DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Sapārojumi divdaļu grafos

2020. gada 27. septembris

2020

Saturs

1. Uzdevums par precībām

Uzdevums par precībām. *Dots galīgs skaits jaunskungu, katrs no kuriem ir pazīstams ar zināmām jaunkundzēm. Vai* ***var*** *apprecināt* ***katru*** *no jaunskungiem ar* ***pazīstamu*** *viņam jaunkundzi (pieņemot, ka pastāv monogāmija)?*

Piemēram, ja jaunskungi (Jānis, Juris, Pēteris) ir pazīstami ar dažām no jaunkundzēm (Ivetu, Inesi, Vinetu, Annu):

Jaunskungi	Jaunkundzes, ar kurām ir pazīstams jaunskungs
Jānis	Iveta, Inese, Vineta
Juris	Iveta, Inese, Anna
Pēteris	Iveta, Inese, Anna

tad vai var apprecināt (pieņemot, ka pastāv monogāmija) katru no jaunskungiem (Jāni, Juri, Pēteri) ar pazīstamu viņam jaunkundzi (Ivetu, Inesi, Vinetu, Annu)?

2. Uzdevuma par precībām formulējums kombinatorikas terminos

Pieņemsim, ka $(Y_1; Y_2; \ldots; Y_m)$ ir galīgas kopas Y ($|Y| = n$) apakškopu sistēma.

Kortežu $T = (y_1; y_2; \ldots; y_m)$ sauc par kopu sistēmas $(Y_1; Y_2; \ldots; Y_m)$ **transversāli** (vai **dažādo pārstāvju sistēmu**), ja

a) $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2, \ldots, y_m \in Y_m$;

b) $y_i \neq y_j$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, \ldots, m)$.

Nosacījums, ka $m \leq n$, ir nepieciešams, lai kopu sistēmai eksistētu transversāle. Piemēram, ja

$$Y = \{1; 2\},\ Y_1 = \{1\},\ Y_2 = \{2\},\ Y_3 = \{1; 2\},$$

tad kopu sistēmai $(Y_1; Y_2; Y_3)$ neeksistē transversāles, jo $m = 3 > 2 = n$. *Nosacījums $m \leq n$ nav pietiekams, lai kopu sistēmai eksistētu transversāle.* Piemēram, ja

$$Y = \{1; 2; 3; 4\},\ Y_1 = \{1\},\ Y_2 = \{2\},\ Y_3 = \{1; 2\},$$

tad kopu sistēmai $(Y_1; Y_2; Y_3)$ neeksistē transversāles, kaut arī $m = 3 \leq 4 = n$.

Kopu sistēmas transversāles eksistences nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus izsaka nākamā teorēma.

2.1. teorēma. [Holla teorēma, 1935. g.] *Galīgas kopas Y ($|Y| = n$) apakškopu sistēmai $(Y_1; Y_2; \ldots; Y_m)$ eksistē transversāle tad un tikai tad, kad izpildās $2^m - 1$ nosacījumi:*

$$|Y_{i_1} \cup Y_{i_2} \cup \cdots \cup Y_{i_k}| \geq k \quad (1 \leq k \leq m), \tag{2.1}$$

citiem vārdiem sakot, jebkuru k ($1 \leq k \leq m$) kopu Y_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) apvienojums satur vismaz k dažādus elementus.

Formulēsim uzdevumu par precībām kombinatorikas terminos. Pieņemsim, ka

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_m\}$$

ir jaunskungu kopa, bet

$$Y = \{y_1; y_2; \ldots; y_m\}$$

ir jaunkundžu kopa, pie tam jaunskungam x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ pazīstamo jaunkundžu kopa ir $Y_i \subset Y$. Uzdevumu par precībām kombinatorikas terminos var formulēt šādi: *vai kopu sistēmai* $(Y_1; Y_2; \ldots; Y_m)$ *eksistē transversāle?* Nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus, lai kopu sistēmai $(Y_1; Y_2; \ldots; Y_m)$ eksistētu transversāle (un līdz ar to uzdevumam par precībām eksistētu atrisinājums), sniedz Holla teorēma. Jāatzīmē, ka Holla teorēmai galvenokārt ir teorētisks raksturs, jo praktiski to pielietot ir ļoti sarežģīti, piemēram, ja $m = 100$, tad ir jāpārbauda 2^{100} nosacījumus (2.1), atzīmēsim tikai, ka skaitlis 2^{100} sastāv no 31 cipara.

