DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Grafi ar svariem (Visīsākie un visgarākie maršruti orgrafos bez kontūriem)

2020. gada 27. septembris

2020

Saturs

1. Orgrafu bez kontūriem īpašības

Šajā paragrāfā aplūkosim speciālu orgrafu klasi - orgrafus bez kontūriem. Šādiem orgrafiem piemīt interesantas īpašības, kuras izsaka nākamā teorēma.

1.1. teorēma. *Ja orgrafam G nav kontūru, tad eksistē vismaz viena virsotne $u \in VG$, kurā neieiet neviens loks, t.i., $\Gamma^{-}(u) = \emptyset$, un eksistē vismaz viena virsotne $v \in VG$, no kuras neiziet neviens loks, t.i., $\Gamma^{+}(v) = \emptyset$. Virsotni u sauc par* ***orgrafa G avotu****, bet virsotni v - par* ***orgrafa G ieteci****.*

Tātad no avota loki tikai iziet, bet ietecē loki tikai ieiet.

Ja $(G; \omega)$ ir orgafs bez kontūriem ar patvaļīgu svaru funkciju ω, tad vienmēr var atrast visīsākos maršrutus no avota līdz ietecei ar Floida metodi, jo, ja nav kontūru, tad nav arī negatīva svara kontūru. Ja attāluma funkcija ρ apmierina trijstūra likumu, tad orgrafam var pielietot Dijkstras metodi. Turpmāk orgrafiem bez kontūriem un ar nenegatīvu svaru funkciju aplūkosim vēl vienu metodi, kas ļauj atrast visīsāko maršrutu no avota līdz ietecei. Apskatīsim arī metodi, kas ļauj atrast visgarāko maršrutu no avota līdz ietecei.

Orgrafiem bez kontūriem piemīt vēl viena interesanta īpašība: *šāda grafa virsotnes var sanumurēt tā, lai katrs loks izietu no virsotnes ar mazāku numuru un ieietu virsotnē ar lielāku numuru.* Lai to paveiktu orgrafam G ar n virsotnēm, rīkojas šādi.

0. Avotam piešķiram apzīmējumu u_0.

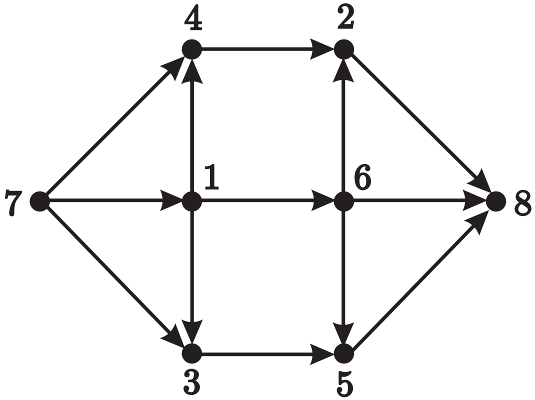
1. No orgrafa G atmetam avotu u_0 un visus tam incidentos lokus. Iegūstam orgrafu G_1 bez kontūriem, kuram saskaņā ar 1.1. teorēmu eksistē avoti. Šiem avotiem piešķiram apzīmējumus u_i ar mazākajiem indeksiem no kopas $A = \{1; 2; \ldots ; n-2\}$ (indekss $n-1$ tiek rezervēts ietecei) un izsvītrojam tos no kopas A. Pāri palikušo indeksu kopu apzīmēsim ar A_1.

2. No orgrafa G_1 atmetam avotus un incidentos tiem lokus. Iegūstam orgrafu G_2 bez kontūriem, kuram saskaņā ar 1.1. teorēmu eksistē avoti. Šiem avotiem piešķiram apzīmējumus u_i ar mazākajiem indeksiem no kopas A_1 un izsvītrojam tos no kopas A_1. Pāri palikušo indeksu kopu apzīmēsim ar A_2 utt. Ieteces apzīmējums būs u_{n-1}.

1.1. piemērs. Nākamajos zīmējumos ir attēlota orgrafa G bez kontūriem (skat. 1. zīm.) virsotņu pārnumurēšana saskaņā ar iepriekš minēto paņēmienu. Rezultātā tiek iegūts orgrafs $\widetilde{G}$ bez kontūriem (skat. 7. zīm.), kura katrs loks iziet no virsotnes ar mazāku numuru un ieiet virsotnē ar lielāku numuru.

