DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Hamiltona grafi

2022. gada 1. oktobris

2022

Saturs

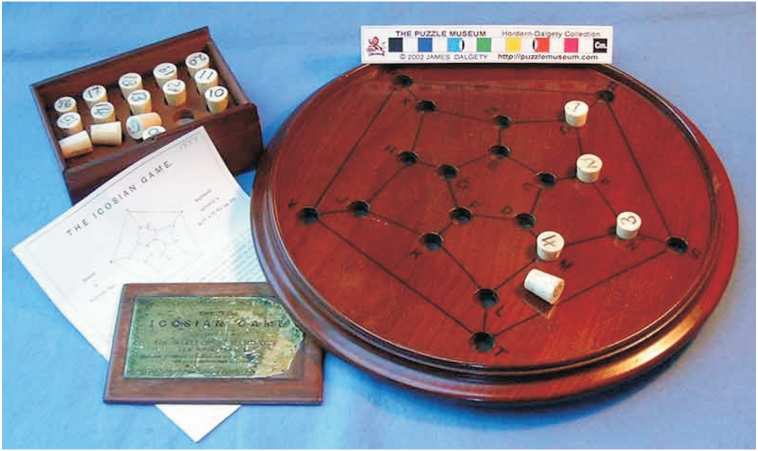
1. Uzdevumi, kas noved pie Hamiltona grafiem

1.1. Hamiltona uzdevums "Ceļojums apkārt pasaulei"

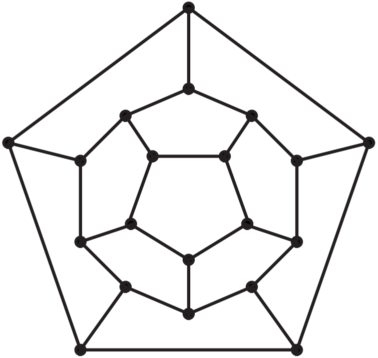
1859. gadā īru matemātiķis V. Hamiltons piedāvāja saistošu uzdevumu "Ceļojums apkārt pasaulei" (skat. 2. zīm.): jāatrod tāds ceļojuma maršruts starp dodekaedra virsotnēm (skat. 3. zīm.), katrai no kurām ir piekārtota kāda pasaulslavena pilsēta, tā, lai katra no šīm pilsētām tiktu apmeklēta tieši vienu reizi un ceļojums beigtos tajā pilsētā, kurā šis ceļojums tika uzsākts. Viens no iespējamiem ceļojuma maršrutiem ir uzrādīts 4. zīm.

Uzdevumu "Ceļojums apkārt pasaulei" matemātiski var formulēt šādi: *vai dotajā grafā eksistē vienkāršs cikls, kas satur visas dotā grafa virsotnes?*

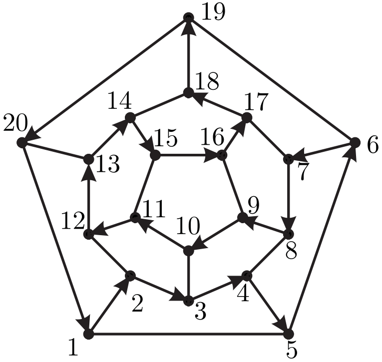
1. zīm. Viljams Hamiltons (*William Rowan Hamilton*, 1805 – 1865) - īru matemātiķis, fiziķis un astronoms, kurš sniedzis nozīmīgu ieguldījumu optikā, dinamikā un algebrā. Kvarternioni, iespējams, ir viņa vislabāk pazīstamākais izgudrojums. Viņs izgudroja spēli, kuru var atrisināt, lietojot Hamiltona cikla jēdzienu.



2. zīm. Hamiltona spēle "Ceļojums apkārt pasaulei", attēls ņemts no Interneta resursa [3]



3. zīm. Dodekaedra grafs



4. zīm. Hamiltona cikls dodekaedra grafā

1.2. Eilera uzdevums par šaha zirdziņu

Atzīmēsim arī šādu saistošu uzdevumu: *vai var ar šaha zirdziņu apiet visas šaha dēļa* (8×8) *rūtiņas tā, lai šaha zirdziņš katrā rūtiņā pabūtu tikai vienu reizi un ar pēdējo šaha zirdziņa gājienu varētu atgriezties izejas rūtiņā?*

5. zīm. ir sniegta šaha zirdziņa gājienu secība, kas sniedz iepriekš formulētā uzdevuma atrisinājumu.

Apskatīsim grafu G, kura virsotnes atbilst šaha dēļa lauciņiem, bet divas šī grafa virsotnes u un v ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, kad eksistē šaha zirdziņa gājiens no virsotnes u uz virsotni v. Uzdevumu par šaha zirdziņu grafu teorijas valodā var formulēt šādi: *vai grafā* G *eksistē vienkāršs cikls, kas satur visas dotā grafa virsotnes?*

58	43	60	37	52	41	62	35
49	46	57	42	61	36	53	40
44	59	48	51	38	55	34	63
47	50	45	56	33	64	39	54
22	7	32	1	24	13	18	15
31	2	23	6	19	16	27	12
8	21	4	29	10	25	14	17
3	30	9	20	5	28	11	26

5. zīm.

