DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

Matemātikas katedra

Konrads Murāns

Diferenciālğeometrijas uzdevumi

2005

PRIEKŠVĀRDS

Metodisko līdzekli var izmantot diferenciālğeometrijas semināru nodarbībās.

Uzdevumu atrisinājumu piemēri sīki paskaidroti, tie sakārtoti loğiskā secībā.

Vēlams sākumā mēğināt atrisināt piemēru, bet pēc tam izlasīt tā atrisinājumu metodiskajā līdzeklī.

Tiek uzskatīts, ka pirms metodiskā līdzekļa izmantošanas lasītājs ir iepazinies ar diferenciālğeometriju gan plaknē, gan telpā.

Autors izsaka pateicību Daugavpils Universitātes Matemātikas katedras locekļiem par padomiem grāmatas pilnveidošanā, kā arī DU Matemātikas katedras mağistrantei K. Žuselei par zīmējumu datorsalikumu.

LPA Matemātikas un informātikas katedras profesora E. Ģinguļa ieinteresētība, ieguldītais darbs un ieteikumi nenoliedzami uzlaboja grāmatas kvalitāti.

I nodaļa

LĪKNES EIKLĪDA TELPĀ

1.1. Līkņu vienādojumi

Līkni Eiklīda triju dimensiju telpā Dekarta koordinātu sistēmā var noteikt vienā no šādiem veidiem:

- divu virsmu šķēlums

$$F_1(x;y;z) = 0, \quad F_2(x;y;z) = 0; \tag{1.1}$$

- parametriskie vienādojumi

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t); \tag{1.2}$$

- skalārā argumenta vektoriāla funkcija

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \text{ kur } \vec{r} = \big(x(t); y(t); z(t)\big). \tag{1.3}$$

Ja M ir līknes punkts, tad $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, kur O ir koordinātu sākums.

Ja sistēmā (1.1) no viena vienādojuma izslēdz koordinātu x, bet no otra - koordinātu y, tad iegūst divu cilindru vienādojumus $f_1(x;z) = 0$, $f_2(y;z) = 0$, kuru izmantošana dažreiz ir ērtāka līknes pētīšanai.

Līkni plaknē xOy Dekarta koordinātu sistēmā var noteikt vienā no šādiem veidiem:

- aizklātā veidā

$$F(x;y) = 0; \tag{1.4}$$

- atklātā veidā

$$y = f(x) \text{ vai } x = g(y); \tag{1.5}$$

- parametriskie vienādojumi

$$x = x(t), \quad y = y(t); \tag{1.6}$$

- skalāra argumenta vektoriāla funkcija

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \text{ kur } \vec{r} = \big(x(t); y(t)\big). \tag{1.7}$$

Ja līkne dota veidā (1.2), (1.3), (1.6) un (1.7), tad par pozitīvo virzienu uz tās uzskata virzienu, kurā pārvietojas tās punkts, augot parametram t.

Aplūkosim pāreju no viena līknes noteikšanas veida uz citiem.

1.1. piemērs. Uzrakstīt līknes

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \cos 2t$$

vienādojumus formā (1.1).

Lai iegūtu divu virsmu vienādojumus, kuru šķēlumam pieder līkne, jāizslēdz parametrs t divos veidos.

Ņemot vērā trigonometrisko funkciju īpašības, no pirmā un otrā vienādojuma iegūstam

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

No visiem trim vienādojumiem var secināt:

$$z = \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = x^2 - y^2.$$

Aplūkojamā līkne pieder rotācijas cilindra un hiperboliskā paraboloīda šķēlumam:

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 1.$$

Izslēdzot parametru t vēl vienā veidā:

$$z = \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t = 1 - 2y^2,$$

iegūst citus virsmu pārus: rotācijas cilindru un parabolisko cilindru:

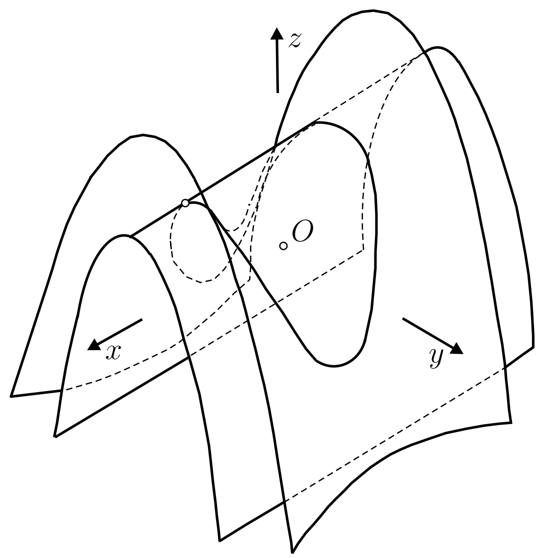
$$x^2 + y^2 = 1, \quad z = -2y^2 + 1,$$

vai parabolisko cilindru un hiperbolisko paraboloīdu:

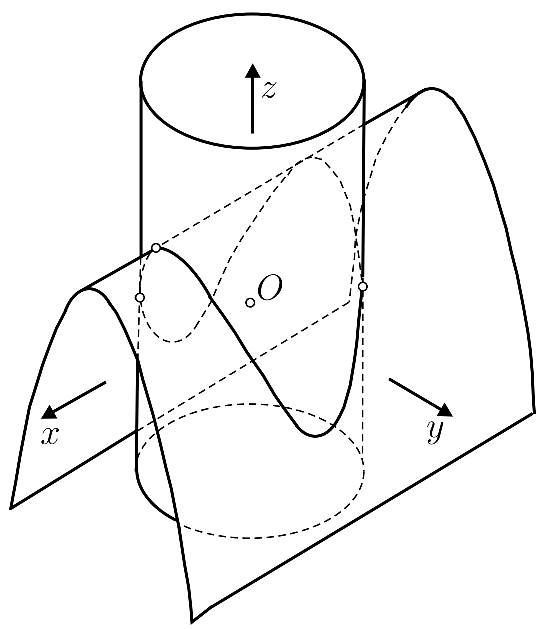
$$z = -2y^2 + 1, \quad x^2 - y^2 = z.$$

Katrai līknei eksistē bezgala daudzi virsmu pāri, kuru šķēlumam tā pieder.

Lai noskaidrotu, vai līkne sakrīt ar virsmu visu šķēlumu, nepieciešami papildus pētījumi (skat. 1.2. piemēru).



1.1. zīm.



1.2. zīm.

1.2. piemērs. Līkne dota ar vektorfunkciju

$$\vec{r} = (\cos^2 t; \sin^2 t; \cos 2t).$$

Noteikt šo līkni kā divu virsmu šķēlumu.

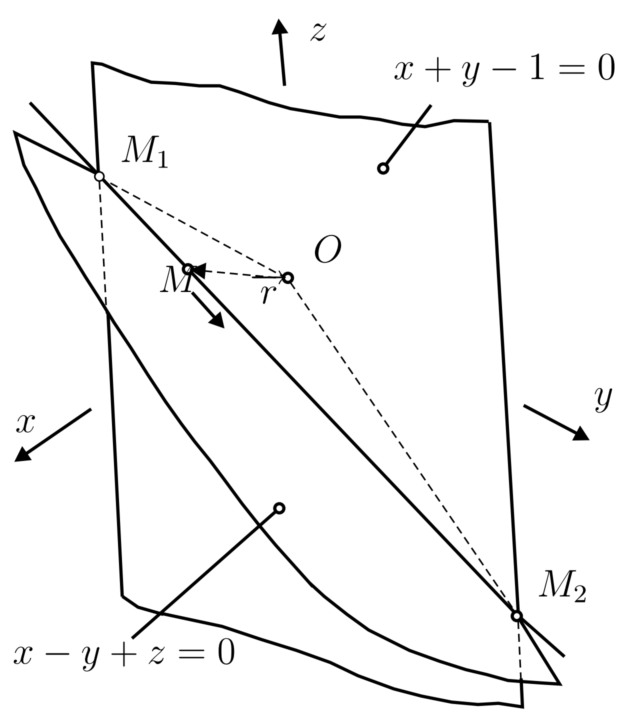
No trigonometrijas formulām

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1 \ \text{ un } \ \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

var secināt, ka

$$x + y - 1 = 0, \ \ x - y - z = 0.$$

Šīs plaknes šķeļas pa taisni. Vektora $\vec{r}$ visas koordinātas ir ierobežotas, tāpēc nepieciešams noskaidrot, kādu taisnes nogriezni nosaka dotā vektorfunkcija. Ja t aug no 0 līdz $\frac{\pi}{2}$, tad $\cos^2 t$ dilst no 1 līdz 0, $y = \sin^2 t$ aug no 0 līdz 1, bet $z = \cos 2t$ dilst no 1 līdz -1. Punkts M pārvietojas pa nogriezni starp punktiem $M_1(1; 0; 1)$ un $M_2(0; 1; -1)$.



1.3. zīm.

1.3. piemērs. Uzrakstīt rotācijas cilindru $x^2 + y^2 = 2$ un $y^2 + x^2 = 1$ šķēluma parametriskos vienādojumus.

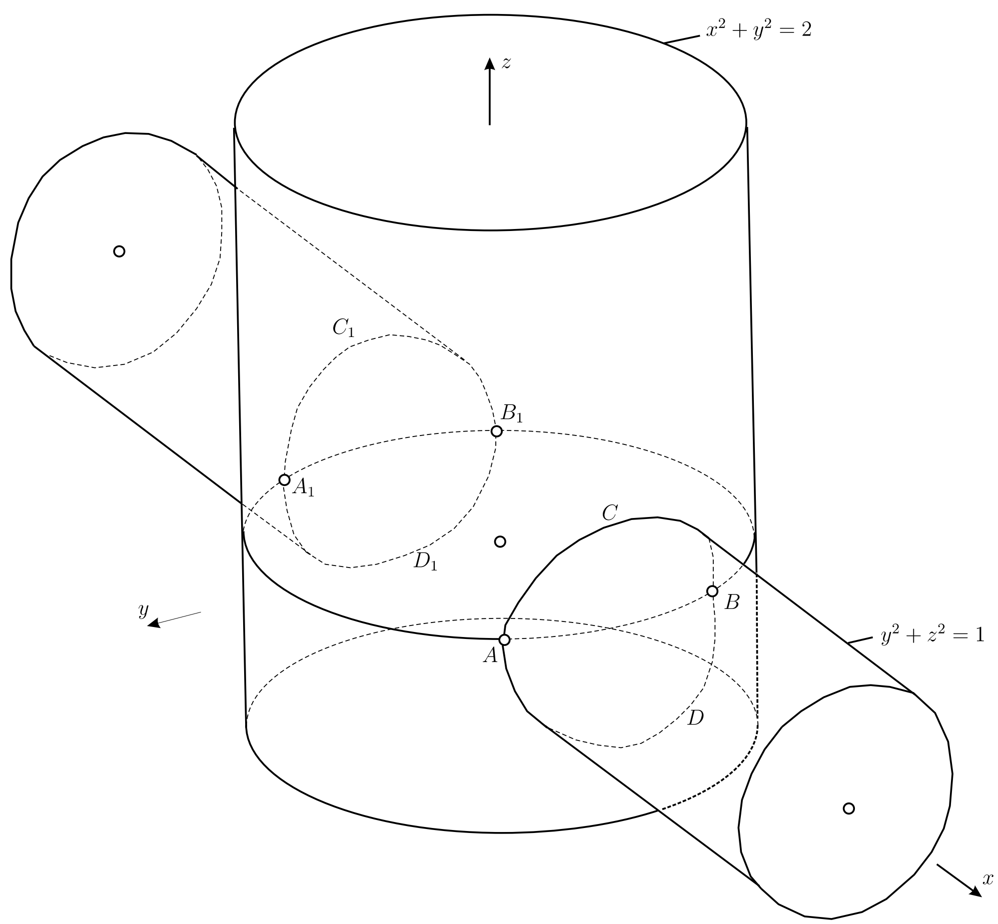
Koordinātu y var izmantot par parametru, jo ar to var izteikt pārējās koordinātas:

$$x = \pm\sqrt{2 - y^2}, \quad z = \pm\sqrt{1 - y^2}.$$

Ņemot vērā līknes punktu koordinātu zīmes, iegūstam līknes loku parametriskos vienādojumus:

$$\begin{array}{llll}
\smile ACB & x = \sqrt{2 - t^2}, & y = t, & z = \sqrt{1 - t^2}; \\
\smile ADB & x = \sqrt{2 - t^2}, & y = t, & z = -\sqrt{1 - t^2}; \\
\smile A_1C_1B_1 & x = \sqrt{2 - t^2}, & y = t, & z = -\sqrt{1 - t^2}; \\
\smile A_1D_1B_1 & x = -\sqrt{2 - t^2}, & y = t, & z = -\sqrt{1 - t^2},
\end{array}$$

kur $-1 \le t \le 1$.



