DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Grafu izomorfisms

2024. gada 4. jūnijs

2024

Saturs

1. Izomorfu grafu jēdziens

Grafu teorijā pēta tās grafu īpašības, kuras nav atkarīgas no grafu virsotņu apzīmējumiem, t.i., grafu teorijā neatšķir grafus, kurus iegūst vienu no otra mainot virsotņu apzīmējumus. Iepriekš teikto formalizē grafu izomorfisma jēdziens.

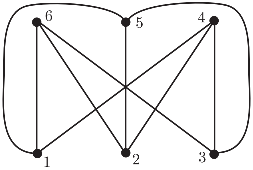
Apskatīsim grafus G un H.

Bijekciju $\varphi : VG \to VH$ sauc par **grafu G un H izomorfismu**, ja grafa G jebkuru divu virsotņu u un v attēli $\varphi(u)$ un $\varphi(v)$ ir blakusvirsotnes grafā H tad un tikai tad, kad u un v ir blakusvirsotnes grafā G.

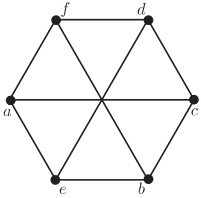
Ja eksistē vismaz viens grafu G un H izomorfisms, tad raksta $G \cong H$ un saka, ka **grafi G un H ir izomorfi**.

Grafu izomorfisma problēma: *noteikt, vai divi dotie grafi ir izomorfi, vai nav izomorfi, ir viena no svarīgākajām grafu teorijas problēmām.*

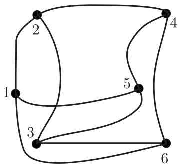
2. Izomorfu (neizomorfu) grafu piemēri



(a) G_1



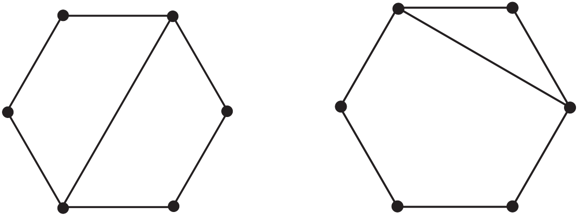
(b) G_2



(c) G_3

1. zīm. Savstarpēji izomorfi grafi G_1, G_2 un G_3.

2. zīm. attēlotie grafi nav ne savstarpēji izomorfi, ne izomorfi ne ar vienu no 1. zīm. attēlotajiem grafiem.



(a) (b)

2. zīm. Neizomorfi grafi.

3. Neiezīmēti grafi

Acīmredzami, ka attieksme "būt par izomorfiem grafiem" ir ekvivalences attieksme, jo šī attieksme ir

1. *refleksīva*, t.i., $G \cong G$;
2. *simetriska*, t.i., ja $G \cong H$, tad $H \cong G$;
3. *transitīva*, t.i., ja $G \cong H$ un $H \cong L$, tad $G \cong L$,

kur G, H un L ir patvaļīgi grafi. Tāpēc visus grafus var sadalīt ekvivalences klasēs tā, ka katras klases jebkuri divi grafi ir izomorfi, bet jebkuri divi dažādu klašu grafi nav izomorfi.

Katru izomorfo grafu klasi sauc par **abstraktu grafu** vai **neiezīmētu grafu**.

Grafu teorija pēta tās grafu īpašības, kuras ir invariantas attiecībā pret grafu izomorfismiem. Tātad grafu teorijā pēta abstrakto grafu īpašības.

4. Iezīmēti grafi

Taču grafu teorijā neaprobežojas tikai ar abstrakto grafu pētīšanu. Tiek pētīti arī iezīmētie grafi.

Ar **iezīmētu grafu** saprot jebkuru grafu paragrāfā "Grafa jēdziens" apskatītās grafa definīcijas nozīmē, pie tam divus grafus G un H uzskata par **vienādiem** un raksta $G = H$ tad un tikai tad, kad $VG = VH$ un $EG = EH$, t.i., šiem grafiem ir viena un tā pati virsotņu kopa, kā arī viena un tā pati šķautņu kopa.