1.3. Eilera uzdevums par klejojošo tirgotāju

Klejojošam tirgotājam ir jāapmeklē katru no n pilsētām vienu reizi un jāatgriežas tajā pilsētā, kurā viņš sāka savu maršrutu. Jāatrod visīsākais klejojošā tirgotāja maršruts, ja ir zināmi attālumi starp jebkurām divām pilsētām.

Apskatīsim pilnu grafu K_n ar svariem, kura virsotnes atbilst pilsētām, šķautnes - ceļiem starp pilsētām, šķautņu svari - attālumiem starp atbilstošajām pilsētām. Uzdevumu par klejojošo tirgotāju grafu teorijas valodā var formulēt šādi: *pilnajā grafā* K_n *atrast vienkāršu ciklu, kas satur visas grafa* G *virsotnes un kura svars ir vismazākais.*

2. Hamiltona cikli un ķēdes

Grafa G vienkāršu ciklu sauc par **Hamiltona ciklu**, ja tas satur visas grafa G virsotnes.

Grafu G sauc par **Hamiltona grafu**, ja tajā eksistē Hamiltona cikls.

- *Hamiltona grafs vienmēr ir sakarīgs.*

Grafa G vienkāršu ķēdi sauc par **Hamiltona ķēdi**, ja tā satur visas grafa G virsotnes.

Grafu G sauc par **pushamiltona grafu**, ja tas satur Hamiltona ķēdi.

- *Pushamiltona grafs vienmēr ir sakarīgs.*
- *Jebkurš Hamiltona cikls ir Hamiltona ķēde.*
- *Jebkurš Hamiltona grafs ir pushamiltona grafs.*
- *Eksistē pushamiltona grafi, kas nav Hamiltona grafi. Piemēram, vienkāršās ķēdes P_n $(n \geq 2)$ ir pushamiltona grafi, kas nav Hamiltona grafi.*

- *Ja* $u_1, u_2, \ldots, u_n, u_1$ *ir Hamiltona cikls grafā* G*, tad* $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *ir vaļēja Hamiltona ķēde grafā* G*.*

2.1. piezīme. Neskatoties Hamiltona un Eilera grafu definīciju ārējo līdzību, šo grafu atpazīšanas problēmas (t.i., noskaidrot, vai dotais grafs ir Hamiltona vai attiecīgi Eilera grafs) ir principiāli dažādas. Izmantojot Eilera teorēmu, ir viegli noskaidrot, vai dotais grafs ir vai nav Eilera grafs, un, ja ir, tad, lietojot Flerī metodi, var atrast tajā Eilera ciklu. Savukārt "pietiekami viegli" pārbaudāmi Hamiltona cikla eksistences nepieciešamie un pietiekamie nosacījumi joprojām nav atrasti. Taču ir zināma virkne pietiekamo nosacījumu, lai dotajā grafā eksistētu Hamiltona cikls, kā arī vairāki Hamiltona cikla neeksistences pietiekamie nosacījumi (t.i., Hamiltona cikla eksistences nepieciešamie nosacījumi).

2.2. piezīme. Uzdevumu par ceļojošo tirgoni var vispārināt patvaļīgam Hamiltona grafam ar pozitīviem svariem: *Hamiltona grafā ar pozitīviem svariem atrast Hamiltona ciklu ar vismazāko svaru.*

3. Hamiltona grafa pietiekamie nosacījumi

3.1. teorēma. **[Hvatala teorēma, 1972. g.]** *Pieņemsim, ka grafa G, $|G| \geq 3$, visu virsotņu pakāpes ir sanumurētas nedilstošā virknē:*

$$d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n.$$

Ja katram naturālam skaitlim k, ka $1 \leq k < \frac{n}{2}$, ir spēkā implikācija:

$$(d_k \leq k) \Longrightarrow (d_{n-k} \geq n-k),$$

tad G ir Hamiltona grafs.

3.2. teorēma. **[Ores teorēma, 1960. g.]** *Ja jebkurām grafa G, $|G| \geq 3$, virsotnēm u un v, kas nav blakusvirsotnes, ir spēkā nevienādība*

$$\deg u + \deg v \geq n,$$

tad G ir Hamiltona grafs.

