DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Grafu krāsošana

2022. gada 6. novembris

2022

Saturs

1. Grafa virsotņu krāsošana 3

2. Grafa šķautņu krāsošana 21

3. Kartes skaldņu krāsošana. Četru krāsu problēma 31

4. Noderīgas saites 44

Zīmējumu rādītājs 45

Literatūra 47

1. Grafa virsotņu krāsošana

Pieņemsim, ka k ir naturāls skaitlis.

Par **grafa G virsotņu krāsojumu k krāsās** (vai **grafa G k-krāsojumu**) sauc jebkuru funkciju $\varphi : VG \to \{1; 2; \ldots ; k\}$.

Uzskatāmības labad uzskata, ka skaitļi $1, 2, \ldots , k$ apzīmē krāsas - sarkanu, zaļu, zilu utt. Tātad grafa G krāsojums k krāsās ir noteiktas krāsas piešķiršana katrai grafa G virsotnei (- katras virsotnes nokrāsošana noteiktā krāsā).

- Kopas $\{1; 2; \ldots ; k\}$ vietā var ņemt jebkuru k-elementu kopu.
- Funkcija φ var nebūt sirjektīva, t.i., daļa krāsu var palikt neizmantotas.

Grafa G k-krāsojumu $\varphi : VG \to \{1; 2; \ldots ; k\}$ sauc par **regulāru**, ja $\varphi(u) \neq \varphi(v)$ jebkurām divām grafa G blakusvirsotnēm u un v.

Citiem vārdiem sakot, *grafa G k-krāsojumu sauc par regulāru, ja jebkuras divas grafa G blakusvirsotnes ir nokrāsotas dažādās krāsās.*

Grafu G sauc par **virsotņu k-krāsojamu** (vai **k-krāsojamu**), ja eksistē tā regulārs k-krāsojums.

Grafu G sauc par **k-hromatisku grafu**, bet k sauc par **grafa G hromatisko skaitli** un apzīmē ar $\chi(G)$, ja grafam G eksistē vismaz viens regulārs k-krāsojums, bet neeksistē neviens regulārs $(k-1)$-krāsojums.

Tātad

$$\chi(G) = \min\{k: \text{ eksistē regulārs grafa } G \text{ virsotņu } k\text{-krāsojums}\}.$$

Jebkuru k-hromatiska grafa regulāru k-krāsojumu sauc par šī grafa **minimālu krāsojumu**.

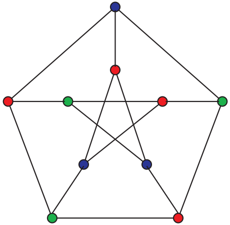
2-hromatisku grafu sauc arī par **bihromatisku grafu**.

Acīmredzot, *grafs G ir k-krāsojams tad un tikai tad, kad $\chi(G) \leq k$.*

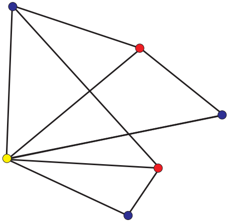
1.1. piemērs.

- $\chi(G) = 1$ tad un tikai tad, kad G ir tukšais grafs. Citiem vārdiem sakot, *tukšie grafi un tikai tie ir 1-hromatiski grafi.*
- $\chi(G) = 2$ tad un tikai tad, kad G ir divdaļu grafs ar vismaz vienu šķautni. Citiem vārdiem sakot, *divdaļu grafi ar vismaz vienu šķautni un tikai tie ir bihromatiski grafi.*

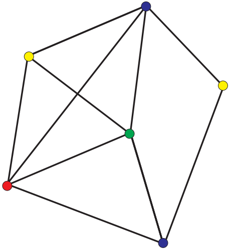
- n-tās kārtas grafs G ir n-hromatisks grafs tad un tikai tad, kad $G = K_n$. Citiem vārdiem sakot, *starp n-tās kārtas grafiem pilnie grafi un tikai tie ir n-hromatiski grafi.*
- Petersena grafs ir 3-hromatisks grafs (1. zīm.). Jāatzīmē, ka 3-hromatisku grafu kritērijs joprojām nav atrasts.
- 2. zīm. un 3. zīm. attēloto grafu hromatiskie skaitļi ir attiecīgi 3 un 4.
- Riteņi ar nepāra virsotņu skaitu ir 3-hromatiski grafi (4. un 6. zīm.), bet riteņi ar pāra virsotņu skaitu ir 4-hromatiski grafi (5. zīm.).
- $\chi\big(C_{2n}\big) = 2$, $\chi\big(C_{2n+1}\big) = 3$.
- $\chi\big(K_{p_1,p_2,\ldots,p_m}\big) = m$, t.i., pilnais m-daļu grafs ir m-hromatisks grafs.



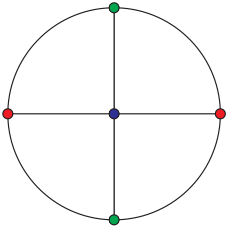
1. zīm. Petersena grafa hromatiskais skaitlis ir vienāds ar 3



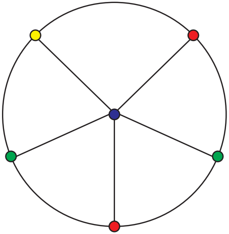
2. zīm. $\chi(G) = 3$



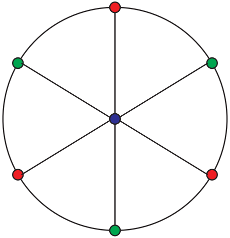
3. zīm. $\chi(G) = 4$



4. zīm. $\chi(W_4) = 3$



5. zīm. $\chi(W_5) = 4$



6. zīm. $\chi(W_6) = 3$

Apskatīsim dažus uzdevumus, kuru risināšanā var tikt izmantota virsotņu krāsošanas teorija.