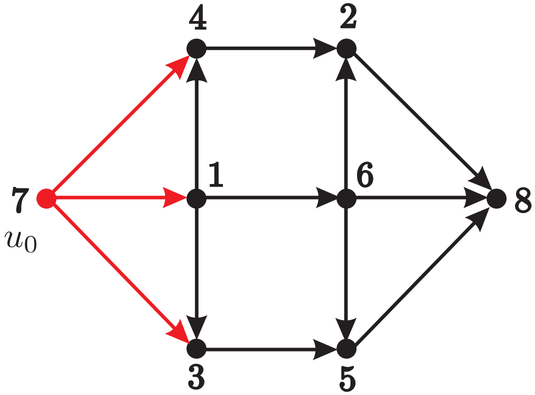
Vecie virsotņu apzīmējumi	1	2	3	4	5	6	7	8
	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
Jaunie virsotņu apzīmējumi	u_1	u_6	u_2	u_4	u_5	u_3	u_0	u_7

0. solis



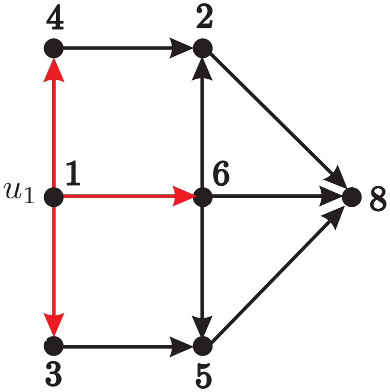
1. zīm.

1. solis



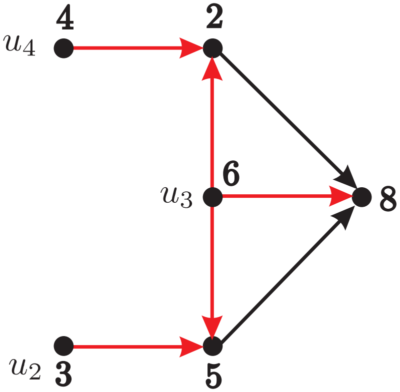
2. zīm.

2. solis



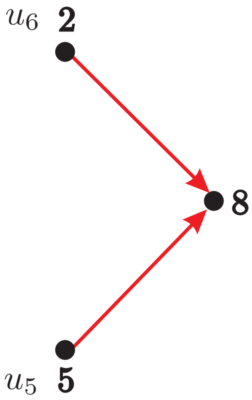
3. zīm.

3. solis



4. zīm.

4. solis

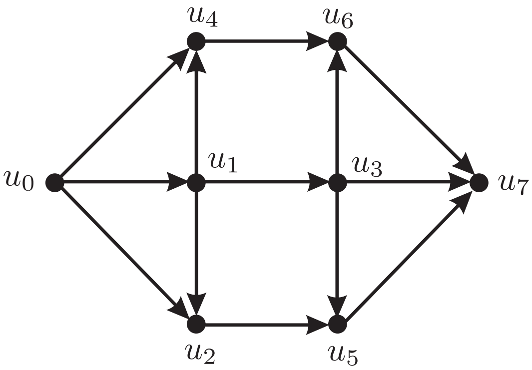


5. zīm.

5. solis

6. zīm.

6. solis



7. zīm.

2. Visīsākie maršruti orgrafos bez kontūriem

Apskatīsim orgrafu $(G;\omega)$ bez kontūriem un ar *nenegatīvu svaru funkciju* $\omega : AG \to \mathbb{R}$. Visīsāko maršrutu no orgrafa G avotam līdz ietecei var noteikt šādi. Pieņemsim, ka orgrafa G virsotnes ir sanumurētas tā, ka katrs loks iziet no virsotnes ar mazāku numuru un ieiet virsotnē ar lielāku numuru.

Visīsāko maršrutu orgrafos bez kontūriem noteikšana.

