DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Grafu piemēri

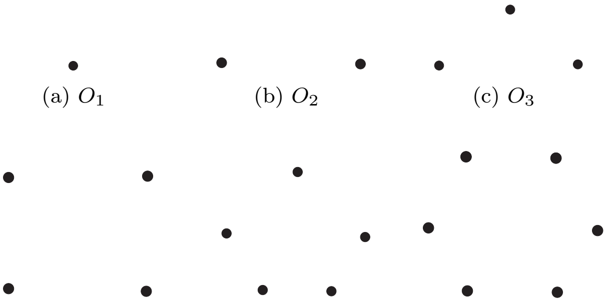
2020. gada 27. septembris

2020

Saturs

1. Tukšie grafi

Par **tukšo grafu** sauc grafu, kuram nav nevienas šķautnes. n-tās kārtas tukšo grafu apzīmē ar O_n.



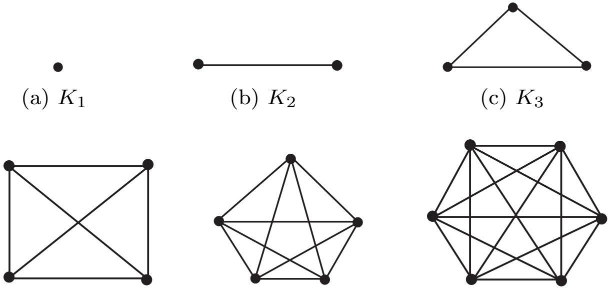
(a) O_1 (b) O_2 (c) O_3

(d) O_4 (e) O_5 (f) O_6

1. zīm. Tukšie grafi O_n $(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

2. Pilnie grafi

Par **pilno grafu** sauc grafu, kura jebkuras divas virsotnes ir savienotas ar šķautni. n-tās kārtas pilno grafu apzīmē ar K_n.



(a) K_1 (b) K_2 (c) K_3

(d) K_4 (e) K_5 (f) K_6

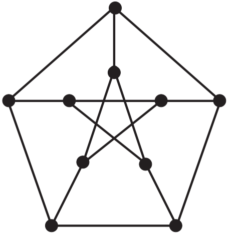
2. zīm. Pilnie grafi K_n $(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Pilnā grafa K_n ($n \geq 1$) šķautņu skaits ir vienāds ar visu 2-kombināciju bez atkārtojumiem n-elementu pamatkopā skaitu

$$C_n^2 = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

3. Petersena grafs

3. zīmējumā ir attēlots **Petersena grafs** P, kuram ir nozīmīga loma planāru grafu teorijā.



3. zīm. Petersena grafs.

4. Vispārinātie Petersena grafi

Vispārinātā Petersena grafa $P(n,k)$ $(n>1,\ k>0)$

- virsotņu kopa sastāv no $2n$ virsotnēm

$$v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1};$$

- šķautņu kopa sastāv no $3n$ šķautnēm:

  n šķautnēm: $\{u_0; u_1\}, \{u_1; u_2\}, \ldots, \{u_{n-1}; u_0\}$;

  n šķautnēm: $\{u_0; v_0\}, \{u_1; v_1\}, \ldots, \{u_{n-1}; v_{n-1}\}$;

  n šķautnēm: $\{v_i; v_{i+k}\}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, kur indeksa $i+k$ vietā tiek ņemts šī skaitļa vismazākais nenegatīvais atlikums pēc moduļa n.

4.1. Vispārinātie Petersena grafi $P(5,3)$ un $P(5,2)$

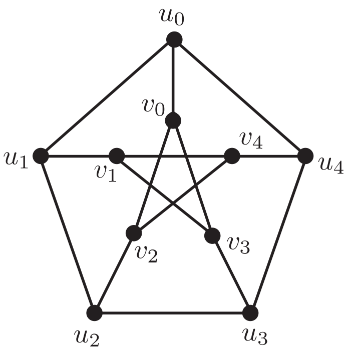
Vispārinātie Petersena grafi $P(5,3)$ un $P(5,2)$ sakrīt ar iepriekš aplūkoto Petersena grafu P.