Tātad $G = H$ ***nozīmē sakārtotu pāru*** $G = (VG; EG)$ ***un*** $H = (VH; EH)$ ***vienādību!***

Kāds ir visu n-kārtas iezīmēto grafu skaits? Apskatīsim visus grafus ar fiksētu virsotņu kopu V, $|V| = n$. Šie grafi atšķiras viens no otra tikai ar šķautnēm. Tādēļ šo grafu skaits ir vienāds ar visu kopas $V^{(2)}$ apakškopu skaitu, t.i., ar $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Virsotņu skaits n	Iezīmēto grafu ar n virsotnēm skaits $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$	Neiezīmēto grafu ar n virsotnēm skaits
1	1	1
2	2	2
3	8	4
4	64	11
5	1024	34
6	32768	156
7	2097152	1044
8	268435456	12346
9	68719476736	274668

Grafu teorijā pierāda, ka *visu n-tās kārtas iezīmēto grafu skaits ir "aptuveni" $n!$ reižu lielāks nekā visu n-tās kārtas neiezīmēto grafu skaitu.* Precīzāk, ir spēkā **Poijas formula**:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g_n}{\frac{f_n}{n!}} = 1,$$

kur

g_n ir visu neiezīmēto grafu ar n virsotnēm skaits,

$f_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ir visu iezīmēto grafu ar n virsotnēm skaits.

No Poijas formulas izriet aptuvena vienādība:

$$g_n \approx \frac{f_n}{n!}$$

jeb

$$\frac{f_n}{g_n} \approx n!.$$

Intuitīvi šis fakts liekas skaidrs: izmantojot n apzīmējumus, doto n virsotņu kopu var apzīmēt tieši $n!$ dažādos veidos. Taču no tā vēl neseko, ka no katra neiezīmēta grafa var iegūt $n!$ dažādus iezīmētus grafus.

Piemēram, no grafa G (skat. 3.(a) zīm.) iegūst trīs (skat. 3.(b), 3.(c), 3.(d) zīm.), nevis sešus, dažādus iezīmētus grafus.

Tiešām, pieņemsim, ka vienkāršās ķēdes $G = P_3$

- virsotņu kopa ir $V = \{1; 2; 3\}$,
- šķautņu kopa ir $E = \big\{\{1; 2\}; \{2; 3\}\big\}$.

Virsotņu kopas V elementu apzīmējumus var izmainīt

$$3! = 6$$

veidos. Tad, protams, attiecīgi izmainīsies arī šķautņu kopas:

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad E_1 = \{\{1;2\};\{2;3\}\};$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2 = \{\{3;2\};\{2;1\}\};$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad E_3 = \{\{2;1\};\{1;3\}\};$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_4 = \{\{3;1\};\{1;2\}\};$$

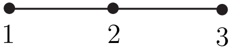
$$5. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad E_5 = \{\{1;3\};\{3;2\}\};$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_6 = \{\{2;3\};\{3;1\}\}.$$

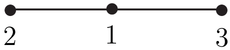
Ieguvām 6 grafus $G_i = (V;E_i)$ $(i = \overline{1;6})$. Taču tikai trīs no tiem ir dažādi, jo

$$G_1 = G_2, \;\; G_3 = G_4, \;\; G_5 = G_6.$$

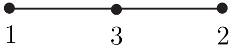
(a) G



(b) $G_1 = G_2$



(c) $G_3 = G_4$



(d) $G_5 = G_6$

3. zīm.

5. Izomorfu grafu raksturojums, lietojot to kaimiņmatricas

Par **permutāciju matricu** sauc kvadrātveida bināru matricu, kuras katrā rindiņā un kolonnā atrodas tieši viens vieninieks.

Teorēma. *Grafi G_1 un G_2 ir izomorfi tad un tikai tad, kad eksistē permutāciju matrica P, ka $M(G_1) = P^T \cdot M(G_2) \cdot P$, kur P^T ir matricas P transponētā matrica.*

Piemērs. Pierādīsim, lietojot teorēmu, ka grafi G_1 un G_2 (skat. 1.(a) un 1.(b) zīm.) ir izomorfi. Grafu G_1 un G_2 kaimiņmatricas:

$$M(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Apskatīsim bijekciju $\varphi : VG_2 \to VG_1$, ka

$$\varphi : \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 6 \end{array},$$

un tai atbilstošo permutāciju matricu:

$$P = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Tad

$$P^T = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Aprēķinām:

$$P^T \cdot M(G_2) \cdot P = (P^T \cdot M(G_2)) \cdot P =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(G_1).$$

Tātad grafi G_1 un G_2 ir izomorfi. Iepriekšējos spriedumos izmantojām matricu reizināšanas asociativitāti.