1.4. zīm.

Šeit aplūkots vispārīgs paņēmiens, kā iegūt divu virsmu šķēluma parametriskos vienādojumus. Pārveidojot doto vienādojumu sistēmu, var aizstāt dotās virsmas ar cilindriem.

Uzdevumu var atrisināt citādi. Ņemot vērā, ka $y^2+x^2=1$, apzīmēsim: $y=\cos t$, $z=\sin t$. No otra cilindra vienādojuma iegūstam:

$$x^2=2-y^2=2-\cos^2 t,\ x=\pm\sqrt{2-\cos^2 t}.$$

Līknes kreisās un labās puses parametriskie vienādojumi attiecīgi ir

$$\begin{aligned} &x=\sqrt{2-\cos^2 t}, && y=\cos t, && z=\sin t,\\ &x=-\sqrt{2-\cos^2 t}, && y=\cos t, && z=\sin t, \end{aligned}$$

kur $-\pi\le t\le\pi$. Aplūkojamā līkne sastāv no divām komponentēm, tāpēc nav iespējams atrast parametriskos vienādojumus visai līknei un parametrizējam to pa daļām.

Aplūkosim līknes plaknē xOy.

Līknes $y=f(x)$ parametriskie vienādojumi ir $x=t$, $y=f(t)$.

1.4. piemērs. Uzrakstīt astroīdas

$$\vec{r}=(a\cos^3 t;\ a\sin^3 t)$$

vienādojumu aizklātā veidā.

Ņemot vērā, ka

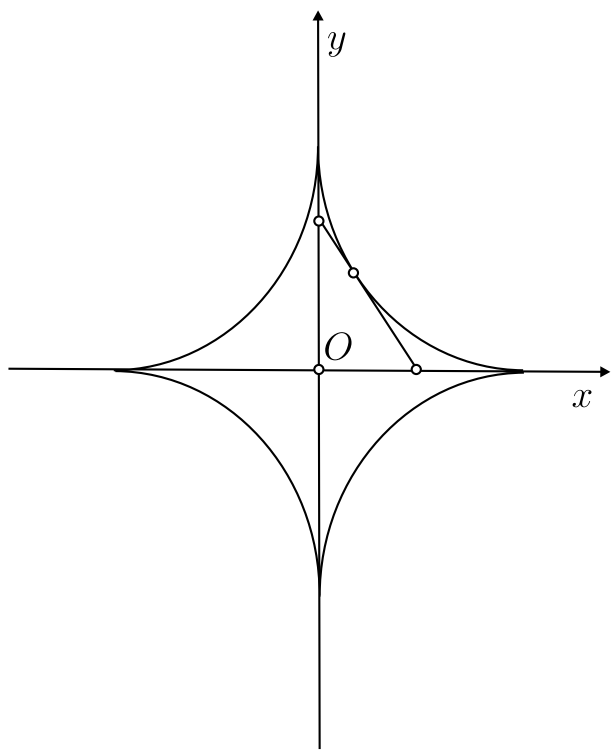
$$\frac{x}{a}=\cos^3 t,\ \ \frac{y}{a}=\sin^3 t \quad \text{un} \quad (\cos^3 t)^{\frac{2}{3}}+(\sin^3 t)^{\frac{2}{3}}=1,$$

iegūstam vienādojumu

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}.$$

Astroīdas pieskares nogriežņa, ko ierobežo tās krustpunkti ar koordinātu asīm, garums vienāds ar a.

Lai iegūtu līknes (1.4) parametriskos vienādojumus (1.6), var izmantot šādu paņēmienu: ja līknei pieder tāds punkts, ka jebkura taisne, kas iet caur to, krusto līkni tikai vēl vienā punktā, tad šīs taisnes virziena koeficientu var izmantot par parametru.



1.5. zīm.

1.5. piemērs. Uzrakstīt Dekarta lapas

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

parametriskos vienādojumus.

Koordinātu sākumā līkne krusto pati sevi, taisne $x + y + a = 0$ ir asimptota, punkts $A\left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a\right)$ - virsotne (skat. 1.6. zīm.).

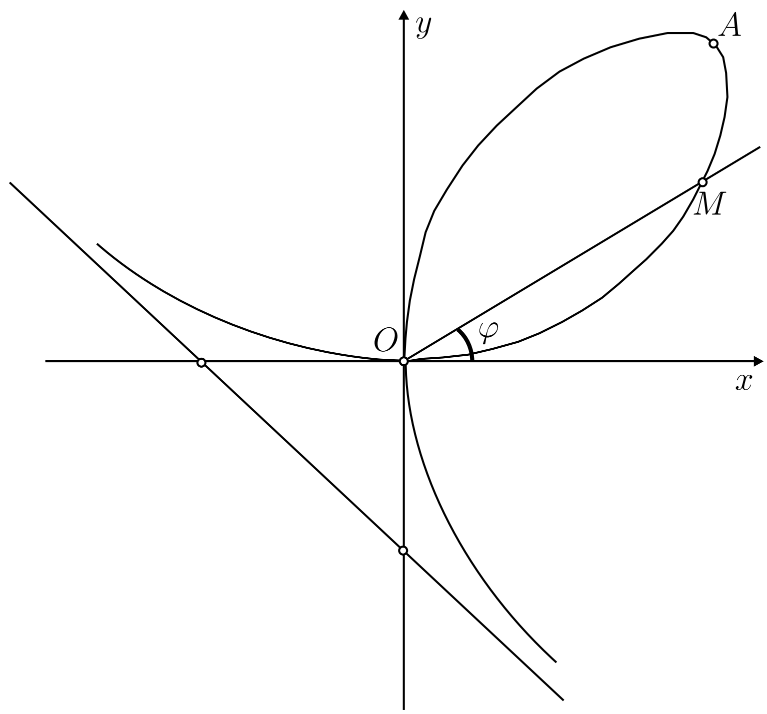
Ja $t = \operatorname{tg}\varphi$, tad $y = tx$ ir taisnes OM vienādojums. Ievietojot $y = tx$ līknes vienādojumā, iegūstam

$$x^3 + t^3x^3 - 3at^2x^2 = 0,$$

$$x^2(x + t^3x - 3at^2) = 0.$$

No šejienes

$$x = \frac{3at^2}{t^3+1}, \quad y = \frac{3at^3}{t^3+1}.$$

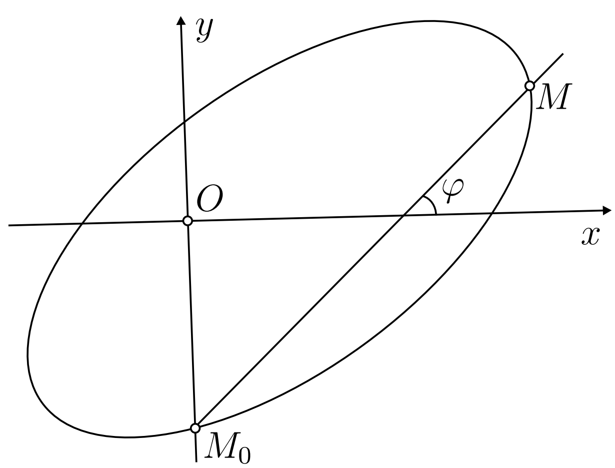


1.6. zīm.

1.6. piemērs. Uzrakstīt līknes

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - x + y - 1 = 0$$

parametriskos vienādojumus.



1.7. zīm.

Izvēlēsimies kādu līknes punktu, piemēram, tās krustpunktu $M_0(0;-1)$ ar Oy asi.

Ja $t = \operatorname{tg}\varphi$, tad taisnes M_0M vienādojums ir $y = tx - 1$.

No līknes vienādojuma iegūstam:

$$x\big[(2t^2-2t+1)x-(3t-1)\big]=0,$$

$$x=\frac{3t-1}{2t^2-2t+1},\quad y=\frac{(3t-1)t}{2t^2-2t+1}.$$

1.2. Pieļaujamā parametra maiņa. Naturālais parametrs

Pāreja no viena veida līknes parametriskajiem vienādojumiem uz cita veida vienādojumiem notiek **ar pieļaujamo parametra maiņu** $t=t(u)$, kur $t=t(u)$ ir trīs reizes nepārtraukti atvasināma funkcija, $\frac{dt}{du}>0\ \ (<0)$.

Ja $\frac{dt}{du}>0\ \ (<0)$, tad parametra maiņa ir regulāra.

Ar šo parametra maiņu no vienādojumiem

$$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t)$$

iegūstam vienādojumus

$$z=z\big(t(u)\big),\ \ y=y\big(t(u)\big),\ \ z=z\big(t(u)\big).$$

Līknes loka garumu sauc par **naturālo parametru**, to aprēķina pēc formulas

$$s=\int\limits_{t_0}^{t}\big|\vec{r}\,'(t)\big|dt.$$

Šī formula rāda, ka $s=s(t)$, kur arguments t ir augšējā integrēšanas robeža. Lai aizstātu t ar naturālo parametru s, nepieciešams atrast apgriezto funkciju $t=t(s)$, kuru ievieto līknes vienādojumos.

1.7. piemērs. Dota augšējā pusriņķa līnija

$$\vec{r}=(\sin t;\cos t),\quad 0<t<\pi.$$

Uzrakstīt tās vienādojumus, izvēloties citus parametrus.

- $t=au+b$ ir pieļaujamā parametra maiņa, jo $\frac{dt}{du}=a\neq 0$.

$$\vec{r}=\big(\cos(au+b);\ \ \sin(au+b)\big).$$

Ja $a>0$, tad $-\frac{b}{a}<u<\frac{\pi-b}{a}$,
ja $a<0$, tad $\frac{\pi-b}{a}<u<-\frac{b}{a}$.

- $t = \operatorname{arcctg} v$ arī ir pieļaujamā parametra maiņa, jo
$$\frac{dt}{dv} = -\frac{1}{1+v^2} < 0,$$
bez tam $0 < t < \pi$, ja $-\infty < v < +\infty$.
$$\cos t = \frac{\operatorname{ctg} t}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}} = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}},$$
$$\sin t = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 t}} = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}},$$
jo pēc definīcijas $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} v) = v$.
$$\vec{r} = \left(\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}; \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}\right), \quad -\infty < v < +\infty.$$

1.8. piemērs. Aizstāt līknes
$$\vec{r} = \left(\frac{1}{2}t^3; \frac{3}{4}\sqrt{2}t^2; \frac{3}{2}t\right)$$
vienādojumā parametru t ar naturālo parametru s.

Atradīsim funkciju $s = s(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \left|\vec{r}\,'(t)\right| dt$.
$$\vec{r}\,' = \left(\frac{3}{2}t^2; \frac{3}{2}\sqrt{2}t; \frac{3}{2}\right), \quad |\vec{r}\,'(t)| = \frac{3}{2}(t^2+1).$$
Ņemsim $t_0 = 0$, tad
$$s = \frac{3}{2}\int\limits_0^t (t^2+1)dt = \frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t.$$
Vienādojuma $y^3 + 3py + 2q = 0$ saknes ir
$$y_1 = u + v, \; y_2 = \varepsilon_1 u + \varepsilon_2 v, \; y_3 = \varepsilon_2 u + \varepsilon_1 v,$$
kur
$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2+p^3}}, \quad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2+p^3}},$$
$$\varepsilon_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \; \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vienādojuma $t^3+3t^2-2s=0$ reālā sakne ir

$$t=\sqrt[3]{s+\sqrt{s^2+1}}+\sqrt[3]{-s-\sqrt{s^2+1}}.$$

Ievietojot t, iegūstam vienādojumus

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{s+\sqrt{s^2+1}}+\sqrt[3]{-s-\sqrt{s^2+1}}\right)^3, \\ y=\frac{3}{4}\sqrt{2}\left(\sqrt[3]{s+\sqrt{s^2+1}}+\sqrt[3]{-s-\sqrt{s^2+1}}\right)^2, \\ z=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{s+\sqrt{s^2+1}}+\sqrt[3]{-s-\sqrt{s^2+1}}\right). \end{cases}$$

Šis piemērs apliecina, ka līknes vienādojumi ar naturālo parametru bieži vien ir sarežģīti.

1.3. Līknes pieskare

Ja līkne noteikta veidā (1.1), tad tās pieskare punktā $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ir doto virsmu pieskarplakņu šķēlums:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial x}(x-x_0)+\dfrac{\partial F_1}{\partial y}(y-y_0)+\dfrac{\partial F_1}{\partial z}(z-z_0)=0, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x-x_0)+\dfrac{\partial F_2}{\partial y}(y-y_0)+\dfrac{\partial F_2}{\partial z}(z-z_0)=0. \end{cases}$$

1.9. piemērs. Uzrakstīt līknes $x^2+y^2=2, \quad y^2+z^2=1$ pieskares vienādojumus punktā $M_0(\sqrt{2};0;1)$ (skat. (1.3. piemēru).