Apskatīsim uzdevuma par precībām piemēru. Apzīmēsim jaunskungus un jaunkundzes:

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Jānis} & \text{Juris} & \text{Pēteris} & \qquad & \text{Iveta} & \text{Inese} & \text{Vineta} & \text{Anna} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ x_1 & x_2 & x_3 & & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array}$$

Tad $X = \{x_1; x_2; x_3\}$ ir jaunskungu kopa, $Y = \{y_1; y_2; y_3; y_4\}$ ir jaunkundžu kopa, $(Y_1; Y_2; Y_3)$ ir kopas Y apakškopu sistēma, kur

$$Y_1 = \{y_1; y_2; y_3\}, \quad Y_2 = \{y_1; y_2; y_4\}, \quad Y_3 = \{y_1; y_2; y_4\}, \tag{2.2}$$

ir jaunskungiem x_1, x_2, x_3 pazīstamo jaunkundžu kopas. Kopu sistēmai $(Y_1; Y_2; Y_3)$ eksistē transversāle, piemēram, $T = \{1; 2; 4\}$. Par to liecina arī Holla teorēma:

$$|Y_1| = 3 \geq 1, \quad |Y_2| = 3 \geq 1, \quad |Y_3| = 3 \geq 1,$$
$$|Y_1 \cup Y_2| = 4 \geq 2, \quad |Y_1 \cup Y_3| = 4 \geq 2, \quad |Y_2 \cup Y_2| = 3 \geq 2,$$
$$|Y_1 \cup Y_2 \cup Y_3| = 4 \geq 3.$$

Holla teorēma nesniedz atbildi uz jautājumu: cik pavisam transversāļu ir dotajai kopu sistēmai? Atbilde uz šo jautājumu tiks sniegta nākamajā apakšparagrāfā.

3. Kopu sistēmas transversāļu skaits

Lai noskaidrotu visu kopu sistēmas (2.2) transversāļu skaitu, vispirms ir jāiepazīstas ar permanenta jēdzienu, kas ir radniecīgs determinanta jēdzienam.

Aplūkosim taisnstūrveida $m \times n$ $(m \le n)$ matricu

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

Par **matricas C permanentu** sauc skaitli

$$\operatorname{per} A = \sum a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot \ldots \cdot a_{mk_m}, \tag{3.3}$$

kur summēšana notiek pa visām m-variācijām

$$(k_1; k_2; \ldots; k_m)$$

bez atkārtojumiem pamatkopā $\{1; 2; \ldots; n\}$. Tā kā visu m-variāciju $(k_1; k_2; \ldots; k_m)$ bez atkārtojumiem pamatkopā $\{1; 2; \ldots; n\}$ skaits ir vienāds ar $A_m^n = \frac{n!}{(n-m)!}$, tad summa vienādības (3.3) labajā pusē sastāv no $\frac{n!}{(n-m)!}$ saskaitāmajiem.

Par **kopu sistēmas** $(Y_1; Y_2; \ldots; Y_m)$ **incidences matricu** sauc $m \times n$ matricu $C = (c_{ij})$, kur

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad y_j \in Y_i, \\ 0 & \text{ja} \quad y_j \notin Y_i; \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

3.1. teorēma. *Galīgas kopas Y $(|Y| = n)$ apakškopu sistēmas*

$$(Y_1; Y_2; \ldots; Y_m)$$

visu transversāļu skaits ir vienāds ar šīs kopu sistēmas incidences matricas permanentu $\operatorname{per} C$.

Atgriezīsimies pie uzdevuma par precībām ilustrējošā piemēra. Tā kā

$$\begin{array}{llll} y_1 \in Y_1, & y_2 \in Y_1, & y_3 \in Y_1, & y_4 \notin Y_1, \\ y_1 \in Y_2, & y_2 \in Y_2, & y_3 \notin Y_2, & y_4 \in Y_2, \\ y_1 \in Y_3, & y_2 \in Y_3, & y_3 \notin Y_3, & y_4 \in Y_3, \end{array}$$

tad kopu sistēmas $(Y_1; Y_2; Y_3)$ incidences matrica ir

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lai atrastu šīs matricas permanentu, vispirms uzrakstīsim visas

$$A_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

3-variācijas $(k_1; k_2; k_3)$ bez atkārtojumiem pamatkopā $\{1; 2; 3; 4\}$:

$$\begin{array}{cccc}
(1;2;3), & (1;2;4), & (1;3;4), & (2;3;4), \\
(1;3;2), & (1;4;2), & (1;4;3), & (2;4;3), \\
(2;1;3), & (2;1;4), & (3;1;4), & (3;2;4), \\
(2;3;1), & (2;4;1), & (3;4;1), & (3;4;2), \\
(3;1;2), & (4;1;2), & (4;1;3), & (4;2;3), \\
(3;2;1), & (4;2;1), & (4;3;1), & (4;3;2),
\end{array}$$

kuru komponentes kalpos par permanenta 24 saskaitāmajos

$$a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot a_{3k_3}$$

ietilpstošo reizinātāju

$$a_{1k_1}, a_{2k_2}, a_{3k_3}$$

otrajiem indeksiem. Atrodam:

$$\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{\operatorname{per} C =} \\
= \underline{c_{11}c_{22}c_{33}}+ & c_{11}c_{22}c_{34}+ & \underline{c_{11}c_{23}c_{34}}+ & \underline{c_{12}c_{23}c_{34}}+ \\
+ \underline{c_{11}c_{23}c_{32}}+ & c_{11}c_{24}c_{32}+ & \underline{c_{11}c_{24}c_{33}}+ & \underline{c_{12}c_{24}c_{33}}+ \\
+ \underline{c_{12}c_{21}c_{33}}+ & c_{12}c_{21}c_{34}+ & c_{13}c_{21}c_{34}+ & c_{13}c_{22}c_{34}+ \\
+ \underline{c_{12}c_{23}c_{31}}+ & c_{12}c_{24}c_{31}+ & c_{13}c_{24}c_{31}+ & c_{13}c_{24}c_{32}+ \\
+ c_{13}c_{21}c_{32}+ & \underline{c_{14}c_{21}c_{32}}+ & \underline{c_{14}c_{21}c_{33}}+ & \underline{c_{14}c_{22}c_{33}}+ \\
+ c_{13}c_{22}c_{31}+ & \underline{c_{14}c_{22}c_{31}}+ & \underline{c_{14}c_{23}c_{31}}+ & \underline{c_{14}c_{23}c_{32}} = \\
= c_{13}c_{21}c_{32}+ & c_{13}c_{22}c_{31}+ & c_{11}c_{22}c_{34}+ & c_{11}c_{24}c_{32}+ \\
+ c_{12}c_{21}c_{34}+ & c_{12}c_{24}c_{31}+ & c_{13}c_{21}c_{34}+ & c_{13}c_{24}c_{31}+ \\
+ c_{13}c_{22}c_{34}+ & c_{13}c_{24}c_{32} = & &
\end{array}$$

$= 10.$

Formulā pasvītrotie saskaitāmie ir vienādi ar nulli, savukārt 10 nenulles saskaitāmajos $a_{1k_1} \cdot a_{2k_2} \cdot a_{3k_3}$ ietilpstošo reizinātāju $a_{1k_1}, a_{2k_2}, a_{3k_3}$ otrie indeksi norāda dotās kopu sistēmas transversāles:

$$\begin{array}{llll} (y_3; y_1; y_2), & (y_3; y_2; y_1), & (y_1; y_2; y_4), & (y_1; y_4; y_2), \\ (y_2; y_1; y_4), & (y_2; y_4; y_1), & (y_3; y_1; y_4), & (y_3; y_4; y_1), \\ (y_3; y_2; y_4), & (y_3; y_4; y_2). & & \end{array}$$

Tādējādi pavisam ir iespējami 10 dažādi precību varianti:

	Jānis	Juris	Pēteris
1.	Vineta	Iveta	Inese
2.	Vineta	Inese	Iveta
3.	Iveta	Inese	Anna
4.	Iveta	Anna	Inese
5.	Inese	Iveta	Anna
6.	Inese	Anna	Iveta
7.	Vineta	Iveta	Anna
8.	Vineta	Anna	Iveta
9.	Vineta	Inese	Anna
10.	Vineta	Anna	Inese

Uzdevumu par precībām vispārina uzdevums par harēmiem[1].

[1] В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сарванов, Р.И. Тышкевич. Лекции по теории графов. - Москва: "Наука 1990.