$$n = 5, \quad k = 2.$$

i	$i+k$	šķautne
0	2	$\{0;2\}$
1	3	$\{1;3\}$
2	4	$\{2;4\}$
3	$5 \equiv 0 \pmod 5$	$\{3;0\}$
4	$6 \equiv 1 \pmod 5$	$\{4;1\}$

$$n = 5, \quad k = 3.$$

i	$i+k$	šķautne
0	3	$\{0;3\}$
1	4	$\{1;4\}$
2	$5 \equiv 0 \pmod 5$	$\{2;0\}$
3	$6 \equiv 1 \pmod 5$	$\{3;1\}$
4	$7 \equiv 2 \pmod 5$	$\{4;2\}$

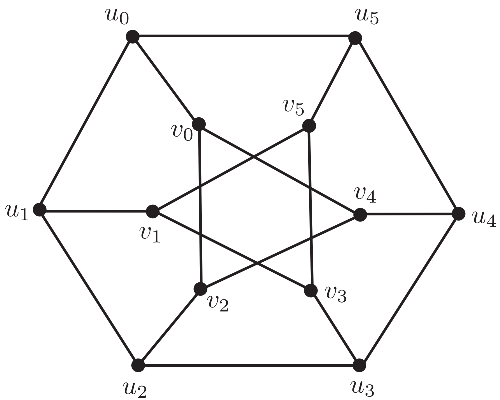


4. zīm. Vispārinātais Petersena grafs $P(5,3) = P(5,2)$.

4.2. Vispārinātais Petersena grafs $P(6,4)$

$$n = 6, \quad k = 4.$$

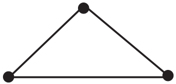
i	$i+1$	$i+k$	šķautne
0	1	5	$\{1;5\}$
1	2	$6 \equiv 0 \pmod 6$	$\{2;0\}$
2	3	$7 \equiv 1 \pmod 6$	$\{3;1\}$
3	4	$8 \equiv 2 \pmod 6$	$\{4;2\}$
4	5	$9 \equiv 3 \pmod 6$	$\{5;3\}$
5	$6 \equiv 0 \pmod 6$	$10 \equiv 4 \pmod 6$	$\{0;4\}$



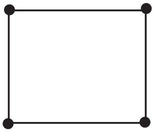
5. zīm. Vispārinātais Petersena grafs $P(6,4)$.

5. Vienkāršie cikli

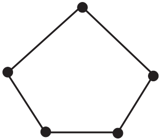
6. zīmējumā ir attēloti **vienkāršie cikli** C_n $(3 \leq n \leq 6)$. Atzīmēsim, ka $C_3 = K_3$.



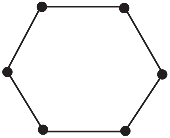
(a) C_3



(b) C_4



(c) C_5

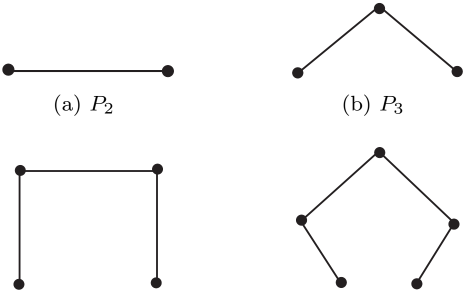


(d) C_6

6. zīm. Vienkāršie cikli C_n $(3 \leq n \leq 6)$.

6. Vienkāršās ķēdes

7. zīmējumā ir attēlotas **vienkāršās ķēdes** P_n $(2 \le n \le 5)$. Atzīmēsim, ka $P_2 = K_2$.



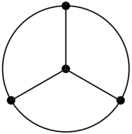
(a) P_2 (b) P_3

(c) P_4 (d) P_5

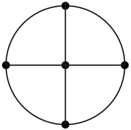
7. zīm. Vienkāršās ķēdes P_n $(2 \le n \le 5)$.

