DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Fizikas un matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Grafi ar svariem (Belmana-Forda metode)

2020. gada 27. septembris

2020

Saturs

1. Belmana-Forda metodes apraksts

Ja Dijkstras metode ļauj noteikt visīsākos maršrutus no dotās orgrafa G (ar ***nenegatīviem svariem***) virsotnes u līdz visām pārējām šī orgrafa virsotnēm, tad Belmana-Forda (*Bellman-Ford*) metode ļauj noteikt visīsākos maršrutus no dotās orgrafa G (ar ***patvaļīgiem svariem***) virsotnes u līdz visām pārējām šī orgrafa virsotnēm pie nosacījuma, ka ***orgrafam*** G ***nav negatīva svara kontūru***.

Pārnumurēsim orgrafa G virsotnes tā, lai $u_1 = u$.

Belmana-Forda metode.

1. Katrai virsotnei $v \in VG$ piešķirsim divas iezīmes $\lambda(v)$ un $\theta(v)$:

$$\lambda(u_1) = 0, \ \ \lambda(u_j) = \infty \ (j = 2, \ldots, n);$$

$$\forall v \in VG: \ \theta(v) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad v \in \Gamma^+(u_1) \text{ vai } v = u_1, \\ 0, & \text{ja} \quad v \notin \Gamma^+(u_1) \text{ un } v \neq u_1. \end{cases}$$

2. $i := 1$.

3. Katrai virsotnei $u_j \in \Gamma^+(u_i)$ izpildām:

   3.1. ja $\lambda(u_j) > \lambda(u_i) + \omega(u_i; u_j)$ un $j > i$, tad

   $$\lambda(u_j) = \lambda(u_i) + \omega(u_i; u_j), \ \ \theta(u_j) = u_i;$$

   3.2. ja $\lambda(u_j) > \lambda(u_i) + \omega(u_i; u_j)$ un $j < i$, tad

   $$\lambda(u_j) = \lambda(u_i) + \omega(u_i; u_j), \ \ \theta(u_j) = u_i, \ \ i = j - 1,$$

   un pārejam pie 4. punkta;

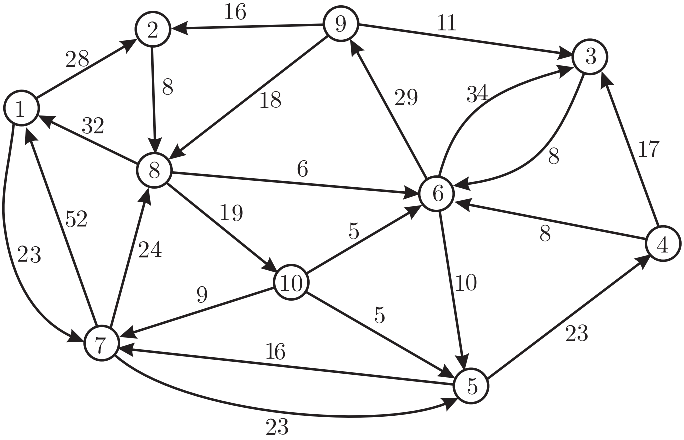
   3.3. ja $\lambda(u_j) \leq \lambda(u_i) + \omega(u_i; u_j)$, tad iezīmes $\lambda(u_j)$ un $\theta(u_j)$ nemaināmām.

4. $i := i + 1$. Ja $i < n$, tad pārejam pie 3. punkta. Ja $i = n$, tad pārejam pie 5. punkta.
5. $\lambda(u_i) = \rho(u_1; u_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Iezīmes $\theta(u_i)$ ļauj noteikt visīsākos $(u_1; u_i)$-maršrutus:

$$u_1, \ldots, \theta(\theta(\theta(u_i))), \theta(\theta(u_i)), \theta(u_i), u_i.$$

2. Piemērs

Atradīsim visīsākos maršrutus no virsotnes 1 līdz visām pārējām 1. zīm. attēlotā orgrafa $(G;\omega)$ virsotnēm, lietojot Belmana-Forda metodi.



1. zīm.