4. Uzdevuma par precībām formulējums grafu teorijas valodā

Apskatīsim divdaļu grafu $(X; Y; E)$, kura viena daļa ir

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_m\}$$

(jaunskungi), otra daļa ir

$$Y = \{y_1; y_2; \ldots; y_n\}$$

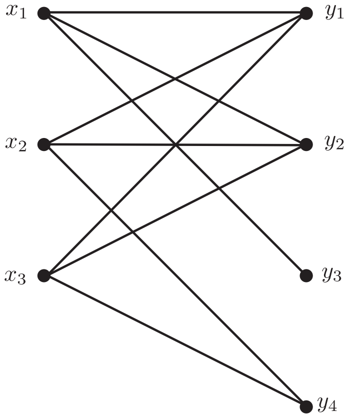
(jaunkundzes), bet šķautņu kopa E tiek izveidota šādi: virsotnes x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ un y_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ir blakusvirsotnes tad un tikai tad, kad jaunskungs x_i ir pazīstams ar jaunkundzi y_j. Uzdevums par precībām grafu teorijas valodā skan šādi: *vai divdaļu grafā* $(X; Y; E)$ *eksistē sapārojums, kas pārklāj*[2] *visas kopas* X *virsotnes?*

Atbildi uz pēdējo jautājumu sniedz Holla teorēmai ekvivalenta teorēma.

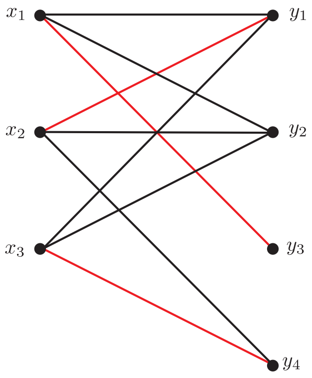
[2]T.i., jebkurai virsotnei $u \in X$ eksistē šķautne $e \in E$, ka virsotne u ir incidenta šķautnei e.

4.1. teorēma. *Divdaļu grafā $G = (X; Y; E)$ eksistē sapārojums, kas pārklāj visas kopas X virsotnes, tad un tikai tad, kad jebkurai kopas X netukšai apakškopai A ir spēkā nevienādība $|A| \leq \big|N(A)\big|$, kur $N(A)$ ir virsotņu kopas A apkārtne grafā G.*

Divdaļu grafs $(X; Y; E)$, kas atbilst uzdevuma par precībām ilustrācijai, ir attēlots 1. zīm. Savukārt 2. zīm. ir attēlots kopu sistēmas $(Y_1; Y_2; Y_3)$ transversālei $(3; 1; 4)$ atbilstošais grafa $(X; Y; E)$ sapārojums $T = \big\{\{x_1; y_3\}; \{x_2; y_1\}; \{x_3; y_4\}\big\}$, kas pārklāj kopas $X = \{x_1; x_2; x_3\}$ virsotnes.



1. zīm. Divdaļu grafs $(X; Y; E)$, kas atbilst uzdevumam par precībām.



2. zīm. Transversālei $(3; 1; 4)$ atbilstošais grafa $(X; Y; E)$ sapārojums, kas pārklāj kopas X virsotnes.

5. Uzdevums par norīkojumiem

Uzdevums par norīkojumiem. Doti darbu izpildītāji $x_1, x_2, \ldots, x_n$, katrs no kuriem var izpildīt dažus no darbiem $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Darba veikšanas izmaksa ir $w_{ij} > 0$, ja izpildītājs x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) veic darbu y_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). *Vai var sadalīt darbus starp izpildītājiem tā, lai izpildītu visus darbus ar pēc iespējas mazākām izmaksām (viens izpildītājs nevar veikt vairākus darbus)?*

Apskatīsim divdaļu grafu $G = (X; Y; E; w)$ ar svariem:

- grafa G viena daļa ir $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ (izpildītāji),
- grafa G otra daļa ir $Y = \{y_1; y_2; \ldots; y_n\}$ (darbi),
- virsotnes x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) un y_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) ir blakusvirsotnes grafā G (t.i., $e_{ij} = x_i y_j \in E$) tad un tikai tad, kad izpildītājs x_i veic darbu y_j,
- ja $e_{ij} = x_i y_j \in E$, tad par šķautnes e_{ij} svaru pieņem w_{ij}.

Uzdevums par norīkojumiem grafu teorijas valodā skan šādi: *divdaļu* *grafā* $G = (X; Y; E; w)$ *ar svariem atrast vismazākā svara pilnu sapārojumu.*

6. Pilni sapārojumi divdaļu grafos

Nepieciešamos un pietiekamos nosacījumus, lai divdaļu grafā eksistētu pilns sapārojums, izsaka nākamā teorēma.

