

*DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE*  
*Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte*  
*Fizikas un matemātikas katedra*

**Armands Gricāns**

*Diskrētā matemātika*

**Kraskala metode**

*2022. gada 11. septembris*

*2022*

# Saturs

1. Kraskala metode minimālā svara parciālkoka atrašanai 4
2. Kraskala metode maksimālā svara parciālkoka atrašanai 24

*Kraskala metode ļauj atrast minimālā  
(maksimālā) svāra parciālkoku dotajā  
sakarīgajā grafā ar svāriem.*

# 1. Kraskala metode minimālā svara parciālkoka atrašanai

1956. gadā Dž. Kraskals (*J.B. Kruskal*) piedāvāja metodi, kas ļauj sakarīgā grafā  $G$  ( $|G| = n \geq 2$ ) ar svariem atrast parciālkoku ar minimālo svaru. Grafa  $G$  šķautnes sakārtosim virknē  $S : e_1, e_2, \dots, e_m$  to svaru augšanas secībā:  $w(e_1) \leq w(e_2) \leq \dots \leq w(e_m)$ .

**Kraskala metode.** Izveidosim grafu virkni  $T_1, T_2, \dots, T_{n-1}$ , secīgi aplūkojot virknes  $S$  šķautnes.

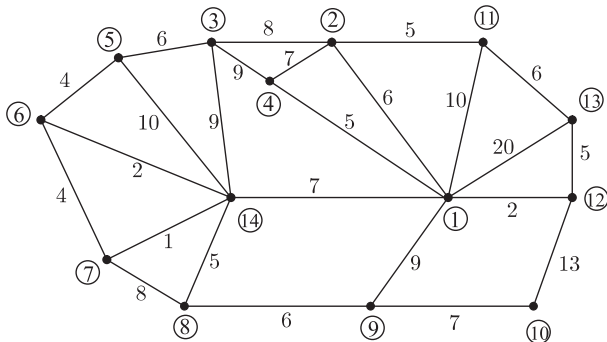
1. Apskatām grafu  $T_1 = O_n + e_1$ , pievienojot tukšajam grafam  $O_n$  virknes  $S$  pirmo šķautni  $e_1$ . Šķautni  $e_1$  izsvītrojam no virknes  $S$ .
2. Pieņemsim, ka grafs  $T_i$  ( $i \geq 1$ ) ir jau iegūts, bet  $e_j$  ir pirmā neizsvītrotā šķautne virknē  $S$ .
  - (a) Ja šķautne  $e_j$  **neveido** ciklus ar grafa  $T_i$  šķautnēm, tad apskatām grafu  $T_{i+1} = T_i + e_j$ . Šķautni  $e_j$  izsvītrojam no virknes  $S$ .

- (b) Ja šķautne  $e_j$  **veido** ciklus ar grafa  $T_i$  šķautnēm, tad šķautni  $e_j$  izsvītrojam no virknes  $S$ .
3. Ja  $i < n - 1$ , tad pārejam pie 2. punkta. Ja  $i = n - 1$ , tad  $T_{n-1}$  ir grafa  $G$  parciālkoks ar minimālo svaru.

Tātad Kraskala metodes katrā solī tiek izvēlēta šķautne ar minimālo svaru, kura neveido ciklus ar jau iepriekš izvēlētajām šķautnēm. Līdz ar to Kraskala metodes katrā solī tiek izveidots aciklisks grafs (t.i., grafs bez cikliem) jeb mežs.

*Var pierādīt, ka ar Kraskala metodi vienmēr nonāksim pie grafa  $G$  parciālkoka ar minimālo svaru.*

Lietojot Kraskala metodi, atradīsim grafa  $G$  (skat. 1. zīm.) parciālkoku ar minimālo svaru.



1. zīm.