Orgrafa G izejošās pusapkārtnes:

$\Gamma^+(1)$	2	7	
$\Gamma^+(2)$	8		
$\Gamma^+(3)$	6		
$\Gamma^+(4)$	3	6	
$\Gamma^+(5)$	4	7	
$\Gamma^+(6)$	3	5	9
$\Gamma^+(7)$	1	5	8
$\Gamma^+(8)$	1	6	10
$\Gamma^+(9)$	2	3	8
$\Gamma^+(10)$	5	6	7

0. solis.

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(v)$	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
$\theta(v)$	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0

1. solis. $\Gamma^+(1) = \{2; 7\}$.

$$\lambda(2) = \infty > 28 = 0 + 28 = \lambda(1) + \omega(1; 2) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(2) = 28$$

Tā kā $\lambda(2) > \lambda(1) + \omega(1; 2)$ un $2 > 1$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(2)$ virsotni 7.

$$\lambda(7) = \infty > 23 = 0 + 23 = \lambda(1) + \omega(1; 7) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(7) = 23$$

Tā kā $\lambda(7) > \lambda(1) + \omega(1; 7)$, $7 > 1$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(1)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 2.

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(v)$	0	28	∞	∞	∞	∞	23	∞	∞	∞
$\theta(v)$	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0

2. solis. $\Gamma^+(2) = \{8\}$.

$$\lambda(8) = \infty > 36 = 28 + 8 = \lambda(2) + \omega(2;8) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(8) = 36$$

Tā kā $\lambda(8) > \lambda(2) + \omega(2;8)$, $8 > 2$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(2)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 3.

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(v)$	0	28	∞	∞	∞	∞	23	36	∞	∞
$\theta(v)$	1	1	0	0	0	0	1	2	0	0

3. solis. $\Gamma^+(3) = \{6\}$.

$$\lambda(6) = \infty \not> \infty = \infty + 8 = \lambda(3) + \omega(3;6) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(6) = \infty$$

Tā kā $\lambda(6) \not> \lambda(3) + \omega(3;6)$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(3)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 4. Iezīmes $\lambda(u)$ un $\theta(u)$ šajā solī nemainās.

4. solis. $\Gamma^+(4) = \{3; 6\}$.

$$\lambda(3) = \infty \not> \infty = \infty + 17 = \lambda(4) + \omega(4; 3) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(3) = \infty$$

Tā kā $\lambda(3) \not> \lambda(4) + \omega(4; 3)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(4)$ virsotni 6.

$$\lambda(6) = \infty \not> \infty = \infty + 8 = \lambda(4) + \omega(4; 6) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(6) = \infty$$

Tā kā $\lambda(6) \not> \lambda(4) + \omega(4; 6)$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(4)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 5. Iezīmes $\lambda(u)$ un $\theta(u)$ šajā solī nemainās.

5. solis. $\Gamma^+(5) = \{4; 7\}$.

$$\lambda(4) = \infty \not> \infty = \infty + 23 = \lambda(5) + \omega(5; 4) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(4) = \infty$$

Tā kā $\lambda(4) \not> \lambda(5) + \omega(5; 4)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(5)$ virsotni 7.

$$\lambda(7) = \infty \not> \infty = \infty + 16 = \lambda(5) + \omega(5; 7) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(7) = \infty$$

Tā kā $\lambda(7) \not> \lambda(5) + \omega(5; 7)$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(5)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 6. Iezīmes $\lambda(u)$ un $\theta(u)$ šajā solī nemainās.

6. solis. $\Gamma^+(6) = \{3; 5; 9\}$.

$$\lambda(3) = \infty \not> \infty = \infty + 34 = \lambda(6) + \omega(6;3) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(3) = \infty$$

Tā kā $\lambda(3) \not> \lambda(6) + \omega(6;3)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(6)$ virsotni 5.

$$\lambda(5) = \infty \not> \infty = \infty + 10 = \lambda(6) + \omega(6;5) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(5) = \infty$$

Tā kā $\lambda(5) \not> \lambda(6) + \omega(6;5)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(6)$ virsotni 9.

$$\lambda(9) = \infty \not> \infty = \infty + 10 = \lambda(6) + \omega(6;9) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(9) = \infty$$

Tā kā $\lambda(9) \not> \lambda(6) + \omega(6;9)$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(6)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 7. Iezīmes $\lambda(u)$ un $\theta(u)$ šajā solī nemainās.

