DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

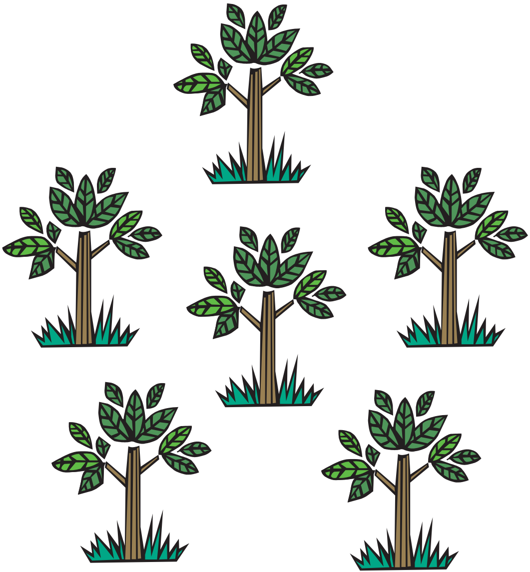
Diskrētā matemātika

Ievads koku teorijā

2024. gada 15. oktobris

2024

Saturs



1. Koka un meža definīcija

Šajā tēmā ar cikliem sapratīsim tikai ciklus, kas satur vismaz vienu šķautni. Par **koku** sauc sakarīgu grafu, kurā nav ciklu. Par **aciklisku grafu** vai **mežu** sauc grafu, kurā nav ciklu.

- *Jebkurš koks ir mežs, bet ne katrs mežs ir koks.*
- *Meža komponentes ir koki.*

1.1. teorēma. *Pieņemsim, ka G ir $(n;m)$-grafs. Šādi apgalvojumi ir ekvivalenti.*

1. *G ir koks.*
2. *G ir sakarīgs grafs un $m = n - 1$.*
3. *G ir grafs bez cikliem un $m = n - 1$.*
4. *Jebkuras divas dažādas grafa G virsotnes savieno vienīgā vienkāršā ķēde.*
5. *G ir grafs bez cikliem, kuram piemīt šāda īpašība: ja savienot kādas divas grafa G virsotnes, kas nav blakusvirsotnes, ar šķautni, tad iegūtais grafs saturēs vienu un tikai vienu ciklu.*
6. *G ir sakarīgs grafs, kura katra šķautne ir tilts.*

Sekas. *Jebkuram kokam G ar vismaz divām virsotnēm eksistē vismaz divas galavirsotnes.*

▶ Pieņemsim, ka $VG = \{u_1; u_2; \ldots; u_n\}$, bet $d_i = \deg u_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $n \geq 2$). Pieņemsim pretējo, ka galavirsotņu skaits ir mazāks par 2. Tad ir iespējami tikai divi gadījumi.

1. Kokam G nav galavirsotņu. Tā kā koks G ir sakarīgs grafs, tad visu tā virsotņu pakāpes ir lielākas par 1. Ņemot vērā, ka kokam G nav galavirsotņu, secinām, ka $d_i \geq 2$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Tāpēc
$$\sum_{i=1}^{n} d_i \geq 2n.$$
Saskaņā ar Lemmu par rokaspiedieniem un 1.1. teorēmu
$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|EG| = 2(n-1).$$
Tātad $2(n-1) \geq 2n$. Ieguvām pretrunu, jo saskaņā ar pieņēmumu $n \geq 2$.

2. Kokam G ir tikai viena galavirsotne. Noteiktības labad pieņemsim, ka $\deg u_1 = 1$. Tā kā koks G ir sakarīgs grafs, tad visu tā virsotņu pakāpes ir lielākas par 1. Ņemot vērā, ka kokam G nav galavirsotņu, secinām, ka $d_i \geq 2$ ($i = 2, \ldots, n$). Tāpēc

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 1 + \underbrace{2 + 2 + \cdots + 2}_{n-1} = 1 + 2(n-1) > 2(n-1).$$

Saskaņā ar Lemmu par rokaspiedieniem un 1.1. teorēmu

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|EG| = 2(n-1).$$

Tātad $2(n-1) > 2n$. Ieguvām pretrunu.

Abos iespējamos gadījumos ieguvām pretrunu. Tātad pieņēmums nav patiess, un kokam G ($|G| \geq 2$) eksistē vismaz divas galavirsotnes.◀

Koku, kuram ir iezīmēta viena virsotne, kuru sauc par **sakni**, sauc par **sakņotu koku**.