Uzdevums par sarakstu sastādīšanu. Pieņemsim, ka ir jānolasa virkne lekciju pēc iespējas īsākā laikā, katra lekcija ilgst tieši vienu stundu, pie tam dažas lekcijas nevar notikt vienlaicīgi, jo, piemēram, tās lasa viens un tas pats lektors. ***Uzdevums:*** *sastādīt optimālāko lekciju sarakstu, t.i., tādu lekciju sarakstu, saskaņā ar kuru visas lekcijas tiks nolasītas visīsākajā laikā.* Apskatīsim grafu, kura virsotnes attēlo lekcijas, pie tam divas virsotnes savienosim ar šķautni tad un tikai tad, kad tām atbilstošās lekcijas nevar notikt vienlaicīgi. Tad jebkurš grafa regulārs krāsojums sniedz pieļaujamo lekciju sarakstu - vienas krāsas lekcijas var notikt vienlaicīgi. Starp visiem pieļaujamiem lekciju sarakstiem visoptimālākais ir saraksts, kas atbilst dotā grafa minimālajam krāsojumam, bet visīsākais laiks, kas ir jāpatērē, lai nolasītu visas lekcijas, ir vienāds ar dotā grafa hromatisko skaitli.

Uzdevums par iekārtu sadali. Pieņemsim, ka ir jāveic galīgs skaits operāciju (katras operācijas izpildes laiks ir viens un tas pats), izmantojot galīgu skaitu iekārtu, pie tam neviena no iekārtām nevar tikt vienlaicīgi izmantota dažādu operāciju veikšanai. ***Uzdevums****: sadalīt iekārtas tā, lai visas operācijas tiktu veiktas visīsākajā laikā.* Apskatīsim grafu, kura virsotnes attēlo operācijas, pie tam divas virsotnes savienosim ar šķautni tad un tikai tad, kad šīm virsotnēm atbilstošo operāciju veikšanai ir jāizmanto viena un tā pati iekārta. Tad jebkuram dotā grafa regulāram krāsojumam atbilst pieļaujamais iekārtu sadales grafiks - vienas krāsas operācijas var tikt veiktas vienlaicīgi. Visīsākais laiks, kas ir nepieciešams visu operāciju veikšanai, ir vienāds ar dotā grafa hromatisko skaitli. Iekārtu sadales grafiks, saskaņā ar kuru visas operācijas tiks veiktas visīsākajā laikā, atbilst dotā grafa minimālajam krāsojumam.

Hromatiskā skaitļa vispārīgā formula nav zināma. Taču atsevišķos gadījumos var sniegt hromatiskā skaitļa novērtējumus.

1.1. teorēma. *Ja $G(U)$ ir grafa G apakšgrafs, kuru ir inducējusi grafa G virsotņu kopa $U \subset VG$, tad $\chi(G) \geq \chi\big(G(U)\big)$.*

Piemēram,

- ja grafs G satur apakšgrafu K_m, tad grafa G hromatiskais skaitlis nav mazāks par m, t.i., $\chi(G) \geq m$;
- ja grafs G satur riteni ar nepāra virsotņu skaitu, tad grafa G hromatiskais skaitlis nav mazāks par 3, t.i., $\chi(G) \geq 3$;
- ja grafs G satur riteni ar pāra virsotņu skaitu, tad grafa G hromatiskais skaitlis nav mazāks par 4, t.i., $\chi(G) \geq 4$.

1.2. teorēma. *Ja grafam G ir m šķautnes, tad*

$$\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

1.3. teorēma. *Jebkuram grafam G ir spēkā nevienādība $\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$, kur $\Delta(G)$ ir grafa G virsotnes maksimālā pakāpe.*

1.4. teorēma. **[Bruksa teorēma, 1941. g.]** *Ja G ir sakarīgs nepilns grafs, pie tam $\Delta(G) \geq 3$, tad $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Virsotņu krāsošanas "skopā" (greedy) metode. Pieņemsim, ka grafa G virsotnes ir sanumurētas virknē $u_1, u_2, \ldots, u_n$. "Skopā" metode ļauj atrast kādu grafa G regulāru krāsojumu ar krāsu skaitu $k \leq \Delta(G) + 1$, pie tam vispārīgā gadījumā šis atrastais krāsojums nav minimāls.

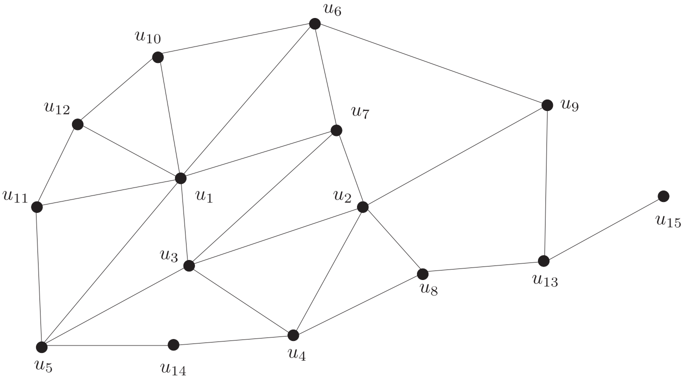
1. Virsotnei u_1 piešķiram krāsu 1.
2. Apskatām virsotni u_2. Ja virsotnes u_2 un u_1 ir blakusvirsotnes, tad virsotnei u_2 piešķiram krāsu 2. Pretējā gadījumā (t.i., ja u_2 un u_1 nav blakusvirsotnes) virsotnei u_1 piešķiram krāsu 1.
3. Apskatām virsotni u_3 un piešķiram tai vismazāko krāsu, kura vēl netika izmantota, lai nokrāsotu tās blakusvirsotnes starp virsotnēm u_1 un u_2, protams, ja ir tādas blakusvirsotnes. Ja virsotnei u_3 nav blakusvirsotņu starp virsotnēm u_1 un u_2, tad virsotnei u_3 piešķiram krāsu 1.
4. Pieņemsim, ka virsotnes $u_1, u_2, \ldots, u_s$ jau ir nokrāsotas. Apskatām virsotni u_{s+1} un piešķiram tai vismazāko krāsu, kura vēl netika izmantota, lai nokrāsotu tās blakusvirsotnes starp virsotnēm $u_1, u_2, \ldots, u_s$, protams, ja ir tādas blakusvirsotnes. Ja

virsotnei u_{s+1} nav blakusvirsotņu starp virsotnēm $u_1, u_2, \ldots, u_s$, tad virsotnei u_{s+1} piešķiram krāsu 1.

