DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Grafi ar svariem (Dijkstras metode)

2022. gada 18. septembris

2022

Saturs

1. Dijkstras metodes apraksts

Dijkstras metode ļauj noteikt visīsāko maršrutu starp divām grafa vai orgrafa ar nenegatīviem svariem virsotnēm. Atšķirībā no Floida metodes netiek meklēti visīsākie maršruti starp jebkurām divām virsotnēm.

Tiks meklēts visīsākais $(s;t)$-maršruts orgrafā $(G;\omega)$. Loka $(u;v) \in AG$ svaru apzīmēsim ar $\omega(u;v)$.

Dijkstras metode.

1. Virsotnei s piešķiram *patstāvīgu* iezīmi $\lambda(s) = 0$. Visām pārējām orgrafa G virsotnēm $u \in VG$ $(u \neq s)$ piešķiram *pagaidu* iezīmi $\lambda(u) = \infty$. Pieņemam, ka $p = s$. [Visām virsotnēm piešķiram vēl vienu iezīmi: $\theta(u) = s$, ja $u \in \Gamma^+(p)$ vai $u = p$; $\theta(u) = 0$, ja $u \notin \Gamma^+(p)$ un $u \neq p$]

2. Katrai virsotnei $u \in \Gamma^+(p)$ ar *pagaidu* iezīmi izpildām:
   - 2.1. Ja $\lambda(u) > \lambda(p)+\omega(p;u)$, tad izmainām virsotnes u *pagaidu* iezīmi: $\lambda(u) = \lambda(p) + \omega(p;u)$. [Izmainām arī otru iezīmi: $\theta(u) = p$]
   - 2.2. Ja $\lambda(u) \leq \lambda(p)+\omega(p;u)$, tad iezīmi $\lambda(u)$ nemainām. [Iezīmi $\theta(u)$ arī nemainām]

3. Pieņemsim, ka $\widetilde{A}$ ir visu virsotņu u ar *pagaidu* iezīmēm $\lambda(u)$ kopa. Atrodam šīs kopas virsotni u^* ar vismazāko iezīmi:

$$\lambda(u^*) = \min_{u \in \widetilde{A}} \lambda(u).$$

Uzskatām virsotnes u^* iezīmi $\lambda(u^*)$ par *patstāvīgu.*

4. Apskatām virsotni $p = u^*$. Ja $p = t$, tad pārejam pie 5. punkta. Ja $p \neq t$, tad pārejam pie 2. punkta.

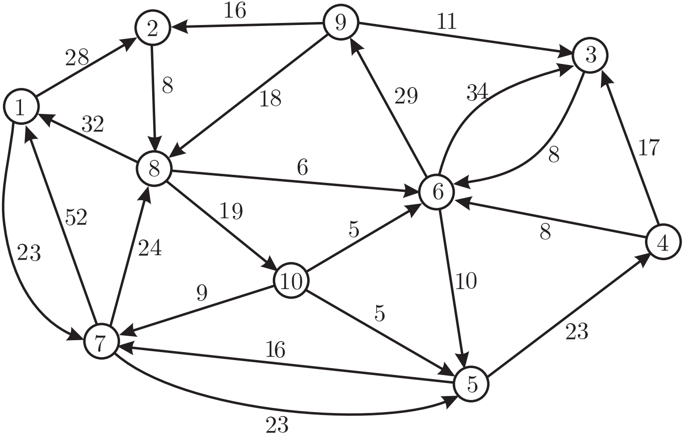
5. Dijkstras metodes darba beigas. Lai atrast visīsāko $(s;t)$-maršrutu, rīkojas šādi:

   - atrod virsotni $u_{j_1} \in \Gamma^{-1}(t)$, ka
   $$\lambda(t) = \lambda(u_{j_1}) + \omega(u_{j_1};t);$$
   - atrod virsotni $u_{j_2} \in \Gamma^{-1}(u_{j_1})$, ka
   $$\lambda(u_{j_1}) = \lambda(u_{j_2}) + \omega(u_{j_2};u_{j_1}) \text{ utt.};$$
   - pēc galīga skaita soļu iegūst $u_{j_m} = s$;

   tad
   $$s = u_{j_m}, u_{j_{m-1}}, \ldots, u_{j_2}, u_{j_1}, t$$
   ir visīsākais $(s;t)$-maršruts ar garumu $\lambda(t)$. [Visīsāko $(s;t)$-maršrutu var noteikt arī šādi:
   $$s, \ldots, \theta(\theta(\theta(t))), \theta(\theta(t)), \theta(t), t.]$$

2. Piemērs

Atradīsim visīsāko $(7;9)$-maršrutu 1. zīm. attēlotajā orgrafā $(G;\omega)$, lietojot Dijkstras metodi.



1. zīm.

Orgrafa G svaru matrica:

$$\omega(G) = \begin{pmatrix} 0 & 28 & \infty & \infty & \infty & \infty & 23 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 17 & 0 & \infty & 8 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 23 & 0 & \infty & 16 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 34 & \infty & 10 & 0 & \infty & \infty & 29 & \infty \\ 52 & \infty & \infty & \infty & 23 & \infty & 0 & 24 & \infty & \infty \\ 32 & \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 0 & \infty & 19 \\ \infty & 16 & 11 & \infty & \infty & \infty & \infty & 18 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 5 & 9 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}.$$

1. solis. Apskatīsim pirmo virsotni $s = 7$.

Tā kā $\Gamma^{+}(7) = \{1; 5; 8; \}$, tad virsotnēm 1, 5, 8 un 7 iezīmes θ vērtība ir vienāda ar 7, bet pārējām virsotnēm ar 0.

Visām virsotnēm, izņemot $s = 7$, pagaidu iezīmes λ vērtība ir vienāda ar ∞.

Virsotnei $s = 7$ patstāvīgā iezīme λ ir vienāda ar 0.

Virsotne u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\theta(u)$	7	0	0	0	7	0	7	7	0	0
Pagaidu iezīmes $\lambda(u)$	∞	∞	∞	∞	∞	∞		∞	∞	∞
Patstāvīgās iezīmes $\lambda(u)$							0			

Apskatām virsotni $p = 7$.

2. solis. Apskatām virsotnes $p = 7$ izejošo pusapkārtni un izsvītrojam no tās virsotnes ar patstāvīgām iezīmēm (protams, ja tādas ir): $\Gamma^+(7) = \{1; 5; 8\}$.

$$\lambda(1) = \infty > 52 = 0 + 52 = \lambda(7) + \omega(7;1) \quad \Longrightarrow \quad \lambda(1) = 52$$
$$\lambda(5) = \infty > 23 = 0 + 23 = \lambda(7) + \omega(7;5) \quad \Longrightarrow \quad \lambda(5) = 23$$
$$\lambda(8) = \infty > 24 = 0 + 24 = \lambda(7) + \omega(7;8) \quad \Longrightarrow \quad \lambda(8) = 24$$

Virsotne u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$\theta(u)$	**7**	0	0	0	**7**	0	7	**7**	0	0	
Pagaidu iezīmes $\lambda(u)$	**52**	∞	∞	∞	**23**	∞		**24**	∞	∞	min $= 23$
Patstāvīgās iezīmes $\lambda(u)$					$\Downarrow$		0				

Tā kā virsotnes 5 iezīme ir vismazākā starp visām virsotnēm ar pagaidu iezīmēm, tad virsotnes 5 iezīme $23 = \lambda(5)$ kļūst par *patstāvīgu*. Apskatām virsotni $p = 5$.

