē neviena neatkarīga virsotņu kopa, kuras elementu skaits būtu lielāks par 4.

5. gadījums. Virsotņu kopa $S = \{2; 7; 9\}$ (skat. 12. zīm.):

1. *ir* dominējoša virsotņu kopa, jo jebkura virsotne no $VG \setminus S = \{1; 3; 4; 5; 6; 8\}$ ir blakusvirsotne ar kādu kopas S virsotni;
2. *ir* minimāla dominējoša virsotņu kopa, jo, atņemot no kopas S jebkuru tās virsotni, iegūsim virsotņu kopu, kas nav dominējoša;
3. *nav* vismazākā dominējoša virsotņu kopa, jo eksistē dominējoša virsotņu kopa $\{5\}$, kuras elementu skaits ir mazāks par kopas S elementu skaitu;
4. *ir* neatkarīga virsotņu kopa, jo jebkuras divas šīs kopas virsotnes nav blakusvirsotnes;
5. *ir* maksimāla neatkarīga virsotņu kopa, jo, pievienojot kopai S jebkuru virsotni $u \in VG \setminus S = \{1; 3; 4; 5; 6; 8\}$, iegūsim virsotņu kopu, kas nav neatkarīga;
6. *nav* vislielākā neatkarīga virsotņu kopa, jo eksistē neatkarīga virsotņu kopa $\{1; 3; 7; 9\}$, kuras elementu skaits ir lielāks par kopas S elementu skaitu.

6. gadījums. Virsotņu kopa $S = \{5\}$ (skat. 13. zīm.):

1. *ir* dominējoša virsotņu kopa, jo jebkura virsotne no $VG \setminus S = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9\}$ ir blakusvirsotne ar kādu kopas S virsotni;
2. *ir* minimāla dominējoša virsotņu kopa, jo $\delta_0(G) \geq 1$ jebkuram grafam G, bet, tā kā $S = \{5\}$ ir dominējoša virsotņu kopa, tad $\delta_0(G) \leq 1$;
3. *ir* vismazākā dominējoša virsotņu kopa;
4. *ir* neatkarīga virsotņu kopa;
5. *ir* maksimāla neatkarīga virsotņu kopa, jo, pievienojot kopai S jebkuru virsotni $u \in VG \setminus S = \{1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9\}$, iegūsim virsotņu kopu, kas nav neatkarīga;
6. *nav* vislielākā neatkarīga virsotņu kopa, jo eksistē neatkarīga virsotņu kopa $\{1; 3; 7; 9\}$, kuras elementu skaits ir lielāks par kopas S elementu skaitu.

7. gadījums. Virsotņu kopa $S = \{2; 4; 6\}$ (skat. 14. zīm.):

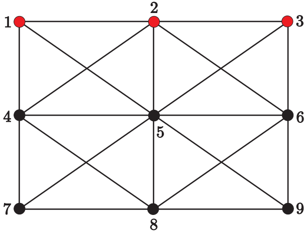
1. *ir* dominējoša virsotņu kopa, jo jebkura virsotne no $VG \setminus S = \{1; 3; 5; 7; 8; 9\}$ ir blakusvirsotne ar kādu kopas S virsotni;
2. *ir* minimāla dominējoša virsotņu kopa, jo, atņemot no kopas S jebkuru tās virsotni, iegūsim virsotņu kopu, kas nav dominējoša;
3. *nav* vismazākā dominējoša virsotņu kopa, jo eksistē dominējoša virsotņu kopa $\{5\}$, kuras elementu skaits ir mazāks par kopas S elementu skaitu;
4. *nav* neatkarīga virsotņu kopa, jo šīs kopas virsotnes 2 un 4 ir blakusvirsotnes;
5. *nav* maksimāla neatkarīga virsotņu kopa, jo tā nav neatkarīga virsotņu kopa;
6. *nav* vislielākā neatkarīga virsotņu kopa, jo tā nav neatkarīga virsotņu kopa.