Uzrakstīsim cilindra

$$x^2+y^2=2$$

pieskarplaknes vienādojumu punktā M_0:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=2x=2\sqrt{2},\quad \frac{\partial F_1}{\partial y}=2y=0,\quad \frac{\partial F_1}{\partial z}=0,$$
$$2\sqrt{2}(x-\sqrt{2})=0,\quad x-\sqrt{2}=0.$$

Cilindra $y^2+z^2=1$ pieskarplaknes vienādojums:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=0,\ \frac{\partial F_2}{\partial y}=2y=0,\ \frac{\partial F_2}{\partial z}=2z=-2,$$
$$-2(z+1)=0,\ z+1=0.$$

Pieskares vienādojumi ir

$$\begin{cases} x - \sqrt{2} = 0, \\ z + 1 = 0. \end{cases}$$

Uzrakstīsim tās vienādojumus kanoniskajā formā. Virziena vektors $\vec{\ell} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, kur $\vec{n}_1$ un $\vec{n}_2$ ir plakņu normālvektori.

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= (1; 0; 0), \\ \vec{n}_2 &= (0; 0; 1), \\ \vec{\ell} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 &= (0; 1; 0). \end{aligned}$$

Pieskares kanoniskie vienādojumi:

$$\frac{x - \sqrt{2}}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z + 1}{0}.$$

Ja līknes vienādojumi doti veidā (1.2), tad tās pieskares vienādojumi punktā $M_0(t = t_0)$ ir

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

1.10. piemērs. Uzrakstīt līknes $x = \cos^2 t$; $y = \sin t \cos t$; $z = \sin t$ pieskares vienādojumus punktā M_0, kas atbilst $t_0 = \frac{\pi}{6}$.

Aprēķināsim punkta M_0 koordinātas:

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos^2 \frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}, \\ y_0 &= \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \\ z_0 &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Atradīsim pieskares virziena vektoru

$$\vec{r}\,' = (-\sin 2t_0; \cos 2t_0; \cos t_0) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \upuparrows (-\sqrt{3}; 1; \sqrt{3}).$$

Pieskares kanoniskie vienādojumi ir

$$\frac{x - \frac{3}{4}}{-\sqrt{3}} = \frac{y - \frac{\sqrt{3}}{4}}{1} = \frac{z - \frac{1}{2}}{\sqrt{3}}.$$

Ja plakanas līknes vienādojums dots formā (1.4), tad tās pieskares vienādojums punktā $M_0(x_0; y_0)$ ir

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) = 0.$$

Parciālos atvasinājumus aprēķina punktā M_0.

1.11. piemērs. Uzrakstīt Dekarta lapas $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ pieskares vienādojumu punktā $A_0\left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a\right)$ (skat. 1.5. piemēru).

Pārliecināsimies, ka punkts pieder līknei:

$$\left(\frac{3}{2}a\right)^3 + \left(\frac{3}{2}a\right)^3 - 3a\left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \left(\frac{27}{8} + \frac{27}{8} - \frac{27}{4}\right)a^3 = 0.$$

Aprēķināsim pieskares normālvektoru $\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}; \frac{\partial F}{\partial y}\right)$ punktā A_0.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 3x^2 - 3ay = \frac{9}{4}a^2, \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= 3y^2 - 3ax = \frac{9}{4}a^2, \\
\vec{n} &= \left(\frac{9}{4}a^2; \frac{9}{4}a^2\right) \upuparrows (1; 1).
\end{aligned}$$

Pieskares vienādojums ir

$$1\left(x - \frac{3}{2}a\right) + 1\left(y - \frac{3}{2}a\right) = 0$$

jeb

$$x + y - 3a = 0.$$

Plakanas līknes, kas dota veidā (1.5), pieskares vienādojums punktā $M_0(t = t_0)$ ir

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)}.$$

1.12. piemērs. Uzrakstīt astroīdas $x = a\cos^3\varphi$, $y = a\sin^3\varphi$, $a > 0$ pieskares vienādojumu punktā $M_0\left(\frac{1}{8}a; -\frac{3\sqrt{3}}{8}a\right)$ (skat. 1.4. piemēru).

Tātad ir jāatrisina uzdevums, kas ir apgriezts uzdevumam 1.10. piemērā - jānosaka parametra vērtība φ_0, kas atbilst punktam M_0.

Šim nolūkam atradīsim vienādojumu

$$a\cos^3\varphi = \frac{1}{8}a,$$
$$a\sin^3\varphi = -\frac{3\sqrt{3}}{8}a$$

kopējo sakni.

Vienādojumu atrisinājumi ir attiecīgi

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

un

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \quad \varphi = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

Vienādojumiem ir kopēja sakne $\varphi_0 = -\frac{\pi}{3}$, tātad punkts M_0 pieder līknei.

Aprēķināsim pieskares virziena vektoru

$$\vec{r}\,'(\varphi_0) = \big(x'(\varphi_0); y'(\varphi_0)\big) = \big(-3a\cos^2\varphi_0\sin\varphi_0; 3a\sin^2\varphi_0\cos\varphi_0\big) = \\ = \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}a; \frac{9}{8}a\right) \upuparrows (1; \sqrt{3}).$$

Pieskares vienādojums ir

$$\frac{x - \frac{1}{8}a}{1} = \frac{y + \frac{3\sqrt{3}}{8}a}{\sqrt{3}}.$$

Ja līkne ir dota ar vienādojumu $y = f(x)$, tad tās pieskares vienādojums punktā $M_0(x_0; y_0)$ ir

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

1.13. piemērs. Uzrakstīt hiperbolas $y = \frac{1}{x}$ pieskares vienādojumu punktā $M_0(-1; 1)$.

Aprēķināsim pieskares virziena koeficientu

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2} = -1.$$

Pieskares vienādojums:

$$y + 1 = -1(x + 1), \quad x + y + 2 = 0.$$

1.4. Līknes liekums

Līknes liekuma aprēķināšanas pamatformula ir

$$k = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}.$$

Pielietojot šo formulu plakanai līknei, kas atrodas plaknē xOy, nepieciešams pāriet uz triju dimensiju telpu, t.i., vektoram $\vec{r}(t)$ pierakstīt trešo koordinātu

$$\vec{r}(t) = \big(x(t); y(t); 0\big).$$

No pamatformulas varam iegūt formulas īpašiem gadījumiem. Līknes

$$x = x(t), \;\; y = y(t), \;\; z = 0$$

liekums ir

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Līknes $y = f(x)$ liekumu aprēķina pēc formulas

$$k = \frac{|y''|}{\big((1 + (y')^2\big)^{\frac{3}{2}}}.$$

Ņemot vērā, ka līknes $F(x, y) = 0$ parametrizācija var būt saistīta ar zināmām grūtībām, jāprot aprēķināt liekums arī bez parametrisko vienādojumu palīdzības.

Aizklātas funkcijas $F(x, y) = 0$ atvasinājumu aprēķina šādi:

$$\frac{dy}{dx} = -F'_x : F'_y.$$

Pielietojot šo formulu funkcijai $\frac{dy}{dx}$ vēlreiz, iegūstam

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2F'_xF'_yF''_{xy} - (F'_y)^2F''_{xx} - (F'_x)^2F''_{yy}}{(F'_y)^3}.$$

No šejienes

$$k = \frac{\big|2F'_xF'_yF''_{xy} - (F'_y)^2F''_{xx} - (F'_x)^2F''_{yy}\big|}{\big[(F'_x)^2 + (F'_y)^2\big]^{\frac{3}{2}}}.$$

1.14. piemērs. Pierādīt, ka skrūves līnijas $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ liekums ir konstants.

$$\vec{r}' = (-a\sin t; a\cos t; b),$$
$$\vec{r}'' = (-a\cos t; -a\sin t; 0),$$

$$\vec{r}'\times\vec{r}'' = \big(ab\sin t; -ab\cos t; a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)\big) = (ab\sin t; -ab\cos t; a^2).$$

$$|\vec{r}'| = \sqrt{a^2+b^2},$$
$$|\vec{r}'\times\vec{r}''| = a\sqrt{a^2+b^2},$$
$$k = \frac{a}{a^2+b^2}.$$

Jāņem vērā, ka vektorus $\vec{r}'$, $\vec{r}''$ un $\vec{r}'\times\vec{r}''$ nedrīkst aizstāt ar tiem kolineāriem vektoriem, t.i., nedrīkst reizināt vektoru koordinātas ar skaitli $\lambda \neq 1$.

1.15. piemērs. Aprēķināt astroīdas $\vec{r} = (a\cos^3 t; a\sin^3 t)$ liekumu punktā $M_0\left(t_0 = \frac{\pi}{3}\right)$.

Pārejam uz triju dimensiju telpu:

$$\vec{r} = \left(a\cos^3 t; a\sin^3 t; 0\right),$$
$$\vec{r}' = \left(-3a\cos^2 t\sin t; 3a\sin^2 t\cos t; 0\right),$$
$$\vec{r}'' = \left(6a\cos t\sin^2 t - 3a\cos^3 t; 6a\sin t\cos^2 t - 3a\sin^3 t; 0\right).$$

Aprēķinām šo vektoru koordinātas punktā M_0:

$$\vec{r}' = \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}a; \frac{9}{8}a; 0\right),$$
$$\vec{r}'' = \left(\frac{15}{8}a; \frac{3\sqrt{3}}{8}a; 0\right),$$
$$\vec{r}'\times\vec{r}'' = \left(0; 0; -\frac{27}{16}a^2\right),$$
$$|\vec{r}'| = \frac{3\sqrt{3}}{4}a,$$
$$|\vec{r}'\times\vec{r}''| = \frac{27}{16}a^2,$$

$$k = \frac{4\sqrt{3}}{9a}.$$

Liekumu šajā gadījumā var aprēķināt arī pēc formulām, kas attiecas uz līkņu vienādojumu īpašiem gadījumiem.

1.16. piemērs. Aprēķināt līknes $x^2 - 2xy + 2y^2 - x + y - 1 = 0$ liekumu punktā $M_0(0; -1)$ (skat. 1.6. piemēru).

$$\begin{aligned}
&F'_x = 2x - 2y - 1 = 1,\\
&F'_y = -2x + 4y + 1 = -3,\\
&F''_{xx} = 2,\\
&F''_{yy} = -2,\\
&F''_{yy} = 4,
\end{aligned}$$

$$k = \frac{4\sqrt{3}}{9a}.$$

1.5. Līknes vērpums

Līknes vērpuma aprēķināšanas formula

$$\varkappa = \frac{(\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,''')}{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|^2}.$$

Ja līknes vienādojumi ir formā (1.1), tad jāuzraksta tās parametriskie vienādojumi (skat. 1.2. un 1.3. piemērus).

Plakanas līknes pazīme: visos tās punktos $\varkappa = 0$.

1.17. piemērs. Aprēķināt līknes $\vec{r} = (\cos^2 t; \sin t \cos t; \sin t)$ vērpumu punktā $M_0\left(t_0 = \frac{\pi}{4}\right)$ (skat. 1.2. piemēru).

