DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Operācijas ar grafiem

2020. gada 27. septembris

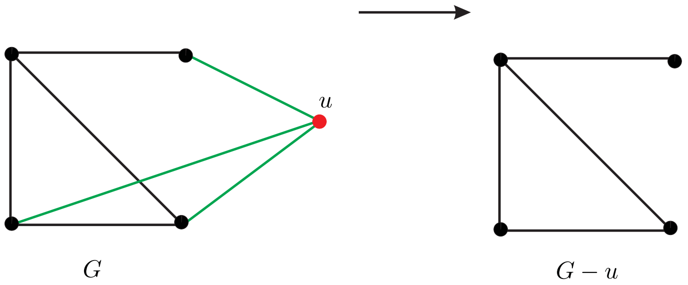
2020

Saturs

Operācijas ar grafiem ļauj no dotajiem grafiem izveidot jaunus grafus!

1. Virsotnes atņemšana

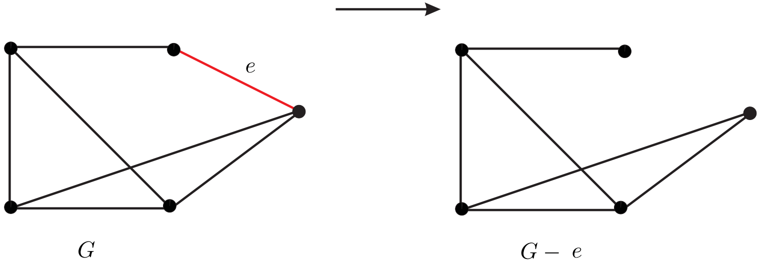
Saka, ka **grafs H ir iegūts no grafa G, atņemot no tā virsotni u**, ja $VH = VG \setminus \{u\}$, bet EH sastāv no visām tām un tikai tām grafa G šķautnēm, kas nav incidentas virsotnei u. Grafu H apzīmē ar $G - u$.



1. zīm. $G - u$.

2. Šķautnes atņemšana

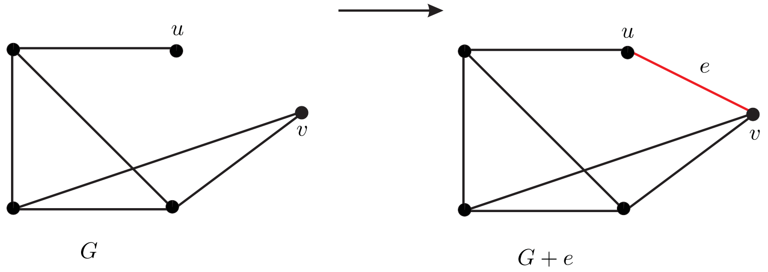
Saka, ka **grafs** H **ir iegūts no grafa G, atņemot no tā šķautni e**, ja $VH = VG$, bet $EH = EG \setminus \{e\}$. Grafu H apzīmē ar $G - e$.



2. zīm. $G - e$.

3. Šķautnes pievienošana

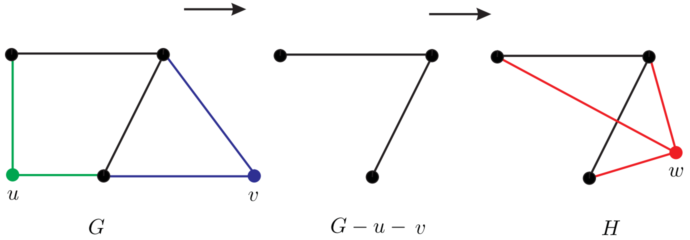
Pieņemsim, ka grafa G virsotnes u un v nav savienotas ar šķautni. Saka, ka **grafs H ir iegūts no grafa G, pievienojot tam šķautni $\mathbf{e} = \{\mathbf{u}; \mathbf{v}\}$**, ja $VH = VG$, bet $EH = EG \cup \{e\}$. Grafu H apzīmē ar $G + e$.



3. zīm. $G + e$.