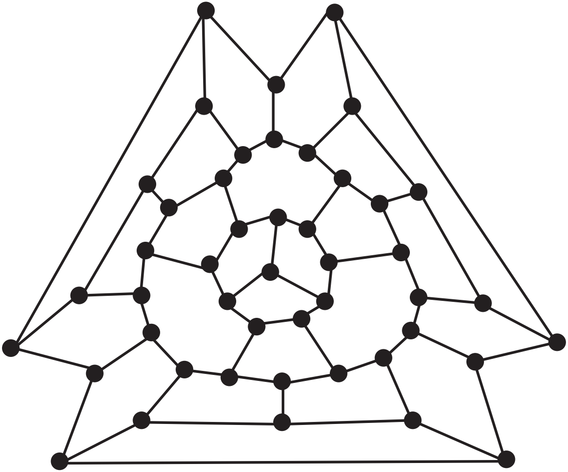
3.3. teorēma. [Diraka teorēma, 1952. g.] *Ja jebkurai grafa G, $|G| \geq 3$, virsotnei u ir spēkā nevienādība*

$$\deg u \geq \frac{n}{2},$$

tad G ir Hamiltona grafs.

3.1. piezīme. Var pierādīt, ka Ores un Diraka teorēmas ir Hvatala teorēmas sekas, savukārt Diraka teorēma izriet no Ores teorēmas.

3.2. piezīme. Nozīmīgu ieguldījumu Hamiltonu grafu teorijā ir devis latviešu matemātiķis E. Grinbergs [2, 12. lpp.], kurš 1968. gadā darbā [4] aprakstīja īpašu grafu klasi, kuru šodien dēvē par par **Grinberga grafiem** (Grinberga grafi ir kubiski grafi bez Hamiltona cikliem). 6. zīm. ir attēlots Grinberga grafs ar 46 virsotnēm.



6. zīm. Grinberga grafs

3.1. piemērs. [1, 72. lpp.] Bērnudārza grupā ir desmit bērni. Viņi četras dienas staigāja pa pāriem; katras dienas ietvaros pāri nemainījās, bet neviens pāris nestaigāja kopā divas vai vairāk dienas. Pierādīt, ka piektajā dienā bērni atkal var sadalīties pa pāriem tā, lai neviens no jauna izveidotais pāris iepriekš nebūtu staigājis.

▶ Apskatīsim grafu G, kura virsotnes attēlo bērnus, pie tam divas virsotnes tiek savienotas ar šķautni tad un tikai tad, kad attiecīgie bērni minētajās četrās dienās vēl nav staigājuši kopā. Tad jebkurai grafa G virsotnei u ir spēkā nevienādība

$$\deg u = 5 \geq 5 = \frac{10}{2} = \frac{n}{2},$$

kur $|G| = n = 10$ ir grafa G virsotņu skaits. No Diraka teorēmas izriet, ka grafā G eksistē Hamiltona cikls. Ja šī cikla virsotnes sadalām blakusesošo virsotņu pāros, tad šiem pāriem atbilstošie bērni var staigāt kopā piektajā dienā.◀

4. Hamiltona cikla neeksistences pietiekamie nosacījumi

Dažkārt, risinot uzdevumus, ir izdevīgi pierādīt, ka dotajā grafā neeksistē Hamiltona cikls.

4.1. teorēma. [Hamiltona cikla neeksistences teorēma] [1, 69. lpp.] *Jebkurā divdaļu grafā, kura daļas satur dažādu skaitu virsotņu, neeksistē Hamiltona cikls.*

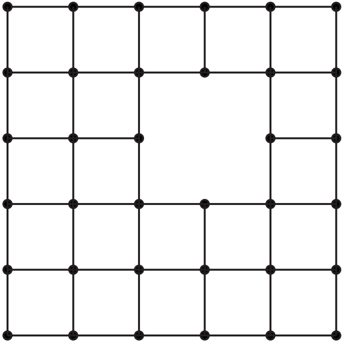
Citiem vārdiem sakot, ja grafa virsotnes var nokrāsot divās krāsās (katru virsotni - vienā krāsā) tā, ka katra šķautne savieno divas dažādu krāsu virsotnes, pie tam abu krāsu virsotņu skaits nav vienāds, tad grafā neeksistē Hamiltona cikls.

4.2. teorēma. [Hamiltona ķēdes neeksistences teorēma] [1, 70. lpp.] *Jebkurā divdaļu grafā, kura daļu virsotņu skaits atšķiras vismaz par 2, neeksistē Hamiltona ķēde.*

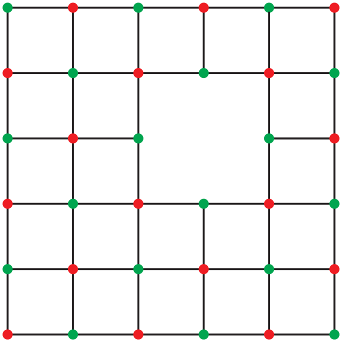
Citiem vārdiem sakot, ja grafa virsotnes var nokrāsot divās krāsās (katru virsotni vienā krāsā) tā, ka katra šķautne savieno *divas dažādu krāsu virsotnes, pie tam abu krāsu virsotņu skaits atšķiras vismaz par 2, tad grafā neeksistē Hamiltona ķēde.*

4.1. piemērs. [1, 73. lpp.] Vai 7. zīm. attēlotais grafs ir Hamiltona grafs?