Ērtāk aprēķinus veikt šādā secībā:

$$\vec{r}\,' = (-2\cos t \sin t; \cos^2 t - \sin^2 t; \cos t) = \left(-1; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\vec{r}\,'' = (-2\cos 2t; -2\sin 2t; -\sin t) = \left(0; -2; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' = \left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; 2\right),$$

$$\vec{r}\,''' = (4\sin 2t; 4\cos 2t; -\cos t) = \left(4; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$(\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,''') = (\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'')\vec{r}\,''' = 3\sqrt{2},$$
$$|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''| = \frac{13}{2},$$
$$\varkappa = \frac{6\sqrt{2}}{13}.$$

Kā redzam no piemēra, jaukto reizinājumu šajā gadījumā ērtāk aprēķināt pēc tā definīcijas

$$(\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,''') = (\vec{r}\,' \times \vec{r}\,'')\vec{r}\,'''.$$

1.18. piemērs. Pierādīt, ka līkne

$$\vec{r} = \left(a_1t^2 + a_2t + a_3; b_1t^2 + b_2t + b_3; c_1t^2 + c_2t + c_3\right)$$

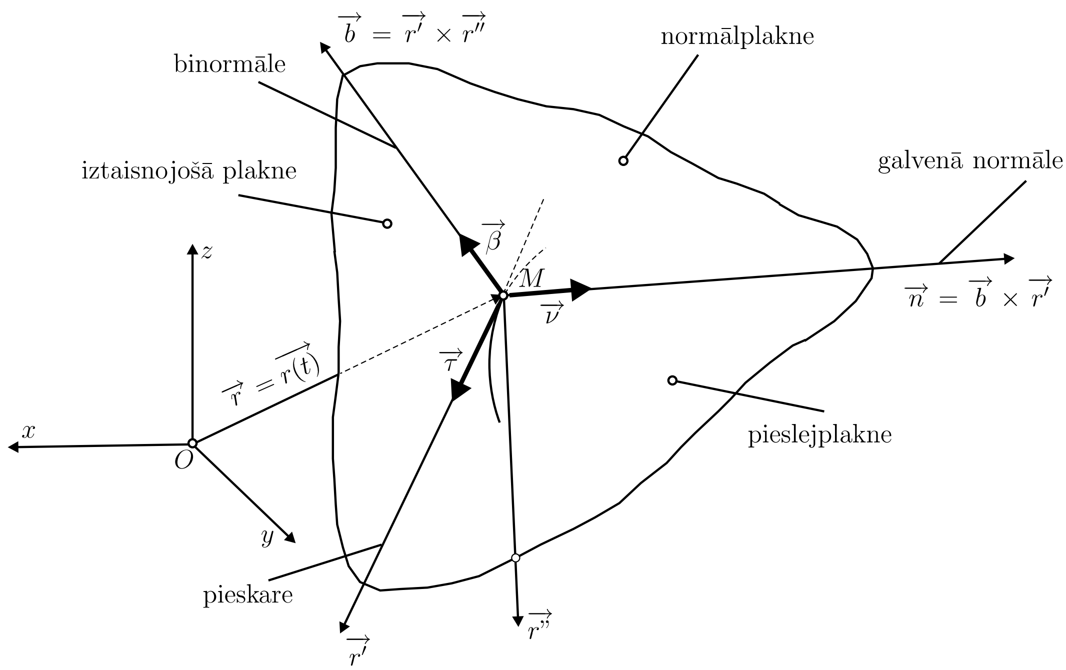
ir plakana.

$$\begin{aligned}
&\vec{r}\,' = (2a_1t + a_2; 2b_1t + b_2; c_1t + c_2),\\
&\vec{r}\,'' = (2a_1; 2b_1; 2c_1),\\
&\vec{r}\,''' = (0; 0; 0).
\end{aligned}$$

Ja $\vec{r}\,''' = \vec{0}$, tad $(\vec{r}\,'\vec{r}\,''\vec{r}\,''') = 0$ un $\varkappa = 0$ visos līknes punktos. Līkne ir plakana.

1.6. Pavadošais trijskaldnis

Katrā līknes punktā, izņemot īpašus punktus un pārliekuma punktus, eksistē trīs taisnes un trīs plaknes, kas pa pāriem ir savstarpēji perpendikulāras. Katrā no šiem punktiem eksistē arī kanoniskais Dekarta repers $\left(M; \vec{\tau}; \vec{\nu}; \vec{\beta}\right)$.



1.8. zīm.

1.19. piemērs. Uzrakstīt līknes $r = (\cos t; \sin t; \cos 2t)$ pieskares, galvenās normāles, binormāles, normālplaknes, pieslejplaknes un iztaisnojošās plaknes vienādojumus, aprēķināt vektorus $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ līknes punktā $M_0(t_0 = \pi)$.

Vispirms izdarīsim šādus aprēķinus:

$$\vec{r}(t_0) = (-1; 0; 1), \quad M_0(-1; 0; 1),$$

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,' = (-\sin t; \cos t; -2\sin 2t) =&(0; -1; 0),\\
\vec{r}\,'' = (-\cos t; -\sin t; -4\cos 2t) =&(1; 0; -4),\\
\vec{b} = \vec{r}\,' \times \vec{r}\,'' =&(4; 0; 1),\\
\vec{r}\,' =&(0; -1; 0),\\
\vec{n} = \vec{b} \times \vec{r}\,' =&(1; 0; -4).
\end{aligned}$$

Taisnes, kas iet caur punktu $M_0(x_0; y_0; z_0)$ paralēli vektoram $\vec{l} = (a; b; c)$, kanoniskie vienādojumi:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Plaknes, kas iet caur punktu $M_0(x_0; y_0; z_0)$ perpendikulāri vektoram $\vec{n} = (A; B; C)$, vienādojums:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Taišņu virziena vektori vienlaicīgi ir arī plakņu normālvektori, tos izvēlas saskaņā ar zīmējumu.

Pieskare:

$$\frac{x+1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}.$$

Galvenā normāle:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{-4}.$$

Binormāle:

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y}{0} = \frac{z-1}{1}.$$

Normālplakne:

$$y = 0.$$

Iztaisnojošā plakne:

$$x - 4z + 5 = 0.$$

Pieslejplakne:

$$4x + z + 3 = 0.$$

Kanoniskās bāzes vektori:

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{r}\,'}{|\vec{r}\,'|} = (0; -1; 0),$$
$$\vec{\nu} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{17}}; 0; -\frac{4}{\sqrt{17}}\right),$$
$$\vec{\beta} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}; 0; \frac{1}{\sqrt{17}}\right).$$

II nodaļa

VIRSMAS EIKLĪDA TELPĀ

2.1. Virsmu vienādojumi

Virsma var būt noteikta vienā no šādiem veidiem:

- aizklātā veidā
$$F(x; y; z) = 0; \tag{2.1}$$
- atklātā veidā
$$z = f(x; y); \tag{2.2}$$
- parametriskā veidā
$$x = x(u; v), \quad y = y(u; v), \quad z = z(u; v); \tag{2.3}$$
- vektoriālā veidā
$$\vec{r} = \vec{r}(u; v) \quad \text{vai} \quad \vec{r} = \big(x(u; v); y(u; v); z(u; v)\big). \tag{2.4}$$

Šeit iet runa par taisnleņķa koordinātu sistēmu telpā un par vektoru $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, kur O ir koordinātu sākums, bet M ir virsmas punkts.

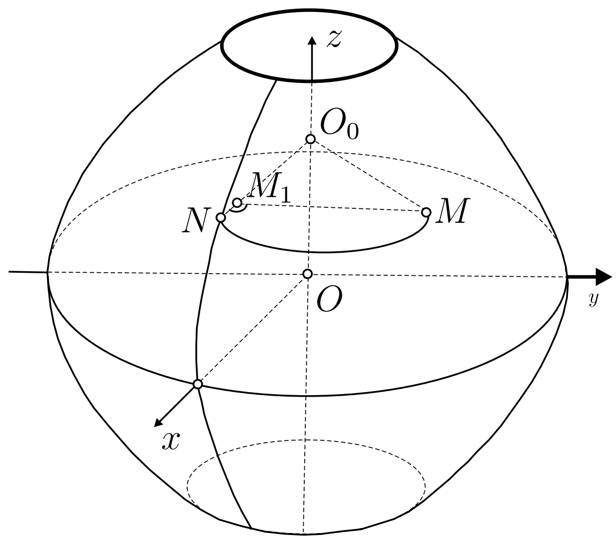
Aplūkosim dažu virsmu vienādojumu sastādīšanu un pāreju no viena veida vienādojumiem uz cita veida vienādojumiem.

2.1. piemērs. Uzrakstīt virsmas, kas rodas, rotējot līknei $x = \varphi(u)$, $y = 0$, $z = \psi(u)$ ap Oz asi, vienādojumus.

Punkts $N\big(\varphi(u); 0; \psi(u)\big)$ ir patvaļīgs līknes punkts, bet punkts $M(x; y; z)$ ir punkta N stāvoklis pēc pagrieziena par leņķi $v = \angle NO_0M$.

Punkta M koordinātas:

$$x = O_0M_1 = O_0M\cos v = ON\cos v = \varphi(u)\cos v,$$
$$y = M_1M = O_0M\sin v = O_0N\sin v = \varphi(u)\sin v,$$
$$z = \psi(u).$$



2.1. zīm.

Meklējamie vienādojumi:

$$x = \varphi(u)\cos v,$$
$$y = \varphi(u)\sin v,$$
$$z = \psi(u).$$

2.2. piemērs. Uzrakstīt sfēras $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ parametriskos vienādojumus.

1. paņēmiens.

Sfēra rodas, riņķa līnijai $x = a\cos u; y = 0; z = a\sin u$ rotējot ap Oz asi.

Tāpēc sfēras parametriskie vienādojumi ir šādi:

$$x = a\cos u\sin v,$$
$$y = a\cos u\sin v,$$
$$z = a\sin u.$$

$$-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}, \quad \pi \le v < \pi.$$

2. paņēmiens.

Sfēras parametriskos vienādojumus var uzrakstīt arī pa daļām.

Sfēras augšējās daļas vienādojums atklātā formā ir

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},$$

apakšējās daļas vienādojums ir

$$z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}.$$

Vienādojumi parametriskā formā ir attiecīgi:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = \sqrt{a^2 - u^2 - v^2},$$
$$x = u, \quad y = v, \quad z = -\sqrt{a^2 - u^2 - v^2}.$$

2.3. piemērs. Par **toru** sauc virsmu, kas rodas, rotējot riņķa līnijai ap asi, kas pieder tās plaknei. Uzrakstīt tora parametriskos vienādojumus.

Pieņemsim, ka Oz ir rotācijas ass un riņķa līnija pieder xOz plaknei. Riņķa līnijas centrs ir $O_0(a; 0; 0)$, tās rādiuss ir b.

Šādas riņķa līnijas parametriskie vienādojumi:

$$x = a + b\cos u,$$
$$y = 0,$$
$$z = b\sin u.$$

Tora parametriskie vienādojumi:

$$x = (a + b\cos u)\cos v,$$
$$y = (a + b\cos u)\sin v,$$
$$z = b\sin u$$

(skat. 2.1. piemēru).

2.4. piemērs. Uzrakstīt divdobumu hiperboloīda

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

parametriskos vienādojumus.

Divdobumu hiperboloīds sastāv no divām komponentēm, tāpēc nav iespējams uzrakstīt parametriskos vienādojumus visai virsmai. Viena no bezgala daudzajām parametrizācijām ir šāda:

$$\begin{aligned} x &= a \operatorname{ch} u, \\ y &= b \operatorname{sh} u \cos v, \\ z &= c \operatorname{sh} u \sin v. \end{aligned}$$

Sastādot šos vienādojumus, ņemtas vērā funkciju $\operatorname{sh} u$, $\operatorname{ch} u$, $\cos v$ un $\sin v$ īpašības:

$$\begin{aligned} &\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1, \\ &\cos^2 v + \sin^2 v = 1. \end{aligned}$$

Ņemot vērā, ka $\operatorname{ch} u > 0$, redzam, ka $x > 0$. Tātad iegūtie vienādojumi apraksta pusi no virsmas. Otru virsmas pusi apraksta vienādojumi

$$\begin{aligned} x &= -a \operatorname{ch} u, \\ y &= b \operatorname{sh} u \cos v, \\ z &= c \operatorname{sh} u \sin v. \end{aligned}$$

2.5. piemērs. Uzrakstīt virsmas $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$ vienādojumu aizklātā formā.

Izslēgsim parametrus u un v:

$$x^2 - y^2 = (u + v)^2 - (u - v)^2 = 4uv = 4z.$$

Dotie parametriskie vienādojumi atbilst hiperboliskajam paraboloīdam

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 2z.$$

2.2. Koordinātu sistēmas, kas saistītas ar virsmu

Virsmas punkta M koordinātas Dekarta bāzē $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ pieraksta kā $M(x; y; z)$, bet Gausa koordinātu sistēmā kā $M(u; v)$. Gausa koordinātu sistēmu uz virsmas veido u-līnijas un v-līnijas.

Virsmas pieskarvektora $\vec{a}$ koordinātas punktā M nosaka

Dekarta bāzē $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

un afīnajā bāzē $(\vec{r}_u; \vec{r}_v)$

$$\vec{a} = \alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v.$$

2.6. piemērs. Atrast vienības sfēras $x = \cos u \cos v$, $y = \sin u \cos v$, $z = \sin v$ Gausa koordinātu sistēmu.

Aplūkosim sfēras daļu, kas atrodas pirmajā oktantā $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. u-līnijas vienādojums Gausa koordinātu sistēmā ir $v = v_0$, tās vienādojumi Dekarta koordinātu sistēmā

$$x = \cos u \cos v_0,$$
$$y = \sin u \cos v_0,$$
$$z = \sin v_0.$$

u-līnija pieder plaknei $z = \sin v_0$, to iegūstam šķeļot sfēru ar šo plakni. u-līnija šajā gadījumā ir sfēras paralēle (riņķa līnija).

v-līnijas vienādojums Gausa koordinātu sistēmā ir $u = u_0$, vienādojumi Dekarta sistēmā:

$$x = \cos u_0 \cos v,$$
$$y = \sin u_0 \sin v,$$
$$z = \sin v.$$

Noteiksim šo līniju kā divu virsmu šķēlumu (skat. 1.1. piemēru). Izslēgsim parametru v:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin u_0}{\cos u_0} = \operatorname{tg} u_0, \quad y = x \operatorname{tg} u_0.$$

Tas ir plaknes, kas iet caur Oz asi, vienādojums.