1. Avotam u_0 piešķiram iezīmi $\lambda(u_0) = 0$, bet visām pārējam virsotnēm iezīmi ∞: $\lambda(u_i) = \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

2. Katram $i = 1, 2, \ldots, n-1$ virsotnei u_i piešķiram iezīmi:

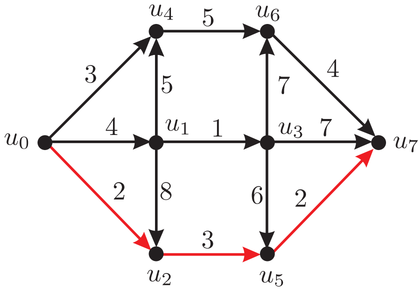
$$\lambda(u_i) = \min\{\lambda(u_{i_1}) + \omega(u_{i_1}; u_i); \lambda(u_{i_2}) + \omega(u_{i_2}; u_i); \ldots; \\ \lambda(u_{k_i}) + \omega(u_{k_i}; u_i)\},$$

kur $\{u_{i_1}; u_{i_2}; \ldots; u_{k_i}\} = \Gamma^-(u_i)$, $k_i = \deg^-(u_i)$, citiem vārdiem sakot,

$$\lambda(u_i) = \min_{w \in \Gamma^-(u_i)} \lambda(w) + \omega(w; u_i).$$

3. Ja $\lambda(u_{n-1}) = \infty$, tad visīsākais $(u_0; u_{n-1})$-maršruts neeksistē. Ja $\lambda(u_{n-1}) \neq \infty$, tad visīsākais $(u_0; u_{n-1})$-maršruts eksistē, un tā garums ir vienāds ar $\lambda(u_{n-1})$. Lai atrast visīsāko $(u_0; u_{n-1})$-maršrutu, rīkojas šādi:
   – atrod virsotni $u_{j_1} \in \Gamma^{-1}(u_{n-1}))$, ka
   $$\lambda(u_{n-1}) = \lambda(u_{j_1}) + \omega(u_{j_1}; u_{n-1});$$
   – atrod virsotni $u_{j_2} \in \Gamma^{-1}(u_{j_1})$, ka
   $$\lambda(u_{j_1}) = \lambda(u_{j_2}) + \omega(u_{j_2}; u_{j_1}) \text{ utt.};$$
   – pēc galīga skaita soļu iegūst $u_{j_m} = u_0$;

   tad
   $$u_0 = u_{j_m}, u_{j_{m-1}}, \ldots, u_{j_2}, u_{j_1}, u_{n-1}$$
   ir visīsākais $(u_0; u_{n-1})$-maršruts ar garumu $\lambda(u_{n-1})$.



8. zīm.

2.1. piemērs. 8. zīm. ir attēlots orgrafs $(G; \omega)$ bez kontūriem un ar nenegatīvu svaru funkciju ω. Orgrafa G virsotnes ir sanumurētas tā, ka katrs loks iziet no virsotnes ar mazāku numuru un ieiet virsotnē ar lielāku numuru. Atradīsim visīsāko maršrutu starp orgrafa G avotu u_0 un ieteci u_7. Orgrafa G ieejošo virsotņu pusapkārtnes ir šādas:

$\Gamma^-(u_0)$			
$\Gamma^-(u_1)$	u_0		
$\Gamma^-(u_2)$	u_0	u_1	
$\Gamma^-(u_3)$	u_1		
$\Gamma^-(u_4)$	u_0	u_1	
$\Gamma^-(u_5)$	u_2	u_3	
$\Gamma^-(u_6)$	u_3	u_4	
$\Gamma^-(u_7)$	u_3	u_5	u_6

0. Avotam u_0 piešķiram iezīmi $\lambda(u_0) = 0$, bet visām pārējam virsotnēm iezīmi ∞: $\lambda(u_i) = \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$.
1. Tā kā $\Gamma^-(u_1) = \{u_0\}$, tad
$$\lambda(u_1) = \min\{\lambda(u_0) + \omega(u_0; u_1)\} = \min\{0 + 4\} = \min\{4\} = 4;$$
2. Tā kā $\Gamma^-(u_2) = \{u_0; u_1\}$, tad
$$\lambda(u_2) = \min\{\lambda(u_0) + \omega(u_0; u_2); \lambda(u_1) + \omega(u_1; u_2)\} =$$
$$= \min\{0 + 2; 4 + 8\} = \min\{2; 8\} = 2;$$
3. Tā kā $\Gamma^-(u_3) = \{u_1\}$, tad
$$\lambda(u_3) = \min\{\lambda(u_1) + \omega(u_1; u_3)\} = \min\{4 + 1\} = \min\{5\} = 5;$$
4. Tā kā $\Gamma^-(u_4) = \{u_0; u_1\}$, tad
$$\lambda(u_4) = \min\{\lambda(u_0) + \omega(u_0; u_4); \lambda(u_1) + \omega(u_1; u_4)\} =$$
$$= \min\{0 + 3; 4 + 5\} = \min\{3; 9\} = 3;$$