3. solis. Apskatām virsotnes $p = 5$ izejošo pusapkārtni un izsvītrojam no tās virsotnes ar patstāvīgām iezīmēm (protams, ja tādas ir): $\Gamma^+(5) = \{4; \cancel{7}\}$.

$$\lambda(4) = \infty > 46 = 23 + 23 = \lambda(5) + \omega(5;4) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(4) = 46$$

Virsotne u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$\theta(u)$	7	0	0	**5**	7	0	7	7	0	0	
Pagaidu iezīmes $\lambda(u)$	52	∞	∞	**46**		∞		24	∞	∞	min $= 24$
Patstāvīgās iezīmes $\lambda(u)$					23		0	$\Downarrow$			

Tā kā virsotnes 8 iezīme ir vismazākā starp visām virsotnēm ar pagaidu iezīmēm, tad virsotnes 8 iezīme $24 = \lambda(8)$ kļūst par *patstāvīgu*. Apskatām virsotni $p = 8$.

4. solis. Apskatām virsotnes $p = 8$ izejošo pusapkārtni un izsvītrojam no tās virsotnes ar patstāvīgām iezīmēm (protams, ja tādas ir): $\Gamma^+(8) = \{1; 6; 10\}$.

$$\lambda(1) = 52 \leq 56 = 24 + 32 = \lambda(8) + \omega(8;1) \quad \Longrightarrow \quad \lambda(1) = 52$$
$$\lambda(6) = \infty > 30 = 24 + 6 = \lambda(8) + \omega(8;6) \quad \Longrightarrow \quad \lambda(6) = 30$$
$$\lambda(10) = \infty > 43 = 24 + 19 = \lambda(8) + \omega(8;10) \quad \Longrightarrow \quad \lambda(10) = 43$$

Virsotne u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$\theta(u)$	7	0	0	5	7	**8**	7	7	0	**8**	
Pagaidu iezīmes $\lambda(u)$	52	∞	∞	46		**30**			∞	**43**	min $= 30$
Patstāvīgās iezīmes $\lambda(u)$					23	$\Downarrow$	0	24			

Tā kā virsotnes 6 iezīme ir vismazākā starp visām virsotnēm ar pagaidu iezīmēm, tad virsotnes 6 iezīme $30 = \lambda(6)$ kļūst par *patstāvīgu*. Apskatām virsotni $p = 6$.

5. solis. Apskatām virsotnes $p = 6$ izejošo pusapkārtni un izsvītrojam no tās virsotnes ar patstāvīgām iezīmēm: $\Gamma^+(6) = \{3;\ \cancel{5}; 9\}$.

$$\lambda(3) = \infty > 64 = 30 + 34 = \lambda(6) + \omega(6;3) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(3) = 64$$
$$\lambda(9) = \infty > 59 = 30 + 29 = \lambda(6) + \omega(6;9) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(9) = 59$$

Virsotne u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$\theta(u)$	7	0	**6**	5	7	8	7	7	**6**	8	
Pagaidu iezīmes $\lambda(u)$	52	∞	**64**	46					**59**	43	min $= 43$
Patstāvīgās iezīmes $\lambda(u)$					23	30	0	24		$\Downarrow$	

Tā kā virsotnes 10 iezīme ir vismazākā starp visām virsotnēm ar pagaidu iezīmēm, tad virsotnes 10 iezīme $43 = \lambda(6)$ kļūst par *patstāvīgu*. Apskatām virsotni $p = 10$.

6. solis. Apskatām virsotnes $p = 10$ izejošo pusapkārtni un izsvītrojam no tās virsotnes ar patstāvīgām iezīmēm: $\Gamma^+(10) = \{\cancel{5}; \cancel{6}; \cancel{7}\}$.

Virsotne u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$\theta(u)$	7	0	6	5	7	8	7	7	6	8	
Pagaidu iezīmes $\lambda(u)$	52	∞	64	46					59		min $= 46$
Patstāvīgās iezīmes $\lambda(u)$				$\Downarrow$	23	30	0	24		43	

Tā kā virsotnes 4 iezīme ir vismazākā starp visām virsotnēm ar pagaidu iezīmēm, tad virsotnes 4 iezīme $46 = \lambda(4)$ kļūst par *patstāvīgu*. Apskatām virsotni $p = 4$.

