DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Neatkarīgas šķautņu kopas
Šķautņu pārklājumi

2020. gada 27. septembris

2020

Saturs

1. Neatkarīgas šķautņu kopas

Grafa G šķautņu kopas EG apakškopu T sauc par **neatkarīgu šķautņu kopu** vai **sapārojumu**, ja jebkuras divas šķautnes no T nav blakusšķautnes, t.i., $\{u;v\} \cap \{s;t\} = \emptyset$ jebkurām divām šķautnēm $\{u;v\}, \{s;t\} \in T$.

Sapārojumu $T \subset EG$ sauc par

✓ **maksimālu**, ja nav neviena cita sapārojuma $\widetilde{T} \subset EG$, kas satur T kā īstu apakškopu, citiem vārdiem sakot, sapārojumu $T \subset EG$ sauc par maksimālu, ja jebkuram sapārojumam $\widetilde{T} \subset EG$, ka $\widetilde{T} \supset T$, ir spēkā $\widetilde{T} = T$;

✓ **vislielāko**, ja tā elementu skaits ir vislielākais starp visiem sapārojumiem $\widetilde{T} \subset EG$, citiem vārdiem sakot, sapārojumu $T \subset EG$ sauc par vislielāko, ja jebkuram sapārojumam $\widetilde{T} \subset EG$ ir spēkā $|T| \geq |\widetilde{T}|$.

Par grafa G **šķautņu neatkarības skaitli** (vai **sapārojuma skaitli**) sauc vislielākā sapārojuma elementu skaitu; šo skaitli apzīmē ar $\alpha_e(G)$.

- *Ja $T \subset EG$ ir sapārojums, tad jebkura apakškopa $T_1 \subset T$ arī ir sapārojums.*
- *Jebkurš sapārojums $T \subset EG$ iekļaujas kādā maksimālā sapārojumā $T_1 \subset EG$.*
- *Sapārojums $T \subset VG$ ir maksimāls tad un tikai tad, kad, pievienojot tam jebkuru citu šķautni $e \in EG \setminus T$, iegūtā šķautņu kopa $\widehat{T} = T \cup \{e\}$ nav sapārojums.*
- *Ja $T \subset EG$ ir sapārojums, tad grafa G apakšgrafs H, kuru ir inducējusi šķautņu apakškopa $T \subset EG$, sastāv no $t = |T|$ komponentēm.*
- *Jebkurš vislielākais sapārojums grafā G ir maksimāls sapārojums šajā grafā. Apgriezts apgalvojums nav spēkā.*

! *Šķautņu kopa $T \subset EG$ ir grafa G sapārojums tad un tikai tad, kad $T \subset V\big(L(G)\big)$ ir neatkarīga virsotņu kopu grafa G šķautņu grafā $L(G)$. Tātad $\alpha_e(G) = \alpha_v\big(L(G)\big)$.*

- *Ja grafam G eksistē vismaz viena šķautne e (t.i., grafs G nav tukšais grafs), tad*

- *šķautņu kopa* $T = \{e\}$ *ir grafa sapārojums;*
- *šķautņu kopa* $T = \{e\}$ *iekļaujas kādā maksimālā sapārojumā* $T_1 \subset EG$*;*
- $\alpha_e(G) \geq 1$, *t.i., grafa* G *vislielākais sapārojums satur vismaz vienu šķautni.*

- $\alpha_e(G) = 0$ *tad un tikai tad, kad* G *ir tukšais grafs.*
- *Jebkuram grafam* G *ir spēkā nevienādības:*

$$0 \leq \alpha_e(G) \leq \frac{|VG|}{2}. \tag{1.1}$$

► Ja G ir tukšais grafs, tad $\alpha_e(G) = 0$. Šajā gadījumā nevienādības (1.1), acīmredzot, izpildās.