5. Tā kā $\Gamma^{-}(u_5) = \{u_2; u_3\}$, tad

$$\lambda(u_5) = \min\{\lambda(u_2) + \omega(u_2; u_5); \lambda(u_3) + \omega(u_3; u_5)\} =$$
$$= \min\{2 + 3; 5 + 6\} = \min\{5; 11\} = 5;$$

6. Tā kā $\Gamma^{-}(u_6) = \{u_3; u_4\}$, tad

$$\lambda(u_6) = \min\{\lambda(u_3) + \omega(u_3; u_6); \lambda(u_4) + \omega(u_4; u_6)\} =$$
$$= \min\{5 + 7; 3 + 5\} = \min\{12; 8\} = 8;$$

7. Tā kā $\Gamma^{-}(u_7) = \{u_3; u_5; u_6\}$, tad

$$\lambda(u_7) = \min\{\lambda(u_3) + \omega(u_3; u_7); \lambda(u_5) + \omega(u_5; u_7); \lambda(u_6) + \omega(u_6; u_7)\} =$$
$$= \min\{5 + 7; 5 + 2; 8 + 4\} = \min\{12; 7; 12\} = 7.$$

Orgrafa G virsotnes ieguva šādas iezīmes:

u_j	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
$\lambda(u_j)$	0	4	2	5	3	5	8	7

Tā kā visu virsotņu iezīmes nav vienādas ar ∞, tad visas virsotnes u_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ ir sasniedzamas no avota u_0. ***Visīsākā maršruta no avota*** u_0 ***līdz ietecei*** u_7 ***garums ir vienāds ar ieteces iezīmi*** $\lambda(u_7) = 7$***!***

Atradīsim visīsāko $(u_0; u_7)$-maršrutu. Tā kā

$\Gamma^{-}(u_7) = \{u_3; u_5; u_6\}$ un

$$\lambda(u_7) - \lambda(u_3) = 7 - 5 = 2 \neq 7 = \omega(u_3; u_7),$$
$$\lambda(u_7) - \lambda(u_5) = 7 - 5 = 2 = \omega(u_5; u_7),$$
$$\lambda(u_7) - \lambda(u_6) = 7 - 8 = -1 \neq 4 = \omega(u_6; u_7),$$

tad $u_{j_1} = u_5$;
$\Gamma^{-1}(5) = \{u_2; u_3\}$ un

$$\lambda(u_5) - \lambda(u_2) = 5 - 2 = 3 = \omega(u_2; u_5),$$
$$\lambda(u_5) - \lambda(u_3) = 5 - 5 = 0 \neq 6 = \omega(u_3; u_5),$$

tad $u_{j_2} = u_2$;
$\Gamma^{-1}(2) = \{u_0; u_1\}$ un

$$\lambda(u_2) - \lambda(u_0) = 2 - 0 = 2 = \omega(u_0; u_2),$$
$$\lambda(u_2) - \lambda(u_1) = 2 - 4 = -2 \neq 8 = \omega(u_1; u_2),$$

tad $u_{j_3} = u_0$;

tāpēc

$$u_{j_3}, u_{j_2}, u_{j_1}, u_7 \quad \text{jeb} \quad u_0, u_2, u_5, u_7$$

ir visīsākais $(u_0; u_7)$-maršruts ar garumu $\lambda(u_7) = 7$ (skat. 8. zīm.).

3. Visgarākie maršruti orgrafos bez kontūriem

Ja orgrafā bez kontūriem ietece ir sasniedzama no avota, tad visgarākais maršruts starp avotu un ieteci vienmēr eksistē!