► Izkrāsosim grafa virsotnes divās krāsās (sarkanā un zaļā) tā, kā ir parādīts 8. zīm. Tad katra šķautne savieno dažādu krāsu virsotne, pie tam sarkano virsotņu skaits ir 17, bet zaļo virsotņu skaits ir 18. No 4.1. teorēmas izriet, ka dotais grafs nav Hamiltona grafs.◄



7. zīm.



8. zīm.

5. Uzdevumi

1. Uz viesībām atnāca 162 viesu. Katrs no viesiem draudzējas vismaz ar 81 citu viesi. Pierādīt, ka viesus var nosēdināt ap apaļo galdu tā, lai katram blakus sēdētu draugi.

   Uzdevuma atrisinājumu skat. [1, 71. lpp.]

2. Vai ir iespējams gar riņķa līniju novietot 1999 naturālus skaitļus tā, lai jebkuru blakus skaitļu summa būtu nepāra skaitlis?

6. Hamiltona orgrafi

Orgrafa G kontūru, kas satur visas orgrafa G virsotnes, sauc par **Hamiltona kontūru**.

Orgrafu G sauc par **Hamiltona orgrafu**, ja tas satur Hamiltona kontūru.

Hamiltona orgrafu teorija ir tikpat sarežģīta kā Hamiltona grafu teorija.

6.1. teorēma. **[Meiniela teorēma, 1973. g.]** *Ja jebkurām stingri sakarīga orgrafa G, $|G| \geq 2$, virsotnēm u un v, kas nav blakusvirsotnes, ir spēkā nevienādība*

$$\deg u + \deg v \geq 2n - 1,$$

tad G ir Hamiltona orgrafs.

Sekas. *Ja jebkurai stingri sakarīga orgrafa G, $|G| = n \geq 2$, virsotnei u, ir spēkā nevienādība $\deg u \geq n$, tad G ir Hamiltona orgrafs.*

7. Robertsa-Floresa metode

Līdz šim laikam nav zināma *efektīva metode*[1] Hamiltona ciklu atrašanai.

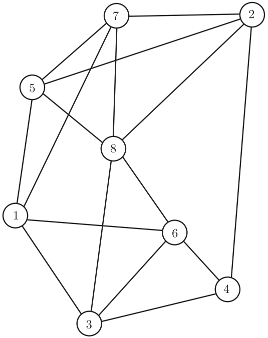
Viena no iespējām ir izmantot *pilnās pārlases metodi*: ģenerējam visas $n!$ virsotņu permutācijas (n ir grafa virsotņu skaits) un katrai šādai permutācijai $u_1 u_2 \ldots u_n$ pārbaudām, vai $u_1 u_2 \ldots u_n u_1$ ir Hamiltona cikls dotajā grafā. Tad būs jāizpilda vismaz $n!\,n$ soļu. Funkcija $n!\,n$ aug ātrāk nekā jebkura eksponentfunkcija a^n, $a > 1$.

Pilnās pārlases metodes soļu skaitu var samazināt, ja pielietot `backtracking` pieeju - atgriešanos atpakaļ pie vēl neizmantotās pieļaujamās vērtības.

Robertsa-Floresa metode [5] ir pārlases tipa metode, kas balstās uz `backtracking` pieeju un ļauj atrast Hamiltona ciklu dotajā grafā, protams, ja tāds eksistē. Robertsa-Floresa metodes soļu skaitu izsaka eksponentfunkcija no n.

[1] Efektīva metode - ja soļu skaits tajā ir ierobežots ar kādu polinomu no virsotņu skaita n.

Paskaidrosim Robertsa-Floresa metodi ar piemēra palīdzību. Apskatīsim 9. zīm. attēloto grafu G.

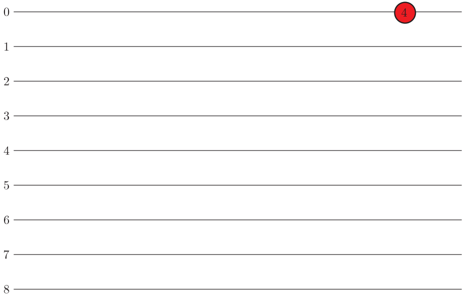


9. zīm.

Grafa G virsotnes un to apkārtnes.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7

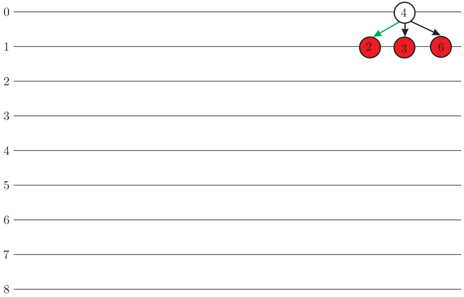
0. solis.
Hamiltona cikla meklēšanu sāksim ar virsotni 4.
Apskatīsim vienkāršu ķēdi **4**.



