DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Eilera grafi

2024. gada 2. jūnijs

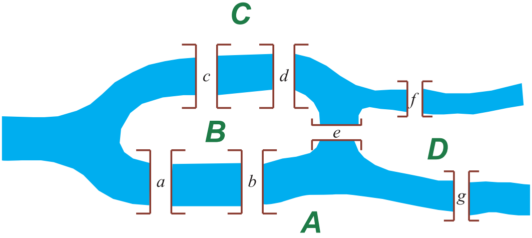
2024

Saturs

1. Uzdevums par Kēnigsbergas tiltiem

1736. gadā L. Eilers publicēja darbu par Kēnigsbergas tiltiem, kurā pirmo reizi tika matemātiski formulēts un atrisināts grafu teorijas uzdevums.

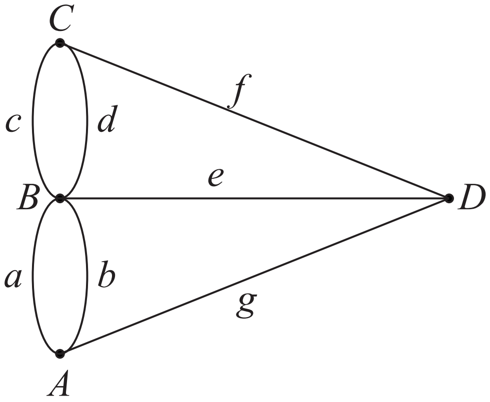
Uzdevums par Kēnigsbergas tiltiem. *Vai var šķērsot katru no septiņiem Kenigsbergas tiltiem, kas savieno upes Prēgeles krastus (skat. 1. zīm.), tikai vienu reizi un atgriezties izejas punktā?*



1. zīm. Kēnigsbergas tiltu plāns.

1. zīm. attēlotajai shēmai piekārtosim multigrafu G, kura virsotnes attēlo sauszemes daļas A, B, C un D, bet šķautnes - tiltus a, b, c, d, e, f un g, pie tam divas virsotnes savienosim ar šķautni tad un tikai tad, kad attiecīgās sauszemes daļas ir savienotas ar tiltu. Multigrafs G ir attēlots 3. zīm.

2. zīm. Leonards Eilers (*Leonhard Euler*, 1707 – 1783) - šveiciešu matemātiķis, kurš sniedzis nozīmīgu ieguldījumu visdažādākajās matemātikas nozarēs: analītiskajā ģeometrijā, trigonometrijā, ģeometrijā, matemātiskajā analīzē, skaitļu teorijā u.c.



3. zīm. Kenigsbergas tiltu plānam atbilstošais multigrafs.

Uzdevumu par Kēnigsbergas tiltiem matemātiski var formulēt šādi: *vai dotajā multigrafā eksistē cikls, kas satur visas dotā multigrafa šķautnes?*

2. Eilera teorēma

Multigrafa G ciklu sauc par **Eilera ciklu**, ja tas satur visas multigrafa G šķautnes. Sakarīgu multigrafu G sauc par **Eilera grafu**, ja tajā eksistē Eilera cikls.

2.1. teorēma. **[Eilera teorēma, 1736. g.]** *Sakarīgs multigrafs ir Eilera grafs tad un tikai tad, kad visām tā virsotnēm ir pāra pakāpes.*

No šīs teorēmas izriet, ka uzdevumam par Kēnigsbergas tiltiem *nav* atrisinājuma, jo visām 3. zīm. attēlotā grafa G virsotnēm ir nepāra pakāpe (lai dotajam uzdevumam nebūtu atrisinājuma, pietiktu konstatēt, ka vienai virsotnei ir nepāra pakāpe).

Eilera teorēmu var paskaidrot šādi: visas dotā sakarīga multigrafa šķautnes, sākot no kādas tā virsotnes, var apiet tā, lai šķautnes neatkārtotos un beigās varētu atgriezties izejas virsotnē, tad un tikai tad, ja, ieejot šī multigrafa patvaļīgā virsotnē pa šķautni, var iziet no šīs virsotnes pa *citu* šķautni, t.i., virsotņu pakāpēm ir jābūt pāra skaitļiem.

3. Puseilera grafi

Multigrafa G ķēdi[1] sauc par **Eilera ķēdi**, ja tā satur visas multigrafa G šķautnes. Sakarīgu multigrafu G sauc par **puseilera grafu**, ja tajā eksistē Eilera ķēde. Atzīmēsim, ka jebkurš Eilera cikls ir Eilera ķēde, bet jebkurš Eilera grafs ir puseilera grafs.