6.1. teorēma. *Divdaļu grafā $G = (X; Y; E)$ eksistē pilns sapārojums tad un tikai tad, kad $|X| = |Y|$ un jebkurai kopas X netukšai apakškopai A ir spēkā nevienādība $|A| \le \big|N(A)\big|$.*

► *Nepieciešamība.* Pieņemsim, ka T ir pilns sapārojums grafā G. Tad no 4.1. teorēmas izriet, ka jebkurai kopas X netukšai apakškopai A ir spēkā nevienādība $|A| \le \big|N(A)\big|$. Apskatīsim likumu $f : X \to Y$, ka

$$X \ni x \overset{f}{\mapsto} y \in Y \text{ tad un tikai tad, kad } \{x; y\} \in T. \qquad (6.4)$$

Pierādīsim, ka likums f ir bijekcija.

- Tā kā sapārojums T ir pilns, tad katram $x \in X$ eksistē $y \in Y$, ka $\{x; y\} \in T$, tāpēc $x \overset{f}{\mapsto} y$.
- Tā kā T ir sapārojums, tad katram $x \in X$ eksistē *vienīgs* $y \in Y$, ka $\{x; y\} \in T$, jo pretējā gadījumā, ja $\{x; y'\} \in T$ un $\{x; y''\} \in$

T, kur $y' \neq y''$, tad T nebūtu sapārojums. Tātad likums f ir attēlojums.

- Ja $x', x'' \in X$ $(x' \neq x'')$, tad arī $f(x') = y' \neq y'' = f(x'')$, jo pretējā gadījumā, ja $y' = y''$, t.i., $\{x'; y'\} \in T$ un $\{x''; y'\} \in T$, tad T nebūtu sapārojums. Tātad attēlojums f ir injekcija.
- Ja eksistētu tāda virsotne $y \in X$, ka $\{x; y\} \notin T$ nevienai virsotnei no X, tad iegūtu pretrunu ar to, ka sapārojums T ir pilns. Tātad attēlojums f ir sirjekcija.

Tā kā $f : X \to Y$ ir bijekcija, tad $|X| = |Y|$.

Pietiekamība. Tā kā jebkurai kopas X netukšai apakškopai A ir spēkā nevienādība $|A| \leq \big|N(A)\big|$, tad no 4.1. teorēmas izriet, ka T ir sapārojums, kas pārklāj visas kopas X virsotnes. Pieņemsim, ka $|X| = |Y|$. Apskatīsim likumu $f : X \to Y$, ka ir spēkā (6.4).

- Tā kā sapārojums T pārklāj visas kopas X virsotnes, tad katram $x \in X$ eksistē $y \in Y$, ka $\{x; y\} \in T$, tāpēc $x \overset{f}{\mapsto} y$.
- Tā kā T ir sapārojums, tad katram $x \in X$ eksistē *vienīgs* $y \in Y$, ka $\{x; y\} \in T$, jo pretējā gadījumā, ja $\{x; y'\} \in T$ un $\{x; y''\} \in$

T, kur $y' \neq y''$, tad T nebūtu sapārojums. Tātad likums f ir attēlojums.

- Ja $x', x'' \in X$ $(x' \neq x'')$, tad arī $f(x') = y' \neq y'' = f(x'')$, jo pretējā gadījumā, ja $y' = y''$, t.i., $\{x'; y'\} \in T$ un $\{x''; y'\} \in T$, tad T nebūtu sapārojums. Tātad attēlojums f ir injekcija.
- Tā kā $|X| = |Y|$ un attēlojums f ir injekcija, tad f ir sirjekcija.

Tā kā $f : X \to Y$ ir bijekcija, tad jebkurai virsotnei $y \in Y$ eksistē virsotne $x \in X$, ka $f(x) = y$, t.i., $e = \{x; y\} \in T$, t.i., šķautne $e \in T$, kas pārklāj virsotni y. Tātad sapārojums T pārklāj visas kopas Y virsotnes. Tā kā saskaņā ar doto sapārojums T pārklāj visas kopas X virsotnes, tad sapārojums T pārklāj visas grafa G virsotnes.◀

Tātad uzdevumam par norīkojumiem eksistē atrisinājums tad un tikai tad, kad jebkurai kopas X netukšai apakškopai A ir spēkā nevienādība $|A| \leq \big|N(A)\big|$, citiem vārdiem sakot, jebkuri k $(1 \leq k \leq n)$ izpildītāji kopā prot veikt ne mazāk kā k darbus. Atzīmēsim, ka, ja divdaļu grafam eksistē pilns sapārojums, tad, protams, tam eksistē vismazākā svara pilns sapārojums, jo pilnu sapārojums skaits dotajā grafā ir galīgs.