8. gadījums. Virsotņu kopa $S = \{1; 4\}$ (skat. 15. zīm.):

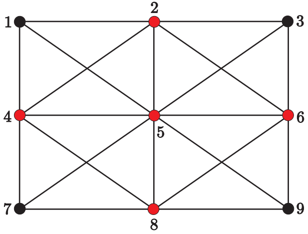
1. *ir* dominējoša virsotņu kopa, jo jebkura virsotne no $VG \setminus S = \{2; 3\}$ ir blakusvirsotne ar kādu kopas S virsotni;
2. *ir* minimāla dominējoša virsotņu kopa, jo, atņemot no kopas S jebkuru tās virsotni, iegūsim virsotņu kopu, kas nav dominējoša;
3. *ir* vismazākā dominējoša virsotņu kopa, jo jebkura virsotņu kopa, kas sastāv tikai no vienas virsotnes, nav dominējoša;
4. *ir* neatkarīga virsotņu kopa, jo šīs kopas virsotnes 1 un 4 nav blakusvirsotnes;
5. *ir* maksimāla neatkarīga virsotņu kopa, jo, pievienojot kopai S jebkuru virsotni $u \in VG \setminus S = \{2; 3\}$, iegūsim virsotņu kopu, kas nav neatkarīga;
6. *ir* vislielākā neatkarīga virsotņu kopa, jo jebkura virsotņu kopa, kas sastāv no 3 vai 4 virsotnēm, nav neatkarīga.

9. gadījums. Virsotņu kopa $S = \{1; 2\}$ (skat. 16. zīm.):

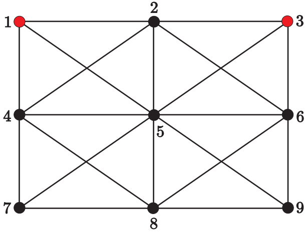
1. *ir* dominējoša virsotņu kopa, jo jebkura virsotne no $VG \setminus S = \{3; 4\}$ ir blakusvirsotne ar kādu kopas S virsotni;
2. *ir* minimāla dominējoša virsotņu kopa, jo, atņemot no kopas S jebkuru tās virsotni, iegūsim virsotņu kopu, kas nav dominējoša;
3. *ir* vismazākā dominējoša virsotņu kopa, jo jebkura virsotņu kopa, kas sastāv tikai no vienas virsotnes, nav dominējoša;
4. *nav* neatkarīga virsotņu kopa, jo šīs kopas virsotnes 1 un 2 ir blakusvirsotnes;
5. *nav* maksimāla neatkarīga virsotņu kopa, jo tā nav neatkarīga virsotņu kopa;
6. *nav* vislielākā neatkarīga virsotņu kopa, jo tā nav neatkarīga virsotņu kopa.



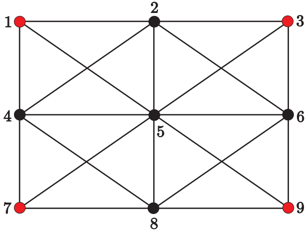
8. zīm. Virsotņu kopa $S = \{1; 2; 3\}$ nav ne dominējoša, ne neatkarīga.



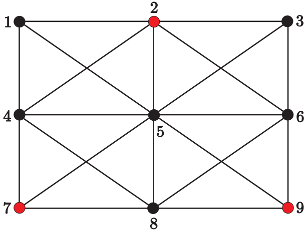
9. zīm. Virsotņu kopa $S = \{2; 4; 5; 6; 8\}$ ir dominējoša virsotņu kopa, kas nav minimāla. Virsotņu kopa S nav neatkarīga virsotņu kopa.



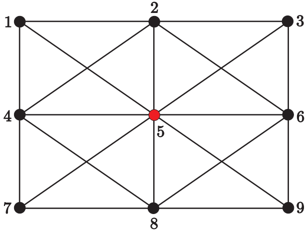
10. zīm. Virsotņu kopa $S = \{1; 3\}$ nav dominējoša virsotņu kopa. Virsotņu kopa S ir neatkarīga virsotņu kopa, kas nav maksimāla.