3.1. teorēma. *Sakarīgs multigrafs ir puseilera grafs tad un tikai tad, ja ne vairāk kā divām tā virsotnēm ir nepāra pakāpe.*

3.2. teorēma. *Sakarīgā multigrafā eksistē vaļēja Eilera ķēde tad un tikai tad, ja tikai divām šī multigrafa virsotnēm ir nepāra pakāpe. Šajā gadījumā Eilera ķēdes sākums un beigas atrodas nepāra pakāpes virsotnēs.*

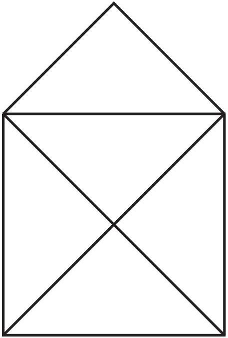
[1] Ķēde un vienkārša ķēde tika definēta grafam, taču acīmredzamā veidā šie jēdzieni var tikt definēti arī multigrafam.

3.3. teorēma. *Ja sakarīgam grafam ir tieši k nepāra pakāpes virsotnes, tad eksistē $\frac{k}{2}$ vaļējas ķēdes*[2]*, ka*

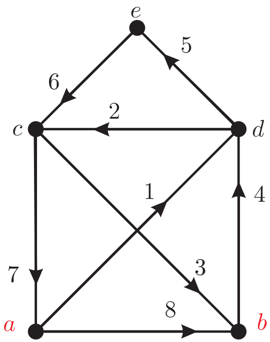
1. *jebkurām divām ķēdēm nav kopīgu šķautņu,*
2. *jebkura grafa šķautne pieder kādai no dotajām ķēdēm.*

Speciālgadījumā, ja $k = 2$, t.i., ja sakarīgā grafā eksistē tieši divas nepāra pakāpes virsotnes, tad šajā grafā eksistē vaļēja ķēde, kas satur visas grafa šķautnes.

[2] Skaitlis k ir pāra skaitlis, jo jebkurā grafā nepāra pakāpes virsotņu skaits ir pāra skaitlis.



4. zīm. "Mājiņas" grafs.



5. zīm. Eilera ķēde "Mājiņas" grafā.

3.1. piemērs. Apskatīsim pazīstamo uzdevumu par "mājiņas" zīmēšanu: vai var uzzīmēt "mājiņu" (skat. 4. zīm.), neatraujot zīmuli no lapas un katru līniju velkot tikai vienu reizi? Ja mēģināsim zīmēt "mājiņu", neatraujot zīmuli no lapas un katru līniju velkot tikai vienu reizi, tā, lai atgrieztos sākumpunktā, tad cietīsim neveiksmi, jo, tā kā "mājiņas" grafa virsotnēm a un b ir nepāra pakāpes, tad "mājiņas" grafs nav Eilera grafs un tāpēc tajā neeksistē Eilera cikls. Taču viegli ievērot, ka "mājiņas" grafs ir puseilera grafs. Tāpēc saskaņā ar 3.2. teorēmu tajā eksistē Eilera ķēde, kuras galavirsotnes atrodas punktos a un b (5. zīm. ir attēlota Eilera ķēde $a, d, c, b, d, e, c, a, b$). Tātad, lai uzzīmētu "mājiņu", neatraujot zīmuli no lapas un katru līniju velkot tikai vienu reizi, zīmēšana ir jāuzsāk virsotnē a (virsotnē b) un jābeidz zīmēt virsotnē b (attiecīgi virsotnē a).

4. Flerī metode

Kā praktiski atrast Eilera ciklu dotajā Eilera grafā G? Šim nolūkam var izmantot šādu metodi [1].

Flerī metode (1883).

1. Izvēlēsimies patvaļīgu grafa G virsotni u un patvaļīgai šķautnei uv piešķirsim iezīmi 1. Izsvītrojam šķautni uv un pārejam virsotnē v.