7. Riteņi

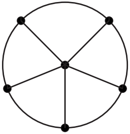
8. zīmējumā ir attēloti **riteņi** W_n $(n = 3, 4, 5)$. Atzīmēsim, ka $W_3 = K_4$ un $|W_n| = n + 1$.



(a) W_3



(b) W_4

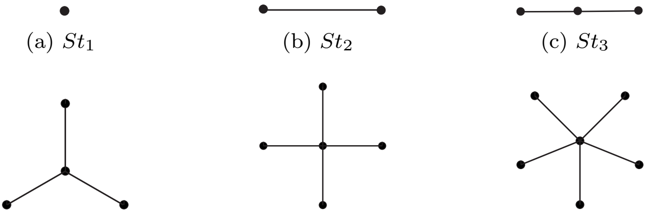


(c) W_5

8. zīm. Riteņi W_n $(n = 3, 4, 5)$.

8. Zvaigznes

9. zīmējumā ir attēlotas **zvaigznes** St_n $(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Atzīmēsim, ka $St_1 = O_1 = K_1$, $St_2 = P_2 = K_2$, $St_3 = P_3$.

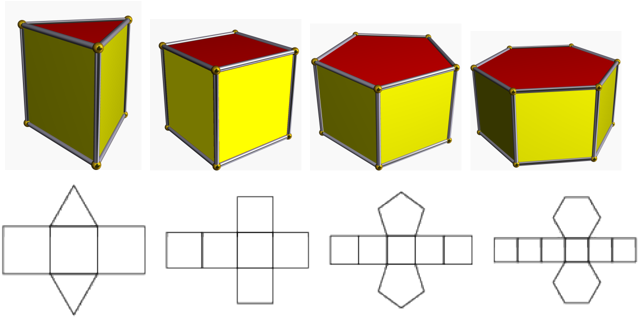


(a) St_1 (b) St_2 (c) St_3 (d) St_4 (e) St_5 (f) St_6

9. zīm. Zvaigznes St_n $(n = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

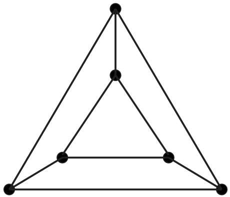
9. Prizmu grafi

***n*-stūru prizma** ($n \geq 3$) - daudzskaldnis, kura 2 skaldnes (prizmas pamati) ir n-stūri, kas atrodas paralēlās plaknēs, bet pārējās n skaldnes (prizmas sānu skaldmes) ir paralelogrami.

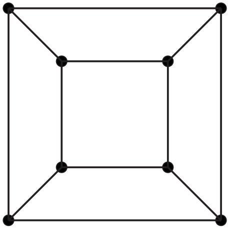


10. zīm. Regulāras n-stūru prizmas un to izklājumi, ja $n = 3, 4, 5, 6$.

n-**stūru prizmas grafs** S_n $(n \geq 3)$ tiek iegūts no n-stūru prizmas, aizvietojot tās skaldnes ar attiecīgajām virsotnēm un šķautnēm.



(a) S_3



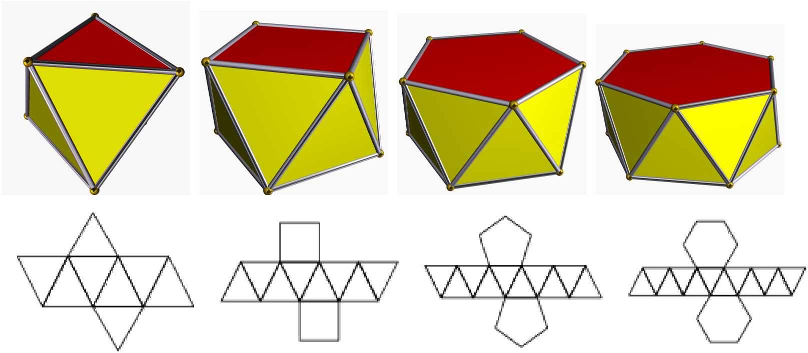
(b) S_4

11. zīm. n-stūru prizmu grafi S_n $(n = 3, 4)$.