Pieņemsim, ka G nav vienāds ar tukšo grafu, t.i., grafam G eksistē šķautne e. Tad $\alpha_e(G) \geq 1$. Tagad apskatīsim vislielāko sapārojumu T, $|T| = \alpha_e(G)$. Tā kā katra šķautne no T ir incidenta divām virsotnēm un jebkurām divām šķautnēm no T nav kopīgu virsotņu, tad visu šķautnēm no T incidento virsotņu skaits nepārsniedz visu grafa G virsotņu skaitu:

$$\underbrace{2+2+\cdots+2}_{\alpha_e(G)} = 2\alpha_e(G) \le |VG|,$$

no kurienes izriet, ka $\alpha_e(G) \le \frac{|VG|}{2}$. Tādējādi jebkuram grafam G izpildās nevienādības (1.1).◄

- *Jebkuram netukšam grafam G ir spēkā nevienādības:*

$$1 \le \alpha_e(G) \le \frac{|VG|}{2}. \tag{1.2}$$

- *Ja T ir grafa G sapārojums, ka $|T| \ge \frac{|VG|}{2}$, tad $\alpha_e(G) = |T|$.*

► Atzīmēsim, ka $\alpha_e(G) \ge |T|$, jo $\alpha_e(G)$ ir vislielākā sapārojuma elementu skaits. Tāpēc

$$\alpha_e(G) \ge |T| \ge \frac{|VG|}{2} \ge \alpha_e(G),$$

no kurienes, ņemot vērā, ka $\alpha_e(G)$ un $|T|$ ir veseli skaitļi, iegūsim, ka $\alpha_e(G) = |T|$.◄

1.1. piemērs.

1. $\alpha_e(K_{p,q}) = \min\{p; q\}$.
2. $\alpha_e(K_{2n}) = n$.
3. $\alpha_e(K_{2n+1}) = n$.
4. Apskatīsim 1. zīm. attēloto grafu G.
   (a) Šķautņu kopa $T_1 = \{e_1; e_2; e_5\}$ (skat. 1. zīm.) nav sapārojums, jo šķautnēm e_1 un e_2 ir kopīga virsotne 3.
   (b) Šķautņu kopas

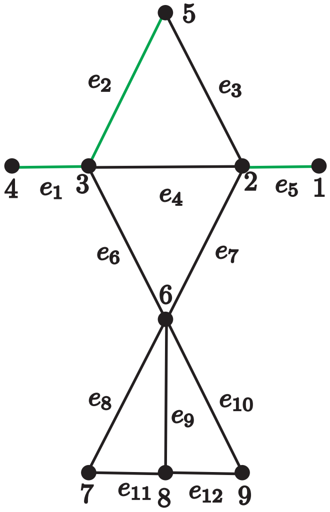
$$
\begin{aligned}
T_2 &= \{e_1; e_5\} && \text{(skat. 2. zīm.)},\\
T_3 &= \{e_1; e_5; e_9\} && \text{(skat. 3. zīm.)},\\
T &= \{e_1; e_3; e_8; e_{12}\} && \text{(skat. 4. zīm.)}
\end{aligned}
$$

   ir sapārojumi, pie tam
   i. T_2 nav maksimāls sapārojums, jo tas iekļaujas sapārojumā T_3 ar lielāku elementu skaitu;
   ii. $T_3 = \{e_1; e_5; e_9\}$ ir maksimāls sapārojums, jo, pievienojot tam jebkuru citu šķautni, iegūsim šķautņu

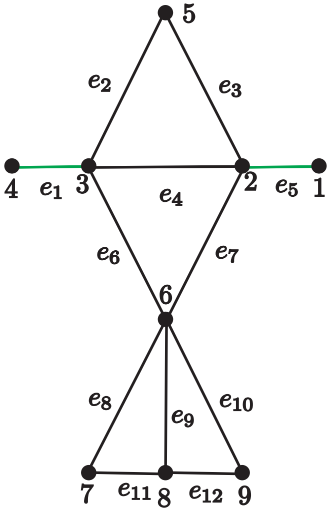
kopu, kas nav sapārojums; T_3 nav vislielākais sapārojums, jo eksistē sapārojums T ar lielāku elementu skaitu;

iii. T ir vislielākais sapārojums, jo jebkura šķautņu kopa, kas satur vismaz 5 šķautnes, nav sapārojums, tātad $\alpha_e(G) = 4$.

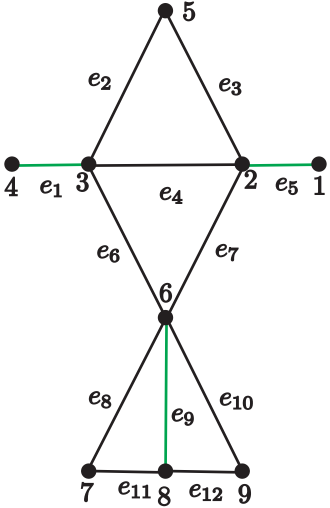
(c) Tā kā $T = \{e_1; e_3; e_8; e_{12}\} \subset EG$ ir vislielākais sapārojums grafā G, tad $T = \{e_1; e_3; e_8; e_{12}\} \subset V\big(L(G)\big)$ ir vislielākā neatkarīga virsotņu kopa grafa G šķautņu grafā $L(G)$ (skat. 6. zīm.), tāpēc $\alpha_v\big(L(G)\big) = 4$.