Grafa  $G$  šķautnes (to ir 25) un to svāri:

10	9	5	3	8	8	3	14	3	7	5	6	2
12	10	6	14	14	9	2	1	4	14	14	7	11
13	7	4	9	5	6	8	7	9	1	10	4	5
2	11	7	6	1	4	1	2	1	1	13	5	
4	13	8	14	9	1	13	1	11	12	12	3	
7	6	8	2	9	5	20	6	10	2	5	6	

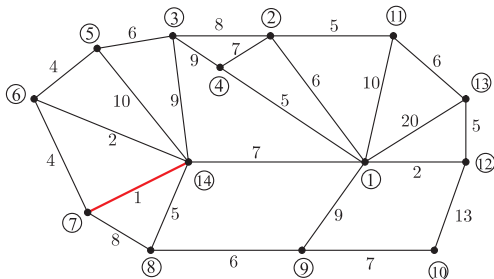
Sakārtosim grafa  $G$  šķautnes virknē  $S$  to svaru augšanas secībā:

7	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
14	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
1	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	13	20	

1. *solis.* Apskatām virknes  $S$  pirmo šķautni  $\{7; 14\}$  un izveidojam grafu  $T_1 = O_{14} + \{7; 14\}$ . Šķautni  $\{7; 14\}$  (līdz ar tās svaru) izvītrojam no virknes  $S$ :

<b>7</b>	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
<b>14</b>	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
<b>1</b>	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	13	20	

Grafa  $T_1$  svars ir  $0 + 1 = 1$ .



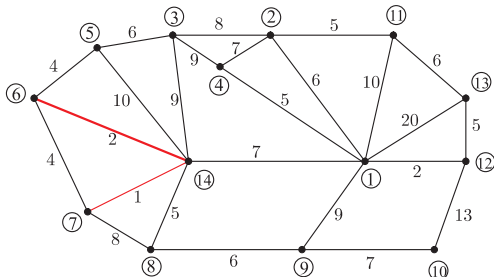
2. zīm.



2. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{6; 14\}$ . Šķautne  $\{6; 14\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_1$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_2 = T_1 + \{6; 14\}$ . Šķautni  $\{6; 14\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

7	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
14	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
1	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	13	20	

Grafa  $T_2$  svars ir  $1 + 2 = 3$ .

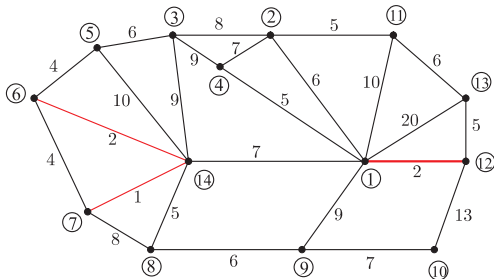


3. zīm.

3. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītroto virknes  $S$  šķautni  $\{1; 12\}$ . Šķautne  $\{1; 12\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_2$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_3 = T_2 + \{1; 12\}$ . Šķautni  $\{1; 12\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojam no virknes  $S$ :

7	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
14	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
1	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	13	20	

Grafa  $T_3$  svars ir  $3 + 2 = 5$ .

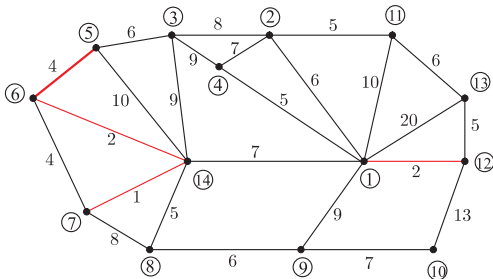


4. zīm.

4. *solis.* Apskatām pirmo neizsvīrotu virknes  $S$  šķautni  $\{5; 6\}$ . Šķautne  $\{5; 6\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_3$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_4 = T_3 + \{5; 6\}$ . Šķautni  $\{5; 6\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojam no virknes  $S$ :

7	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
14	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
1	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	13	20	

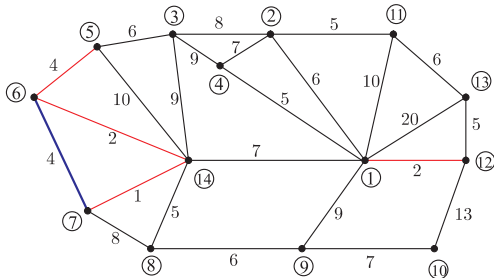
Grafa  $T_4$  svars ir  $5 + 4 = 9$ .



5. zīm.

5. *solis.* Apskatām pirmo neizsvīrotu virknes  $S$  šķautni  $\{6; 7\}$ . Šķautne  $\{6; 7\}$  *veido* ciklu ar grafa  $T_4$  šķautnēm. Šķautni  $\{6; 7\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojam no virknes  $S$ :

7	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
14	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
1	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	13	20	

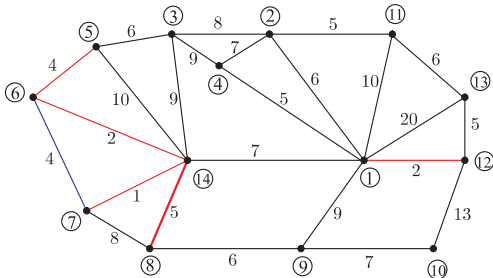


6. zīm.

6. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{8; 14\}$ . Šķautne  $\{8; 14\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_4$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_5 = T_4 + \{8; 14\}$ . Šķautni  $\{8; 14\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

7	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
14	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
1	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	9	10	10	13	20

Grafa  $T_5$  svars ir  $9 + 5 = 14$ .

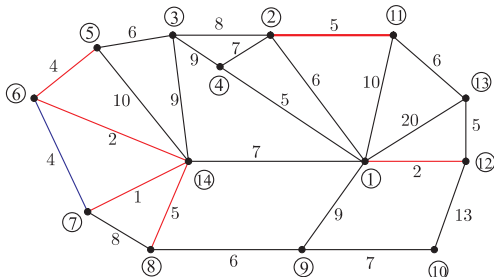


7. zīm.

7. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{2; 11\}$ . Šķautne  $\{2; 11\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_5$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_6 = T_5 + \{2; 11\}$ . Šķautni  $\{2; 11\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

7	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
14	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
1	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	9	10	10	13	20

Grafa  $T_6$  svars ir  $14 + 5 = 19$ .

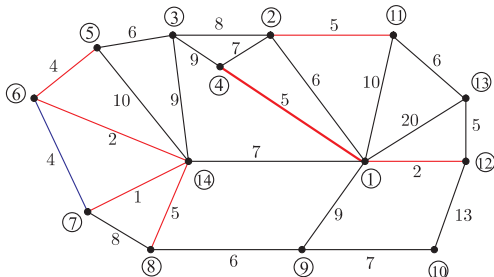


8. zīm.

8. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{4; 1\}$ . Šķautne  $\{4; 1\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_6$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_7 = T_6 + \{4; 1\}$ . Šķautni  $\{4; 1\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

7	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
14	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
1	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	13	20	

Grafa  $T_7$  svars ir  $19 + 5 = 24$ .



9. zīm.

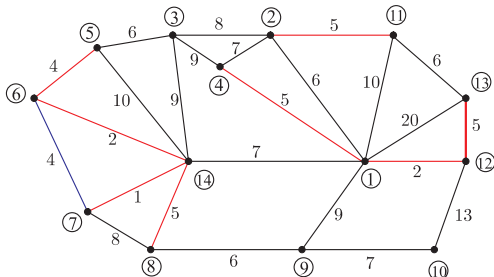
9. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītroto virknes  $S$  šķautni  $\{13; 12\}$ . Šķautne  $\{13; 12\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_7$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_8 = T_7 + \{13; 12\}$ . Šķautni  $\{13; 12\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojam no virknes  $S$ :

7	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
14	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
1	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6

9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	13	20	

Grafa  $T_8$  svars ir  $24 + 5 = 29$ .



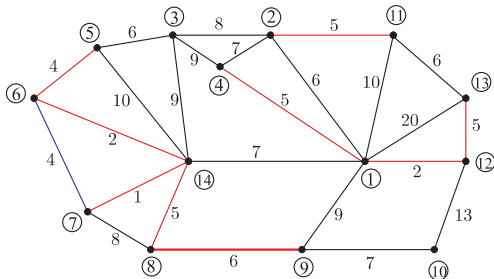
10. zīm.



10. *solis*. Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{8; 9\}$ . Šķautne  $\{8; 9\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_8$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_9 = T_8 + \{8; 9\}$ . Šķautni  $\{8; 9\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojam no virknes  $S$ :

7	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
14	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
1	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	13	20	

Grafa  $T_9$  svars ir  $29 + 6 = \mathbf{35}$ .

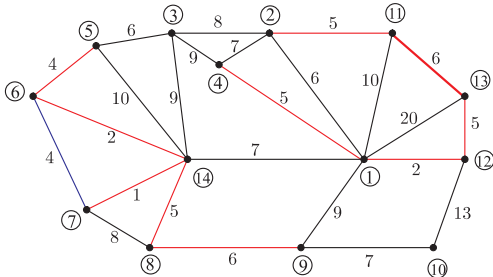


11. zīm.

11. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītroto virknes  $S$  šķautni  $\{11; 13\}$ . Šķautne  $\{11; 13\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_9$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_{10} = T_9 + \{11; 13\}$ . Šķautni  $\{11; 13\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojam no virknes  $S$ :

7	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
14	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
1	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	13	20	

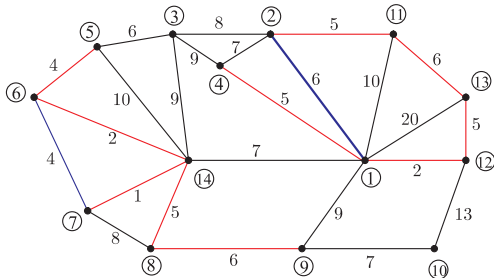
Grafa  $T_{10}$  svars ir  $35 + 6 = 41$ .



12. zīm.

12. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{2; 1\}$ . Šķautne  $\{2; 1\}$  *veido* ciklu ar grafa  $T_{10}$  šķautnēm. Šķautni  $\{2; 1\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

7	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
14	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
1	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	13	20	



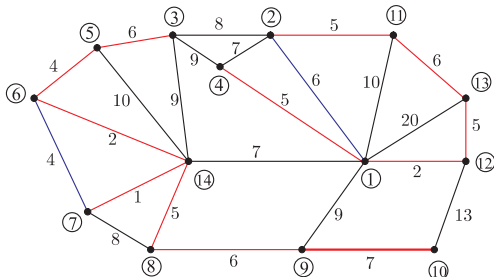
13. zīm.



14. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{9; 10\}$ . Šķautne  $\{9; 10\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_{11}$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_{12} = T_{11} + \{9; 10\}$ . Šķautni  $\{9; 10\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

7	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
14	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
1	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	13	20	

Grafa  $T_{12}$  svars ir  $47 + 7 = 54$ .

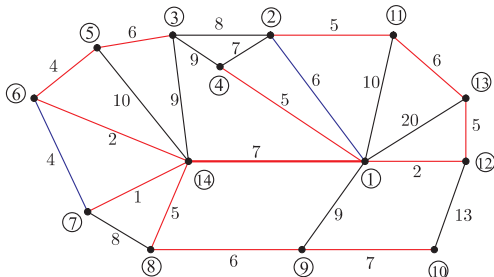


15. zīm.

15. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{14; 1\}$ . Šķautne  $\{14; 1\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_{12}$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_{13} = T_{12} + \{14; 1\}$ . Šķautni  $\{14; 1\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

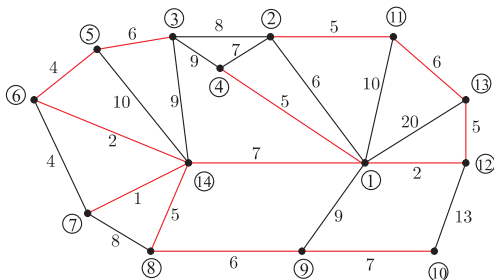
7	6	1	5	6	8	2	4	13	8	11	2	5
14	14	12	6	7	14	11	1	12	9	13	1	3
1	2	2	4	4	5	5	5	5	6	6	6	6
9	14	2	3	7	3	3	1	5	1	10	1	
10	1	4	2	8	14	4	9	14	11	12	13	
7	7	7	8	8	9	9	9	10	10	13	20	

Grafa  $T_{13}$  svars ir  $54 + 7 = 61$ .



16. zīm.

Tā kā grafa  $T_{13}$  indekss 13 ir par 1 mazāks nekā grafa  $G$  virsotņu skaits, tad metodes darbu beidzam. **Grafs  $T_{13}$  ir minimālā svara parciālkoks dotajā grafā  $G$ . Parciālkoka  $T_{13}$  svars ir 61.**



17. zīm.

## 2. Kraskala metode maksimālā svara parciālkoka atrašanai

Ja sakārtot šķautnes to svaru dilšanas secībā, tad Kraskala metode ļauj atrast maksimālā svara parciālkoku dotajā grafā ar svariem.

Lietojot Kraskala metodi, atradīsim grafa  $G$  (skat. 1. zīm.) parciālkoku ar maksimālo svaru.