7. solis. $\Gamma^+(7) = \{1; 5; 8\}$.

$$\lambda(1) = 0 \not> 75 = 23 + 52 = \lambda(7) + \omega(7;1) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(1) = 0$$

Tā kā $\lambda(1) \not> \lambda(7) + \omega(7;1)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(7)$ virsotni 5.

$$\lambda(5) = \infty > 46 = 23 + 23 = \lambda(7) + \omega(7;5) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(5) = 46$$

Tā kā $\lambda(5) > \lambda(7) + \omega(7;5)$ ***un*** $\boxed{5 < 7,}$ ***tad pārejam uz virsotni 5!***

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(v)$	0	28	∞	∞	46	∞	23	36	∞	∞
$\theta(v)$	1	1	0	0	7	0	1	2	0	0

8. solis. $\Gamma^+(5) = \{4; 7\}$.

$$\lambda(4) = \infty > 69 = 46 + 23 = \lambda(5) + \omega(5;4) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(4) = 69$$

Tā kā $\lambda(4) > \lambda(5) + \omega(5;4)$ ***un*** $\boxed{4 < 5,}$ ***tad pārejam uz virsotni 4!***

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(v)$	0	28	∞	69	46	∞	23	36	∞	∞
$\theta(v)$	1	1	0	5	7	0	1	2	0	0

9. solis. $\Gamma^+(4) = \{3; 6\}$.

$$\lambda(3) = \infty > 86 = 69 + 17 = \lambda(4) + \omega(4;3) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(3) = 86$$

Tā kā $\lambda(3) > \lambda(4) + \omega(4;3)$ ***un*** $\boxed{3 < 4,}$ ***tad pārejam uz virsotni 3!***

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(v)$	0	28	86	69	46	∞	23	36	∞	∞
$\theta(v)$	1	1	4	5	7	0	1	2	0	0

10. solis. $\Gamma^+(3) = \{6\}$.

$$\lambda(6) = \infty > 94 = 86 + 8 = \lambda(3) + \omega(3;6) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(6) = 94$$

Tā kā $\lambda(6) > \lambda(3) + \omega(3;6)$, $6 > 3$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(3)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 4.

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(v)$	0	28	86	69	46	94	23	36	∞	∞
$\theta(v)$	1	1	4	5	7	3	1	2	0	0

11. solis. $\Gamma^+(4) = \{3; 6\}$.

$$\lambda(3) = 86 \not> 86 = 69 + 17 = \lambda(4) + \omega(4;3) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(3) = 86$$

Tā kā $\lambda(3) \not> \lambda(4) + \omega(4;3)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(4)$ virsotni 6.

$$\lambda(6) = 94 > 77 = 69 + 8 = \lambda(4) + \omega(4;6) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(6) = 77$$

Tā kā $\lambda(6) > \lambda(4) + \omega(4;6)$, $6 > 4$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(4)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 5.

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(v)$	0	28	86	69	46	77	23	36	∞	∞
$\theta(v)$	1	1	4	5	7	4	1	2	0	0

12. solis. $\Gamma^+(5) = \{4; 7\}$.

$$\lambda(4) = 69 \not> 69 = 46 + 23 = \lambda(5) + \omega(5; 4) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(4) = 69$$

Tā kā $\lambda(4) \not> \lambda(5) + \omega(5; 4)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(5)$ virsotni 7.

$$\lambda(7) = 23 \not> 62 = 46 + 16 = \lambda(5) + \omega(5; 7) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(7) = 23$$

Tā kā $\lambda(7) \not> \lambda(5) + \omega(5; 7)$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(5)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 6. Iezīmes $\lambda(u)$ un $\theta(u)$ šajā solī nemainās.