5. Metodes darbu beidzam, kad visas grafa G virsotnes ir nokrāsotas.

1.1. piezīme. Dažos gadījumos "skopajā" metodē izmantoto krāsu skaitu k ir iespējams samazināt, ja grafa G virsotnes sanumurēt pēc to pakāpju neaugšanas, t.i., grafa G virsotnes sanumurēt virknē $u_1, u_2, \ldots, u_n$ tā, lai

$$\deg u_1 \geq \deg u_2 \geq \cdots \geq \deg u_n.$$



7. zīm.

1.2. piemērs. 7. zīm. attēlotā grafa G virsotnes ir sanumurētas pēc to pakāpju neaugšanas:

u_i	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8
$\deg u_i$	7	5	5	4	4	4	4	3

u_i	u_8	u_9	u_{10}	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}	u_{15}
$\deg u_i$	3	3	3	3	3	3	2	1

1) Virsotnei u_1 piešķiram krāsu **1**.
2) Tā kā virsotne u_2 nav blakusvirsotne ar virsotni u_1, tad virsotnei u_2 arī piešķiram krāsu **1**.
3) Virsotne u_3 ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_1 un u_2, kurām ir jau piešķirta krāsa **1**, tāpēc virsotnei u_3 piešķiram krāsu **2**.
4) Virsotne u_4 ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_2 un u_3, kurām ir jau piešķirtas krāsas **1** un **2**, tāpēc virsotnei u_4 piešķiram krāsu **3**.
5) Virsotne u_5 ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_1 un u_3, kurām ir jau piešķirtas krāsas **1** un **2**, tāpēc virsotnei u_5 piešķiram krāsu **3**.

6) Virsotne u_6 ir blakusvirsotne ar virsotni u_1, kurai ir jau piešķirta krāsa **1**, tāpēc virsotnei u_6 piešķiram krāsu **2**.
7) Virsotne u_7 ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_1, u_2, u_3 un u_6, kurām ir jau piešķirtas krāsas **1** un **2**, tāpēc virsotnei u_7 piešķiram krāsu **3**.
8) Virsotne u_8 ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_2 un u_4, kurām ir jau piešķirtas krāsas **1** un **3**, tāpēc virsotnei u_8 piešķiram krāsu **2** (bet nevis **4**!).
9) Virsotne u_9 ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_2 un u_6, kurām ir jau piešķirtas krāsas **1** un **2**, tāpēc virsotnei u_9 piešķiram krāsu **3**.
10) Virsotne u_{10} ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_1 un u_6, kurām ir jau piešķirtas krāsas **1** un **2**, tāpēc virsotnei u_{10} piešķiram krāsu **3**.
11) Virsotne u_{11} ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_1 un u_5, kurām ir jau piešķirtas krāsas **1** un **3**, tāpēc virsotnei u_{11} piešķiram krāsu **2** (bet nevis **4**!).
12) Virsotne u_{12} ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_1, u_{10} un u_{11}, kurām ir jau piešķirtas krāsas **1**, **2** un **3**, tāpēc virsotnei u_{12}

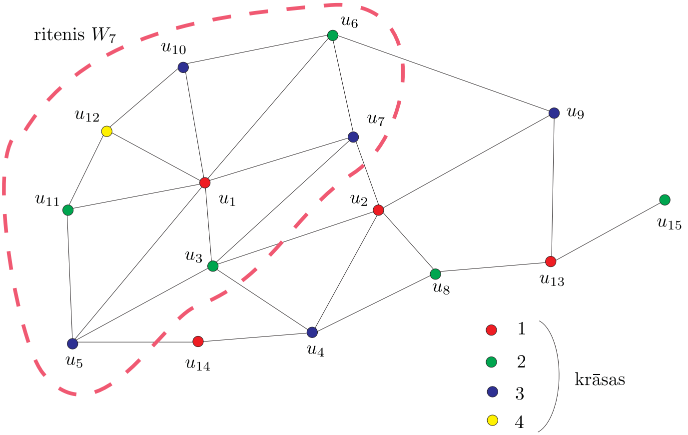
piešķiram krāsu **4**.

13) Virsotne u_{13} ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_8 un u_9, kurām ir jau piešķirtas krāsas **2** un **3**, tāpēc virsotnei u_{13} piešķiram krāsu **1** (bet nevis**4**!).

14) Virsotne u_{14} ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_4 un u_5, kurām ir jau piešķirta krāsa **3**, tāpēc virsotnei u_{14} piešķiram krāsu **1** (bet nevis **4**!).

15) Virsotne u_{15} ir blakusvirsotne ar virsotni u_{13}, kurai ir jau piešķirta krāsa **1**, tāpēc virsotnei u_{15} piešķiram krāsu **2**.

Rezultātā esam ieguvuši dotā grafa regulāru 4-krāsojumu (skat. 8. zīm.). Tātad $\chi(G) \leq 4$. No otras puses, tā kā grafs G satur riteni W_7 (skat. 8. zīm.), kura virsotņu skaits ir pāra skaitlis, un līdz ar to $\chi(W_7) = 4$, tad $\chi(G) \geq 4$. Tātad $\chi(G) = 4$, t.i., *7. zīm. attēlotais grafs G ir 4-hromatisks.*



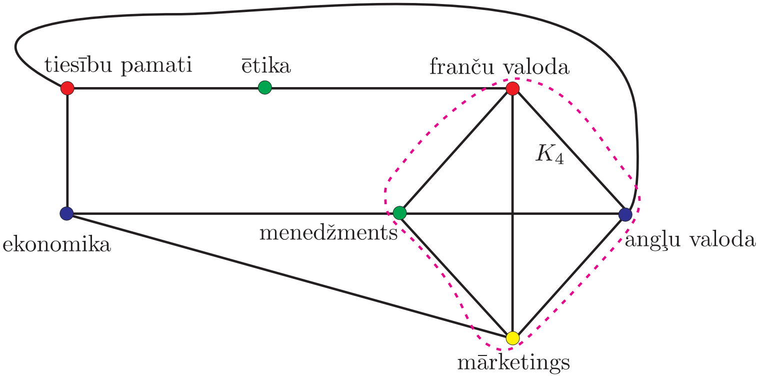
8. zīm. Grafa G minimāls virsotņu krāsojums 4 krāsās

1.3. piemērs. Noteikt visīsāko laiku, kādā var nolasīt 7 lekcijas (tiesību pamati, angļu valoda, franču valoda, ekonomika, menedžments, mārketings, ētika), ja katras lekcijas ilgums ir 1 stunda, pie tam dažas lekcijas nevar tikt lasītas vienlaicīgi. Tabulā ar zvaigznīti ir atzīmētas lekcijas, kas nevar tikt lasītas vienlaicīgi.

