DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Grafi ar svariem

2022. gada 13. septembris

2022

Saturs

1. Grafa ar svariem jēdziens

G - patvaļīgs netukšs sakarīgs grafs.

Pieņemsim, ka grafa G šķautņu kopā EG ir definēta nenegatīva funkcija $\omega : EG \to \mathbb{R}$ (tātad $\omega(e) \geq 0$ jebkurai grafa G šķautnei e). Šo funkciju ω sauc par **grafa G šķautņu svaru funkciju** (vienkārši **svaru funkciju**).

Skaitli $\omega(e)$, kur $e \in EG$, sauc par **šķautnes e svaru** (vai **garumu**).

Pāri $(G;\omega)$, kas sastāv no grafa G un svaru funkcijas $\omega : EG \to \mathbb{R}$, sauc par **grafu ar svariem**.

Atzīmēsim, ka jebkuru grafu G var uzlūkot kā grafu ar svariem, ja uzskatīt, ka jebkuras grafa G šķautnes svars ir vienāds ar 1.

Apskatīsim grafu ar svariem $(G;\omega)$. Pieņemsim, ka grafam G ir n virsotnes $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Par **grafa ar svariem** $(G;\omega)$ **svaru matricu** sauc matricu $\omega(G) = (\omega_{ij})$, ka

$$\omega_{ij} = \begin{cases} \omega\big(\{u_i;u_j\}\big), & \text{ja} \quad i \neq j \text{ un virsotnes } u_i \text{ un } u_j \text{ ir blakusvirsotnes,} \\ \infty, & \text{ja} \quad i \neq j \text{ un virsotnes } u_i \text{ un } u_j \text{ nav blakusvirsotnes,} \\ 0, & \text{ja} \quad i = j, \end{cases}$$

jebkuriem indeksiem $i, j \in \{1; 2; \ldots; n\}$.

Šķautnes $\{u;v\} \in EG$ svaru apzīmēsim arī ar $\omega(u;v)$.

Apskatīsim grafu ar svariem $(G;\omega)$. Pieņemsim, ka u un v ir divas dažādas grafa G virsotnes.

Par **(u; v)-maršruta garumu** (tā kā grafs G ir sakarīgs, tad šāds $(u;v)$-maršruts vienmēr eksistē) sauc visu šo maršrutu sastādošo šķautņu svaru summu.

Par **visīsāko (u; v)-maršrutu** sauc tādu $(u;v)$-maršrutu, kura garums ir vismazākais starp visu $(u;v)$-maršrutu garumiem.

Atzīmēsim, ka visīsākais $(u;v)$*-maršruts vienmēr eksistē. Tiešām, visīsākais* $(u;v)$*-maršruts ir vienkārša ķēde, tāpēc visīsākais* $(u;v)$*-maršruts ir jāmeklē starp vienkāršajām* $(u;v)$*-ķēdēm, kuru skaits ir galīgs.*

Jebkurām divām grafa G dažādām virsotnēm u un v visīsākais $(u;v)$*-maršruts vienmēr e ksistē, pie tam visīsākais* $(u;v)$*-maršruts ir vienkārša ķēde.*

Par **attālumu starp divām dažādām grafa ar svariem** $(G;\omega)$ **virsotnēm u un v** sauc visīsākā $(u;v)$-maršruta garumu un apzīmē to ar $\rho(u;v)$. Uzskata, ka $\rho(u;u)=0$ jebkurai grafa G virsotnei u.