10. zīm.

1. solis.
Vienkāršās ķēdes 4 pieļaujamās virsotnes ir 2, 3, 6.
Izvēlamies virsotni 2 un apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**.

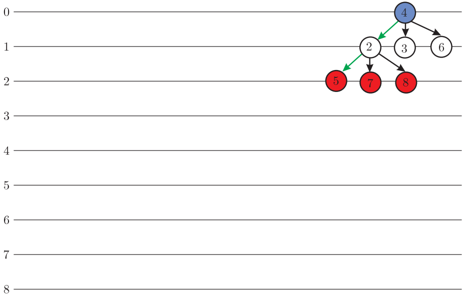
1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7



11. zīm.

2. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2 pieļaujamās virsotnes ir 5,7,8.
Izvēlamies virsotni 5 un apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**.

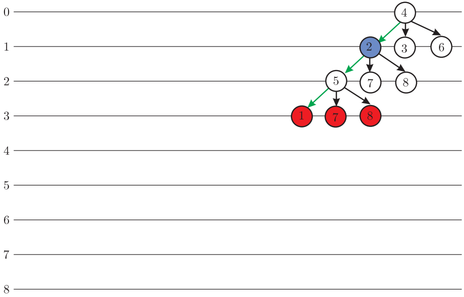
1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7



12. zīm.

3. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2,5 pieļaujamās virsotnes ir 1,7,8.
Izvēlamies virsotni 1 un apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**.

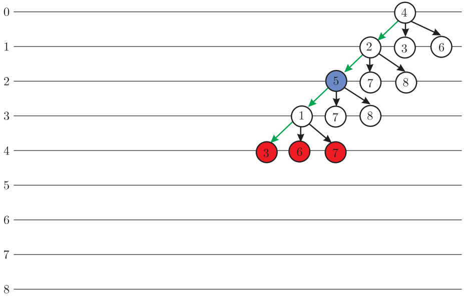
1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7



13. zīm.

4. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2,5,1 pieļaujamās virsotnes ir 3,6,7.
Izvēlamies virsotni 3 un apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**3**.

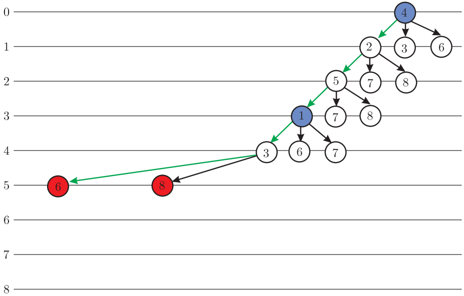
1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7



14. zīm.

5. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2,5,1,3 pieļaujamās virsotnes ir 6,8.
Izvēlamies virsotni 6 un apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**3**,**6**.

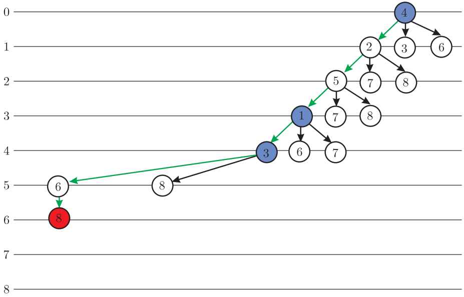
1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7



15. zīm.

6. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2,5,1,3,6 pieļaujamā virsotne ir 8.
Apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**3**,**6**,**8**.

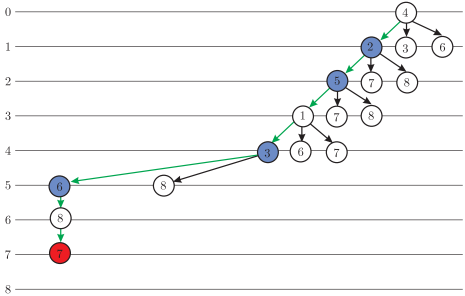
1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7



16. zīm.

7. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2,5,1,3,6,8 pieļaujamā virsotne ir 7.
Apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**3**,**6**,**8**,**7**.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7

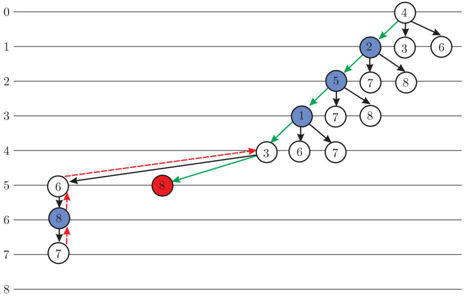


17. zīm.