13. solis. $\Gamma^+(6) = \{3; 5; 9\}$.

$$\lambda(3) = 86 \not> 111 = 77 + 34 = \lambda(6) + \omega(6;3) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(3) = 86$$

Tā kā $\lambda(3) \not> \lambda(6) + \omega(6;3)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(6)$ virsotni 5.

$$\lambda(5) = 46 \not> 87 = 77 + 10 = \lambda(6) + \omega(6;5) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(5) = 46$$

Tā kā $\lambda(5) \not> \lambda(6) + \omega(6;5)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(6)$ virsotni 9.

$$\lambda(9) = \infty > 106 = 77 + 29 = \lambda(6) + \omega(6;9) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(9) = 106$$

Tā kā $\lambda(9) > \lambda(6) + \omega(6;9)$, $9 > 6$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(6)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 7.

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(v)$	0	28	86	69	46	77	23	36	106	∞
$\theta(v)$	1	1	4	5	7	4	1	2	6	0

14. solis. $\Gamma^+(7) = \{1;5;8\}$.

$$\lambda(1) = 0 \not> 75 = 23 + 52 = \lambda(7) + \omega(7;1) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(1) = 0$$

Tā kā $\lambda(1) \not> \lambda(7) + \omega(7;1)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(7)$ virsotni 5.

$$\lambda(5) = 46 \not> 46 = 23 + 23 = \lambda(7) + \omega(7;5) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(5) = 46$$

Tā kā $\lambda(5) \not> \lambda(7) + \omega(7;5)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(7)$ virsotni 8.

$$\lambda(8) = 36 \not> 47 = 23 + 24 = \lambda(7) + \omega(7;8) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(8) = 36$$

Tā kā $\lambda(8) \not> \lambda(7) + \omega(7;8)$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(7)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 8. Iezīmes $\lambda(u)$ un $\theta(u)$ šajā solī nemainās.

15. solis. $\Gamma^+(8) = \{1; 6; 10\}$.

$$\lambda(1) = 0 \not> 68 = 36 + 32 = \lambda(8) + \omega(8;1) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(1) = 0$$

Tā kā $\lambda(1) \not> \lambda(8) + \omega(8;1)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(8)$ virsotni 6.

$$\lambda(6) = 77 > 42 = 36 + 6 = \lambda(8) + \omega(8;6) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(6) = 42$$

Tā kā $\lambda(6) > \lambda(8) + \omega(8;6)$ ***un*** $\boxed{6 < 8,}$ ***tad pārejam uz virsotni 6!***

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(v)$	0	28	86	69	46	42	23	36	106	∞
$\theta(v)$	1	1	4	5	7	8	1	2	6	0

16. solis. $\Gamma^{+}(6) = \{3; 5; 9\}$.

$$\lambda(3) = 86 > 76 = 42 + 34 = \lambda(6) + \omega(6;3) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(3) = 76$$

Tā kā $\lambda(3) > \lambda(6) + \omega(6;3)$ ***un*** $\boxed{3 < 6,}$ ***tad pārejam uz virsotni 3!***

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(v)$	0	28	76	69	46	42	23	36	106	∞
$\theta(v)$	1	1	6	5	7	8	1	2	6	0

17. solis. $\Gamma^+(3) = \{6\}$.

$$\lambda(6) = 42 \not> 84 = 76 + 8 = \lambda(3) + \omega(3;6) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(6) = 42$$

Tā kā $\lambda(6) \not> \lambda(3) + \omega(3;6)$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(3)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 4. Iezīmes $\lambda(u)$ un $\theta(u)$ šajā solī nemainās.

18. solis. $\Gamma^+(4) = \{3; 6\}$.

$$\lambda(3) = 76 \not> 86 = 69 + 17 = \lambda(4) + \omega(4;3) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(3) = 76$$

Tā kā $\lambda(3) \not> \lambda(4) + \omega(4;3)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(4)$ virsotni 6.

$$\lambda(6) = 42 \not> 77 = 69 + 8 = \lambda(4) + \omega(4;6) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(6) = 42$$

Tā kā $\lambda(6) \not> \lambda(4) + \omega(4;6)$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(4)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 5. Iezīmes $\lambda(u)$ un $\theta(u)$ šajā solī nemainās.