1.2. teorēma. **[Kēli teorēma]** *Visu iezīmēto koku ar n virsotnēm skaits ir n^{n-2}.*

Tā kā no katra iezīmēta koka ar n virsotnēm var iegūt n sakņotus iezīmētus kokus, tad no Kēli teorēmas izriet, ka *visu iezīmēto sakņoto koku ar n virsotnēm skaits ir n^{n-1}.*

Virsotņu skaits n	1	2	3	4	5	6	7
Iezīmēto grafu ar n virsotnēm skaits $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$	1	2	8	64	1024	32768	2097152
Neiezīmēto grafu ar n virsotnēm skaits	1	2	4	11	34	156	1044
Neiezīmēto koku ar n virsotnēm skaits	1	1	1	2	3	6	11
Neiezīmēto sakņoto koku ar n virsotnēm skaits	1	1	2	4	9	20	48
Iezīmēto koku ar n virsotnēm skaits n^{n-2}	1	1	3	16	125	1296	16807
Iezīmēto sakņoto koku ar n virsotnēm skaits n^{n-1}	1	2	9	64	625	7776	117649

2. Neiezīmēti koki

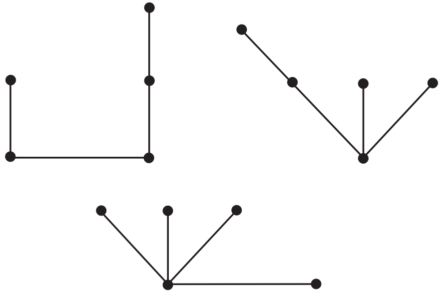
Neiezīmēti koki ar 1 virsotni

Neiezīmēti koki ar 2 virsotnēm

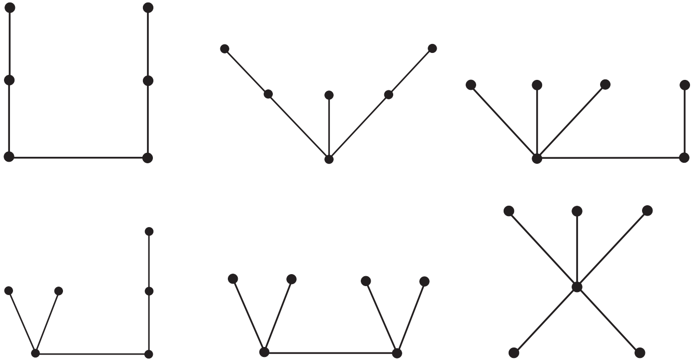
Neiezīmēti koki ar 3 virsotnēm

Neiezīmēti koki ar 4 virsotnēm

Neiezīmēti koki ar 5 virsotnēm



Neiezīmēti koki ar 6 virsotnēm

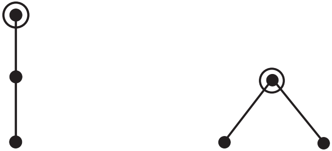


3. Neiezīmēti sakņoti koki

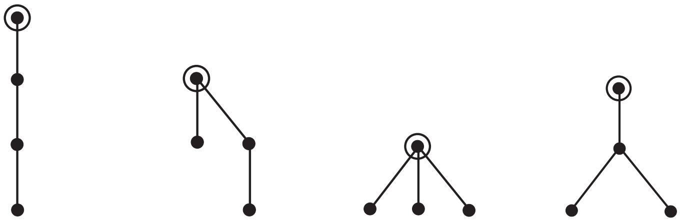
Neiezīmēts sakņots koks ar 1 virsotni

Neiezīmēts sakņoti koks ar 2 virsotnēm

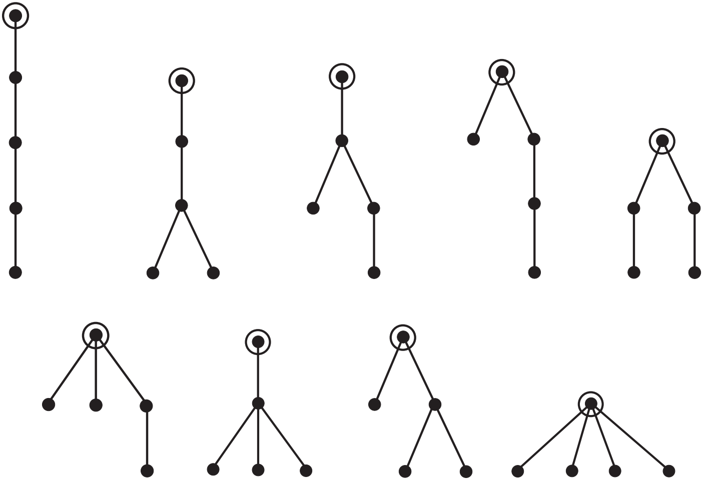
Neiezīmēti sakņoti koki ar 3 virsotnēm



Neiezīmēti sakņoti koki ar 4 virsotnēm



Neiezīmēti sakņoti koki ar 5 virsotnēm

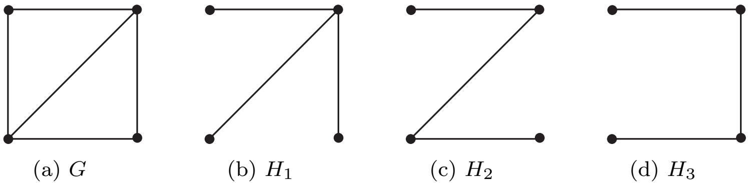


4. Karkass

Grafa G apakšgrafu H sauc par **grafa G karkasu** vai **parciālmežu**, ja

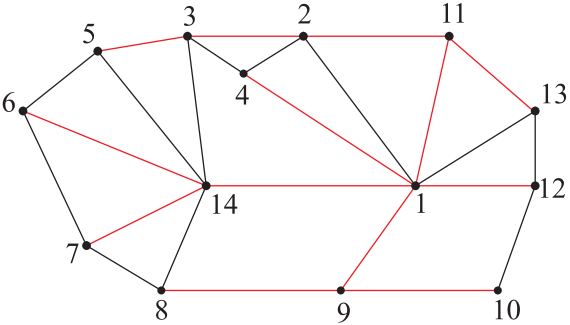
1. grafs H ir grafa G karkasveida apakšgrafs (t.i., $VH = VG$ - grafiem H un G ir viena un tā pati virsotņu kopa);
2. grafs H ir mežs.