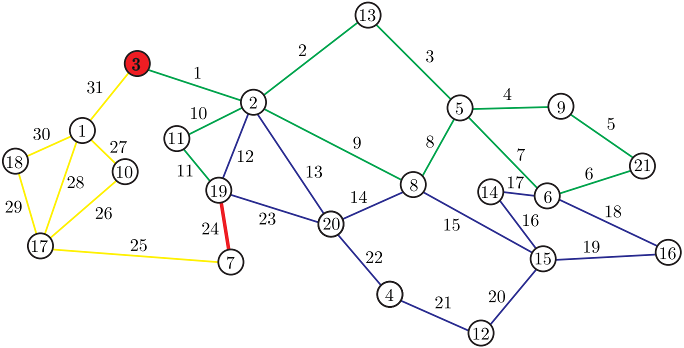
2. Pieņemsim, ka, veicot iepriekšējo soli, kādai šķautnei piešķīrām iezīmi k, izsvītrojām šo šķautni un nonācām virsotnē w. Izvēlamies patvaļīgu šķautni wz, piešķiram tai iezīmi $k+1$ un pārejam virsotnē z, *pie tam* ***neizsvītroto*** *šķautņu grafā tiltu izvēlamies tikai tad, ja nav citu iespēju.*

3. Metodes darbu beidzam, kad visas grafa šķautnes ir izsvītrotas un līdz ar to ir ieguvušas iezīmes $1, 2, \ldots, m$, kur $m = |EG|$. Šķautņu iezīmes parāda, kādā secībā šķautnes ietilpst Eilera ciklā.

4.1. piemērs. 6. zīm. attēlotais grafs ir Eilera grafs, jo tas ir sakarīgs un visām tā virsotnēm ir pāra pakāpe. Atradīsim tajā Eilera ciklu, lietojot Flerī metodi. Sāksim, piemēram, ar virsotni 3. Izvēlamies tai incidentu šķautni $\{3;2\}$, piešķiram tai iezīmi 1, izsvītrojam šo šķautni un pārejam virsotnē 2. Izvēlamies virsotnei 2 incidentu šķautni $\{2;13\}$, piešķiram tai iezīmi 2, izsvītrojam šo šķautni un pārejam virsotnē 13. Izvēlamies virsotnei 13 incidentu šķautni $\{13;5\}$, piešķiram tai iezīmi 3, izsvītrojam šo šķautni un pārejam virsotnē 5 utt. Turpinām tā, kā ir parādīts 6. zīm. Pieņemsim, ka šķautnei $\{11;19\}$ piešķīrām iezīmi 11, izsvītrojām to un nonācām virsotnē 19. *Kā nākamo nedrīkst izvēlēties šķautni* $\{19;7\}$, *jo šķautne* $\{19;7\}$ *ir* ***tilts*** *neizsvītroto šķautņu grafā (tiešām, ja izmest šķautni* $\{19;7\}$, *tad neizsvītroto šķautņu grafs sadalīsies divās komponentēs, kuru šķautnes ir dzeltenā un zilā krāsā).* Tāpēc kā nākamo izvēlamies šķautni $\{19;2\}$, piešķiram tai iezīmi 12, izsvītrojam to un pārejam virsotnē 2 utt. Tālākā šķautņu izvēle ir parādīta 6. zīm. Flerī metodes darbu beidzam, kad pēdējai šķautnei esam piekārtojuši iezīmi 31 un nonākuši izejas virsotnē 3.

Tādā veidā tiek iegūts Eilera cikls:

$$3, 2, 13, 5, 9, 21, 6, 5, 8, 2, 11, 19, 2, 20, 8, 15, 14, 6, 16, 15,$$
$$12, 4, 20, 19, 7, 17, 10, 1, 17, 18, 1, 3.$$



6. zīm. Flerī metodes realizācija

4.1. piezīme. Flerī metodi var lietot arī, lai atrastu vaļēju Eilera ķēdi dotajā puseilera grafā ar tieši divām nepāra pakāpes virsotnēm. Šajā gadījumā par pirmo virsotni ir jāizvēlas vienu no divām nepāra pakāpes virsotnēm. Flerī metodes pēdējā solī nonāksim otrajā nepāra pakāpes virsotnē.

5. Eilera orgrafi

Orgrafa G ķēdi, kas satur visus orgrafa G lokus, sauc par **Eilera ķēdi**.

Vāji sakarīgu orgrafu G sauc par **Eilera orgrafu**, ja tas satur ciklisku Eilera ķēdi.