	Tie	Ang	Fra	Eko	Men	Mār	Eti
Tie		*		*			*
Ang	*		*		*	*	
Fra		*			*	*	*
Eko	*				*	*	
Men		*	*	*		*	
Mār		*	*	*	*		
Ēti	*		*				

Aplūkosim grafu G (skat. 9. zīm.), kura virsotnes ir lekcijas, pie tam divas virsotnes ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, kad atbilstošās lekcijas nevar tikt lasītas vienlaicīgi.

9. zīm. ir attēlots grafa G regulārs 4-krāsojums, tāpēc $\chi(G) \leq 4$. No otras puses, grafs G satur apakšgrafu K_4, tāpēc $\chi(G) \geq \chi(K_4) = 4$. Tātad $\chi(G) = 4$. Tādējādi visīsākais laiks, kādā var nolasīt 7 lekcijas, ir vienāds ar 4 stundām.



9. zīm. Uzdevumam par lekciju sarakstu atbilstošā grafa minimāls virsotņu krāsojums 4 krāsās

Lekciju saraksts, kas ļauj nolasīt 7 lekcijas 4 stundās, atbilst grafa G minimālajam krāsojumam, kas ir attēlots 9. zīm.:

1. franču valoda, tiesību pamati (- sarkanās lekcijas);
2. angļu valoda, ekonomika (- zilās lekcijas);
3. ētika, menedžments (- zaļās lekcijas);
4. mārketings (- dzeltenā lekcija).

2. Grafa šķautņu krāsošana

Pieņemsim, ka k ir naturāls skaitlis.

Pieņemsim, ka grafam G ir m ($m \geq 1$) šķautnes. Par **grafa G šķautņu krāsojumu k krāsās** (vai **grafa G šķautņu k-krāsojumu**) sauc jebkuru funkciju $\varphi : EG \to \{1; 2; \ldots; k\}$.

Uzskatāmības labad uzskata, ka skaitļi $1, 2, \ldots, k$ apzīmē krāsas - sarkanu, zaļu, zilu utt. Tātad grafa G šķautņu krāsojums k krāsās ir noteiktas krāsas piešķiršana katrai grafa G šķautnei (- katras šķautnes nokrāsošana noteiktā krāsā).

- Kopas $\{1; 2; \ldots; k\}$ vietā var ņemt jebkuru k-elementu kopu.
- Funkcija φ var nebūt sirjektīva, t.i., daļa krāsu var palikt neizmantotas.

Grafa G šķautņu k-krāsojumu $\varphi : EG \to \{1; 2; \ldots; k\}$ sauc par **regulāru**, ja $\varphi(e) \neq \varphi(f)$ jebkurām divām grafa G blakusšķautnēm e un f.

Citiem vārdiem sakot, *grafa G šķautņu k-krāsojumu sauc par regulāru, ja jebkuras divas grafa G blakusšķautnes ir nokrāsotas dažādās krāsās.*

Grafu G sauc par **šķautņu k-krāsojamu**, ja eksistē tā regulārs šķautņu k-krāsojums.

Grafu G sauc par **šķautņu k-hromatisku grafu**, bet k sauc par **grafa G hromatisko indeksu** (vai **grafa G hromatisko klasi**) un apzīmē ar $\chi'(G)$, ja grafam G eksistē vismaz viens regulārs šķautņu k-krāsojums, bet neeksistē neviens regulārs šķautņu $(k-1)$-krāsojums.

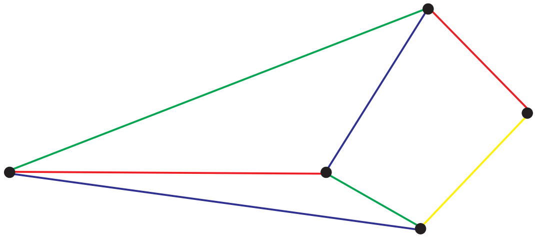
Tātad

$$\chi'(G) = \min\{k : \text{ eksistē regulārs grafa } G \text{ šķautņu } k\text{-krāsojums}\}.$$

Acīmredzot, *grafs G ir šķautņu k-krāsojams tad un tikai tad, kad $\chi'(G) \leq k$.*

Ja ir dots kāds grafa G regulārs šķautņu krāsojums, tad visām šķautnēm, kas ir incidentas vienai virsotnei, ir dažādas krāsas. Tāpēc $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, kur $\Delta(G)$ ir grafa G virsotnes maksimālā pakāpe.

Taču eksistē grafi, kuriem $\chi'(G) > \Delta(G)$. Piemēram, 10. zīm. attēlotajam grafam G ir spēkā nevienādība $\chi'(G) = 4 > 3 = \Delta(G)$.



10. zīm. Grafam G ir spēkā nevienādība $\chi'(G) = 4 > 3 = \Delta(G)$

Nākamā teorēma sniedz samērā precīzu hromatiskā indeksa novērtējumu.

2.1. teorēma. **[Vīzinga teorēma, 1964. g.]** *Jebkuram grafam G ir spēkā nevienādības* $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Tātad, ja grafam G eksistē regulārs šķautņu k-krāsojums, ka $\Delta(G) = k$, tad $\chi'(G) = k$.

2.1. piemērs.