Apskatīsim orgrafu $(G;\omega)$ bez kontūriem un ar *nenegatīvu svaru funkciju* $\omega : AG \to \mathbb{R}$. Visgarāko maršrutu no orgrafa G avotam līdz ietecei var noteikt šādi. Pieņemsim, ka orgrafa G virsotnes ir sanumurētas tā, ka katrs loks iziet no virsotnes ar mazāku numuru un ieiet virsotnē ar lielāku numuru.

Visgarāko maršrutu orgrafos bez kontūriem noteikšana.

1. Visām orgrafa G virsotnēm piešķiram iezīmi 0:

$$\lambda(u_j) = 0 \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

2. Katram $i = 1, 2, \ldots, n-1$ virsotnei u_i piešķiram iezīmi:

$$\lambda(u_i) = \max\{\lambda(u_{i_1}) + \omega(u_{i_1}; u_i); \lambda(u_{i_2}) + \omega(u_{i_2}; u_i); \ldots; \\ \lambda(u_{k_i}) + \omega(u_{k_i}; u_i)\},$$

kur $\{u_{i_1}; u_{i_2}; \ldots; u_{k_i}\} = \Gamma^-(u_i)$, $k_i = \deg^-(u_i)$, citiem vārdiem sakot,

$$\lambda(u_i) = \max_{w \in \Gamma^-(u_i)} \lambda(w) + \omega(w; u_i).$$

3. Ja $\lambda(u_{n-1}) = 0$, tad visgarākais $(u_0; u_{n-1})$-maršruts neeksistē. Ja $\lambda(u_{n-1}) \neq 0$, tad visgarākais $(u_0; u_{n-1})$-maršruts eksistē, un tā garums ir vienāds ar $\lambda(u_{n-1})$. Lai atrast visgarāko $(u_0; u_{n-1})$-maršrutu, rīkojas šādi:
   - atrod virsotni $u_{j_1} \in \Gamma^{-1}(u_{n-1}))$, ka
   $$\lambda(u_{n-1}) = \lambda(u_{j_1}) + \omega(u_{j_1}; u_{n-1});$$
   - atrod virsotni $u_{j_2} \in \Gamma^{-1}(u_{j_1})$, ka
   $$\lambda(u_{j_1}) = \lambda(u_{j_2}) + \omega(u_{j_2}; u_{j_1}) \text{ utt.};$$
   - pēc galīga skaita soļu iegūst $u_{j_m} = u_0$;

   tad
   $$u_0 = u_{j_m}, u_{j_{m-1}}, \ldots, u_{j_2}, u_{j_1}, u_{n-1}$$
   ir visgarākais $(u_0; u_{n-1})$-maršruts ar garumu $\lambda(u_{n-1})$.

3.1. piemērs. 8. zīm. ir attēlots orgrafs $(G;\omega)$ bez kontūriem un ar nenegatīvu svaru funkciju ω. Orgrafa G virsotnes ir sanumurētas tā, ka katrs loks iziet no virsotnes ar mazāku numuru un ieiet virsotnē ar lielāku numuru. Atradīsim visgarāko maršrutu starp orgrafa G avotu u_0 un ieteci u_7. Orgrafa G ieejošo virsotņu pusapkārtnes ir šādas:

$\Gamma^-(u_0)$			
$\Gamma^-(u_1)$	u_0		
$\Gamma^-(u_2)$	u_0	u_1	
$\Gamma^-(u_3)$	u_1		
$\Gamma^-(u_4)$	u_0	u_1	
$\Gamma^-(u_5)$	u_2	u_3	
$\Gamma^-(u_6)$	u_3	u_4	
$\Gamma^-(u_7)$	u_3	u_5	u_6

0. Visām orgrafa G virsotnēm piešķiram iezīmi 0: $\lambda(u_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, 7)$.
1. Tā kā $\Gamma^-(u_1) = \{u_0\}$, tad

$$\lambda(u_1) = \max\{\lambda(u_0) + \omega(u_0; u_1)\} = \max\{0 + 4\} = \max\{4\} = 4;$$

2. Tā kā $\Gamma^-(u_2) = \{u_0; u_1\}$, tad

$$\begin{aligned}\lambda(u_2) &= \max\{\lambda(u_0) + \omega(u_0; u_2); \lambda(u_1) + \omega(u_1; u_2)\} = \\ &= \max\{0 + 2; 4 + 8\} = \max\{2; 12\} = 12;\end{aligned}$$