8. solis.
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,3,6,8,7 nav pieļaujamo virsotņu.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7

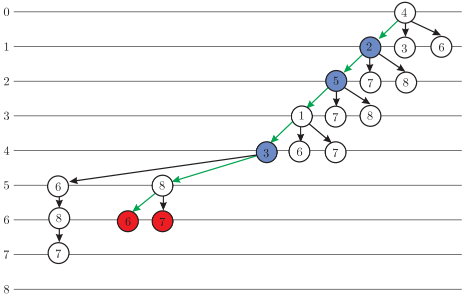
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,3,6,8 nav neizmantoto pieļaujamo virsotņu.
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,3,6 nav neizmantoto pieļaujamo virsotņu.
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,3 ir neizmantotā pieļaujamā virsotne 8.
Apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**3**,**8**.



18. zīm.

9. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2,5,1,3,8 pieļaujamās virsotnes ir 6,7.
Izvēlamies virsotni 6 un apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**3**,**8**,**6**.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7

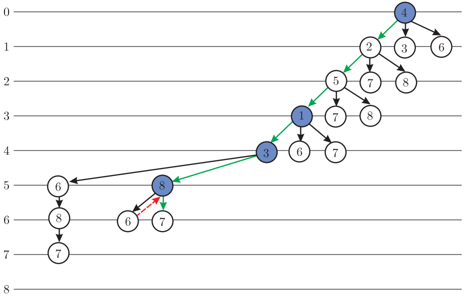


19. zīm.

10. solis.
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,3,8,6 nav pieļaujamo virsotņu.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7

Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,3,8 ir neizmantotā pieļaujamā virsotne 7.
Apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**3**,**8**,**7**.

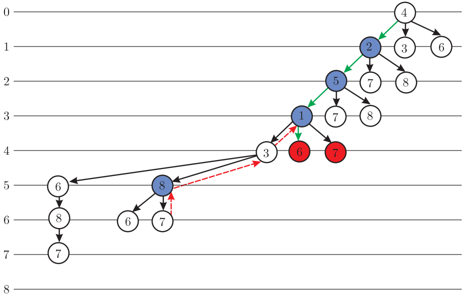


20. zīm.

11. solis.
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,3,8,7 nav pieļaujamo virsotņu.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7

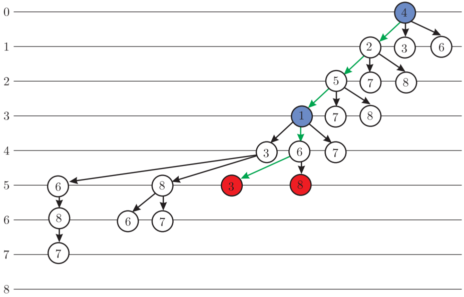
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,3,8 nav neizmantoto pieļaujamo virsotņu.
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,3 nav neizmantoto pieļaujamo virsotņu.
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1 ir neizmantotās pieļaujamās virsotnes 6,7.
Izvēlamies virsotni 6 un apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**6**.



21. zīm.

12. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2,5,1,6 pieļaujamās virsotnes ir 3,8.
Izvēlamies virsotni 3 un apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**6**,**3**.

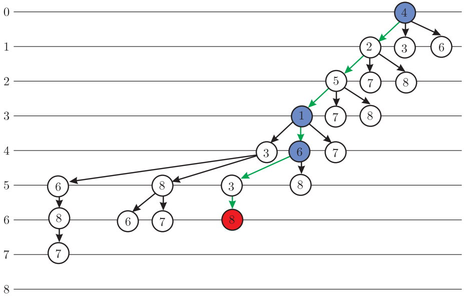
1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7



22. zīm.

13. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2,5,1,6,3 pieļaujamā virsotne ir 8.
Apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**3**,**6**,**3**,**8**.

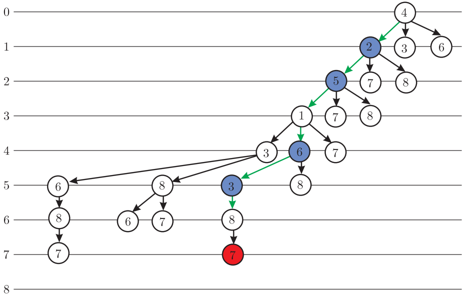
1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7



23. zīm.

14. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2,5,1,6,3,8 pieļaujamā virsotne ir 7.
Apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**3**,**6**,**3**,**8**,**7**.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7

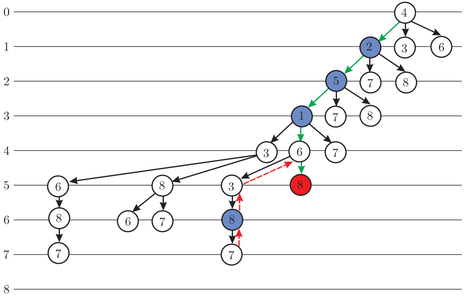


24. zīm.