7. solis. Apskatām virsotnes $p = 4$ izejošo pusapkārtni un izsvītrojam no tās virsotnes ar patstāvīgām iezīmēm: $\Gamma^{+}(4) = \{3; \cancel{6}\}$.

$$\lambda(3) = 64 > 63 = 46 + 17 = \lambda(4) + \omega(4;3) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(3) = 63$$

Virsotne u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$\theta(u)$	7	0	**4**	5	7	8	7	7	6	8	
Pagaidu iezīmes $\lambda(u)$	52	∞	**63**						59		min $= 52$
Patstāvīgās iezīmes $\lambda(u)$	$\Downarrow$			46	23	30	0	24		43	

Tā kā virsotnes 1 iezīme ir vismazākā starp visām virsotnēm ar pagaidu iezīmēm, tad virsotnes 1 iezīme $52 = \lambda(1)$ kļūst par *patstāvīgu*. Apskatām virsotni $p = 1$.

8. solis. Apskatām virsotnes $p = 1$ izejošo pusapkārtni un izsvītrojam no tās virsotnes ar patstāvīgām iezīmēm: $\Gamma^{+}(1) = \{2; \cancel{7}\}$.

$$\lambda(2) = \infty > 80 = 52 + 28 = \lambda(1) + \omega(1;2) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(2) = 80$$

Virsotne u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$\theta(u)$	7	**1**	4	5	7	8	7	7	6	8	
Pagaidu iezīmes $\lambda(u)$		**80**	63						59		min $= 59$
Patstāvīgās iezīmes $\lambda(u)$	52			46	23	30	0	24	$\Downarrow$	43	

Tā kā virsotnes 9 iezīme ir vismazākā starp visām virsotnēm ar pagaidu iezīmēm, tad virsotnes 9 iezīme $59 = \lambda(9)$ kļūst par *patstāvīgu*. ***Tā kā $p = 9 = t$, tad jau tagad varam noskaidrot visīsāko $(7;9)$-maršrutu, un konstatēt, ka tā garums ir vienāds ar virsotnes 9 iezīmi 59.*** *Taču turpināsim tālāk, kamēr visu virsotņu iezīmes kļūs par patstāvīgām.* Apskatām virsotni $p = 9$.

9. solis. Apskatām virsotnes $p = 9$ izejošo pusapkārtni un izsvītrojam no tās virsotnes ar patstāvīgām iezīmēm: $\Gamma^+(9) = \{2; 3; \cancel{8}\}$.

$$\lambda(2) = 80 > 75 = 59 + 16 = \lambda(9) + \omega(9; 2) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(2) = 75$$
$$\lambda(3) = 63 \leq 70 = 59 + 11 = \lambda(9) + \omega(9; 3) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(3) = 63$$

Virsotne u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$\theta(u)$	7	**9**	4	5	7	8	7	7	6	8	
Pagaidu iezīmes $\lambda(u)$		**75**	63								min $= 63$
Patstāvīgās iezīmes $\lambda(u)$	52		$\Downarrow$	46	23	30	0	24	59	43	

Tā kā virsotnes 3 iezīme ir vismazākā starp visām virsotnēm ar pagaidu iezīmēm, tad virsotnes 3 iezīme $63 = \lambda(3)$ kļūst par *patstāvīgu*. Apskatām virsotni $p = 3$.

10. solis. Apskatām virsotnes $p = 3$ izejošo pusapkārtni un izsvītrojam no tās virsotnes ar patstāvīgām iezīmēm: $\Gamma^+(3) = \{\cancel{6}\}$.

Virsotne u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$\theta(u)$	7	9	4	5	7	8	7	7	6	8	
Pagaidu iezīmes $\lambda(u)$		75									min $= 75$
Patstāvīgās iezīmes $\lambda(u)$	52	$\Downarrow$	63	46	23	30	0	24	59	43	

Visu virsotņu iezīmes kļuva par patstāvīgām.