Atzīmēsim, ka n-stūru prizmas grafs S_n $(n \geq 3)$ sakrīt ar vispārināto Petersena grafu $P(n, 1)$.

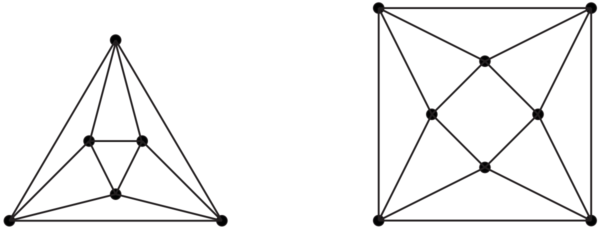
10. Antiprizmu grafi

***n*-stūru antiprizma** ($n \geq 3$) - daudzskaldnis, kas ir izveidots no 2 regulāriem n-stūriem un $2n$ regulāriem trijstūriem.



12. zīm. n-stūru antiprizmas un to izklājumi, ja $n = 3, 4, 5, 6$.

n**-stūru antiprizmas grafs** A_n ($n \geq 3$) tiek iegūts no n-stūru antiprizmas, aizvietojot tās skaldnes ar attiecīgajām virsotnēm un šķautnēm.



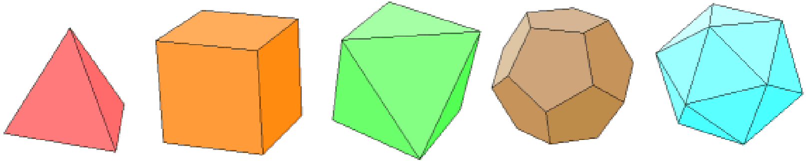
(a) A_3 (b) A_4

13. zīm. n-stūru antiprizmu grafi A_n ($n = 3, 4$).

11. Regulāru daudzskaldņu grafi

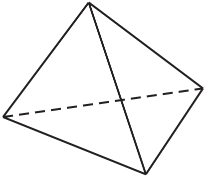
Regulārs daudzskaldnis - daudzskaldnis, kura visas skaldnes ir kongruenti regulāri daudzstūri, un visiem tā daudzplakņu kaktiem ir vienāds skaldņu skaits.

Pavisam ir tikai 5 veidu regulāri daudzskaldņi - kubs, tedraedrs, oktaedrs, dodekaedrs, ikosaedrs.

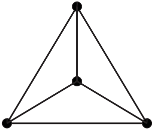


14. zīm.

Regulāra daudzskaldņa grafs tiek iegūts no attiecīgā regulārā daudzskaldņa, aizvietojot tā skaldnes ar attiecīgajām virsotnēm un šķautnēm.