Šajā gadījumā koordinātu x un y zīmes sakrīt ar $\cos u_0$ un $\sin u_0$ zīmēm, tāpēc jāaplūko tikai pusplakne ar robežu - Oz asi.

v-līnija ir lielās riņķa līnijas loks, kas savieno sfēras polus (meridiāns).

Punkts $M_0(x_0; y_0; z_0)$ - Dekarta koordinātu sistēmā, kur

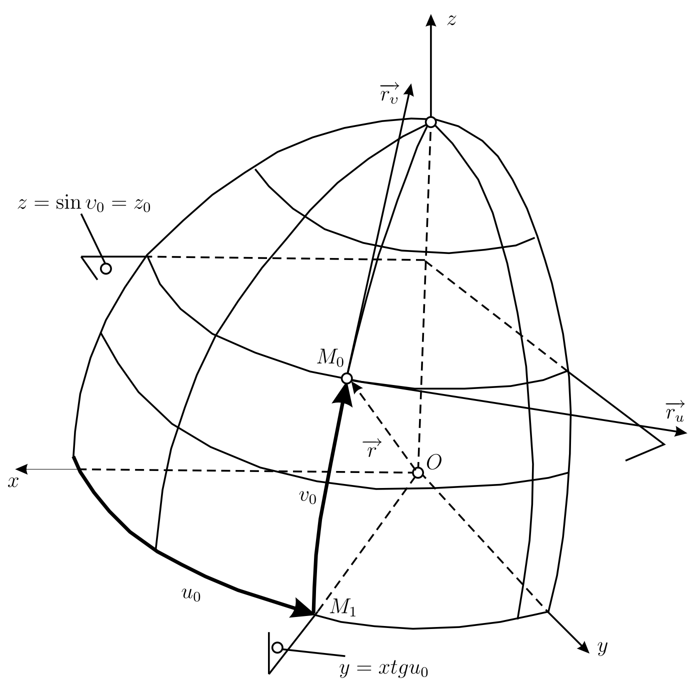
$$x_0 = a \cos u_0 \cos v_0,$$
$$y_0 = a \sin u_0 \cos v_0,$$
$$z_0 = a \sin v_0.$$

Punkts $M_0(u_0; v_0)$ - Gausa koordinātu sistēmā, $u_0 = \angle XOM_1$, $v_0 = \angle M_1OM_0$.

Aplūkosim afīno bāzi punktā M_0:

$$\vec{r}_u = (-a \sin u_0 \cos v_0; a \cos u_0 \sin v_0; 0),$$
$$\vec{r}_v = (-a \cos u_0 \sin v_0; -a \sin u_0 \sin v_0; a \cos v_0).$$

Vektori $\vec{r}_u$ un $\vec{r}_v$ ir attiecīgi u-līnijas un v-līnijas pieskares virziena vektori punktā M_0 .



2.2. zīm.

2.7. piemērs. Atrast sfēras $x = u$, $y = v$, $z = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ Gausa koordinātu sistēmu.

u-līnijas vienādojums Gausa koordinātu sistēmā ir $v - v_0$, bet tās vienādojumi Dekarta koordinātu sistēmā:

$$x = u,$$
$$y = v_0,$$
$$z = \sqrt{1 - u^2 - v_0^2}.$$

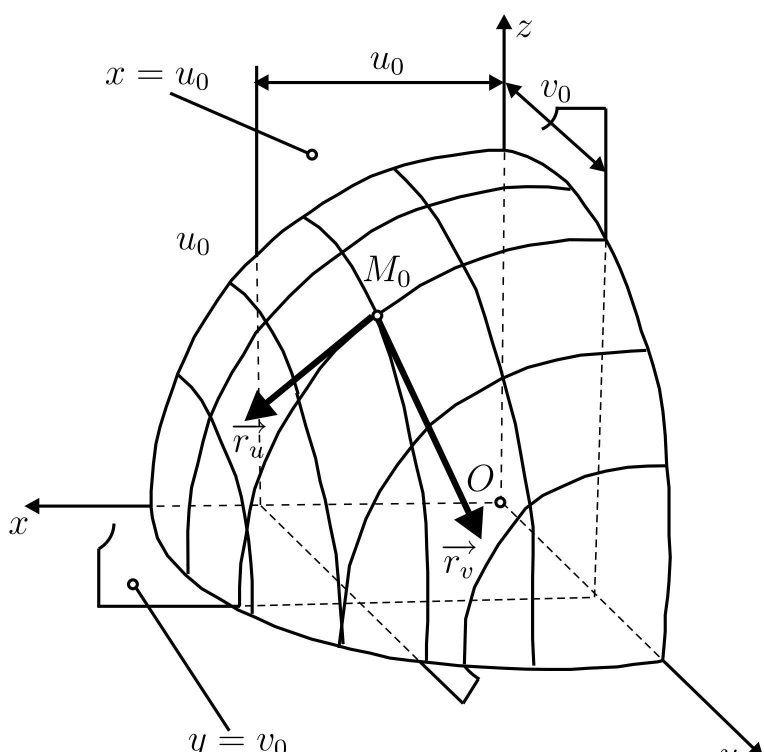
Šī līnija ir sfēras šķēlums ar plakni $y = v_0$.

v-līnija ir sfēras šķēlums ar plakni $x = u_0$, tās vienādojumi Dekarta sistēmā:

$$
\begin{aligned}
&x = u_0,\\
&y = v,\\
&z = \sqrt{1 - u_0^2 - v^2}.
\end{aligned}
$$

Afīnā bāze punktā M_0

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_u &= \left(1; 0; -\frac{u_0}{\sqrt{1 - u_0^2 - v_0^2}}\right),\\
\vec{r}_v &= \left(0; 1; -\frac{v_0}{1 - u_0^2 - v_0^2}\right).
\end{aligned}
$$



2.3. zīm.

2.3. Pieļaujamā parametru maiņa

Katrai virsmai atbilst bezgala daudzi parametrisko vienādojumu veidi.

Pāreju no viena veida vienādojumiem uz cita veida vienādojumiem izdara ar pieļaujamās parametru maiņas palīdzību:

$$u = u(\alpha; \beta), \quad v = v(\alpha; \beta),$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial \alpha} & \frac{\partial u}{\partial \beta} \\ \frac{\partial v}{\partial \alpha} & \frac{\partial v}{\partial \beta} \end{vmatrix} \neq 0.$$

2.8. piemērs. Doti sfēras parametriskie vienādojumi

$$x = u, \;\; y = v, \;\; z = \sqrt{1 - u^2 - v^2}. \tag{$*$}$$

Pāriet no parametriem u un v uz parametriem α un β:

$$\begin{cases} u = \cos\alpha \cos\beta, \\ v = \sin\alpha \cos\beta. \end{cases} \tag{a}$$

Raksturot apgriezto parametru maiņu.

Pārliecināsimies, ka parametru maiņa pieļaujama.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\sin\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\sin\beta \\ \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sin 2\beta.$$

Parametru maiņa nav regulāra, ja $\sin 2\beta = 0$, t.i., $\beta = \frac{\pi}{2}$ un $\beta = -\frac{\pi}{2}$.

Sfēras polos parametru maiņa nav regulāra, te krustojas visi meridiāni.

Ievietojot vienādojumos (*) u un v vērtības, iegūstam sfēras parametriskos vienādojumus

$$x = \cos\alpha\cos\beta, \;\; y = \sin\alpha\cos\beta, \;\; z = \sin\beta. \tag{$**$}$$

No vienādojumiem (**) pāriet uz vienādojumiem (*) ar apgriezto formulu palīdzību.

No formulām (a) izsaka α un β ar u un v. Izdalot, iegūstam:

$$\frac{v}{u} = \operatorname{tg}\alpha, \;\; \alpha = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}.$$

Ievietojot šo α vērtību pirmajā vienādojumā, iegūstam:

$$u = \cos\operatorname{arctg}\frac{v}{u}\cos\beta = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\cos\beta,$$
$$\cos\beta = \sqrt{u^2+v^2},$$
$$\beta = \arccos\sqrt{u^2+v^2}.$$

No vienādojumiem (**) uz vienādojumiem (*) pārejam ar formulu

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{arctg}\frac{v}{u}, \\ \beta = \arccos\sqrt{u^2+v^2} \end{cases}$$

(skat. 2.6. un 2.7. piemēru).

2.4. Virsmas pieskarplakne un normāle

Ja virsmas vienādojums dots veidā (2.1), tad pieskarplaknes vienādojums punktā $M_0(x_0; y_0; z_0)$ ir

$$F'_x(x-x_0) + F'_y(y-y_0) + F'_z(z-z_0) = 0.$$

Noteikti jāpārbauda, vai punkts M_0 pieder šai virsmai, t.i.,

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Normāles kanoniskie vienādojumi šajā punktā:

$$\frac{x-x_0}{F'_x} = \frac{y-y_0}{F'_y} = \frac{z-z_0}{F'_z}.$$

Ja virsmas vienādojumi ir veidā (2.3), tad pieskarplaknes vienādojums ir

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = 0$$

jeb

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0,$$

kur

$$\vec{n} = (A; B; C) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$$

un

$$x_0 = x(u_0; v_0), \quad y_0 = y(u_0; v_0), \quad z_0 = z(u_0; v_0).$$

Normāles kanoniskie vienādojumi:

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}.$$

2.9. piemērs. Uzrakstīt eliptiskā konusa $x^2-y^2-4z^2=0$ pieskarplaknes un normāles vienādojumus punktā $M_0\left(2;\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Aprēķina parciālo atvasinājumu vērtības punktā M_0:

$$\begin{aligned} F'_x &= 2x = 4; \\ F'_y &= -2y = -2\sqrt{2}, \\ F'_z &= -8z = -4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Pieskarplaknes normālvektors ir

$$\vec{n}=(4;-2\sqrt{2};-4\sqrt{2})\ \upuparrows\ (\sqrt{2};-1;-2),$$

un tas vienlaicīgi ir arī normāles virziena vektors.

Pieskarplaknes vienādojums:

$$\sqrt{2}(x-2)-1(y-\sqrt{2})-2\left(z-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0,$$

$$\sqrt{2}x-y-2z=0.$$

Normāles vienādojumi:

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{-1}=\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-2}.$$

2.10. piemērs. Uzrakstīt virsmas $\vec{r}=(2u;2u\cos v;u\sin v)$ pieskarplaknes un normāles vienādojumus punktā $M_0\left(u_0=1;v_0=\frac{\pi}{4}\right)$.

Aprēķināsim pieskarplaknes normālvektoru punktā M_0.

$$M_0\left(2;\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\vec{r}_u=(2;2\cos v;\sin v)=\left(2;\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\vec{r}_v = (0; -2u\sin v; u\cos v) \upuparrows (0; -2\sqrt{2}; \sqrt{2}),$$
$$\vec{r}_u \upuparrows (2\sqrt{2}; 2; 1),$$
$$\vec{r}_v \upuparrows (0; -2; 1),$$
$$\vec{n} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \upuparrows (4; -2\sqrt{2}; -4\sqrt{2}) \upuparrows (\sqrt{2}; -1; -2).$$

Pieskarplaknes vienādojums:

$$\sqrt{2}x - y - 2z = 0.$$

Normāles vienādojumi:

$$\frac{x-2}{\sqrt{2}} = \frac{y-\sqrt{2}}{-1} = \frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-2}.$$

2.9. un 2.10. piemērā atrisināts viens un tas pats uzdevums, ja virsmai ir dažādi vienādojumu veidi.

2.5. Līknes un virsmas (vienkāršākie uzdevumi)

Aplūkosim virsmas līkņu krustpunkta koordinātu un pieskarvektora koordinātu aprēķināšanu.

Līknes uz virsmas Gausa koordinātu sistēmā nosaka vienādojumi vienā no šādiem veidiem:

- aizklātā veidā
$$F(u; v) = 0, \tag{a}$$
- atklātā veidā
$$v = f(u), \tag{b}$$
- parametriskā veidā
$$u = u(t), \quad v = v(t). \tag{c}$$

Pāreju no vienas veida uz citu veidu skat. 1.4., 1.5. un 1.6. piemēros.