Ja $(G;\omega)$ ir grafs ar svariem, tad ir definēts attēlojums $\rho : VG \times VG \to \mathbb{R}$, kas jebkuram grafa G virsotņu pārim $(u;v)$ piekārto attālumu $\rho(u;v)$ starp virsotnēm u un v. Var pārliecināties, ja visi svari ir pozitīvi, tad attēlojums ρ apmierina visas metrikas aksiomas:

nedeğenerētības aksioma: $\rho(u;v) \geq 0$ jebkurām virsotnēm $u, v \in VG$, pie tam patvaļīgām virsotnēm $u, v \in VG$ ir spēkā $\rho(u;v) = 0$ tad un tikai tad, kad $u = v$;

simetrijas aksioma: jebkurām virsotnēm $u, v \in VG$ ir spēkā $\rho(u;v) = \rho(v;u)$;

trijstūra aksioma: jebkurām virsotnēm $u, v, w \in VG$ ir spēkā nevienādība

$$\rho(u;v) \leq \rho(u;w) + \rho(w;v).$$

Ja $(G;\omega)$ ir grafs ar svariem, tad ir definēta attālumu starp visām grafa G virsotnēm $u_1, u_2, \ldots, u_n$ matrica

$$\rho(G) = \begin{pmatrix} \rho(u_1;u_1) & \rho(u_1;u_2) & \cdots & \rho(u_1;u_n) \\ \rho(u_2;u_1) & \rho(u_2;u_2) & \cdots & \rho(u_2;u_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho(u_n;u_1) & \rho(u_n;u_2) & \cdots & \rho(u_n;u_n) \end{pmatrix}.$$

Matrica $\rho(G)$ ir simetriska, un uz tās galvenās diagonāles atrodas tikai nulles.

2. Grafa ar svariem metriskie raksturojumi

Apskatīsim grafu ar svariem $(G;\omega)$.

Maksimālo attālumu no grafa G virsotnes u līdz visām pārējām grafa G virsotnēm sauc par **virsotnes** u **ekscentrisitāti** un apzīmē ar $e(u)$. Tātad

$$e(u) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{v\in VG} \rho(u;v).$$

Maksimālo no visu grafa G virsotņu ekscentrisitātēm sauc par **grafa** G **diametru** un apzīmē ar $d(G)$. Tātad

$$d(G) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{u\in VG} e(u) = \max_{u\in VG} \max_{v\in VG} \rho(u;v).$$

Minimālo no visu grafa G virsotņu ekscentrisitātēm sauc par **grafa G rādiusu** un apzīmē ar $r(G)$. Tātad

$$r(G) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{u \in VG} e(u) = \min_{u \in VG} \max_{v \in VG} \rho(u; v).$$

Virsotni $u \in VG$ sauc par **grafa G centrālo virsotni**, ja šīs virsotnes ekscentrisitāte ir vienāda ar grafa G rādiusu, t.i., $e(u) = r(G)$.

Virsotni $u \in VG$ sauc par **grafa G perifērijas virsotni**, ja šīs virsotnes ekscentrisitāte ir vienāda ar grafa G diametru, t.i., $e(u) = d(G)$.

Grafa centrālo virsotņu atrašanas uzdevumam ir praktiska nozīme.

Uzdevums par sabiedrisko iestāžu optimālāko izvietošanu.

Pieņemsim, ka dotajā apdzīvotu vietu rajonā ir optimāli jāizvieto sabiedriskās iestādes (skolas, slimnīcas, veikalus, bibliotēkas, policiju utt.), ar to saprotot, ka attālumam no šīm iestādēm līdz vistālāk apdzīvotajām vietām ir jābūt vismazākajam. Apskatīsim grafu ar svariem, kura virsotnes atbilst apdzīvotām vietām, šķautnes atbilst ceļiem, kas savieno šīs apdzīvotās vietas, bet par šķautņu svariem tiek pieņemti attiecīgo ceļu garumi. Tad sabiedriskās iestādes ir optimāli izvietot tajās apdzīvotajās vietās, kuras atbilst apskatāmā grafa centrālajām virsotnēm, citiem vārdiem sakot, uzdevumu par sabiedrisko iestāžu optimālāko izvietošanu grafu teorijas valodā var formulēt šādi: *grafā ar svariem atrast centrālās virsotnes.*