5.1. teorēma. *Vāji sakarīgs orgrafs G ir Eilera orgrafs tad un tikai tad, ja jebkurai tā virsotnei $u \in AG$ ir spēkā $\deg^+(u) = \deg^-(u)$, t.i., jebkurā orgrafa virsotnē ieejošo un izejošo loku skaits ir vienāds.*

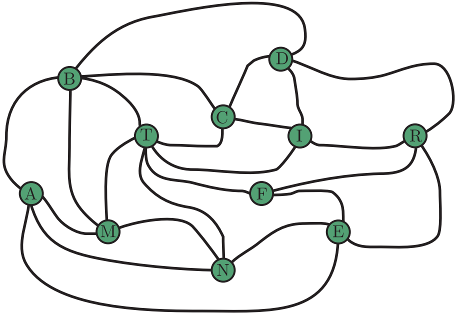
5.2. teorēma. *Vāji sakarīgs orgrafs G satur vaļēju Eilera ķēdi tad un tikai tad, kad tajā eksistē divas virsotnes u un v $(u \neq v)$, ka*

$$\boldsymbol{\deg^+(u) = \deg^-(u) + 1, \quad \deg^+(v) = \deg^-(v) - 1,}$$

bet $\deg^+(w) = \deg^-(w)$ jebkurai tā virsotnei $w \in AG$, kas ir atšķirīga no u un v. Šajā gadījumā jebkuras orgrafa G vaļējas Eilera ķēdes sākums atrodas virsotnē u un beigas atrodas virsotnē v.

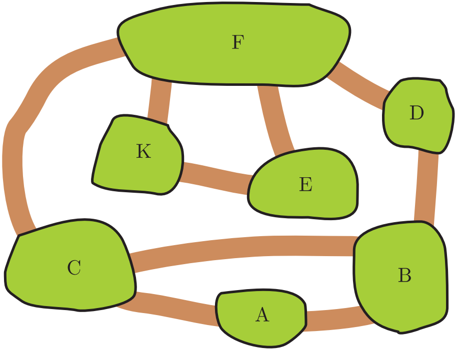
6. Uzdevumi

1. Nelielā birzī atrodas zaķis. Viņš izlēcis no paslēptuves un skrējis no koka pie koka, atstādams pēdas (skat. 7. zīm.), un beidzot paslēpies zem viena no kokiem. Kur zaķis atrodas patlaban? Zem kura koka viņš bija paslēpies sākumā?



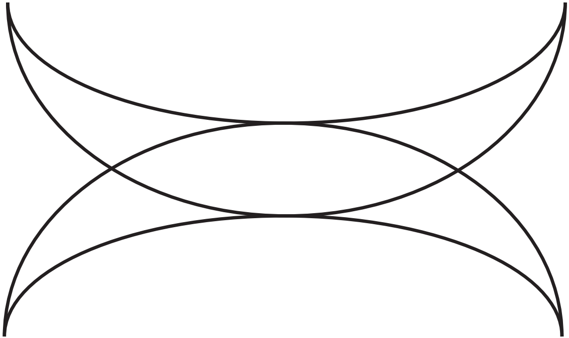
7. zīm.

2. Ezerā atrodas septiņas salas, kuras savstarpēji savienotas ar tiltiem (skat. 8. zīm.). Uz kuras salas no motorlaivas jāizsēdina tūristi, lai viņi varētu pāriet pār katru tiltu tieši vienu reizi? No kuras salas motorlaivā pēc tam šie tūristi jāuzņem?



8. zīm.

3. Vai var uzzīmēt Muhameda zobenus (skat. 9. zīm.), neatraujot zīmuli no papīra un katru līniju velkot tikai vienu reizi?



9. zīm.

7. Noderīgas saites

- **Wapedia** Wapedia.mobi – the encyclopedia for mobile devices.
- **Wikipedia** Interneta enciklopēdija.
- **The MacTutor History of Mathematics archive** Matemātikas vēstures resursi.
- **MathWorld** Grafu teorijas resursi.

8. Terminu vārdnīca

Flerī metode

Fleury's algorithm

Eilera grafs

Eulerian graph

puseilera grafs

semi-Eulerian graph

Alfabētiskais rādītājs

Zīmējumu rādītājs

Literatūra

[1] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов.* Наука, Москва, 1990. 13

[2] Pemmaraju S., Skiena S. *Computational Discrete Mathematics. Combinatorics and Graph Theory with Mathematica.* Cambridge University Press, 2003.

[3] Кристофидес Н. *Теория графов.* Мир, Москва, 1978.

[4] Иванов Б.Н. *Дискретная математика. Алгоритмы и программы.* Лаборатория Базовых Знаний, Москва, 2002.