Ja līkne (c) atrodas uz virsmas

$$\begin{cases} x = x(u; v), \\ y = y(u; v), \\ z = z(u; v). \end{cases}$$

tad Dekarta koordinātu sistēmā līknes vienādojumi ir:

$$\begin{cases} x = x\big(u(t); v(t)\big) = x_1(t), \\ y = y\big(u(t); v(t)\big) = y_1(t), \\ z = z\big(u(t); v(t)\big) = z_1(t). \end{cases}$$

Līkņu krustpunktu $A_1(u_1; v_1), A_2(u_2; v_2) \ldots$ koordinātas Gausa sistēmā, ja līknes dotas formā (a), aprēķina atrisinot vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} F_1(u; v) = 0, \\ F_2(u; v) = 0. \end{cases}$$

Krustpunkta koordinātas Gausa sistēmā, ja līknes dotas formā (a) un (c), atrod šādi: ievieto $u = u(t)$, $v = v(t)$ vienādojumā $F(u; v) = 0$. Iegūst vienādojumu

$$F\big(u(t); v(t)\big) = 0.$$

Šī vienādojuma reālajām saknēm $t_1, t_2 \ldots$ atbilst līkņu krustpunkti

$$\begin{array}{lll} A_1(u_1; v_1), & u_1 = u(t_1), & v_1 = v(t_1); \\ A_2(u_2; v_2), & u_2 = u(t_2), & v_2 = v(t_2); \\ \ldots & & \end{array}$$

Ja līknes dotas formā (c), tad, izslēdzot parametru, uzdevumu reducē uz vienu no iepriekšējiem.

Līknes $u = u(t)$, $v = v(t)$ pieskares punktā $M_0(t = t_0)$ virziena vektors attiecībā pret afīno bāzi $(\vec{r}_u; \vec{r}_v)$ šajā punktā ir

$$\vec{l} = \big(u'(t_0); v'(t_0)\big).$$

Bāzē $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ šis vektors ir

$$\vec{l} = u'(t_0)\vec{r}_u + v'(t_0)\vec{r}_v = u'(t_0)\left(x'_u\vec{i} + y'_u\vec{j} + z'_u\vec{k}\right) + v'(t_0)\left(x'_v\vec{i} + y'_v\vec{j} + z'_v\vec{k}\right) =$$
$$= \big(u'(t_0)x'_u + v'(t_0)x'_v\big)\vec{i} + \big(u'(t_0)y'_u + v'(t_0)y'_v\big)\vec{j} + \big(u'(t_0)z'_u + v'(t_0)z'_v\big)\vec{k}.$$

Līknes $F(u; v) = 0$ pieskares virziena vektors bāzē $(\vec{r}_u; \vec{r}_v)$ ir

$$\vec{l} = (-F'_v; F'_u).$$

Parciālos atvasinājumus aprēķina punktā M_0. Šis vektors bāzē $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$:

$$\vec{l} = -F'_v\vec{r}_u + F'_u\vec{r}_v = (F'_u x'_v - F'_v x'_u)\,\vec{i} + (F'_u y'_v - F'_v y'_u)\,\vec{j} + (F'_u z'_v - F'_v z'_u)\,\vec{k}.$$

2.11. piemērs. Aprēķināt līkņu $u^2 - v = 0$, $8u - v^2 = 0$ krustpunktu koordinātas Gausa un Dekarta koordinātu sistēmās uz rotācijas paraboloīda

$$x = u, \quad y = v, \quad z = u^2 + v^2.$$

Sistēmas

$$\begin{cases} u^2 - v = 0, \\ 8u - v^2 = 0. \end{cases}$$

atrisinājumi $A_1(0;0)$, $A_2(2;4)$ ir līkņu krustpunkti Gausa koordinātu sistēmā.

Ievieto iegūtās u un v vērtības virsmas vienādojumos. Iegūst šos punktus $A_1(0;0;0)$, $A_2(2;4;20)$ Dekarta sistēmā.

2.12. piemērs. Aprēķināt līkņu $u = \cos t$, $v = \sin t$ un $u = t$, $v = t^2 - 1$ krustpunktu koordinātas Gausa un Dekarta koordinātu sistēmās, ja līknes pieder hiperboliskajam paraboloīdam

$$x = u, \quad y = v, \quad z = u^2 - v^2.$$

Uzraksta pirmās līknes vienādojumu aizklātā veidā

$$u^2 + v^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1, \quad u^2 + v^2 = 1.$$

Ievieto šajā vienādojumā u un v vērtības no otrās līknes vienādojumiem.

Iegūst vienādojumu

$$t^4 - t^2 = 0.$$

Šī vienādojuma saknēm $t_1 = t_2 = 0$, $t_3 = 1$, $t_4 = -1$ atbilst krustpunkti Gausa sistēmā, kurus atrod, ievietojot iegūtās saknes otrās līknes vienādojumos:

$$A_1 = A_2(0;-1), \quad A_3(1;0), \quad A_4(-1;0).$$

Atrastie punkti Dekarta sistēmā:

$$A_1 = A_2(0;-1;-1), \quad A_3(1;0;1), \quad A_4(-1;0;1).$$

2.13. piemērs. Aprēķināt līknes $u = t^2$, $v = t^3 + 1$ pieskares virziena vektora koordinātas punktā $M_0(t_0 = -1)$ attiecībā pret bāzi $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, ja līkne pieder helikoīdam

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = v.$$

1. paņēmiens.

Uzraksta līknes vienādojumus Dekarta sistēmā. Tam nolūkam ievieto u un v vērtības virsmas vienādojumos:

$$\begin{cases} x = t^2\cos(t^3+1), \\ y = t^2\sin(t^3+1), \\ z = t^3+1. \end{cases}$$

Pieskares virziena vektors bāzē $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$:

$$\vec{l} = \vec{r}\,' = \big(2t\cos(t^3+1) - 3t^4\sin(t^3+1); 2t\sin(t^3+1) + 3t^4\cos(t^3+1); 3t^2\big) = \\ = (-2;3;3).$$

2. paņēmiens.

Aprēķina vektora $\vec{l}$ koordinātas bāzē $(\vec{r}_u;\vec{r}_v)$ virsmas punktā $M_0(1;0)$:

$$\begin{aligned} &\vec{r}_u = (\cos v;\sin v;0) = (1;0;0), \\ &\vec{r}_v = (-u\sin v; u\cos v;1) = (0;1;1), \\ &\vec{l} = \big(u'(t);v'(t)\big) = (2t;3t^2) = (-2;3), \\ &\vec{l} = -2\vec{r}_u + 3\vec{r}_v = (-2;3;3). \end{aligned}$$

2.6. Virsmas pirmā kvadrātiskā forma

Virsmas

$$\vec{r} = \big(x(u;v); y(u;v); z(u;v)\big)$$

pirmā kvadrātiskā forma, kas atbilst šai parametrizācijai, ir

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

kur

$$E = \vec{r}_u\vec{r}_u, \quad F = \vec{r}_u\vec{r}_v, \quad G = \vec{r}_v\vec{r}_v.$$

Divas virsmas, kuru kvadrātiskās formas attiecībā pret piemēroti izvēlētiem parametriskajiem vienādojumiem sakrīt, sauc par **izometriskām**.

Šajā gadījumā vienas virsmas neliels apgabals ir izklājams uz otras virsmas.

2.14. piemērs. Aprēķināt rotācijas cilindra un plaknes pirmo kvadrātisko formu.

Pieņemsim, ka rotācijas cilindra rādiuss ir 1, tad tā vienādojums ir

$$\vec{r} = (\cos u; \sin u; v),$$

plaknes zOy vienādojums ir

$$\vec{r} = (\alpha; \beta; 0).$$

Šim cilindram:

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_u = (-\sin u; \cos u; 0),\\
&\vec{r}_v = (0; 0; 1),\\
&E = \vec{r}_u\vec{r}_u = \sin^2 u + \cos^2 u = 1,\\
&F = \vec{r}_u\vec{r}_v = 0,\\
&G = \vec{r}_v\vec{r}_v = 1,\\
&ds^2 = du^2 + dv^2.
\end{aligned}$$

Plaknes pirmā kvadrātiskā forma:

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_\alpha = (1; 0; 0),\\
&\vec{r}_\beta = (0; 1; 0),\\
&E = \vec{r}_\alpha\vec{r}_\alpha = 1,\\
&F = \vec{r}_\alpha\vec{r}_\beta = 0,\\
&G = \vec{r}_\beta\vec{r}_\beta = 1,\\
&ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2.
\end{aligned}$$

Cilindrs un plakne ir izometriskas virsmas, cilindru var izklāt plaknē.

2.15. piemērs. Katenoīds ir rotācijas virsma, kas rodas, ķēdes līnijai $x = \operatorname{ch} u$, $y = 0$, $z = u$ rotējot ap Oz asi (skat. 2.1., 2.2., 2.3. piemēru). Tā vienādojums ir

$$\vec{r} = (\operatorname{ch} u \cos v; \operatorname{ch} u \sin v; u). \qquad (*)$$

Helikoīds rodas, ja rotācijas asij Oz perpendikulāra taisne vienmērīgi rotē un vienlaicīgi pārvietojas rotācijas ass viezienā par attālumu, kas ir proporcionāls pagrieziena leņķim α.

Tā vienādojums ir

$$\vec{r} = (\beta \cos \alpha; \beta \sin \alpha; \alpha). \tag{**}$$

Šajā gadījumā proporcionalitātes koeficients ir 1.

Pierādīt, ka katenoīds un helikoīds ir izometriskas virsmas.

Katenoīda (*) 1. kvadrātiskā forma:

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_u = (\operatorname{sh} u \cos v; \operatorname{sh} u \sin v; 1),\\
&\vec{r}_v = (-\operatorname{ch} u \sin v; \operatorname{ch} u \cos v; 0),\\
&E = \operatorname{sh}^2 u \cos^2 v + \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v + 1 = \operatorname{sh}^2 u + 1 = \operatorname{ch}^2 u,\\
&F = -\operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \sin v \cos v + \operatorname{sh} u \operatorname{ch} u \sin v \cos v = 0,\\
&G = \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v + \operatorname{ch}^2 u \cos^2 v = \operatorname{ch}^2 u,\\
&ds^2 = \operatorname{ch}^2 u(du^2 + dv^2).
\end{aligned}$$

Helikoīda (**) 1. kvadrātiskā forma:

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_\alpha = (-\beta \sin \alpha; \beta \cos \alpha; 1),\\
&\vec{r}_\beta = (\cos \alpha; \sin \alpha; 0),\\
&E = \beta^2 \sin^2 \alpha + \beta^2 \cos^2 \alpha + 1 = 1 + \beta^2,\\
&F = -\beta \sin \alpha \cos \alpha + \beta \sin \alpha \cos \alpha = 0,\\
&G = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1,\\
&ds^2 = (1 + \beta^2) d\alpha^2 + d\beta^2.
\end{aligned}$$

Redzam, ka virsmu pirmās kvadrātiskās formas, kas atbilst dotajām parametrizācijām, ir dažādas.

Mainīsim parametrus helikoīda vienādojumos $\alpha = v$, $\beta = \operatorname{sh} u$. Šāda parametru maiņa ir pieļaujama, jo

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \operatorname{ch} u & 0 \end{vmatrix} = -\operatorname{ch} u < 0.$$

Iegūstam helikoīda citu vienādojumu

$$\vec{r} = (\operatorname{sh} u \cos v; \operatorname{sh} u \sin v; v), \tag{***}$$

un tam atbilstošo pirmo kvadrātisko formu:

$$\begin{aligned}
&d\alpha = dv,\\
&d\beta = \operatorname{ch} u du,\\
&ds^2 = (1 + \operatorname{sh}^2 u) dv^2 + \operatorname{ch}^2 u du^2,\\
&ds^2 = \operatorname{ch}^2 u(du^2 + dv^2).
\end{aligned}$$

Nelielu helikoīda gabalu var izklāt uz katenoīda un otrādi, jo virsmas ir izometriskas.

2.7. Līknes loka garums uz virsmas

Līknes $u = u(t)$, $v = v(t)$ loka garumu uz virsmas

$$\vec{r} = \big(x(u;v); y(u;v); z(u;v)\big)$$

var aprēķināt ar diviem paņēmieniem.

1. Var uzrakstīt līknes vienādojumu Dekarta sistēmā

$$\vec{r} = \Big(x\big(u(t);v(t)\big); y\big(u(t);v(t)\big); z\big(u(t);v(t)\big)\Big),$$

un aprēķināt tās loka garumu pēc formulas

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} |\vec{r}\,'(t)|dt.$$

2. Var izmantot virsmas pirmo kvadrātisko formu:

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\big(u(t);v(t)\big)\big(u'(t)\big)^2 + 2F\big(u(t);v(t)\big)u'(t)v'(t) + G\big(u(t);v(t)\big)\big(v'(t)\big)^2}dt.$$

Ja zināma tikai virsmas pirmā kvadrātiskā forma, tad var izmantot tikai otro paņēmienu.