- $\chi'(K_{2n+1}) = \Delta(K_{2n+1})+1 = 2n+1$, $\chi'(K_{2n}) = \Delta(K_{2n}) = 2n-1$.
- Jebkuram divdaļu grafam G ar vismaz vienu šķautni ir spēkā $\chi'(G) = \Delta(G)$. Speciālgadījumā, $\chi'(K_{p,q}) = \max\{p; q\}$.

Tā kā divas grafa G škautnes ir blakusšķautnes tad un tikai tad, kad tās ir blakusvirsotnes grafa G šķautņu grafā $L(G)$, tad, acīmredzot, $\chi'(G) = \chi\big(L(G)\big)$, t.i., *grafa hromatiskais indekss ir vienāds ar šī grafa šķautņu grafa hromatisko skaitli.*

2.2. piemērs. Atradīsim grafa G (skat. 11. zīm.) hromatisko indeksu un minimālo šķautņu krāsojumu. Apskatīsim grafa G šķautņu grafu $L = L(G)$ (skat. 11. zīm.). Atradīsim grafa L regulāru virsotņu krāsojumu, lietojot "skopo" metodi. Grafa L virsotnes sanumurēsim pēc to pakāpju neaugšanas:

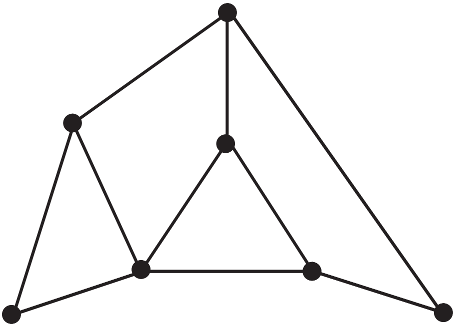
u_i	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9	u_{10}
$\deg u_i$	5	5	5	4	4	4	4	3	3	3

1) Virsotnei u_1 piešķiram krāsu **1**.
2) Virsotne u_2 ir blakusvirsotne ar virsotni u_1, kurai ir jau piešķirta krāsa **1**, tāpēc virsotnei u_2 piešķiram krāsu **2**.
3) Virsotne u_3 ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_1 un u_2, kurām ir jau piešķirtas krāsas **1** un **2**, tāpēc virsotnei u_3 piešķiram krāsu **3**.
4) Virsotne u_4 ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_1, u_2 un u_3, kurām ir jau piešķirtas krāsas **1**, **2** un **3**, tāpēc virsotnei u_4 piešķiram krāsu **4**.
5) Virsotne u_5 ir blakusvirsotne ar virsotni u_1, kurai ir jau piešķirta krāsa **1**, tāpēc virsotnei u_5 piešķiram krāsu **2**.
6) Virsotne u_6 ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_2 un u_5, kurām ir jau piešķirta krāsa **2**, tāpēc virsotnei u_6 piešķiram krāsu **1**.
7) Virsotne u_7 ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_2, u_3 un u_6, kurām ir jau piešķirtas krāsas **1**, **2** un **3**, tāpēc virsotnei u_7 piešķiram krāsu **4**.
8) Virsotne u_8 ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_5 un u_6, kurām ir jau piešķirtas krāsas **1** un **2**, tāpēc virsotnei u_8 piešķiram krāsu **3**.

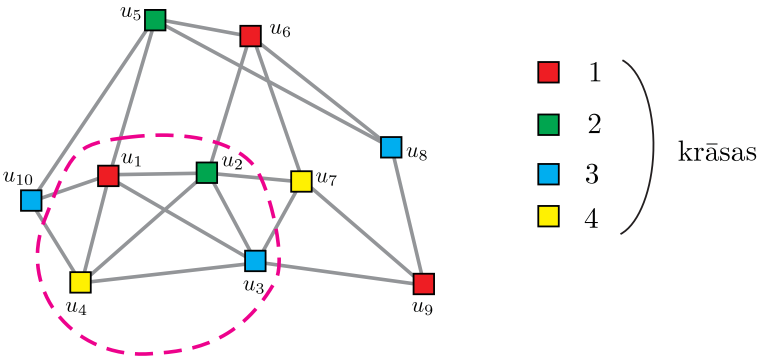
9) Virsotne u_9 ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_3, u_7 un u_8, kurām ir jau piešķirtas krāsas **3** un **4**, tāpēc virsotnei u_9 piešķiram krāsu **1**.
10) Virsotne u_{10} ir blakusvirsotne ar virsotnēm u_1, u_4 un u_5, kurām ir jau piešķirtas krāsas **1**, **2** un **4**, tāpēc virsotnei u_{10} piešķiram krāsu **3**.

Rezultātā esam ieguvuši grafa L regulāru 4-krāsojumu. Tātad $\chi(L) \leq 4$. No otras puses, tā kā grafs L satur pilno grafu K_4, kura hromatiskais skaitlis $\chi(K_4) = 4$, tad $\chi(L) \geq \chi(K_4) = 4$. Tātad $\chi(L) = 4$, t.i., grafa G šķautņu grafs L ir 4-hromatisks. Tāpēc grafs G ir šķautņu 4-hromatisks, t.i., $\chi'(G) = 4$ (14. zīm. ir attēlots grafa G regulārs šķautņu 4-krāsojums).

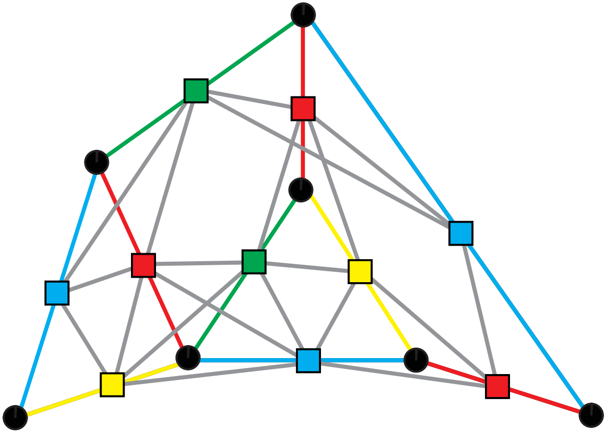
Nākamajos zīmējumos ir ilustrēta grafa G regulāra šķautņu krāsojuma atrašana ar grafa G šķautņu grafa $L = L(G)$ regulāra virsotņu krāsojuma palīdzību.