4. Virsotņu identificēšana

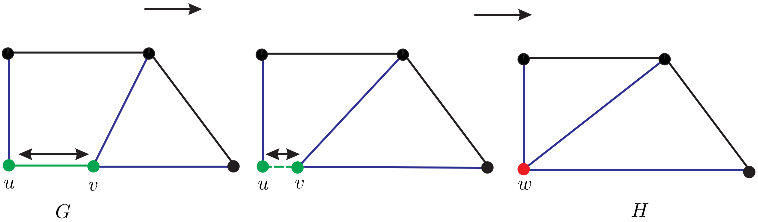
Pieņemsim, ka u un v ir grafa G virsotnes. Rīkosimies šādi: 1) konstruēsim grafu $G-u-v$; 2) pievienosim šim grafam jaunu virsotni w; 3) virsotni w un visas virsotņu u un v blakusvirsotnes savienosim ar šķautnēm. Par iegūto grafu H saka, ka **grafs H ir iegūts no grafa G, identificējot tā virsotnes u un v**.



4. zīm. Grafs H ir iegūts no grafa G, identificējot tā virsotnes u un v.

5. Šķautnes savilkšana

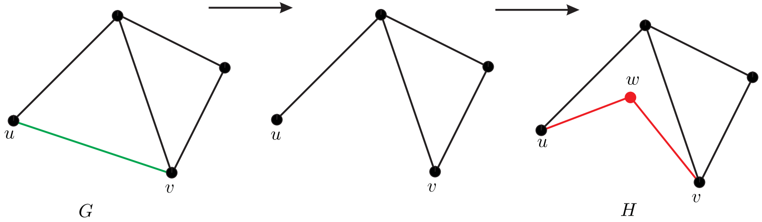
Ar **grafa G šķautnes e = {u; v} savilkšanu** saprot virsotņu u un v identificēšanu. Tātad grafa šķautnes savikšana ir šīs šķautnes galavirsotņu identificēšana.



5. zīm. Grafs H ir iegūts no grafa G, savelkot tā šķautni $\{u; v\}$.

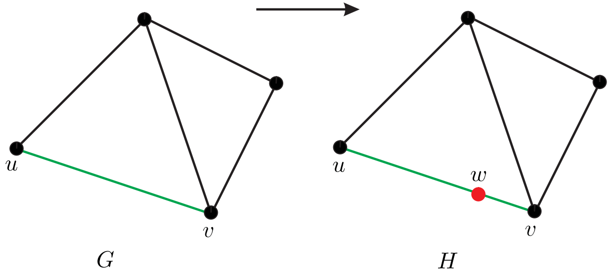
6. Šķautnes sadalīšana

Pieņemsim, ka $e = \{u; v\}$ ir grafa G šķautne. Rīkosimies šādi: 1) konstruēsim grafu $G - e$; 2) pievienosim šim grafam jaunu virsotni w; 3) virsotni w un šķautnes e galavirsotnes u un v savienosim ar šķautnēm. Par iegūto grafu H saka, ka **grafs H ir iegūts no grafa G, sadalot tā šķautni e**.



6. zīm. Grafs H ir iegūts no grafa G, sadalot tā šķautni $\{u; v\}$.

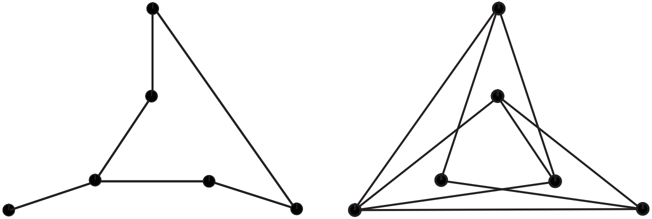
Var teikt arī, ka grafa šķautnes sadalīšana ir jaunas virsotnes pievienošana dotajai šķautnei (skat. 7. zīm.).



7. zīm. Grafs H ir iegūts no grafa G, sadalot tā šķautni $\{u; v\}$.

7. Komplementārgrafs

Par **grafa** G **komplementārgrafu** (vai **papildgrafu**) sauc grafu $\overline{G}$, ka $V\overline{G} = VG$, bet divas grafa $\overline{G}$ virsotnes ir blakusvirsotnes tad un tikai tad, kad tās nav blakusvirsotnes grafā G.