15. solis.
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,6,3,8,7 nav pieļaujamo virsotņu.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7

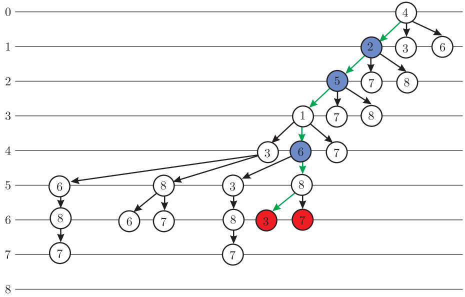
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,6,3,8 nav neizmantoto pieļaujamo virsotņu.
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,6,3 nav neizmantoto pieļaujamo virsotņu.
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,6 ir neizmantotā pieļaujamā virsotnes 8.
Apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**6**,**8**.



25. zīm.

16. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2,5,1,6,8 pieļaujamās virsotnes ir 3,7.
Izvēlamies virsotni 3 un apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**6**,**8**,**3**.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7

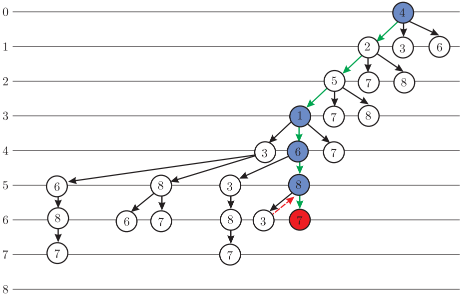


26. zīm.

17. solis.
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,6,8,3 nav pieļaujamo virsotņu.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7

Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,6,8 ir neizmantotā pieļaujamā virsotnes 7.
Apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**6**,**8**,**7**.

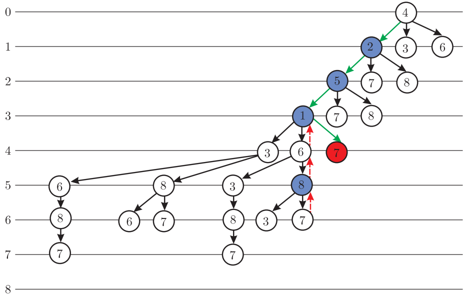


27. zīm.

18. solis.
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,6,8,7 nav pieļaujamo virsotņu.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7

Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,6,8 nav neizmantoto pieļaujamo virsotņu.
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1,6 nav neizmantoto pieļaujamo virsotņu.
Vienkāršai ķēdei 4,2,5,1 ir neizmantotā pieļaujamā virsotnes 7.
Apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**7**.

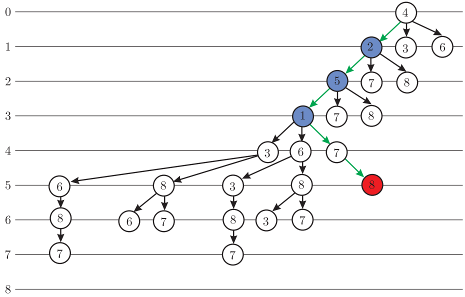


28. zīm.

Saturs Sākums Beigas ◀ ▶ Atpakaļ Aizvērt Pilns ekrāns

19. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2,5,1,7 pieļaujamā virsotne ir 8.
Apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**7**,**8**.

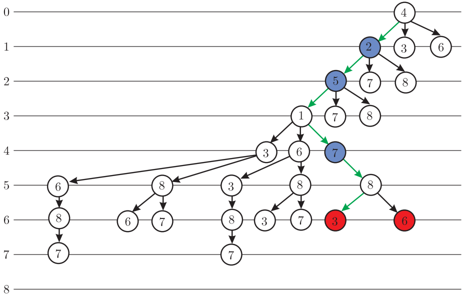
1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7



29. zīm.

20. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2,5,1,7,8 pieļaujamās virsotnes ir 3,6.
Izvēlamies virsotni 3 un apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**7**,**8**,**3**.

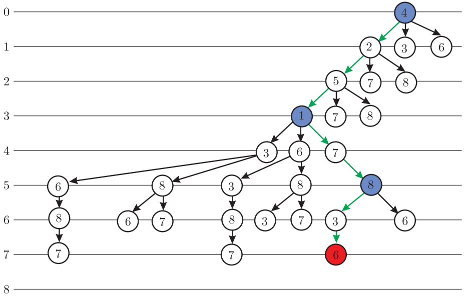
1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7



30. zīm.

21. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2,5,1,7,8,3 pieļaujamā virsotne ir 6.
Apskatām jaunu vienkāršu ķēdi **4**,**2**,**5**,**1**,**7**,**8**,**3**,**6**.

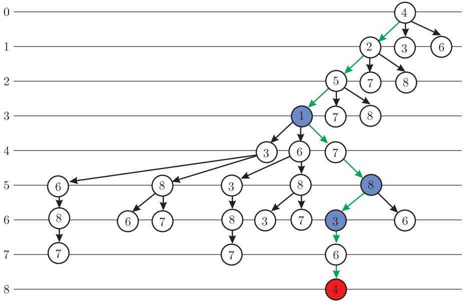
1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7



31. zīm.