Atradīsim visīsāko $(7;9)$-maršrutu. Tā kā

$\Gamma^-(9) = \{6\}$ un

$$\lambda(9) - \lambda(6) = 59 - 30 = 29 = \omega(6;9),$$

tad $u_{j_1} = 6$;

$\Gamma^-(6) = \{3;8;10\}$ un

$$\lambda(6) - \lambda(3) = 30 - 63 = -33 \neq 8 = \omega(3;6),$$
$$\lambda(6) - \lambda(8) = 30 - 24 = 6 = 6 = \omega(8;6),$$
$$\lambda(6) - \lambda(10) = 30 - 43 = -13 \neq 5 = \omega(10;6),$$

tad $u_{j_2} = 8$;

$\Gamma^{-}(8) = \{2; 7; 9\}$ un

$$\lambda(8) - \lambda(2) = 24 - 75 = -51 \neq 8 = \omega(2; 8),$$
$$\lambda(8) - \lambda(7) = 24 - 0 = 24 = \omega(7; 8),$$
$$\lambda(8) - \lambda(9) = 24 - 59 = -25 \neq 18 = \omega(9; 8),$$

tad $u_{j_3} = 7 = s$;

tāpēc

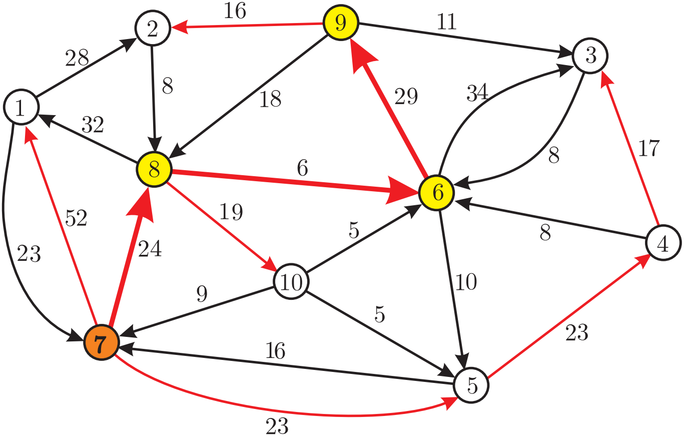
$$s = u_{j_3}, u_{j_2}, u_{j_1}, t \quad \text{jeb} \quad 7, 8, 6, 9$$

ir visīsākais $(7; 9)$-maršruts ar garumu $\lambda(t) = \lambda(9) = 59$.

[Tā kā

$$t = 9,$$
$$\theta(9) = 6,$$
$$\theta(6) = \theta(\theta(9)) = 8,$$
$$\theta(8) = \theta(\theta(\theta(9))) = 7 = s,$$

tad iegūstam to pašu visīsāko $(7; 9)$-maršrutu: 7,8,6,9.]


16
9
11
2
28
3
8
1
18
32
29
34
8
17
8
6
6
19
52
5
8
4
23
24
10
10
9
5
23
7
16
5
23

2. zīm.

3. Piezīmes

3.1. piezīme. Redzam, ka iezīmju $\lambda(u)$ virkne

$$52\ 75\ 63\ 46\ 23\ 30\ 0\ 24\ 59\ 43$$

sakrīt ar attālumu matricas

$$\rho(G) = \begin{pmatrix} 0 & 28 & 76 & 69 & 46 & 42 & 23 & 36 & 71 & 55 \\ 40 & 0 & 48 & 47 & 24 & 14 & 36 & 8 & 43 & 27 \\ 86 & 53 & 0 & 41 & 18 & 8 & 34 & 55 & 37 & 74 \\ 86 & 53 & 17 & 0 & 18 & 8 & 34 & 55 & 37 & 74 \\ 68 & 76 & 40 & 23 & 0 & 31 & 16 & 40 & 60 & 59 \\ 78 & 45 & 34 & 33 & 10 & 0 & 26 & 47 & 29 & 66 \\ 52 & 75 & 63 & 46 & 23 & 30 & 0 & 24 & 59 & 43 \\ 32 & 51 & 40 & 39 & 16 & 6 & 28 & 0 & 35 & 19 \\ 50 & 16 & 11 & 52 & 29 & 19 & 45 & 18 & 0 & 37 \\ 61 & 50 & 39 & 28 & 5 & 5 & 9 & 33 & 34 & 0 \end{pmatrix}$$

septīto rindiņu. Iezīmju $\lambda(u)$ virkne vienmēr sakrīt ar attāluma matricas $\rho(G)$ attiecīgo rindiņu!