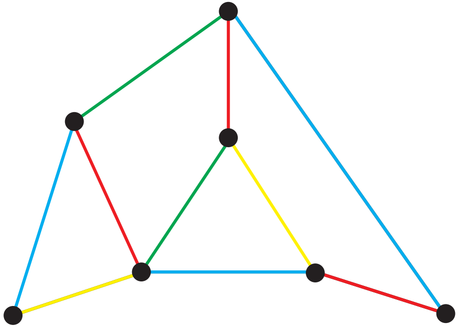
11. zīm. Grafs G



12. zīm. Grafa G šķautņu grafa $L = L(G)$ minimāls virsotņu krāsojums 4 krāsās. Ar pārtrauktu līniju ir izdalīts grafa L apakšgrafs K_4



13. zīm. Šķautņu grafa $L = L(G)$ minimāls virsotņu krāsojums 4 krāsās un tam atbilstošais grafa G minimāls šķautņu krāsojums 4 krāsās



14. zīm. Grafa G regulārs šķautņu 4-krāsojums

3. Kartes skaldņu krāsošana. Četru krāsu problēma

Par **karti** sauc jebkuru sakarīgu plakanu multigrafu bez tiltiem.

Kartes G skaldnes, kurām ir kopīga šķautne, sauc par **blakusskaldnēm**.

Visu kartes G skaldņu kopu apzīmēsim[1] ar FG.

Par **kartes G skaldņu krāsojumu k krāsās** (vai **grafa G skaldņu k-krāsojumu**) sauc jebkuru funkciju $\varphi : FG \to \{1; 2; \ldots; k\}$, kur $f \geq f$; f ir kartes G skaldņu skaits.

Uzskatāmības labad uzskata, ka skaitļi $1, 2, \ldots, k$ apzīmē krāsas - sarkanu, zaļu, zilu utt. Tātad kartes G skaldņu krāsojums k krāsās ir noteiktas krāsas piešķiršana katrai kartes G skaldnei (- katras skaldnes nokrāsošana noteiktā krāsā).

- Kopas $\{1; 2; \ldots; k\}$ vietā var ņemt jebkuru k-elementu kopu.

[1] *Face* (angļu val.) - skaldne.

- Funkcija φ var nebūt sirjektīva, t.i., daļa krāsu var palikt neizmantotas.

Kartes G skaldņu k-krāsojumu $\varphi : FG \to \{1; 2; \ldots ; k\}$ sauc par **regulāru**, ja $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ jebkurām divām kartes G blakusskaldnēm a un b.

Citiem vārdiem sakot, *kartes G skaldņu k-krāsojumu sauc par regulāru, ja jebkuras divas kartes G blakusskaldnes ir nokrāsotas dažādās krāsās.*

Karti G sauc par **skaldņu k-krāsojamu**, ja eksistē kartes G regulārs skaldņu k-krāsojums.

Karti G sauc par **skaldņu k-hromatisku karti**, bet k sauc par **kartes G skaldņu hromatisko skaitli** un apzīmē ar $\chi^*(G)$, ja kartei G eksistē vismaz viens regulārs skaldņu k-krāsojums, bet neeksistē neviens regulārs skaldņu $(k-1)$-krāsojums. Tātad

$$\chi^*(G) = \min\{k : \text{ eksistē regulārs kartes } G \text{ skaldņu } k\text{-krāsojums}\}.$$

Jebkuru skaldņu k-hromatiskas kartes regulāru k-krāsojumu sauc par šīs kartes **minimālu skaldņu krāsojumu**.

Acīmredzot, *karte G ir skaldņu k-krāsojama tad un tikai tad, kad $\chi^*(G) \leq k$.*

Plakanu grafu skaldņu krāsošanas problēma radās 19. gadsimta vidū un sākotnēji tika formulēta šādi: vai ir iespējams patvaļīgu politisku karti izkrāsot četrās krāsās tā, lai kaimiņvalstis tiktu nokrāsotas dažādās krāsās? Grafu teorijā šī problēma ir pazīstama kā četru krāsu hipotēze.

Četru krāsu hipotēze. *Jebkura karte ir 4-krāsojama, t.i., jebkurai kartei G ir spēkā $\chi^*(G) \leq 4$.*

Nākamā teorēma sniedz ekvivalentu četru krāsu hipotēzes formulējumu un saista to ar grafa virsotņu krāsošanu.

3.1. teorēma. *Šādi apgalvojumi ir ekvivalenti.*

1. *Ir spēkā četru krāsu hipotēze.*
2. *Jebkurš planārs grafs ir 4-krāsojams, t.i., jebkuram planāram grafam G ir spēkā $\chi(G) \leq 4$.*

Teorēmas patiesums izriet no fakta, ka *karte G ir skaldņu k-krāsojama tad un tikai tad, kad tās ģeometriski duālais grafs G^* ir virsotņu k-krāsojams.*

Jebkurai kartei G var piekārtot plakanu multigrafu G^* šādi.

- Kartes G katras skaldnes α_i ($i = 1, 2, \ldots, f$; f ir kartes G skaldņu skaits) iekšienē izvēlēsimies punktu u_i^* ($i = 1, 2, \ldots, f$). Punkti u_i^* ($i = 1, 2, \ldots, f$) kalpos par multigrafa G^* virsotnēm.
- Katrai kartes G šķautnei e piekārtosim nepārtrauktu līniju e^* bez paškrustošanās punktiem, ka
  - līnija e^* savieno punktus u_i^*, kuri pieder tām skaldnēm (vienai vai divām), kuru robeža satur šķautni e;
  - līnija e^* krusto šķautni e, bet neiet caur šķautnes e virsotnēm.

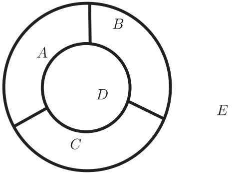
  Visas šādā veidā iegūtās līnijas e^* kalpos par multigrafa G^* šķautnēm, pie tam līnijas e^* var izvēlēties tā, ka tās savstarpēji nekrustosies, izņemot varbūt šo līniju galapunktos.