19. solis. $\Gamma^+(5) = \{4; 7\}$.

$$\lambda(4) = 69 \not> 69 = 46 + 23 = \lambda(5) + \omega(5;4) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(4) = 69$$

Tā kā $\lambda(4) \not> \lambda(5) + \omega(5;4)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(5)$ virsotni 7.

$$\lambda(7) = 23 \not> 63 = 46 + 17 = \lambda(5) + \omega(5;7) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(7) = 23$$

Tā kā $\lambda(7) \not> \lambda(5) + \omega(5;7)$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(5)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 6. Iezīmes $\lambda(u)$ un $\theta(u)$ šajā solī nemainās.

20. solis. $\Gamma^+(6) = \{3; 5; 9\}$.

$$\lambda(3) = 76 \not> 76 = 42 + 34 = \lambda(6) + \omega(6;3) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(3) = 76$$

Tā kā $\lambda(3) \not> \lambda(6) + \omega(6;3)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(6)$ virsotni 5.

$$\lambda(5) = 46 \not> 52 = 42 + 10 = \lambda(6) + \omega(6;5) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(5) = 46$$

Tā kā $\lambda(5) \not> \lambda(6) + \omega(6;5)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(6)$ virsotni 9.

$$\lambda(9) = 106 > 71 = 42 + 29 = \lambda(6) + \omega(6;9) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(9) = 71$$

Tā kā $\lambda(9) > \lambda(6) + \omega(6;9)$, $9 > 6$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(6)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 7.

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(v)$	0	28	76	69	46	42	23	36	71	∞
$\theta(v)$	1	1	6	5	7	8	1	2	6	0

21. solis. $\Gamma^+(7) = \{1; 5; 8\}$.

$$\lambda(1) = 0 \not> 75 = 23 + 52 = \lambda(7) + \omega(7; 1) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(1) = 0$$

Tā kā $\lambda(1) \not> \lambda(7) + \omega(7; 1)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(7)$ virsotni 5.

$$\lambda(5) = 46 \not> 46 = 23 + 23 = \lambda(7) + \omega(7; 5) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(5) = 46$$

Tā kā $\lambda(5) \not> \lambda(7) + \omega(7; 5)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(7)$ virsotni 8.

$$\lambda(8) = 36 \not> 47 = 23 + 24 = \lambda(7) + \omega(7; 8) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(8) = 36$$

Tā kā $\lambda(8) \not> \lambda(7) + \omega(7; 8)$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(7)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 8. Iezīmes $\lambda(u)$ un $\theta(u)$ šajā solī nemainās.

22. solis. $\Gamma^+(8) = \{1; 6; 10\}$.

$$\lambda(1) = 0 \not> 68 = 36 + 32 = \lambda(8) + \omega(8; 1) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(1) = 0$$

Tā kā $\lambda(1) \not> \lambda(8) + \omega(8; 1)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(8)$ virsotni 6.

$$\lambda(6) = 42 \not> 42 = 36 + 6 = \lambda(8) + \omega(8; 6) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(6) = 42$$

Tā kā $\lambda(6) \not> \lambda(8) + \omega(8; 6)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(8)$ virsotni 10.

$$\lambda(10) = \infty > 55 = 36 + 19 = \lambda(8) + \omega(8; 10) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(10) = 55$$

Tā kā $\lambda(10) > \lambda(8) + \omega(8; 10)$, $10 > 8$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(8)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 9.

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(v)$	0	28	76	69	46	42	23	36	71	55
$\theta(v)$	1	1	6	5	7	8	1	2	6	8

23. solis. $\Gamma^+(9) = \{2; 3; 8\}$.

$$\lambda(2) = 28 \not> 87 = 71 + 16 = \lambda(9) + \omega(9; 2) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(2) = 28$$

Tā kā $\lambda(2) \not> \lambda(9) + \omega(9; 2)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(9)$ virsotni 3.

$$\lambda(3) = 76 \not> 82 = 71 + 11 = \lambda(9) + \omega(9; 3) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(3) = 76$$

Tā kā $\lambda(3) \not> \lambda(9) + \omega(9; 3)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(9)$ virsotni 8.

$$\lambda(8) = 36 \not> 89 = 71 + 18 = \lambda(9) + \omega(9; 8) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(8) = 36$$

Tā kā $\lambda(8) \not> \lambda(9) + \omega(9; 8)$ un visas virsotnes no $\Gamma^+(9)$ jau ir aplūkotas, tad pārejam uz virsotni 10. Iezīmes $\lambda(u)$ un $\theta(u)$ šajā solī nemainās.