2.16. piemērs. Aprēķināt līknes $u = t$, $v = -t + 1$ loka $A_1(t_1 = 0)$ $A_2(t_2 = 1)$ garumu uz virsmas, ja tās pirmā kvadrātiskā forma ir

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 u(du^2 + dv^2).$$

Apēķināsim ds:

$$du = dt, \quad dv = -dt, \quad du^2 + dv^2 = 2dt^2,$$

$$ds^2 = 2\operatorname{ch}^2 t dt^2, \quad ds = \sqrt{2}\operatorname{ch} t dt.$$

Integrējot iegūstam loka garumu

$$S = \sqrt{2}\int\limits_0^1 \operatorname{ch} t dt = \sqrt{2}\operatorname{sh} t\Big|_0^1 = \sqrt{2}\operatorname{sh} 1 \approx 2,48.$$

Vienādojumi $u = t$, $v = -t + 1$ uz virsmām (*) un (***) (skat. 2.15. piemēru) nosaka dažādas līknes, bet to loka garumus ar pirmās kvadrātiskās formas palīdzību aprēķina vienādi.

Šeit ir aprēķināts līknes loka A_1A_2 garums uz bezgala daudzām savstarpēji izometriskām virsmām, kuru pirmā kvadrātiskā forma ir

$$ds^2 = \mathrm{ch}^2\, u(du^2 + dv^2).$$

2.17. piemērs. Aprēķināt līknes $u = t$, $v = t^2$ loka $A_1(t_1 = 0)A_2(t_2 = 1)$ garumu uz hiperboliskā paraboloīda $\vec{r} = \left(u; v; \frac{2}{3}uv\right)$.

1. paņēmiens.

Uzraksta līknes vienādojumu Dekarta koordinātu sistēmā

$$\vec{r} = (\vec{t}) = \left(t; t^2; \frac{2}{3}t^3\right).$$

Aprēķina pieskares virziena vektora moduli

$$\begin{aligned} &\vec{r}\,'(t) = (1; 2t; 2t^2), \\ &|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4} = 1 + 2t^2. \end{aligned}$$

Integrējot iegūst līknes loka garumu

$$S = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{r}\,'(t)|\, dt = \int_0^1 (1 + 2t^2)dt = t + \frac{2}{3}t^3 \bigg|_0^1 = \frac{5}{3}.$$

2. paņēmiens.

Līknes loka garumu aprēķina ar pirmās kvadrātiskās formas palīdzību:

$$\begin{aligned} &\vec{r}_u = \left(1; 0; \frac{2}{3}v\right), \\ &\vec{r}_v = \left(0; 1; \frac{2}{3}u\right), \\ &E = 1 + \frac{4}{9}v^2 = 1 + \frac{4}{9}t^4, \\ &F = \frac{4}{9}uv = \frac{4}{9}t^3, \\ &G = 1 + \frac{4}{9}u^2 = 1 + \frac{4}{9}t^2, \\ &u'(t) = 1, \quad v'(t) = 2t. \end{aligned}$$

Ievieto šos lielumus formulā un iegūst:

$$S = \int_0^1 \sqrt{\left(1+\frac{4}{9}t^4\right)1^2 + 2\frac{4}{9}t^3\cdot 1\cdot 2t + \left(1+\frac{4}{9}t^2\right)(2t)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^1 (1+2t^2)dt = \frac{5}{3}.$$

Līknes loka garuma aprēķināšana bieži saistīta ar neelementārām funkcijām. Šajā gadījumā integrāli var aprēķināt ar aptuveno formulu palīdzību.

2.8. Leņķis starp līknēm uz virsmas

Par **leņķi starp virsmas līknēm** sauc ar leņķi starp šo līkņu pieskarēm, kas novilktas līkņu krustpunktā. Šo leņķi aprēķina pēc formulas

$$\cos\varphi = \frac{E\alpha_1\beta_1 + F(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1) + G\alpha_2\beta_2}{\sqrt{E\alpha_1^2 + 2F\alpha_1\alpha_2 + G\alpha_2^2}\cdot\sqrt{E\beta_1^2+2F\beta_1\beta_2+G\beta_2^2}},$$

kur $\vec{a} = (\alpha_1;\alpha_2)$, $\vec{b} = (\beta_1;\beta_2)$ ir līknes pieskaru virziena vektori bāzē $(\vec{r}_u;\vec{r}_v)$ (skat. 2.11. paragrāfu).

Ja vektori izteikti bāzē $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, tad

$$\vec{a} = (a_1;a_2;a_3), \quad \vec{b} = (b_1;b_2;b_3).$$

Leņķi aprēķina pēc vispārējā paņēmiena

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}.$$

Lai lietotu šo formulu, ir jāzina virsmas vienādojums.

2.18. piemērs. Aprēķināt leņķi starp līknēm $u = t$, $v = t^2+1$ un $uv - v + 1 = 0$ šo līkņu krustpunktā uz virsmas, kuras pirmā kvadrātiskā forma ir

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 u(du^2+dv^2)$$

(skat. 2.15. piemēru).

Aprēķina līkņu krustpunkta Gausa koordinātes. Ievieto $u = t$, $v = t^2 + 1$ vienādojumā $uv - v + 1 = 0$. Iegūst vienādojumu

$$t^3 - t^2 + 1 = 0,$$

$$t(t^2 - t + 1) = 0.$$

Šim vienādojumam ir viena reāla sakne $t_0 = 0$.

Līknes krustojas punktā $M_0(0; 1)$. Koeficientu E, F, G vērtības punktā M_0 ir

$$E = \operatorname{ch}^2 u_0 = 1, \quad F = 0, \quad G = \operatorname{ch}^2 u_0 = 1.$$

Aprēķina līkņu pieskaru virziena vektorus bāzē $(\vec{r}_u; \vec{r}_v)$:

$$\vec{a} = \big(u'(t_0); v'(t_0)\big) = (1; 2t_0) = (1; 0),$$
$$\vec{b} = (-F'v; F'u) = \big(-(u_0 - 1); v_0\big) = (1; 1).$$

No šejienes

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Te ir atrisināts uzdevums bezgala daudzām virsmām, kuru pirmā kvadrātiskā forma ir

$$ds^2 = \operatorname{ch}^2 u(du^2 + dv^2),$$

tai skaitā arī helikoīdam un katenoīdam (skat. 2.15. piemēru).

2.19. piemērs. Aprēķināt leņķi starp līknēm $u = t$, $v = t^2 + 1$ un $uv - v + 1 = 0$ uz rotācijas paraboloīda

$$\vec{r} = (u; v; u^2 + v^2).$$

1. paņēmiens.

Pirmās līknes vienādojums Dekarta koordinātu sistēmā ir

$$\vec{r} = (t; t^2 + 1; t^4 + 3t^2 + 1)$$

(skat. 2.13. piemēru).

Uzraksta otrās līknes parametriskos vienādojumus Gausa koordinātu sistēmā:

$$u = 1 - \frac{1}{v},$$

$$\begin{cases} u = 1 - \frac{1}{t}, \\ v = t. \end{cases}$$

Šīs līknes vienādojums Dekarta sistēmā ir

$$\vec{r} = \left(1 - \frac{1}{t}; t; 1 - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2} + t^2\right).$$

Līknes krustojas punktā $M_0(0;1)$ (skat. 2.18. piemēru).

Punktam M_0 uz pirmās līknes atbilst parametra vērtība $t_{01} = 0$, uz otrās līknes parametra vērtība $t_{02} = 1$.

Šo līkņu pieskaru virziena vektori punktā M_0 ir

$$\vec{r_1}' = (1;0;0) \quad \text{un} \quad \vec{r_2}' = (1;1;2),$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{r_1}'\vec{r_2}'}{|\vec{r_1}'| \cdot |\vec{r_2}'|} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\varphi \approx 66^\circ.$$

2. paņēmiens.

Aprēķina līkņu pieskaru virziena vektorus bāzē $(\vec{r}_u; \vec{r}_v)$.

$$\begin{aligned} \vec{r_1}' &= (1; 2t) = (1;0), \\ \vec{r_2}' &= \big(-(u-1); v\big) = (1;1). \end{aligned}$$

Punktā M_0 aprēķina E, F, G:

$$\vec{r}_u = (1;0;2u) = (1;0;0), \qquad \vec{r}_v = (0;1;2v) = (0;1;2).$$

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 5.$$

No šejienes

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \text{un} \quad \varphi \approx 65,9^\circ.$$

3. paņēmiens.

Vektorus $\vec{r_1}'$ un $\vec{r_2}'$ bāzē $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ var aprēķināt šādi:

$$\begin{aligned} \vec{r_1}' &= 1 \cdot \vec{r}_u + 0 \cdot \vec{r}_v = (1;0;0), \\ \vec{r_2}' &= 1 \cdot \vec{r}_u + 1 \cdot \vec{r}_v = (1;1;2). \end{aligned}$$

2.9. Virsmas laukums

Virsmas laukumu aprēķina pēc formulas

$$L = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv = \iint_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, dudv.$$

2.20. piemērs. Aprēķināt apgabala D laukumu, kuru uz rotācijas konusa

$$\vec{r} = (v \cos u; v \sin u; v)$$

ierobežo līknes $u - v = 0$ un $u^2 - v = 0$.

$$\begin{aligned} &\vec{r}_u = (-v \sin u; v \cos u; 0), \\ &\vec{r}_v = (\cos u; \sin u; 1), \\ &|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{2} v. \\ &E = v^2, \quad F = 0, \quad G = 2. \end{aligned}$$

$$L = \iint_D \sqrt{2} v dudv = \sqrt{2} \int_0^1 du \int_{u^2}^{u} v dv = \sqrt{2} \int_0^1 \frac{u^2 - u^4}{2} du =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{3} u^2 - \frac{1}{5} u^5 \right) \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{15}.$$

Virsmas laukuma aprēķināšana parasti ir darbietilpīgs uzdevums, tāpēc divkāršā integrāļa aprēķināšanai jāizmanto datorprogrammas.

2.10. Virsmas otrā kvadrātiskā forma

Virsmas $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$ otrā kvadrātiskā forma ir

$$\varphi_2 = \vec{n} d^2 \vec{r} = -d\vec{r} d\vec{n} = L du^2 + 2M dudv + N dv^2,$$

kur

$$\begin{aligned} &L = \vec{n} \vec{r}_{uu} = -\vec{n}_u \vec{r}_u, \\ &M = \vec{n} \vec{r}_{uv} = -\vec{n}_u \vec{r}_v = -\vec{n}_v \vec{r}_u, \\ &N = \vec{n} \vec{r}_{vv} = -\vec{n}_v \vec{r}_v, \end{aligned}$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|}.$$

2.21. piemērs. Uzrakstīt helikoīda $\vec{r} = (v\cos u; v\sin u; u)$ otro kvadrātisko formu.

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_u = (-v\sin u; v\cos u; 1),\\
&\vec{r}_v = (\cos u; \sin u; 0),\\
&\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-\sin u; \cos u; -v),\\
&\vec{r}_{uu} = (-v\cos u; v\sin u; 0),\\
&\vec{r}_{uv} = (-\sin u; \cos u; 0),\\
&\vec{r}_{uv} = (0; 0; 0),\\
&|\vec{r}_u \times \vec{r}_v| = \sqrt{1+v^2},\\
&\vec{n} = \left(-\frac{\sin u}{\sqrt{1+v^2}}; \frac{\cos u}{\sqrt{1+v^2}}; -\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\right),
\end{aligned}$$

$$L = 0, \quad M = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}, \quad N = 0,$$

$$\varphi_2 = \frac{2dudv}{\sqrt{1+v^2}}.$$

2.22. piemērs. Aprēķināt vienības sfēras

$$\vec{r} = (\cos u\cos v; \cos u\sin v; \sin u)$$

otro kvadrātisko formu.

Šajā gadījumā $\vec{n} = \vec{r}$, jo sfēras rādiuss ir perpendikulārs tās pieskarplaknei, sfēras centrs ir O un rādiusa garums ir 1.

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_u = (-\sin u\cos v; -\sin u\sin v; \cos u),\\
&\vec{r}_v = (\cos u\sin v; \cos u\cos v; 0),
\end{aligned}$$

$$\vec{n}_u = \vec{r}_u, \quad \vec{n}_v = \vec{r}_v,$$

$$L = -\vec{n}_u\vec{r}_u - 1, \quad M = -\vec{n}_u\vec{r}_v = 0, \quad N = -\vec{n}_v\vec{r}_v = -\cos^2 u.$$

$$\varphi_2 = -du^2 - \cos^2 udv^2.$$

2.11. Virsmas līknes normālais liekums

Katram pieskarvektora $\vec{l} = (\alpha, \beta)$ virzienam uz virsmas atbilst normālais liekums dotajā punktā, kuru aprēķina pēc formulas

$$k_n = \frac{L\alpha^2 + 2M\alpha\beta + N\beta^2}{E\alpha^2 + 2F\alpha\beta + G\beta^2}.$$

Normālā liekuma ekstremālās vērtības dotajā punktā apzīmē ar k_1 un k_2 un sauc par **galvenajiem liekumiem šajā punktā**, bet tiem atbilstošos virzienus - par **galvenajiem virzieniem**. Galvenie vierzieni ir savstarpēji perpendikulāri.