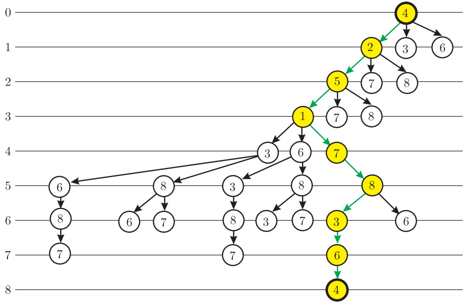
22. solis.
Vienkāršās ķēdes 4,2,5,1,7,8,3,6 pieļaujamā virsotne ir 4.
Iegūstam vienkāršu ciklu **4**,**2**,**5**,**1**,**7**,**8**,**3**,**6**,**4**, kurš ir ***Hamiltona cikls dotajā grafā***.

1	2	3	4	5	6	7	8
3	4	1	2	1	1	1	2
5	5	4	3	2	3	2	3
6	7	6	6	7	4	5	5
7	8	8		8	8	8	6
							7



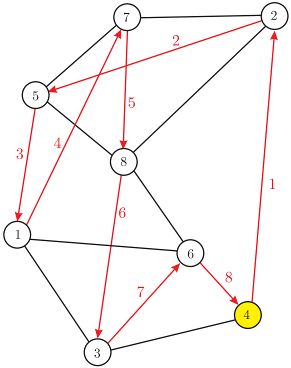
32. zīm.

Tādējādi esam atraduši Hamiltona ciklu 4,2,5,1,7,8,3,6,4 dotajā grafā!



33. zīm.

Hamiltona cikls 4,2,5,1,7,8,3,6,4 dotajā grafā!



34. zīm.

7.1. piezīme. Robertsa-Floresa metodi var pielietot arī orgrafiem, tikai šoreiz jāapskata virsotņu izejošās pusapkārtnes.

7.2. piezīme. Ja turpināt Robertsa-Floresa metodes darbu, tad var atrast visus Hamiltona ciklus (Hamiltona kontūrus) dotajā grafā (orgrafā)[2].

[2]Divus Hamiltona ciklus (Hamiltona kontūrus) dotajā grafā (orgrafā) uzskata par dažādiem tad un tikai tad, kad tie atšķiras ar vismaz vienu šķautni (loku).

Noderīgas saites

[1] The Hamiltonian Page
http://www.densis.fee.unicamp.br/~moscato/Hamilton.html
Apkopoti Interneta resursi par Hamiltona grafiem.

[2] Hamiltonian path
http://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path
Interneta enciklopēdijas *Wikipedia* sadaļa par Hamiltona grafiem.

[3] The Icosian Game
http://www.puzzlemuseum.com/month/picm02/200207icosian.htm
Hamiltona spēles apraksts.

[4] **Weisstein, Eric W.** "Graph Theory" From MathWorld–A Wolfram Web Resource
http://mathworld.wolfram.com/topics/GraphTheory.html

[5] **Sriram V. Pemmaraju and Steven S. Skiena.** This package contains all the programs from the book, "Computational Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory in

Mathematica", by Sriram V. Pemmaraju and Steven S. Skiena, Cambridge University Press, 2003.

http://www.cs.uiowa.edu/~sriram/Combinatorica/NewCombinatorica.m
Pilns *Mathematica* paketes *Combinatorica* apraksts.

[6] **Marco Liverani.** Grafi e ottimizzazione combinatoria con Mathematica.

www.mat.uniroma3.it/users/liverani/doc/mathematica_grafi.pdf
Kompakts *Mathematica* paketes *Combinatorica* apraksts. Apskatīta tikai daļa komandu. Resurss ir itāļu valodā.

Alfabētiskais rādītājs

Zīmējumu rādītājs

Literatūra

[1] Andžāns A., Čakste J., Larfelds T., Ramāna L., Seile M. *Vidējās vērtības metode*. Mācību grāmata, Rīga, 1996. 16, 17, 18, 20

[2] Dambītis J. *Modernā grafu teorija*. Datorzinību Centrs, Rīga, 2002. `http://susurs.mii.lu.lv/Graphlab/Education/grafuTeorijaLatvija/DAMBITIS/`. 14

[3] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов*. Наука, Москва, 1990.

[4] Гринберг Э.Я. О плоских однородных граvфах степени три без Гамильтоновых циклов. *Латв. матем. ежегодник*, **4**, 54–58, 1968. 14

[5] Кристофидес Н. *Теория графов*. Мир, Москва, 1978. 22

[6] Pemmaraju S. and Skiena S. *Computational Discrete Mathematics. Combinatorics and Graph Theory with Mathematica*. Cambridge University Press, 2003.