Grafa  $G$  šķautnes (to ir 25) un to svari:

10	9	5	3	8	8	3	14	3	7	5	6	2
12	10	6	14	14	9	2	1	4	14	14	7	11
13	7	4	9	5	6	8	7	9	1	10	4	5
2	11	7	6	1	4	1	2	1	1	13	5	
4	13	8	14	9	1	13	1	11	12	12	3	
7	6	8	2	9	5	20	6	10	2	5	6	

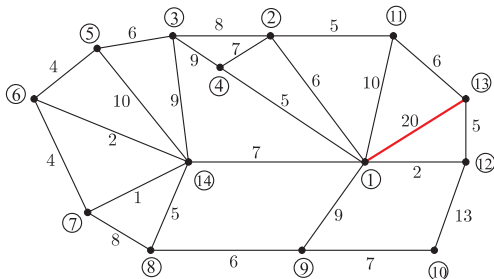
Sakārtosim grafa  $G$  šķautnes virknē  $S$  to svaru dilšanas secībā:

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

1. *solis.* Apskatām virknes  $S$  pirmo šķautni  $\{1; 13\}$  un izveidojam grafu  $T_1 = O_{14} + \{1; 13\}$ . Šķautni  $\{1; 13\}$  (līdz ar tās svaru) izvītrojam no virknes  $S$ :

<b>1</b>	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
<b>13</b>	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
<b>20</b>	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

Grafa  $T_1$  svars ir  $0 + 20 = 20$ .

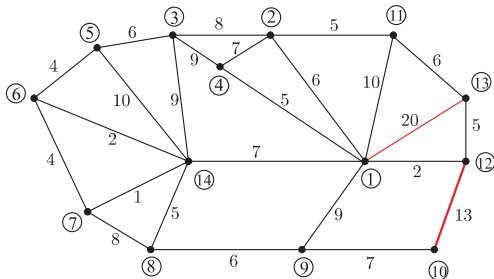


18. zīm.

2. solis. Apskatām pirmo neizsvītroto virknes  $S$  šķautni  $\{10; 12\}$ . Šķautne  $\{10; 12\}$  neveido ciklus ar grafa  $T_1$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_2 = T_1 + \{10; 12\}$ . Šķautni  $\{10; 12\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojam no virknes  $S$ :

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

Grafa  $T_2$  svars ir  $20 + 13 = 33$ .

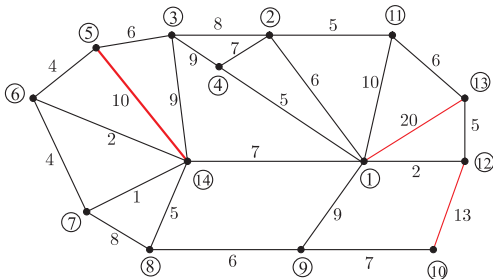


19. zīm.

3. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{5; 14\}$ . Šķautne  $\{5; 14\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_2$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_3 = T_2 + \{5; 14\}$ . Šķautni  $\{5; 14\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

Grafa  $T_3$  svars ir  $33 + 10 = 43$ .

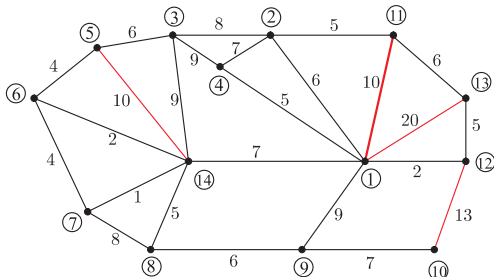


20. zīm.

4. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{1; 11\}$ . Šķautne  $\{1; 11\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_3$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_4 = T_3 + \{1; 11\}$ . Šķautni  $\{1; 11\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

Grafa  $T_4$  svars ir  $43 + 10 = 53$ .

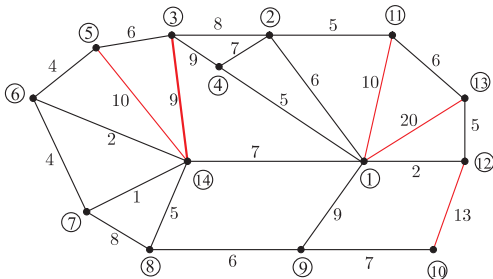


21. zīm.

5. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{3; 14\}$ . Šķautne  $\{3; 14\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_4$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_5 = T_4 + \{3; 14\}$ . Šķautni  $\{3; 14\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

Grafa  $T_5$  svars ir  $53 + 9 = 62$ .