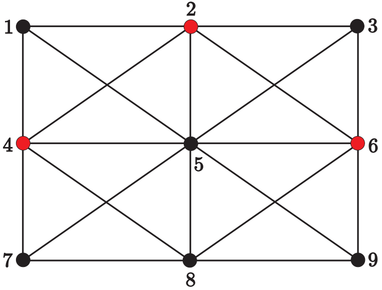
11. zīm. Virsotņu kopa $S = \{1; 3; 7; 9\}$ ir minimāla dominējoša virsotņu kopa, kas nav vismazākā. Virsotņu kopa S ir vislielākā neatkarīga virsotņu kopa, $\alpha_v(G) = 4$.



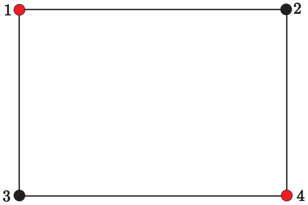
12. zīm. Virsotņu kopa $S = \{2; 7; 9\}$ ir minimāla dominējoša virsotņu kopa, kas nav vismazākā. Virsotņu kopa S ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa, kas nav vislielākā.



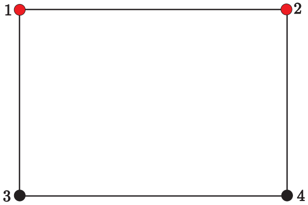
13. zīm. Virsotņu kopa $S = \{5\}$ ir vismazākā dominējoša virsotņu kopa, $\delta_0(G) = 1$. Virsotņu kopa S ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa, kas nav vislielākā.



14. zīm. Virsotņu kopa $S = \{2; 4; 6\}$ ir minimāla dominējoša virsotņu kopa, kas nav vismazākā. Virsotņu kopa S nav neatkarīga.



15. zīm. Virsotņu kopa $S = \{1; 4\}$ ir vismazākā dominējoša virsotņu kopa, $\delta_0(G) = 2$. Virsotņu kopa S ir vislielākā neatkarīga virsotņu kopa, $\alpha_v(G) = 2$.



16. zīm. Virsotņu kopa $S = \{1; 2\}$ ir vismazākā dominējoša virsotņu kopa, $\delta_0(G) = 2$. Virsotņu kopa S nav neatkarīga virsotņu kopa.

4. Kliķe

Grafa G virsotņu kopas VG *netukšu* apakškopu S sauc par **kliķi**, ja jebkuras divas virsotnes no S ir blakusvirsotnes, t.i., $\{u; v\} \in EG$ jebkurām divām virsotnēm $u, v \in S$.

Tātad kliķe ir neatkarīgas virsotņu kopas antipods.

Kliķi $S \subset VG$ sauc par

- ✓ **maksimālu**, ja nav nevienas citas kliķes $\widetilde{S} \subset G$, kas satur S kā īstu apakškopu, citiem vārdiem sakot, kliķi $S \subset VG$ sauc par maksimālu, ja jebkurai kliķei $\widetilde{S} \subset VG$, ka $\widetilde{S} \supset S$, ir spēkā $\widetilde{S} = S$;
- ✓ **vislielāko**, ja tās elementu skaits ir vislielākais starp visām kliķēm $\widetilde{S} \subset VG$, citiem vārdiem sakot, kliķi $S \subset VG$ sauc par vislielāko, ja jebkurai kliķei $\widetilde{S} \subset VG$ ir spēkā $|S| \geq |\widetilde{S}|$.

Par grafa G **kliķes skaitli** vai **blīvumu** sauc vislielākās kliķes elementu skaitu; šo skaitli apzīmē ar $\varphi(G)$.