7. Uzdevums par dejām

Uzdevums par dejām. *Deju ballē piedalās 300 vīrieši un sievietes, pie tam katrs no vīriešiem ir pazīstams tieši ar 50 sievietēm, bet katra sieviete ir pazīstama tieši ar 50 vīriešiem (pazīšanās ir abpusēja). Pierādīt, ka var sastādīt deju pārus tā, lai katrā deju pārī būtu pazīstami vīrietis un sieviete un visi 300 deju balles dalībnieki dejotu.*

Apskatīsim divdaļu grafu $G = (X; Y; E)$, kur X ir sieviešu kopa, Y ir vīriešu kopa, pie tam $\{x; y\} \in T$ $(x \in X,\ y \in Y)$ tad un tikai tad, kad vīrietis x ir pazīstams ar sievieti y. Saskaņā ar nosacījumu katras grafa G virsotnes pakāpe ir vienāda ar 50, t.i., G ir regulārs divdaļu grafs, un tāpēc $|X| = |Y|$. Uzdevums par dejām grafu teorijas valodā skan šādi: *vai regulārā divdaļu grafā $G = (X; Y; E)$ eksistē pilns sapārojums?*

8. Pilni sapārojumi regulāros divdaļu grafos

8.1. teorēma. *Jebkurā netukšā regulārā divdaļu grafā $G = (X; Y; E)$ vienmēr eksistē pilns sapārojums.*

▶ Pieņemsim, ka katras grafa G virsotnes pakāpe ir vienāda ar k ($k \geq 1$). Apskatīsim patvaļīgu netukšu kopu $A \subset X$. Visām kopas A virsotnēm incidento šķautņu skaits ir vienāds ar $k \cdot |A|$. Katras šādas šķautnes virsotnes, kas pieder Y, pakāpe ir vienāda ar k. Tāpēc

$$N(A) \geq \frac{k \cdot |A|}{k} = |A|.$$

Bez tam regulāra divdaļu grafa $G = (X; Y; E)$ daļām X un Y ir viens un tas pats elementu skaits, t.i., $|X| = |Y|$. No 6.1. teorēmas izriet, ka grafā G eksistē pilns sapārojums.◀

No pierādītās teorēmas izriet, ka uzdevumam par dejām vienmēr eksistē atrisinājums.

9. Skaitļu α_u, α_e, β_u un β_e saistība divdaļu grafos

Atgādināsim, ka

- jebkuram grafam G ir spēkā

$$\alpha_v(G) + \beta_v(G) = |VG|,$$

  t.i., grafa virsotņu skaits ir vienāds ar šī grafa virsotņu neatkarības skaitļa un virsotņu pārklājuma skaitļa summu;

- jebkuram grafam G bez izolētām virsotnēm ir spēkā vienādība

$$\alpha_e(G) + \beta_e(G) = |VG|,$$

  t.i., grafa virsotņu skaits ir vienāds ar šī grafa šķautņu neatkarības skaitļa un šķautņu pārklājuma skaitļa summu.

Izrādās, ka divdaļu grafā daži no skaitļiem α_u, α_e, β_u un β_e sakrīt.

9.1. teorēma.

1. *Jebkurā divdaļu grafā* $G = (X; Y; E)$ *ir spēkā vienādība*

$$\beta_v(G) = \alpha_e(G), \tag{9.5}$$

t.i., divdaļu grafa G *virsotņu pārklājuma skaitlis ir vienāds ar tā šķautņu neatkarības skaitli.*

2. *Jebkurā divdaļu grafā* $G = (X; Y; E)$ *bez izolētām virsotnēm ir spēkā vienādība*

$$\alpha_v(G) = \beta_e(G), \tag{9.6}$$

t.i., divdaļu grafa G *bez izolētām virsotnēm virsotņu neatkarības skaitlis ir vienāds ar tā šķautņu pārklājuma skaitli.*