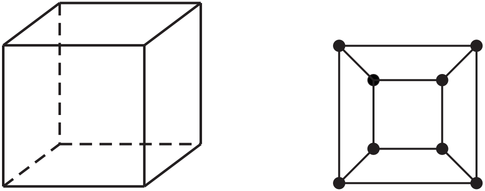


(a) Tetraedrs



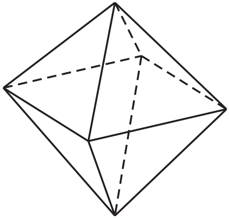
(b) **Tetraedra grafs**

15. zīm. Tedraedrs un tā grafs

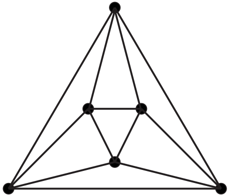


(a) Kubs　　(b) **Kuba grafs**

16. zīm. Kubs un tā grafs

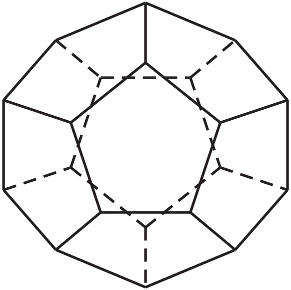


(a) Oktaedrs

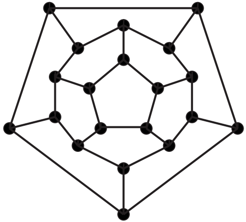


(b) **Oktaedra grafs**

17. zīm. Oktaedrs un tā grafs

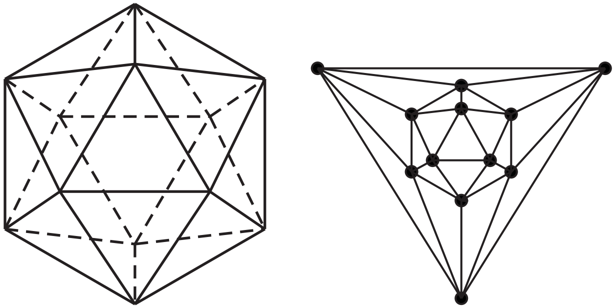


(a) Dodekaedrs



(b) **Dodekaedra grafs**

18. zīm. Dodekaedrs un tā grafs



(a) Ikosaedrs (b) **Ikosaedra grafs**

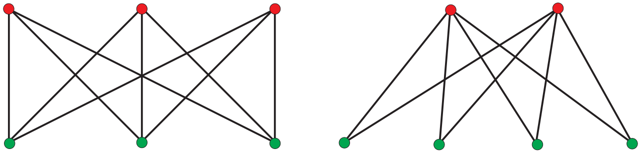
19. zīm. Ikosaedrs un tā grafs

12. Divdaļu grafi

Par **divdaļu grafu** sauc grafu, kura virsotņu kopu var sadalīt divās netukšās nešķeļošās apakškopās (- **daļās**) tā, ka jebkuras šī grafa šķautnes galavirsotnes pieder dažādām daļām. Ja X un Y ir divdaļu grafa daļas, bet E ir tā šķautņu kopa, tad divdaļu grafu apzīmē ar $(X;Y;E)$.

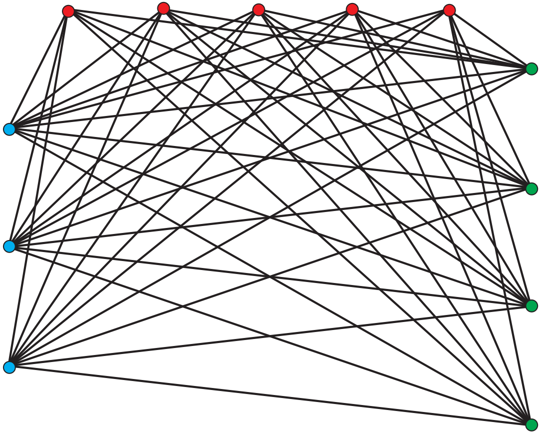
Par **pilno divdaļu grafu** sauc divdaļu grafu, kura ikkatras divas virsotnes no dažādām daļām ir savienotas ar šķautni. Pilno divdaļu grafu, kura daļas sastāv no p un q virsotnēm, apzīmē ar $K_{p,q}$. Tātad $|K_{p,q}| = p + q$. 20. zīm. ir attēloti pilnie divdaļu grafi $K_{3,3}$ un $K_{2,4}$. Analoģiski definē ***k*-daļu grafus** un **pilnos *k*-daļu grafus**. 21. zīm. ir attēlots pilnais trīsdaļu grafs $K_{3,4,5}$.

Zvaigzne ir pilns divdaļu grafs $(X;Y;E)$, ka $|X| = 1$ vai $|Y| = 1$.



(a) $K_{3,3}$ (b) $K_{2,4}$

20. zīm. Pilnie divdaļu grafi $K_{3,3}$ un $K_{2,4}$.



21. zīm. Pilnais trīsdaļu grafs $K_{3,4,5}$.

Alfabētiskais rādītājs

Zīmējumu rādītājs

Literatūra

[1] Bondy A., Murty U.S.R. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2007.

[2] Vasudev C. *Graph Theory with Applications*. New Age International (P) Ltd., 2006.

[3] Holton D.A., Sheehan J. *The Petersen Graph (Australian Mathematical Society Lecture Series)*. Cambridge University Press, 1993.

[4] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов*. Наука, Москва, 1990.