- *Ja $S \subset VG$ ir kliķe, tad jebkura netukša apakškopa $S_1 \subset S$ arī ir kliķe.*

- *Ja u ir grafa G virsotne, tad $S = \{u\} \subset VG$ ir kliķe. Tātad jebkuram grafam G ir spēkā $\varphi(G) \geq 1$.*

- *Ja $S \subset VG$ ir kliķe, tad grafa G apakšgrafs H, kuru ir inducējusi virsotņu apakškopa $S \subset VG$, ir vienāds ar pilno grafu K_s, kur $s = |S|$.*

- *Pieņemsim, ka G ir nepilns grafs. Kliķe $S \subset VG$ ir maksimāla tad un tikai tad, kad, pievienojot tai jebkuru citu virsotni $u \in VG \setminus S$, iegūtā virsotņu kopa $\widehat{S} = S \cup \{u\}$ nav kliķe.*

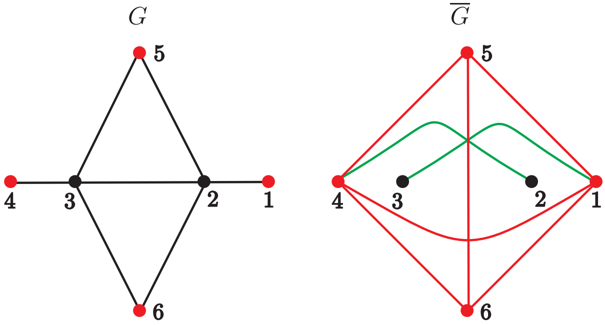
  ▶ Tā kā G ir nepilns grafs, tad VG nav kliķe. Tāpēc, ja S ir kliķe, tad $S \subsetneq VG$ un eksistē $u \in VG \setminus S$.

  Nepieciešamība. Pieņemsim, ka S ir maksimāla kliķe. Pieņemsim pretējo, ka eksistē tāda virsotne $u \in VG \setminus S$, ka virsotņu kopa $\widehat{S} = S \cup \{u\}$ ir kliķe. Tā kā $\widehat{S} \supset S$, tad S *nav maksimāla* kliķe. Ieguvām pretrunu. Tātad, pievienojot kopai S jebkuru citu virsotni $u \in VG \setminus S$, iegūtā virsotņu kopa $\widehat{S} = S \cup \{u\}$ nav kliķe.

  Pietiekamība. Pieņemsim, ka S ir kliķe, ka, pievienojot kopai S

jebkuru citu virsotni $u \in VG \setminus S$, iegūtā virsotņu kopa $\widehat{S} = S \cup \{u\}$ nav kliķe. Pierādīsim, ka kliķe S ir maksimāla. Pieņemsim pretējo, ka kliķe S nav maksimāla. Tad eksistē tāda kliķe $\widetilde{S}$, ka $\widetilde{S} \underset{\neq}{\supset} S$. Tāpēc eksistē virsotne u, ka $u \in \widetilde{S}$, bet $u \notin S$. Apskatīsim kopu $\widehat{S} = S \cup \{u\}$. Tā kā $\widetilde{S} \supset \widehat{S} = S \setminus \{u\} \supset S$ un kopa $\widetilde{S}$ ir kliķe, tad arī kopa $\widehat{S} = S \cup \{u\}$ ir kliķe. Ieguvām pretrunu. Tātad S ir maksimāla kliķe.◀

- *Jebkura kliķe $S \subset VG$ iekļaujas kādā maksimālā kliķē $S_1 \subset VG$.*
- *Jebkura vislielākā kliķe grafā G ir maksimāla kliķe šajā grafā. Apgriezts apgalvojums nav spēkā.*
- *Grafa G virsotņu kopa $S \subset VG$ ir kliķe tad un tikai tad, kad tā ir neatkarīga virsotņu kopa komplementārgrafā $\overline{G}$. Tātad $\varphi(G) = \alpha_v(\overline{G})$.* Tā kā grafa G komplementārgrafa komplementārgrafs ir vienāds ar grafu G, tad ir spēkā arī šads apgalvojums.
- *Grafa G virsotņu kopa $S \subset VG$ ir neatkarīga virsotņu kopa tad un tikai tad, kad tā ir kliķe komplementārgrafā $\overline{G}$. Tātad $\alpha_v(G) = \varphi(\overline{G})$.*



17. zīm.