3. Tā kā $\Gamma^-(u_3) = \{u_1\}$, tad

$$\lambda(u_3) = \max\{\lambda(u_1) + \omega(u_1; u_3)\} = \max\{4 + 1\} = \max\{5\} = 5;$$

4. Tā kā $\Gamma^-(u_4) = \{u_0; u_1\}$, tad

$$\begin{aligned}\lambda(u_4) &= \max\{\lambda(u_0) + \omega(u_0; u_4); \lambda(u_1) + \omega(u_1; u_4)\} = \\ &= \max\{0 + 3; 4 + 5\} = \max\{3; 9\} = 9;\end{aligned}$$

5. Tā kā $\Gamma^-(u_5) = \{u_2; u_3\}$, tad

$$\begin{aligned}\lambda(u_5) &= \max\{\lambda(u_2) + \omega(u_2; u_5); \lambda(u_3) + \omega(u_3; u_5)\} = \\ &= \max\{12 + 3; 5 + 6\} = \max\{15; 11\} = 15;\end{aligned}$$

6. Tā kā $\Gamma^-(u_6) = \{u_3; u_4\}$, tad

$$\begin{aligned}\lambda(u_6) &= \max\{\lambda(u_3) + \omega(u_3; u_6); \lambda(u_4) + \omega(u_4; u_6)\} = \\ &= \max\{5 + 7; 9 + 5\} = \max\{12; 14\} = 14;\end{aligned}$$

7. Tā kā $\Gamma^-(u_7) = \{u_3; u_5; u_6\}$, tad

$$\begin{aligned}\lambda(u_7) &= \max\{\lambda(u_3) + \omega(u_3; u_7); \lambda(u_5) + \omega(u_5; u_7); \lambda(u_6) + \omega(u_6; u_7)\} = \\ &= \max\{5 + 7; 15 + 2; 14 + 4\} = \max\{12; 17; 18\} = 18.\end{aligned}$$

Orgrafa G virsotnes ieguva šādas iezīmes:

u_j	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
$\lambda(u_j)$	0	4	12	5	9	15	14	18

Tā kā visu virsotņu iezīmes u_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ nav vienādas ar 0, tad visas virsotnes u_i ir sasniedzamas no avota u_0. ***Visgarākā maršruta no avota*** u_0 ***līdz ietecei*** u_7 ***garums ir vienāds ar ieteces iezīmi*** $\lambda(u_7) = 18$***!***

Atradīsim visgarāko $(u_0; u_7)$-maršrutu. Tā kā

$\Gamma^-(u_7) = \{u_3; u_5; u_6\}$ un

$$\lambda(u_7) - \lambda(u_3) = 18 - 5 = 13 \neq 7 = \omega(u_3; u_7),$$
$$\lambda(u_7) - \lambda(u_5) = 18 - 15 = 3 \neq 2 = \omega(u_5; u_7),$$
$$\lambda(u_7) - \lambda(u_6) = 18 - 14 = 4 = \omega(u_6; u_7),$$

tad $u_{j_1} = u_6$;

$\Gamma^{-1}(6) = \{u_3; u_4\}$ un

$$\lambda(u_6) - \lambda(u_3) = 14 - 5 = 9 \neq 7 = \omega(u_3; u_6),$$
$$\lambda(u_6) - \lambda(u_4) = 14 - 9 = 5 = \omega(u_4; u_6),$$

tad $u_{j_2} = u_4$;

$\Gamma^{-1}(4) = \{u_0; u_1\}$ un

$$\lambda(u_4) - \lambda(u_0) = 9 - 0 = 9 \neq 3 = \omega(u_0; u_4),$$
$$\lambda(u_4) - \lambda(u_1) = 9 - 4 = 5 = \omega(u_1; u_4),$$

tad $u_{j_3} = u_1$;