24. solis. $\Gamma^+(10) = \{5; 6; 7\}$.

$$\lambda(5) = 46 \not> 60 = 55 + 5 = \lambda(10) + \omega(10;5) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(5) = 46$$

Tā kā $\lambda(5) \not> \lambda(10) + \omega(10;5)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(10)$ virsotni 6.

$$\lambda(6) = 42 \not> 60 = 55 + 5 = \lambda(10) + \omega(10;6) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(6) = 42$$

Tā kā $\lambda(6) \not> \lambda(10) + \omega(10;6)$, tad apskatām nākamo pusapkārtnes $\Gamma^+(10)$ virsotni 7.

$$\lambda(7) = 23 \not> 64 = 55 + 9 = \lambda(10) + \omega(10;7) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda(7) = 23$$

Tā kā $\lambda(7) \not> \lambda(10) + \omega(10;7)$ ***un visas virsotnes no*** $\Gamma^+(10)$ ***jau ir aplūkotas, tad Belmana-Forda metodes darbu beidzam!*** Iezīmes $\lambda(u)$ un $\theta(u)$ šajā solī nemainās.

3. Piezīmes

3.1. piezīme. Tādējādi, pielietojot Belmana-Forda metodi orgrafam G, tā virsotnes ieguva šādas iezīmes:

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lambda(v)$	0	28	76	69	46	42	23	36	71	55
$\theta(v)$	1	1	6	5	7	8	1	2	6	8

Redzam, ka iezīmes $\lambda(u)$

$$0\ 28\ 76\ 69\ 46\ 42\ 23\ 36\ 71\ 55$$

sakrīt ar orgrafa G attālumu matricas

$$\rho(G) = \begin{pmatrix} 0 & 28 & 76 & 69 & 46 & 42 & 23 & 36 & 71 & 55 \\ 40 & 0 & 48 & 47 & 24 & 14 & 36 & 8 & 43 & 27 \\ 86 & 53 & 0 & 41 & 18 & 8 & 34 & 55 & 37 & 74 \\ 86 & 53 & 17 & 0 & 18 & 8 & 34 & 55 & 37 & 74 \\ 68 & 76 & 40 & 23 & 0 & 31 & 16 & 40 & 60 & 59 \\ 78 & 45 & 34 & 33 & 10 & 0 & 26 & 47 & 29 & 66 \\ 52 & 75 & 63 & 46 & 23 & 30 & 0 & 24 & 59 & 43 \\ 32 & 51 & 40 & 39 & 16 & 6 & 28 & 0 & 35 & 19 \\ 50 & 16 & 11 & 52 & 29 & 19 & 45 & 18 & 0 & 37 \\ 61 & 50 & 39 & 28 & 5 & 5 & 9 & 33 & 34 & 0 \end{pmatrix}$$

pirmo rindiņu,

bet iezīmes $\theta(u)$

$$1\ 1\ 6\ 5\ 7\ 8\ 1\ 2\ 6\ 8$$

ar matricas

$$P^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 5 & 7 & 8 & 1 & 2 & 6 & 8 \\ 8 & 2 & 6 & 5 & 6 & 8 & 10 & 2 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 3 & 5 & 6 & 3 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 4 & 6 & 4 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 5 & 5 & 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 6 & 5 & 6 & 6 & 5 & 9 & 6 & 8 \\ 7 & 9 & 4 & 5 & 7 & 8 & 7 & 7 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 6 & 5 & 6 & 8 & 10 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 9 & 5 & 6 & 3 & 5 & 9 & 9 & 8 \\ 7 & 9 & 6 & 5 & 10 & 10 & 10 & 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

pirmo rindiņu. Matricas $\rho(G)$ un P^{10} tika iegūtas, pielietojot Floida metodi 1. zīm. attēlotajam orgrafam ar nenegatīviem svariem.