Virsotņu kopa $S = \{1, 4, 5, 6\}$ ir grafa G vislielākā neatkarīgā virsotņu kopa un tāpēc $\alpha(G) = 4$. Virsotņu kopa $S = \{1, 4, 5, 6\}$ ir grafa G komplementārgrafa $\overline{G}$ vislielākā kliķe un tāpēc $\varphi(\overline{G}) = 4$.

5. Virsotņu pārklājumi

Pieņemsim, ka $u \in VG$ un $e \in EG$. Saka, ka **virsotne** u **pārklāj šķautni** e vai **šķautne** e **pārklāj virsotni** u, ja virsotne u ir incidenta šķautnei e.

Grafa G virsotņu kopas VG apakškopu S sauc par **grafa** G **virsotņu pārklājumu**, ja kopas S virsotnes pārklāj visas grafa G šķautnes, t.i., jebkura grafa G šķautne ir incidenta kādai kopas S virsotnei.

Grafa G virsotņu pārklājumu sauc par

- ✓ **minimālu**, ja tas nesatur nevienu virsotņu pārklājumu ar mazāku elementu skaitu, citiem vārdiem sakot, virsotņu pārklājumu $S \subset VG$ sauc par minimālu, ja jebkuram virsotņu pārklājumam $\widetilde{S} \subset VG$, ka $\widetilde{S} \subset S$, ir spēkā $\widetilde{S} = S$;
- ✓ **vismazāko**, ja tā elementu skaits ir vismazākais starp visiem grafa G virsotņu pārklājumiem $\widetilde{S} \subset VG$, citiem vārdiem sakot, virsotņu pārklājumu $S \subset VG$ sauc par vismazāko, ja jebkuram virsotņu pārklājumam $\widetilde{S} \subset VG$ ir spēkā $|S| \leq |\widetilde{S}|$.

Par grafa G **virsotņu pārklājuma skaitli** sauc grafa G vismazākā virsotņu pārklājuma $S \subset VG$ elementu skaitu; šo skaitli apzīmē ar $\beta_v(G)$.

• Jebkura kopas VO_n apakškopa, ieskaitot tukšo kopu $\emptyset$, ir grafa O_n virsotņu pārklājums. Tukšā kopa $\emptyset$ ir grafa O_n vienīgais minimālais (vismazākais) virsotņu pārklājums. Tāpēc $\beta_v(G) = 0$.

• Kopa $S = VG$ ir grafa G virsotņu pārklājums, taču šis pārklājums nav ne minimāls, ne vismazākais. Tāpēc grafam G ar n virsotnēm ir spēkā $\beta_v(G) \leq n - 1$.

• Jebkurš netukša grafa G virsotņu pārklājums satur vismaz vienu virsotni. Tāpēc netukšam grafam G ar n virsotnēm ir spēkā $1 \leq \beta_v(G) \leq n - 1$.

• Kopa $S = VG$ ir grafa G virsotņu pārklājums, taču $\overline{S} = VG \setminus S = \emptyset$ nav grafa G neatkarīga virsotņu kopa saskaņā ar definīciju. Šo faktu ņemsim vērā nākamajā teorēmā.

5.1. teorēma. *1. Grafa G virsotņu kopa $S \subsetneq VG$ ir grafa G virsotņu pārklājums tad un tikai tad, kad $\overline{S} = VG \setminus S$ ir neatkarīga virsotņu kopa.*

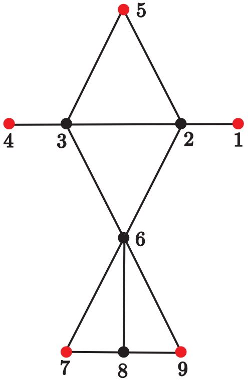
2. Grafa G virsotņu kopa S ir grafa G minimāls virsotņu pārklājums tad un tikai tad, kad $\overline{S} = VG \setminus S$ ir maksimāla neatkarīga virsotņu kopa.