$\Gamma^{-1}(1) = \{u_0\}$ un

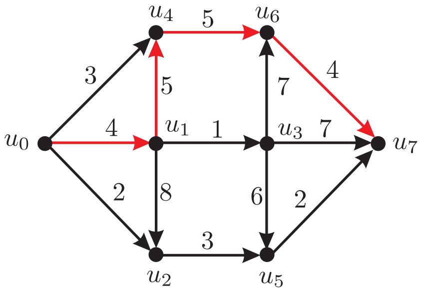
$$\lambda(u_1) - \lambda(u_0) = 4 - 0 = 4 = \omega(u_0; u_1),$$

tad $u_{j_4} = u_0$;

tāpēc

$$u_{j_4}, u_{j_3}, u_{j_2}, u_{j_1}, u_7 \quad \text{jeb} \quad u_0, u_1, u_4, u_6, u_7$$

ir visgarākais $(u_0; u_7)$-maršruts ar garumu $\lambda(u_7) = 18$ (skat. 9. zīm.).



9. zīm.

3.2. piemērs. Būvējot māju, ir jāizpilda virkne darbu, pie tam katra darba izpildei ir nepieciešams noteikts dienu skaits, un pirms dažu darbu izpildīšanas ir jābūt pabeigtiem dažiem citiem darbiem.

	Darbs	Nepieciešamais dienu skaits, lai izpildītu darbu	Pirms kuriem darbiem ir jāizpilda dotais darbs
1.	Zemes darbi	2	2
2.	Pamati	4	3
3.	Sienas	10	4,6,7
4.	Santehniskie darbi mājas ārienē	4	5,9
5.	Santehniskie darbi mājas iekšienē	5	10
6.	Elektrība	7	10
7.	Jumts	6	8
8.	Ārējo sienu pabeigšana	7	9
9.	Ārējā krāsošana	9	14
10.	Iekšējo sienu apdare	8	11,12
11.	Grīdas	4	13
12.	Iekšējā krāsošana	5	13
13.	Iekšdarbu pabeigšana	6	
14.	Ārdarbu pabeigšana	2	

Tātad zemes darbi (1.) ir jāizpilda pirms pamatu (2.) būvēšanas. Pamatu (2.) būvēšana ir jāveic pirms sienu (3.) būvēšanas utt.

Kāds ir minimālais dienu skaits, lai izpildītu visus darbus? Ievedīsim vēl divus fiktīvus darbus:

0. Darbu sākšana.

15. Darbu beigšana.

Izveidosim orgrafu G (skat. 10. zīm.) ar svariem šādi:

- orgrafa G virsotnes ir darbi $0, 1, 2, \ldots, 15$;
- no virsotnes i iziet loks uz virsotni j tad un tikai tad, kad darbs i ir jāizpilda pirms darba j;
- loka $(i; j)$ svars ir vienāds ar dienu skaitu, lai izpildītu darbu i.

Izrādās, ka *minimālais dienu skaits, lai izpildītu visus darbus, ir vienāds ar visgarākā* $(0; 15)$*-maršruta garumu orgrafā* G*!*

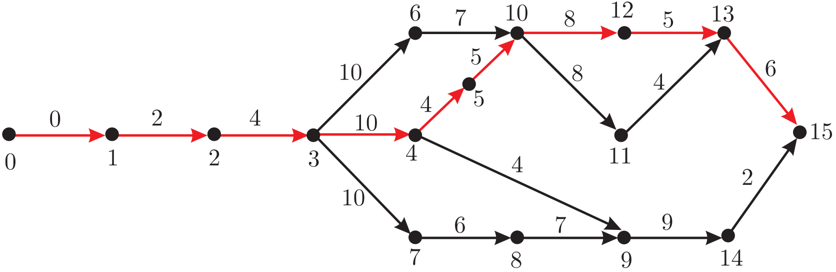
Lietojot iepriekš apskatīto metodi, atrodam visgarāko $(0; 15)$-maršruta garumu orgrafā G:

$$0, 1, 2, 3, 45, 10, 12, 13, 15,$$

kura garums ir

$$0 + 2 + 4 + 10 + +4 + 5 + 8 + 5 + 6 = 44.$$

Tātad, *lai izpildītu visus darbus un uzbūvētu māju, ir nepieciešamas vismaz 44 dienas.*



10. zīm.

Alfabētiskais rādītājs

Zīmējumu rādītājs

Literatūra

[1] Dambītis J. *Modernā grafu teorija.* Datorzinību Centrs, Rīga, 2002.