3.2. piezīme. Ja kāda virsotne u_i ir sasniedzama no virsotnes u_1, tad Belmana-Forda metode ļauj atrast visīsāko maršrutu no virsotnes u_1 līdz virsotnei u_i. ***Kā noteikt, vai virsotne*** u_i ***ir sasniedzama no virsotnes*** u_1***?*** Atbilde uz šo jautājumu ir šāda:

- ja virsotne u_i ir ieguvusi iezīmi $\lambda(u_i) = \infty$, tad virsotne u_i ***nav*** sasniedzama no virsotnes u_1;
- ja virsotne u_i ir ieguvusi iezīmi $\lambda(u_i) \neq \infty$, tad virsotne u_i ***ir*** sasniedzama no virsotnes u_1.

Mūsu piemērā visas virsotnes ir ieguvušas iezīmes $\lambda(u_i) \neq \infty$, tāpēc visas orgrafa virsotnes ir sasniedzamas no virsotnes $u = 1$.

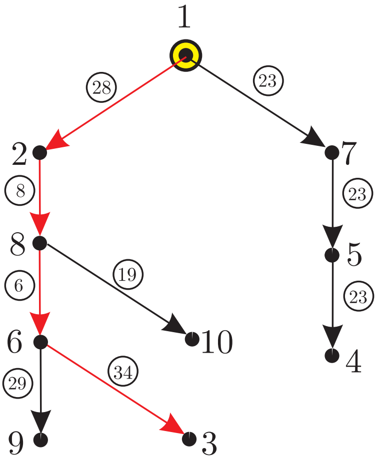
3.3. piezīme. Ja *no virsotnes u_1 ir sasniedzamas visas pārējās orgrafa G virsotnes*, tad, lietojot iezīmes $\theta(v)$, var konstruēt orgrafa $(G;\omega)$ visīsāko maršrutu no virsotnes $u = u_1$ orientētu parciālkoku T_1.

Mūsu piemērā virsotnes u ieguva šādas patstāvīgas iezīmes:

Virsotne v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
Iezīme $\theta(v)$	1	1	6	5	7	8	1	2	6	8

Parciālkoka T_1 loki un to svari:

Loki	(1;2)	(6;3)	(5;4)	(7;5)	(8;6)	(1;7)	(2;8)	(6;9)	(8;10)
Svari	28	34	23	23	6	23	8	29	19



2. zīm. Parciālkoks T_1.

Tā kā

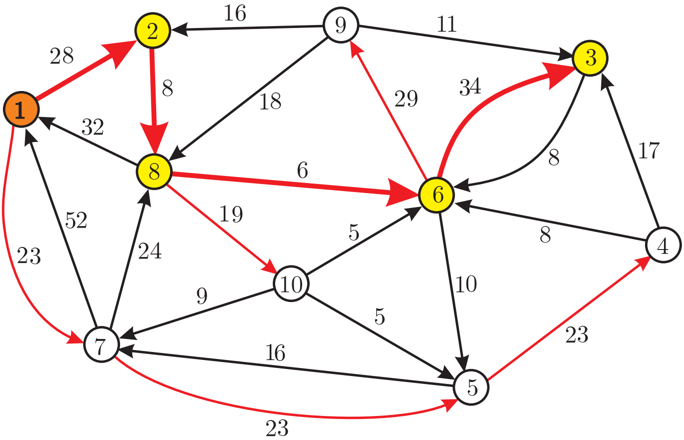
$$\theta(3) = 6,\ \theta(6) = 8,\ \theta(8) = 2,\ \theta(2) = 1,$$

tad visīsākais $(1;3)$-maršruts ir

$$1, 2, 8, 6, 3$$

ar garumu

$$\lambda(3) = \rho(1;3) = 28 + 8 + 6 + 34 = 76.$$



1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
28
8
16
11
18
29
34
32
6
8
17
52
19
5
8
23
24
10
9
5
16
23
23

3. zīm.