3. Grafa G virsotņu kopa S ir grafa G vismazākais virsotņu pārklājums tad un tikai tad, kad $\overline{S} = VG \setminus S$ ir vislielākā neatkarīga virsotņu kopa. Tāpēc

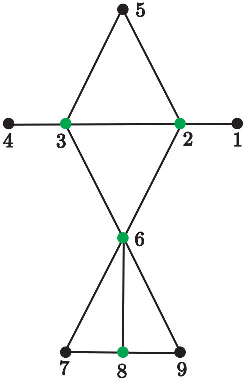
$$\alpha_v(G) + \beta_v(G) = |VG|. \tag{5.1}$$

▶ 1. *Nepieciešamība.* Pieņemsim, ka $S \subsetneq VG$ ir grafa G virsotņu pārklājums. Atzīmēsim, ka $\overline{S} \neq \emptyset$. Pieņemsim pretējo, ka $\overline{S}$ nav neatkarīga grafa G virsotņu kopa. Tad $|\overline{S}| \geq 2$ un eksistē kopas $\overline{S}$ divas dažādas virsotnes u un v, ka $e = \{u, v\}$ ir grafa G šķautne. Tā kā S grafa G virsotņu pārklājums, tad e ir incidenta kādai kopas S virsotnei. Tāpēc $u \in S$ vai $v \in S$, kas ir pretrunā ar to, ka $u, v \notin S$. Tātad pieņēmums nav patiess, un $\overline{S} = VG \setminus S$ ir neatkarīga virsotņu kopa.

Pietiekamība. Apskatīsim kopu $S \subsetneq VG$. Tad $\overline{S} \neq \emptyset$. Pieņemsim, ka $\overline{S}$ ir grafa G neatkarīga virsotņu kopa. Pieņemsim pretējo, ka S nav grafa G virsotņu pārklājums. Tad eksistē šķautne $e = \{u, v\}$, kas nav incidenta nevienai kopas S virsotnei. Tātad $u, v \notin S$ un līdz ar to $u, v \in \overline{S}$. Tādējādi kopas $\overline{S}$ virsotnes ir savienotas ar šķautni e, kas ir pretrunā ar kopas $\overline{S}$ neatkarību. Tātad pieņēmums nav patiess, un S ir grafa G virsotņu pārklājums.◀



18. zīm. Kopa $S = \{1; 4; 5; 7; 9\}$ ir grafa G vislielākā neatkarīgā virsotņu kopa, tāpēc $\alpha_v(G) = 5$.



19. zīm. Kopa $\overline{S} = VG \setminus S = \{2; 3; 6; 8\}$ ir grafa G vismazākais virsotņu pārklājums, tāpēc $\beta_v(G) = 4$.

5.1. piemērs. Ņemot vērā 5.1. teorēmu, iegūsim.

1. $\beta_v(O_n) = |VG| - \alpha_v(O_n) = n - n = 0.$
2. $\beta_v(K_{p,q}) = |VG| - \alpha_v(K_{p,q}) = (p + q) - \alpha_v(K_{p,q}) = (p + q) - \max\{p; q\} = \min\{p; q\}.$
3. $\beta_v(K_n) = |VG| - \alpha_v(K_n) = n - 1.$
4. Grafa G (skat. 18. zīm. vislielākā virsotņu kopa ir $S = \{1; 4; 5; 7; 9\}$ (18. zīm. virsotnes sarkanā krāsā), tāpēc

   $$\alpha_v(G) = 5.$$

   No 5.1. teorēmas izriet, ka $\overline{S} = VG \setminus S = \{2; 3; 6; 8\}$ ir grafa G vismazākais virsotņu pārklājums (19. zīm. virsotnes zaļā krāsā), tāpēc

   $$\beta_v(G) = |VG| - \alpha_v(G) = 9 - 5 = 4.$$