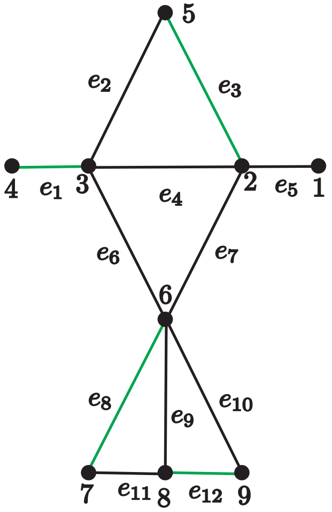
1. zīm. Grafa G šķautņu kopa $T_1 = \{e_1; e_2; e_5\}$ nav sapārojums.



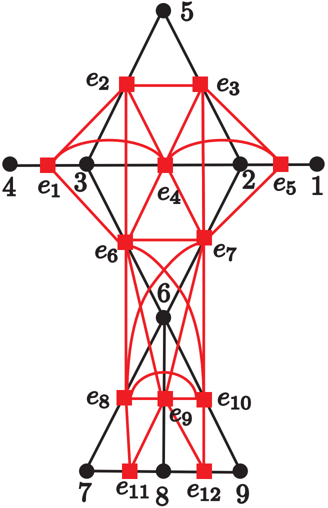
2. zīm. Grafa G šķautņu kopa $T_2 = \{e_1; e_5\}$ ir sapārojums, kas nav maksimāls.



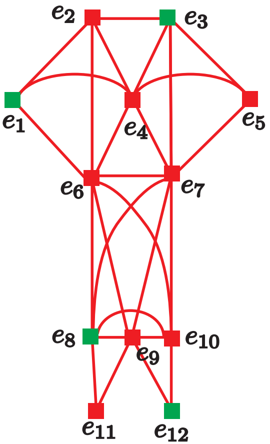
3. zīm. Grafa G šķautņu kopa $T_3 = \{e_1; e_5; e_9\}$ ir maksimāls (bet ne vislielākais) sapārojums.



4. zīm. Grafa G šķautņu kopa $T = \{e_1; e_3; e_8; e_{12}\}$ ir vislielākais sapārojums, $\alpha_e(G) = 4$.



5. zīm. Grafa G šķautņu grafs $L(G)$ (virsotnes un šķautnes sarkanā krāsā).



6. zīm. Grafa $L(G)$ virsotņu kopa

$T = \{e_1; e_3; e_8; e_{12}\}$ ir vislielākā neatkarīga virsotņu kopa,

2. Šķautņu pārklājumi

Grafa G šķautņu kopas EG apakškopu T sauc par **grafa G šķautņu pārklājumu**, ja kopas T šķautnes pārklāj visas grafa G virsotnes, t.i., jebkura grafa G virsotne ir incidenta kādai kopas T šķautnei.

Grafa G šķautņu pārklājumu sauc par

✓ **minimālu**, ja tas nesatur nevienu šķautņu pārklājumu ar mazāku elementu skaitu, citiem vārdiem sakot, šķautņu pārklājumu $T \subset EG$ sauc par minimālu, ja jebkuram šķautņu pārklājumam $\widetilde{T} \subset EG$, ka $\widetilde{T} \subset T$, ir spēkā $\widetilde{T} = T$;

✓ **vismazāko**, ja tā elementu skaits ir vismazākais starp visiem grafa G šķautņu pārklājumiem $\widetilde{T} \subset EG$, citiem vārdiem sakot, šķautņu pārklājumu $T \subset EG$ sauc par vismazāko, ja jebkuram šķautņu pārklājumam $\widetilde{T} \subset EG$ ir spēkā $|T| \leq |\widetilde{T}|$.

Par grafa G **šķautņu pārklājuma skaitli** sauc grafa G vismazākā šķautņu pārklājuma $T \subset EG$ elementu skaitu; šo skaitli apzīmē ar $\beta_e(G)$.

Grafa G sapārojumu $T \subset EG$ sauc par **pilnu sapārojumu**, ja sapārojums T ir grafa G šķautņu pārklājums.