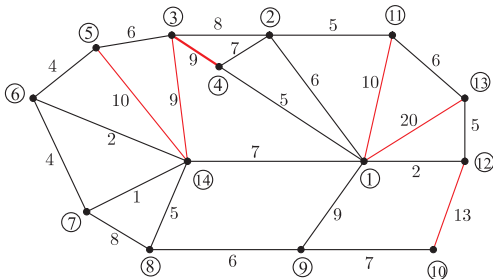


22. zīm.

6. *solis.* Apskatām pirmo neizsvīrotu virknes  $S$  šķautni  $\{3; 4\}$ . Šķautne  $\{3; 4\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_5$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_6 = T_5 + \{3; 4\}$ . Šķautni  $\{3; 4\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojam no virknes  $S$ :

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

Grafa  $T_6$  svars ir  $62 + 9 = 71$ .

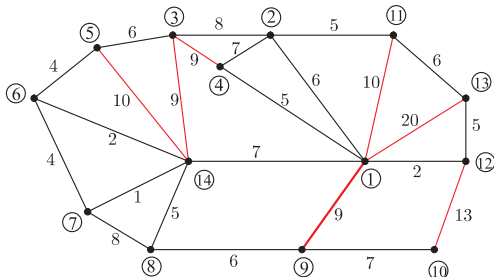


23. zīm.

7. *solis.* Apskatām pirmo neizsvīrotu virknes  $S$  šķautni  $\{1; 9\}$ . Šķautne  $\{1; 9\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_6$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_7 = T_6 + \{1; 9\}$ . Šķautni  $\{1; 9\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojam no virknes  $S$ :

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

Grafa  $T_7$  svars ir  $71 + 9 = 80$ .



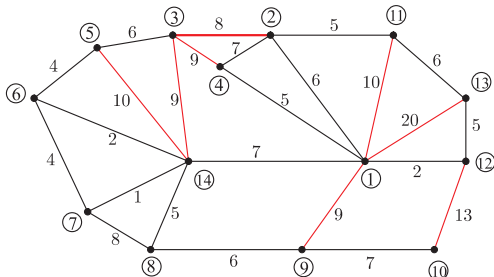
24. zīm.



8. *solis.* Apskatām pirmo neizsvīrotu virknes  $S$  šķautni  $\{3; 2\}$ . Šķautne  $\{3; 2\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_7$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_8 = T_7 + \{3; 2\}$ . Šķautni  $\{3; 2\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojam no virknes  $S$ :

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

Grafa  $T_8$  svars ir  $80 + 8 = 88$ .

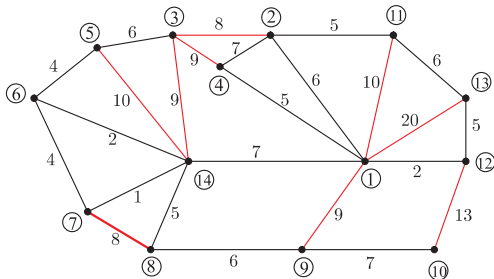


25. zīm.

9. *solis.* Apskatām pirmo neizsvīrotu virknes  $S$  šķautni  $\{7; 8\}$ . Šķautne  $\{7; 8\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_8$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_9 = T_8 + \{7; 8\}$ . Šķautni  $\{7; 8\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojam no virknes  $S$ :

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

Grafa  $T_9$  svars ir  $88 + 8 = 96$ .

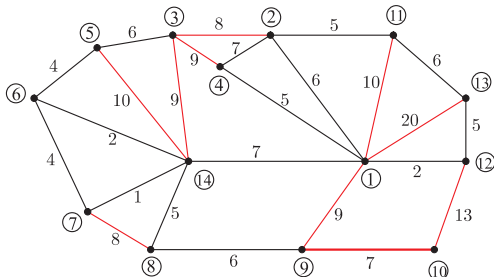


26. zīm.

10. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{9; 10\}$ . Šķautne  $\{9; 10\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_9$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_{10} = T_9 + \{9; 10\}$ . Šķautni  $\{9; 10\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

Grafa  $T_{10}$  svars ir  $96 + 7 = 103$ .

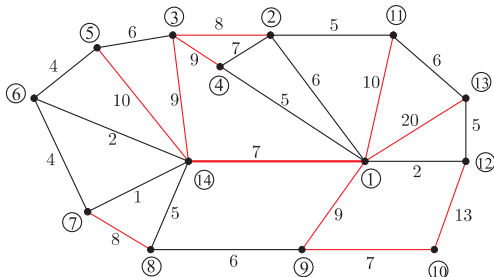


27. zīm.