Plakanam multigrafam G piekārtoto plakano multigrafu G^* sauc par **kartes G ģeometriski duālo grafu**.

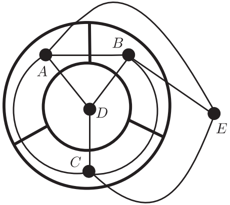
Atzīmēsim, ka multigrafā G^* kārtējās šķautnes atbilst tām kartes G skaldnēm, kurām ir vismaz divas kopīgas šķautnes.

3.1. piemērs. Apskatīsim karti G ar 5 skaldnēm A B C D un E (skat. 15. zīm.) un tam ğeometriski duālo grafu G^* (skat. 16. un 17. zīm.).

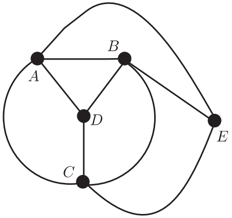
Grafa G^* hromatiskais skaitlis ir vienāds ar 4 (18. zīm. ir attēlots grafa G^* minimāls virsotņu krāsojums 4 krāsās). Tāpēc kartes G skaldņu hromatiskais skaitlis arī ir vienāds ar 4 (19. zīm. ir attēlots kartes G minimāls skaldņu krāsojums 4 krāsās).



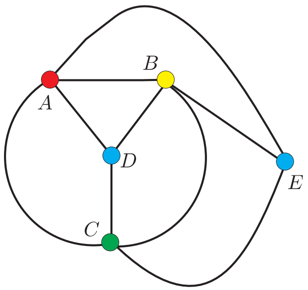
15. zīm. Karte G



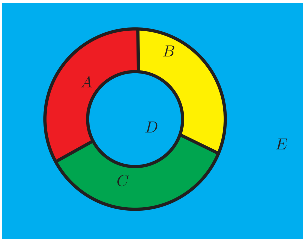
16. zīm. Kartes G ģeometriski duālā grafa G^* konstrukcija



17. zīm. Kartes G ģeometriski duālais grafs G^*

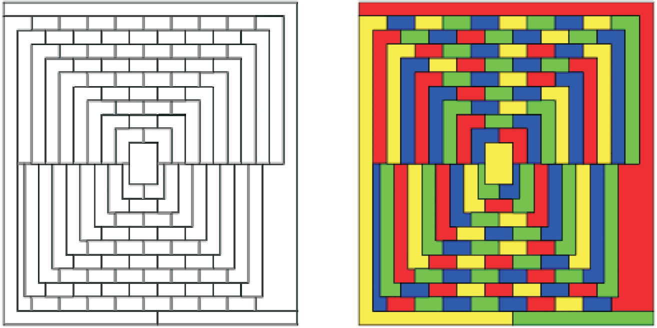


18. zīm. Kartes G ģeometriski duālā grafa G^* minimāls virsotņu krāsojums 4 krāsās



19. zīm. Kartes G minimāls skaldņu krāsojums 4 krāsās

3.2. piemērs.

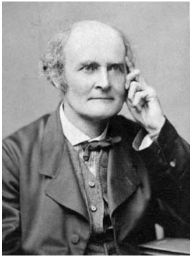


20. zīm.

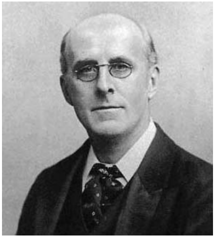
Četru krāsu hipotēzi pirmais izvirzīja 1852. gadā Frensiss Gutri (*Francis Guthrie*), kurš, krāsojot Anglijas grāfistu karti, ievēroja, ka to var izdarīt, izmantojot tikai 4 krāsas. Viņs jautāja savam brālim Frederikam Gutri (*Frederick Guthrie*), kurš studēja Kembridžas universitātē, vai tiešām jebkuru karti var izkrāsot, izmantojot četras krāsas, tā, lai blakus apgabali tiktu izkrāsoti dažādās krāsās.

21. zīm. Francis Guthrie

22. zīm. Augustus De Morgan (1806-1871)



23. zīm. Arthur Cayley (1821-1895)



24. zīm. Alfred Kempe (1849-1922)

25. zīm. Percy John Heawood (1861-1955)

26. zīm. Heinrich Heesch (1906-1995)

Frederiks Gutri šo hipotēzi izstāstīja de Morgānam (*Augustus de Morgan*). Plašākai sabiedrībai četru krāsu hipotēze kļuva zināma pēc tam, kad Londonas matemātikas biedrībā to prezentēja angļu matemātiķis A. Kēli (*Arthur Cayley*) 1878. gadā. Gadu vēlāk A. Kempe (*Alfred Kempe*) publicēja pirmo hipotēzes pierādījumu. 1890. gadā P. Hīvuds (*Percy John Heawood*) atrada kļūdu šajā pierādījumā, viņš pierādīja, ka, ja četru krāsu hipotēzē 4 nomainīt ar 5, tad tā ir samērā vienkārši pierādāma.

3.2. teorēma. **[Hīvuda teorēma, 1890. g.]** *Jebkurš planārs grafs G ir 5-krāsojams, t.i., $\chi(G) \leq 5$.*

Daudzus gadus tika veikti nesekmīgi mēģinājumi pierādīt četru krāsu hipotēzi. 1969. gadā H. Hēšs (*Heinrich Heesch*) četru krāsu hipotēzi reducēja uz liela skaita 1936 (skat. web lapu [1], kurā ir minēts šis skaitlis) `nenovēršamo konfigurāciju`[2] krāsošanas problēmu, pierādot, ka jebkuram maksimālam[3] plakanam grafam G eksistē kādai nenovēršamai konfigurācijai izomorfs grafa G apakšgrafs $\widetilde{G}$, pie tam, ja apakšgrafa $\widetilde{G}$ virsotnes var regulāri izkrāsot 4 krāsās, tad to var izdarīt arī ar doto grafu G. Pēc kāda laika šo nenovēršamo konfigurāciju skaits tika samazināts līdz 1482 [5, 263. lpp.].