! *Grafam G eksistē šķautņu pārklājums tad un tikai tad, kad tam nav izolētu virsotņu.*

Atgādināsim, ka

$$\alpha_v(G) + \beta_v(G) = |VG|, \tag{2.3}$$

t.i., grafa virsotņu skaits ir vienāds ar šī grafa virsotņu neatkarības skaitļa un virsotņu pārklājuma skaitļa summu. Līdzīga sakarība pastāv starp $\alpha_e(G)$ un $\beta_e(G)$.

2.1. teorēma. *Jebkuram grafam G bez izolētām virsotnēm ir spēkā vienādība*

$$\alpha_e(G) + \beta_e(G) = |VG|, \tag{2.4}$$

t.i., grafa virsotņu skaits ir vienāds ar šī grafa šķautņu neatkarības skaitļa un šķautņu pārklājuma skaitļa summu.

- *Jebkuram grafam G bez izolētām virsotnēm ir spēkā nevienādības*

$$\frac{|VG|}{2} \leq \beta_e(G) \leq |VG| - 1.$$

► Tiešām, tā kā grafam G nav izolētu virsotņu, tad G nav tukšais grafs. Tāpēc tam ir spēkā nevienādības (1.2):

$$1 \leq \alpha_e(G) \leq \frac{|VG|}{2}.$$

Ņemot vērā (2.4), iegūstam

$$1 \leq |VG| - \beta_e(G) \leq \frac{|VG|}{2}$$

jeb

$$\frac{|VG|}{2} \leq \beta_e(G) \leq |VG| - 1. \blacktriangleleft$$

- *Ja* $|T| = \mathrm{ceil}\left(\frac{|VG|}{2}\right)$, *tad* $\beta_e(G) = |T|$, *kur* $\mathrm{ceil}(x)$ *ir vismazākais veselais skaitlis, kas pārsniedz reālu skaitli* x.

► Atzīmēsim, ka $\beta_e(G) \leq |T|$, jo $\beta_e(G)$ vismazākā šķautņu pārklājuma elementu skaits. Tā kā

$$\beta_e(G) \geq \frac{|VG|}{2}, \quad \beta_e(G) \in \mathbb{Z},$$

bet T ir vismazākais veselais skaitlis, kas pārsniedz $\frac{|VG|}{2}$, tad $|T| \leq \beta_e(G)$. Tātad $\beta_e(G) \leq |T|$.◀

2.1. piemērs.

1. $\beta_e(K_{p,q}) = \left|V(K_{p,q})\right| - \alpha_e(K_{p,q}) = (p+q) - \min\{p;q\} = \max\{p;q\}$.
2. $\beta_e(K_{2n}) = \left|V(K_{2n})\right| - \alpha_e(K_{2n}) = 2n - n = n$.
3. $\beta_e(K_{2n+1}) = \left|V(K_{2n+1})\right| - \alpha_e(K_{2n+1}) = (2n+1) - n = n+1$.
4. Apskatīsim 7. zīm. attēloto grafu G.
   (a) Šķautņu kopa $T_1 = \{e_1; e_2; e_5; e_{11}; e_{12}\}$ (skat. 7. zīm.) nav grafa G šķautņu pārklājums, jo virsotne 6 nav incidenta nevienai kopas T šķautnei.
   (b) Šķautņu kopas

$$\begin{aligned} T_2 &= \{e_1; e_2; e_3; e_5; e_8; e_9; e_{10}\} && \text{(skat. 8. zīm.)}, \\ T_3 &= \{e_1; e_2; e_5; e_8; e_9; e_{10}\} && \text{(skat. 9. zīm.)}, \\ T &= \{e_1; e_2; e_5; e_{10}; e_{11}\} && \text{(skat. 10. zīm.)} \end{aligned}$$

ir grafa G šķautņu pārklājumi, pie tam

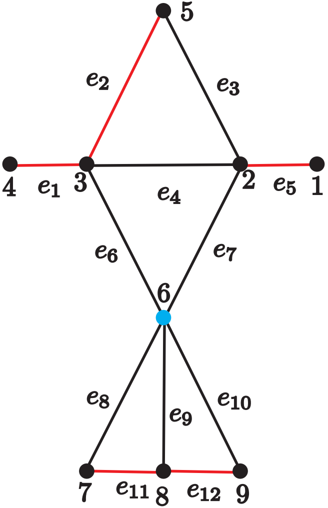
i. T_2 nav minimāls šķautņu pārklājums, jo tas satur šķautņu pārklājumu T_3 ar mazāku elementu skaitu;