11. *solis*. Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{14; 1\}$ . Šķautne  $\{14; 1\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_{10}$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_{11} = T_{10} + \{14; 1\}$ . Šķautni  $\{14; 1\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

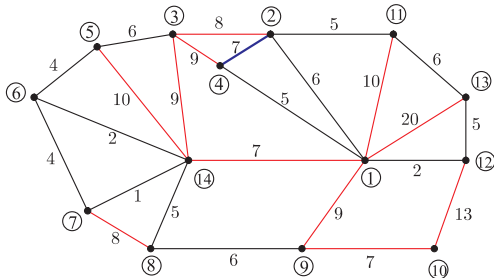
Grafa  $T_{11}$  svars ir  $103 + 7 = 110$ .



28. zīm.

12. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{2; 4\}$ . Šķautne  $\{2; 4\}$  *veido* ciklus ar grafa  $T_{11}$  šķautnēm. Šķautni  $\{2; 4\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

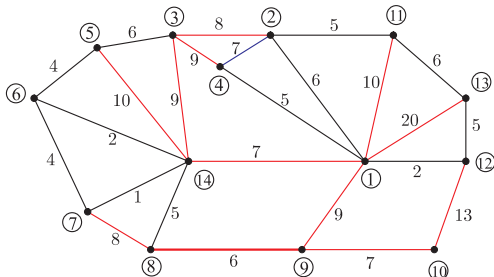


29. zīm.

13. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{8;9\}$ . Šķautne  $\{8;9\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_{11}$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_{12} = T_{11} + \{8;9\}$ . Šķautni  $\{8;9\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

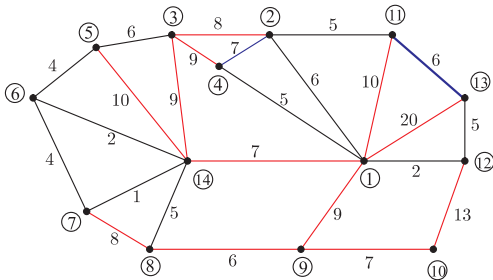
Grafa  $T_{12}$  svars ir  $110 + 6 = 116$ .



30. zīm.

14. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītroto virknes  $S$  šķautni  $\{11;13\}$ . Šķautne  $\{11;13\}$  *veido* ciklus ar grafa  $T_{12}$  šķautnēm. Šķautni  $\{11;13\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojam no virknes  $S$ :

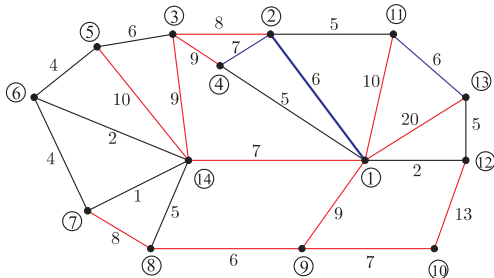
1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	



31. zīm.

15. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{2; 1\}$ . Šķautne  $\{2; 1\}$  *veido* ciklus ar grafa  $T_{12}$  šķautnēm. Šķautni  $\{2; 1\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

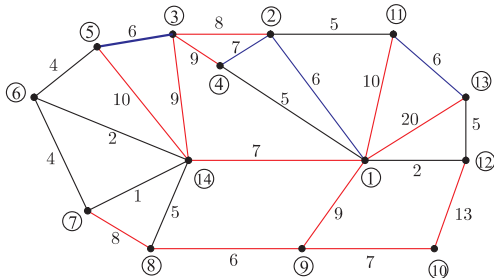


32. zīm.



16. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{5; 3\}$ . Šķautne  $\{5; 3\}$  *veido* ciklus ar grafa  $T_{12}$  šķautnēm. Šķautni  $\{5; 3\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

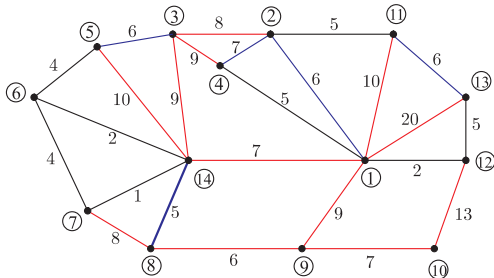
1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	



33. zīm.

17. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{8; 14\}$ . Šķautne  $\{8; 14\}$  *veido* ciklus ar grafa  $T_{12}$  šķautnēm. Šķautni  $\{8; 14\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

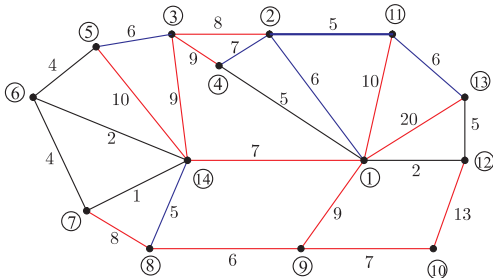
1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	



34. zīm.

18. *solis*. Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{2; 11\}$ . Šķautne  $\{2; 11\}$  *veido* ciklus ar grafa  $T_{12}$  šķautnēm. Šķautni  $\{2; 11\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojam no virknes  $S$ :

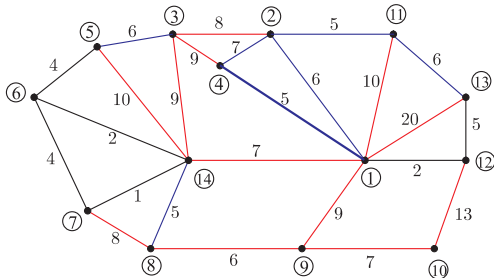
1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	



35. zīm.

19. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{4; 1\}$ . Šķautne  $\{4; 1\}$  *veido* ciklus ar grafa  $T_{12}$  šķautnēm. Šķautni  $\{4; 1\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojām no virknes  $S$ :

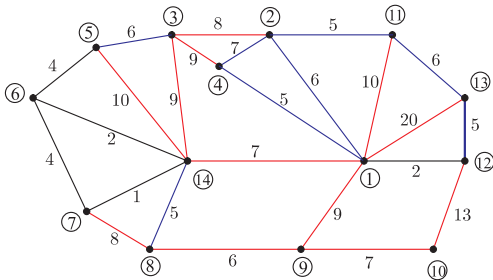
1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	



36. zīm.

20. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītroto virknes  $S$  šķautni  $\{13; 12\}$ . Šķautne  $\{13; 12\}$  *veido* ciklus ar grafa  $T_{12}$  šķautnēm. Šķautni  $\{13; 12\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītrojam no virknes  $S$ :

1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

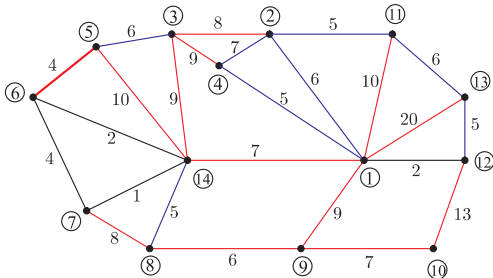


37. zīm.

21. *solis.* Apskatām pirmo neizsvītoto virknes  $S$  šķautni  $\{5; 6\}$ . Šķautne  $\{5; 6\}$  *neveido* ciklus ar grafa  $T_{12}$  šķautnēm. Izveidojam grafu  $T_{13} = T_{12} + \{5; 6\}$ . Šķautni  $\{5; 6\}$  (līdz ar tās svaru) izsvītogram no virknes  $S$ :

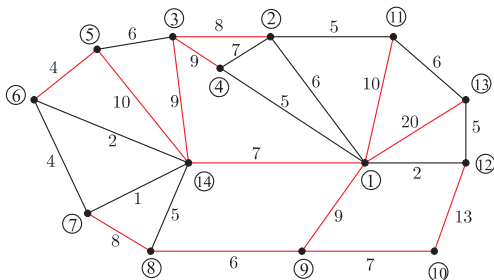
1	10	5	1	3	3	1	3	7	9	14	2	8
13	12	14	11	14	4	9	2	8	10	1	4	9
20	13	10	10	9	9	9	8	8	7	7	7	6
11	2	5	8	2	4	13	5	6	6	1	7	
13	1	3	14	11	1	12	6	7	14	12	14	
6	6	6	5	5	5	5	4	4	2	2	1	

Grafa  $T_{13}$  svars ir  $116 + 4 = 120$ .



38. zīm.

Tā kā grafa  $T_{13}$  indekss 13 ir par 1 mazāks nekā grafa  $G$  virsotņu skaits, tad metodes darbu beidzam. **Grafs  $T_{13}$  ir maksimālā svara parciālkoks dotajā grafā  $G$ . Parciālkoka  $T_{13}$  svars ir 120.**



39. zīm.