(a) G (b) $\overline{G}$

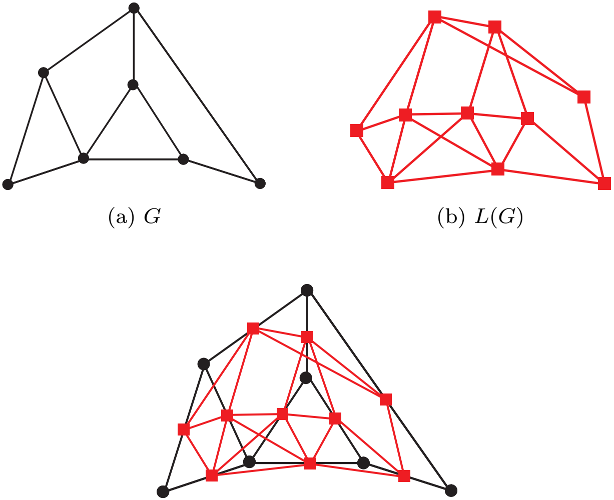
8. zīm. Grafs G un tā komplementārgrafs $\overline{G}$.

Grafu, kurš ir izomorfs savam komplementārgrafam, sauc par **paškomplementāru grafu**. Piemēram, grafi K_1, P_4 un C_5 ir paškomplementāri grafi.

8. Šķautņu grafs

Grafa G **šķautņu grafu** $L = L(G)$ definē šādi:

1. $VL = EG$, t.i., grafa L virsotnes ir grafa G šķautnes;
2. divas grafa L virsotnes e_1 un e_2 ir blakusvirsotnes grafā L tad un tikai tad, kad e_1 un e_2 ir blakusšķautnes grafā G.



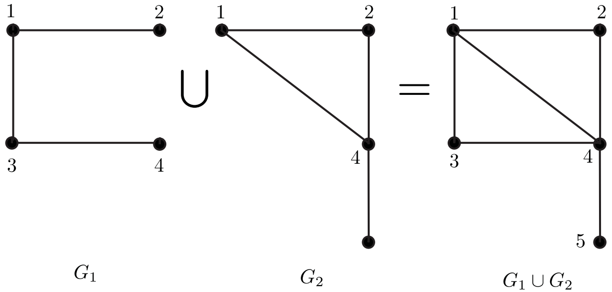
(a) G (b) $L(G)$

(c) G un $L(G)$

9. zīm. Grafs G un tā šķautņu grafs $L(G)$.

9. Grafu apvienojums

Par **grafu $\mathbf{G_1}$ un $\mathbf{G_2}$ apvienojumu** sauc grafu $G_1 \cup G_2$, ka $V(G_1 \cup G_2) = VG_1 \cup VG_2$ un $E(G_1 \cup G_2) = EG_1 \cup EG_2$. Ja $VG_1 \cap VG_2 = \emptyset$, tad grafu G_1 un G_2 apvienojumu sauc par **disjunktīvu**.



10. zīm. Grafu G_1 un G_2 apvienojums $G_1 \cup G_2$.

10. Grafu reizinājums

Par **grafu $\mathbf{G_1}$ un $\mathbf{G_2}$ reizinājumu** sauc grafu $G_1 \times G_2$, ka

1) $V(G_1 \times G_2) = VG_1 \times VG_2$, t.i., grafu G_1 un G_2 reizinājuma virsotņu kopa ir vienāda ar grafu G_1 un G_2 virsotņu kopu Dekarta reizinājumu;

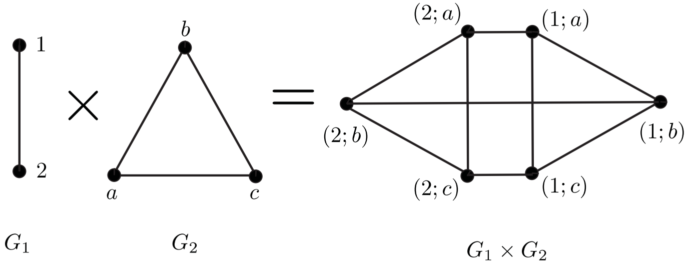
2) grafa $G_1 \times G_2$ virsotnes $(u_1; u_2)$ un $(v_1; v_2)$ ir blakusvirsotnes tad un tikai tad, kad vai nu $u_1 = v_1$, bet u_2 un v_2 ir bakusvirsotnes grafā G_2, vai arī $u_2 = v_2$, bet u_1 un v_1 ir bakusvirsotnes grafā G_1.

Viegli redzēt, ka

$$|V(G_1 \times G_2)| = |V(G_1)| \cdot |V(G_2)|$$

un

$$|E(G_1 \times G_2)| = |V(G_1)| \cdot |E(G_2)| + |V(G_2)| \cdot |E(G_1)|.$$



11. zīm. Grafu G_1 un G_2 reizinājums $G_1 \times G_2$.