Iezīmju $\theta(u)$ virkne

$$7\,9\,4\,5\,7\,8\,0\,7\,6\,8$$

sakrīt matricas

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 5 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 5 & 6 & 8 & 10 & 2 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 4 & 6 & 4 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 6 & 5 & 6 & 6 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 5 & 7 & 8 & 7 & 7 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 6 & 5 & 6 & 8 & 10 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 9 & 5 & 6 & 3 & 5 & 9 & 9 & 8 \\ 7 & 9 & 6 & 5 & 10 & 10 & 10 & 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

septīto rindiņu. Matricas $\rho(G)$ un P^{10} tika iegūtas, pielietojot Floida metodi 1. zīm. attēlotajam orgrafam ar nenegatīviem svariem. Atzīmēsim, ka vispārīgā gadījumā iezīmju $\theta(u)$ virkne var atšķirties no matricas P^n attiecīgās rindiņas.

3.2. piezīme. Ja kāda virsotne v ir sasniedzama no virsotnes u, tad Dijkstras metode ļauj atrast visīsāko maršrutu no virsotnes u līdz virsotnei v. ***Kā noteikt, vai virsotne v ir sasniedzama no virsotnes u?*** Atbilde uz šo jautājumu ir šāda:

- ja virsotne v ir ieguvusi patstāvīgu iezīmi $\lambda(v) = \infty$, tad virsotne v ***nav*** sasniedzama no virsotnes u;
- ja virsotne v ir ieguvusi patstāvīgu iezīmi $\lambda(v) \neq \infty$, tad virsotne v ***ir*** sasniedzama no virsotnes u.

Mūsu piemērā visas virsotnes ir ieguvušas patstāvīgas iezīmes, kas nav vienādas ar ∞, tāpēc visas orgrafa virsotnes ir sasniedzamas no virsotnes 7.

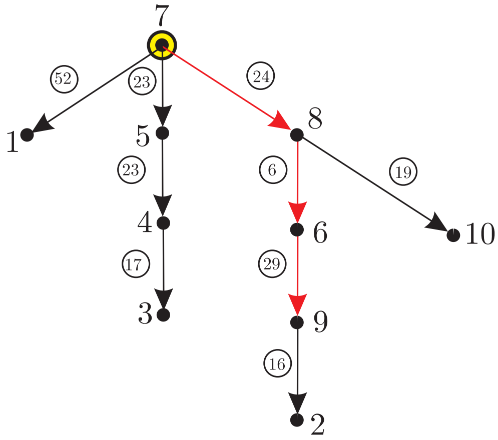
3.3. piezīme. Ja *no virsotnes u ir sasniedzamas visas pārējās orgrafa G virsotnes*, tad, lietojot iezīmes $\theta(u)$, var konstruēt orgrafa $(G;\omega)$ visīsāko maršrutu no virsotnes u orientētu parciālkoku T_u.

Mūsu piemērā virsotnes u ieguva šādas patstāvīgas iezīmes:

Virsotne u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
Iezīme $\theta(u)$	7	9	4	5	7	8	7	7	6	8

Parciālkoka T_7 loki un to svari:

Loki	(7;1)	(9;2)	(4;3)	(5;4)	(7;5)	(8;6)	(7;8)	(6;9)	(8;10)
Svari	52	16	17	23	23	6	24	29	19



3. zīm. Parciālkoks T_7.

Visīsākais $(7;9)$-maršruts ir 7,8,6,9 ar garumu

$$\lambda(9) = \rho(7;9) = 24 + 6 + 29 = 59.$$

Literatūra

[1] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич Р.И. *Лекции по теории графов*. Наука, Москва, 1990.

[2] Новиков Ф.А. *Дискретная математика для программистов*. Питер, СПб, 2000.