Sakarīga grafa G karkasu H sauc par **grafa G parciālkoku**, t.i., H ir koks un vienlaicīgi grafa G karkasveida apakšgrafs.

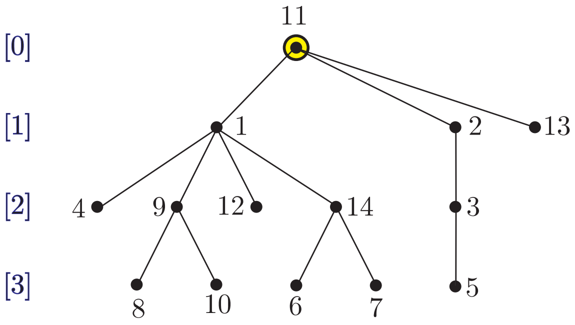


1. zīm. Grafs G un tā parciālkoki H_i $(i = 1, 2, 3)$.

Izpildot pārlasi plašumā grafā G (skat. paragrāfu "Pārlase plašumā neorientētos grafos"), tika atrasts arī grafa G parciālkoks H (2. zīm. parciālkoka H šķautnes sarkanā krāsā). Atgādināsim, ka parciālkoka virsotņu kopa sakrīt ar grafa G virsotņu kopu, bet koka H virsotne u ir blakusvirsotne ar v $(u \neq v)$, ja virsotni v ieguva iezīmi, apskatot virsotnes u apkārtni (skat. arī 2. zīm.).



2. zīm.



3. zīm.

5. Parciālkoks ar minimālu svaru

Uzdevums par elektropārvades līniju projektēšanu. Dotās apdzīvotās vietas ir jāsavieno ar elektropadeves līnijām tā, lai

1. jebkuras divas apdzīvotās būtu savienotas ar elektropadeves līniju vai nu pa tiešo, vai arī caur citām apdzīvotām vietām.
2. šo līniju garumu summa būtu vismazākā.

Pieņemsim, ka G ir sakarīgs grafs ar svariem, bet H ir grafa G parciālkoks. Par **parciālkoka H svaru** sauc tā šķautņu svaru summu. Saka, ka **grafa G parciālkokam H ir minimālais svars**, ja parciālkoka H svars ir vismazākais starp visu grafa G parciālkoku svariem.

Ja apdzīvoto vietu skaits ir n, tad grafu teorijas valodā šo uzdevumu var formulēt šādi: *pilnajā grafā K_n ar svariem atrast parciālkoku ar minimālo svaru.*

Saskaņā ar Kēli teorēmu pilnais grafs K_n satur n^{n-2} parciālkoku, tāpēc, lai atrisinātu uzdevumu par elektropārvades līniju projektēšanu ar pārlases metodi, būtu jāsastopas ar ļoti sarežģītiem izskaitļojumiem.

Nākamajos paragrāfos apskatīsim metodes (Kraskala un Prīmas), kas ļauj atrisināt šo uzdevumu, veicot ievērojami mazāk izskaitļojumu.