ii. T_3 ir minimāls šķautņu pārklājums, jo, atņemot no tā jebkuru šķautni, iegūsim šķautņu kopu, kas nav šķautņu pārklājums; T_3 nav vismazākais šķautņu pārklājums, jo eksistē šķautņu pārklājums T ar mazāku elementu skaitu;

iii. T ir vismazākais šķautņu pārklājums, jo T ir tāds šķautņu pārklājums, ka

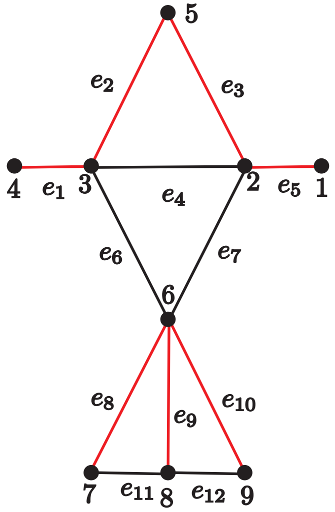
$$|T| = 5 = \mathrm{ceil}(4,5) = \mathrm{ceil}\left(\frac{|VG|}{2}\right),$$

tāpēc $\beta_e(G) = |T| = 5$; to, ka T ir vismazākais šķautņu pārklājums var pamatot arī šādi: tā kā grafa šķautņu neatkarības skaitlis $\alpha_e(G) = 4$ (grafa G vislielākais sapārojums $\{e_1; e_3; e_8; e_{11}\}$ ir attēlots 11. zīm.), tad grafa G šķautņu pārklājuma skaitlis $\beta_e(G) = 9 - \alpha_e(G) = 5$, bet T ir šķautņu pārklājums, kas sastāv no 5 šķautnēm, tāpēc T ir grafa G vismazākais šķautņu pārklājums.



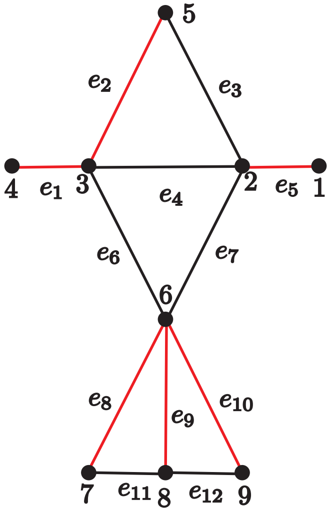
7. zīm. Grafa G šķautņu kopa

$T_1 = \{e_1; e_2; e_5; e_{11}; e_{12}\}$ nav grafa G šķautņu



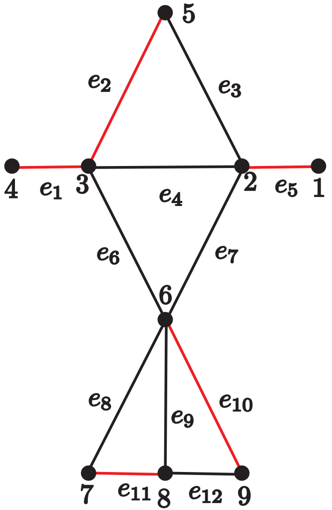
8. zīm. Grafa G šķautņu kopa

$T_2 = \{e_1; e_2; e_3; e_5; e_8; e_9; e_{10}\}$ ir grafa G šķautņu

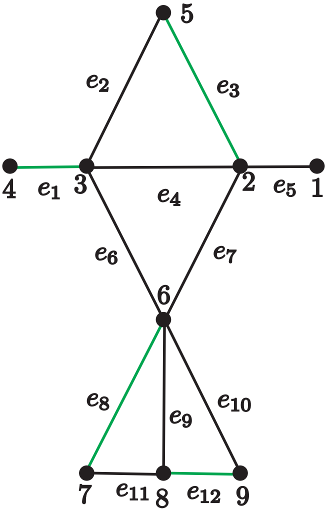


9. zīm. Grafa G šķautņu kopa

$T_3 = \{e_1; e_2; e_5; e_8; e_9; e_{10}\}$ ir grafa G minimāls (bet



10. zīm. Grafa G šķautņu kopa
$T = \{e_1; e_2; e_5; e_{10}; e_{11}\}$ ir vismazākais šķautņu



11. zīm. Grafa G šķautņu kopa $\{e_1; e_3; e_8; e_{10}\}$ ir vislielākais sapārojums, $\alpha_e(G) = 4$.