[2] Nenovēršama konfigurācija - unavoidable configuration (angļu val.), неустранимая конфигурация (krievu val.).

[3] Sakarīgu planāru (plakanu) grafu G ($|G| \geq 3$) sauc par **maksimālu planāru (plakanu) grafu**, ja, pievienojot grafam G jebkuru šķautni e, iegūtais grafs $G+e$ nav planārs (plakans). Sakarīgu plakanu grafu G ($|G| \geq 3$) sauc par **plakanu triangulāciju**, ja jebkura tā skaldne (ārējo ieskaitot) ir trijstūris. *Sakarīgs grafs G, $|G| \geq 3$, ir maksimāls plakans grafs tad un tikai tad, kad tas ir plakana triangulācija.*

1976. gadā amerikāņu matemātiķu un programmētāju kolektīvs K. Apela (*Kenneth Appel*) un V. Hakena (*Wolfgang Haken*) vadībā, izmantojot ļoti sarežģītu datorprogrammu un vairāk nekā 1000 stundu datorlaika, pierādīja, ka visu nenovēršamo konfigurāciju virsotnes var tikt regulāri izkrāsotas 4 krāsās, tādējādi pierādot četru krāsu hipotēzi. Taču šim pierādījumam tika veltīts samērā daudz kritikas, jo pārbaudīt šo pierādījumu ir ļoti grūti.

1997. gadā amerikāņu matemātiķi N. Robertsons (*Neil Robertson*), D. Sanders (*Daniel P. Sanders*), P. Seimūrs (*Paul Seymour*) un R. Tomass (*Robin Thomas*) sniedza daudz īsāku četru krāsu hipotēzes pierādījumu (skat. web lapu [2]) kuru jau ir samērā reāli pārbaudīt[4], neskatoties uz to, ka arī šajā pierādījumā tiek izmantota speciāla datorprogramma, kura patērē 20 minūtes datorlaika. Viņu pierādījumā nenovēršamo konfigurāciju skaits ir samazināts līdz 633.

2000. gadā indiešu matemātiķis A. Dharveidkers (*Ashay Dharwad-*

[4] 2004. gada decembrī *Georges Gonthier* (Lielbritānija) paziņoja, ka ir pārbaudījis Robertsona u.c. pierādījumu ar speciālas programmas **Coq** (skat. web lapu [3].) palīdzību.

ker) paziņoja, ka ir atradis četru krāsu hipotēzes teorētisku pierādījumu (skat. web lapu [4]), izmantojot grupu teoriju un Šteinera sistēmas. Jāatzīmē, ka A. Dharveidkera pierādījums matemātiķu sabiedrībā tiek vērtēts neviennozīmīgi: viņa rezultāti 2000. gadā tika publicēti Kanādas matemātikas biedrības mājas lapā, taču uzreiz sākās diskusija par šī pierādījuma korektumu (skat. Web lapu [6]).

4. Noderīgas saites

1. Wikipedia enciklopēdijas sadaļa “Four color theorem”.
   http://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem
2. N. Robertsona u.c. četru krāsu hipotēzes pierādījuma īss apraksts.
   http://www.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html
3. Programmas Coq mājas lapa.
   http://coq.inria.fr/
4. A. Dharveidkera četru krāsu hipotēzes pierādījums.
   http://www.dharwadker.org/
5. MathWorld sadaļa “Four-Color Theorem”.
   http://mathworld.wolfram.com/Four-ColorTheorem.html
6. Talk: Four color theorem/Archive 2.
   http://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Four_color_theorem/Archive_2

Zīmējumu rādītājs

1. zīm. Petersena grafa hromatiskais skaitlis ir vienāds ar 3 6
2. zīm. $\chi(G) = 3$ 6
3. zīm. $\chi(G) = 4$ 6
4. zīm. $\chi(W_4) = 3$ 7
5. zīm. $\chi(W_5) = 4$ 7
6. zīm. $\chi(W_6) = 3$ 7
7. zīm. Grafs G 13
8. zīm. Grafa G minimāls virsotņu krāsojums 4 krāsās . . . 17
9. zīm. Uzdevumam par lekciju sarakstu atbilstošā grafa minimāls virsotņu krāsojums 4 krāsās 19
10. zīm. Grafam G ir spēkā nevienādība $\chi'(G) = 4 > 3 = \Delta(G)$ 23
11. zīm. Grafs G 27
12. zīm. Grafa G šķautņu grafa $L = L(G)$ minimāls virsotņu krāsojums 4 krāsās. Ar pārtrauktu līniju ir izdalīts grafa L apakšgrafs K_4 28

13. zīm. Šķautņu grafa $L = L(G)$ minimāls virsotņu krāsojums 4 krāsās un tam atbilstošais grafa G minimāls šķautņu krāsojums 4 krāsās 29
14. zīm. Grafa G minimāls šķautņu krāsojums 4 krāsās . . 30
15. zīm. Karte G 36
16. zīm. Kartes G ğeometriski duālā grafa G^* konstrukcija . 36
17. zīm. Kartes G ğeometriski duālais grafs G^* 36
18. zīm. Kartes G ğeometriski duālā grafa G^* minimāls virsotņu krāsojums 4 krāsās 37
19. zīm. Kartes G minimāls skaldņu krāsojums 4 krāsās . . 37
20. zīm. 38
21. zīm. Francis Guthrie 39
22. zīm. Augustus De Morgan 39
23. zīm. Arthur Cayley 39
24. zīm. Alfred Kempe 40
25. zīm. Percy John Heawood 40
26. zīm. Heinrich Heesch 40

Literatūra

[1] Bondy A., Murty U.S.R. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2007.

[2] Fritsch R., Fritsch G. *The four color theorem*. Springer, 1998.

[3] Holton D.A., Sheehan J. *The Petersen Graph (Australian Mathematical Society Lecture Series)*. Cambridge University Press, 1993.

[4] Dambītis J. *Modernā grafu teorija*. Datorzinību Centrs, Rīga, 2002. http://susurs.mii.lu.lv/Graphlab/Education/grafuTeorijaLatvija/DAMBITIS/.

[5] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов*. Наука, Москва, 1990. 41