Ja φ ir leņķis starp galveno virzienu un vektora $\vec{l}$ virzienu, tad tam atbilstošo normālo liekumu aprēķina pēc Eilera teorēmas, t.i., pēc formulas

$$k_n = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi.$$

Ja σ ir leņķis starp virsmas normāli un virsmas līknes binormāli dotajā punktā, tad $k_n = k\cos\sigma$. Te k_n atbilst līknes pieskares virzienam, bet k ir līknes liekums šajā punktā. Tā ir Menjē teorēma.

2.23. piemērs. Aprēķināt līknes $u = \sin t$, $v = \cos t$ normālo liekumu uz helikoīda

$$\vec{r} = (u\cos v; u\sin v; v)$$

punktā $M_0\left(t_0 = \frac{\pi}{4}\right)$.

Līknes pieskares virziena vektors bāzē $(\vec{r}_u; \vec{r}_v)$

$$\vec{l} = (\cos t; -\sin t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \upuparrows \ (1; -1).$$

Helikoīda pirmā un otrā kvadrātiskā forma:

$$ds^2 = du^2 + (u^2+1)dv^2$$

un

$$\varphi_2 = \frac{2dudv}{\sqrt{1+v^2}}$$

(skat. 2.15. un 2.21. piemērus).

Punktā $M_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ kvadrātisko formu koeficientu vērtības ir

$$E=1,\ \ 2F=0,\ \ G=u^2+1=\frac{3}{2},$$
$$L=0,\ \ 2M=\frac{2}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3},\ \ N=0.$$

No šejienes, ņemot vērā, ka $\vec{l}\upuparrows(1;-1)$, iegūsim:

$$k_n=\frac{-4\sqrt{6}}{15}.$$

2.24. piemērs. Aprēķināt helikoīda

$$\vec{r}=(v\cos u;v\sin u;u)$$

šķēluma ar plakni $3x+3y+4z=0$ liekumu punktā $O(0;0;0)$.

Izmantosim formulu $k_n=k\cos\sigma$. Aprēķināsim helikoīda normālvektoru un līknes pieskares virziena vektoru punktā O:

$$\begin{aligned}\vec{r}_u&=(-v\sin u;v\cos u;1)=(0;0;1),\\ \vec{r}_v&=(\cos u;\sin u;0)=(1;0;0),\\ \vec{n}&=\vec{r}_u\times\vec{r}_v=(0;1;0).\end{aligned}$$

Līknes pieskare ir perpendikulāra virsmas normālei (vektoram $\vec{n}$) un šķeļošās plaknes normālvektoram $\vec{n}_1=(3;3;4)$, tāpēc

$$\vec{l}=\vec{n}\times\vec{n}_1=(4;0;-3)=-3\vec{r}_u+4\vec{r}_v.$$

Tātad vektora $\vec{l}$ koordinātas bāzē $(\vec{r}_u;\vec{r}_v)$ ir

$$\vec{l}=(-3;4).$$

Kvadrātisko formu koeficienti punktā $O(0;0)$ ir

$$E=1,\ \ 2F=0,\ \ G=1;$$
$$L=0,\ \ 2M=2,\ \ N=0.$$

Leņķis σ ir leņķis starp virsmas normāli (asi Oz) un šķeļošo plakni (izmanto to, ka līknes binormāle pieder šai plaknei), tāpēc

$$\sin\sigma=\frac{\vec{n}_1\vec{e}}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{e}|}=\frac{3}{5},$$
$$\cos\sigma=\pm\frac{2}{5}.$$

Aprēķināsim k_n un k:

$$k_n = -\frac{24}{25},$$
$$k = \frac{k_n}{\cos\sigma} = \frac{12}{5}.$$

$\cos\sigma$ ņemsim negatīvu, jo $k \geq 0$.

Ja līknes vienādojumus uzraksta parametriskā veidā, šo uzdevumu var atrisināt, izmantojot formulu

$$k = \frac{|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''|}{|\vec{r}\,'|^3}.$$

No helikoīda un plaknes vienādojumiem:

$$3(x + y) = 3(\cos u + \sin u) = -4z = -4u.$$

No šejienes

$$v = -\frac{4}{3} \cdot \frac{u}{\cos u + \sin u}.$$

Līknes parametriskie vienādojumi ir šādi:

$$\begin{cases} x = -\frac{4}{3} \cdot \frac{u\cos u}{\cos u + \sin u}, \\ y = -\frac{4}{3} \cdot \frac{u\sin u}{\cos u + \sin u}, \\ z = u. \end{cases}$$

2.12. Indikatrise

Ja virsmas pieskarplaknē caur pieskaršanās punktu novelk taišņu šķipsnu un uz katras taisnes no pieskaršanās punkta uz abām pusēm atliek nogriezni $\frac{1}{\sqrt{|k_n|}}$, tad iegūst līkni, kuru sauc par **indikatrisi**. Ņemam vērā, ka katras taisnes virzienam atbilst savs k_n. Indikatrises vienādojums ir

$$|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2| = 1.$$

2.25. piemērs. Uzrakstīt helikoīda $\vec{r} = (v\cos u; v\sin u; u)$ indikatrises vienādojumu punktā $O(0; 0; 0)$.

Helikoīda pieskarplakne punktā O ir plakne xOy (skat. 2.24. piemēru).

Indikatrises vienādojums ir

$$|2xy| = 1.$$

Indikatrisi veido divas saistītas hiperbolas

$$xy = \frac{1}{2} \quad \text{un} \quad xy = -\frac{1}{2}.$$

2.13. Virsmas pilnais un vidējais liekums

Virsmas pilno un vidējo liekumu aprēķina pēc formulām:

$$K = k_1 k_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$
$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)},$$

kur k_1 un k_2 ir virsmas galvenie liekumi dotajā punktā.

2.26. piemērs. Aprēķināt hiperboliskā paraboloīda $\vec{r} = (u; v; u^2 - v^2)$ galvenos liekumus punktā $M_0(1; -1)$.

Vispirms aprēķina liekumus K un H.

$$\vec{r}_u = (1; 0; 2u) = (1; 0; 2),$$
$$\vec{r}_v = (0; 1; -2v) = (0; 1; 2),$$
$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-2; -2; 1).$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

$$\vec{r}_{uu} = (0; 0; 2), \quad \vec{r}_{uv} = (0; 0; 0), \quad \vec{r}_{vv} = (0; 0; -2).$$

$$E = 5, \quad F = 4, \quad G = 5, \quad L = \frac{2}{3}, \quad M = 0, \quad N = -\frac{2}{3}.$$

Tātad

$$K = k_1 k_2 = \frac{4}{9} : 9 = \frac{4}{81},$$
$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \left(\frac{10}{3} - \frac{10}{3}\right) : 18 = 0.$$

Izmantosim Vjeta teorēmu:

$$k^2 - \frac{4}{81} = 0,$$
$$k_1 = \frac{2}{9}, \quad k_2 = -\frac{2}{9}.$$

2.14. Liekuma līnijas

Liekuma līnijas pieskares virziens sakrīt ar galveno virzienu dotajā punktā. Liekuma līnijas iegūst no diferenciālvienādojuma

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

2.27. piemērs. Uzrakstīt rotācijas paraboloīda $\vec{r} = (u; v; v^2+v^2)$ liekuma līnijas.

Aprēķināsim kvadrātisko formu koeficientus

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= (1; 0; 2u), \\ \vec{r}_v &= (0; 1; 2v), \\ \vec{r}_u \times \vec{r}_v &= (-2u; -2v; 1). \end{aligned}$$

$$\vec{r}_{uu} = (0; 0; 2), \quad \vec{r}_{uv} = (0; 0; 0), \quad \vec{r}_{vv} = (0; 0; 2).$$

$$E = 1 + 4u^2, \quad F = 4uv, \quad G = 1 + 4v^2.$$

Vektoru $\vec{r}_u \times \vec{r}_v$ šajā gadījumā nevajag normēt, jo koeficienti L, M un N vienādojumā ir homogēni:

$$L \sim 2, \quad M \sim 0, \quad N \sim 2.$$

Meklējamās līnijas nosaka diferenciālvienādojums

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1+4u^2 & 4uv & 1+4v^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

No šejienes

$$\begin{gathered} uvdu^2 + (v^2 - u^2)dudv - uvdv^2 = 0, \\ vdu(udv + vdv) - udv(udu + vdv) = 0, \\ (udu + vdv)(vdu - udv) = 0. \end{gathered}$$

1. $udu + vdv = 0$, $udu = -vdv$, $u^2 = -v^2 + c_1$, $u^2 + v^2 = c_1$.
2. $vdu - udv = 0$, $\frac{dv}{v} = \frac{du}{u}$, $\ln v = \ln u + \ln c_2$, $v = c_2 u$.

Liekuma līnijas uz rotācijas paraboloīda ir paralēles (riņķa līnijas) un meridiāni (parabolas) (skat. 2.6. piemēru.)

2.15. Asimptotiskās līnijas

Asimptotiskās līnijas pieskarei atbilst $k_n = 0$. Asimptotiskās līnijas atrod no vienādojuma

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0.$$

2.28. piemērs. Uzrakstīt hiperboliskā paraboloīda $\vec{r}(u; v; u^2 - v^2)$ asimptotisko līniju vienādojumus.

$$\vec{r}_u = (1; 0; 2u),$$
$$\vec{r}_v = (0; 1; -2v),$$
$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (-2u; 2v; 1).$$

$$\vec{r}_{uu} = (0; 0; 2), \quad \vec{r}_{uv} = (0; 0; 0), \quad \vec{r}_{vv} = (0; 0; -2).$$

Otrās kvadrātiskās formas koeficienti ir proporcionāli skaitļiem:

$$L \sim 1, \quad M \sim 0, \quad N \sim -1.$$

Atrisināsim diferenciālvienādojumu:

$$du^2 - dv^2 = 0,$$
$$(du - dv)(du + dv) = 0,$$
$$du + dv = 0, \quad u + v - c_1 = 0,$$
$$du - dv = 0, \quad u - v - c_2 = 0.$$

Asimptotisko līniju vienādojumi Gausa sistēmā:

$$\begin{cases} u = t, \\ v = -t + c_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = t, \\ v = t + c_2. \end{cases}$$

Šo līniju vienādojumi Dekarta sistēmā:

$$\vec{r} = (t; -t + c_1; 2c_1t - c_1^2),$$
$$\vec{r} = (t; t + c_1; -2c_1t - c_2^2).$$

Tie ir taišņu vienādojumi, tātad hiperboliskā paraboloīda asimptotiskās līnijas ir tā taisnlīniju veidotājas.

2.16. Ģeodēziskās līnijas

Ģeodēziskās līnijas galvenā normāle sakrīt ar virsmas normāli dotajā punktā.

Ja $u = u(s)$ un $v = v(s)$ ir ğeodēziskās līnijas vienādojumi ar naturālo parametru, tad uz virsmas $\vec{r} = \vec{r}(u; v)$ tos iegūst no diferenciālvienādojumu sistēmas:

$$\begin{cases} \vec{r}_{uu}\vec{r}_u \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{r}_u \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\vec{r}_u \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + E\frac{d^2u}{ds^2} + F\frac{d^2v}{ds^2} = 0, \\ \vec{r}_{uu}\vec{r}_v \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2\vec{r}_{uv}\vec{r}_u \frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + \vec{r}_{vv}\vec{r}_v \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + F\frac{d^2u}{ds^2} + G\frac{d^2v}{ds^2} = 0. \end{cases}$$

Šīs vienādojumu sistēmas koeficientus var izteikt ar pirmās kvadrātiskās formas koeficientiem šādā veidā:

$$\begin{aligned} \vec{r}_{uu}\vec{r}_u &= \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \\ \vec{r}_{uv}\vec{r}_u &= \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \\ \vec{r}_{vv}\vec{r}_u &= \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \\ \vec{r}_{uu}\vec{r}_v &= \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \\ \vec{r}_{uv}\vec{r}_v &= \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \\ \vec{r}_{vv}\vec{r}_v &= \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}. \end{aligned}$$

Lai sastādītu ğeodēzisko līniju vienādojumus, pietiek zināt virsmas pirmo kvadrātisko formu.

2.29. piemērs. Uzrakstīt rotācijas cilindra $\vec{r} = (\cos u, \sin u; v)$ ğeodēziskās līnijas.

$$\begin{aligned} \vec{r}_u &= (-\sin u; \cos u; 0), \\ \vec{r}_v &= (0; 0; 1), \\ \vec{r}_{uu} &= (-\cos u; -\sin u; 0), \\ \vec{r}_{uv} &= (0; 0; 0), \\ \vec{r}_{vv} &= (0; 0; 0), \end{aligned}$$

$$\vec{r}_{uu}\vec{r}_u = 0, \quad \vec{r}_{uv}\vec{r}_u = 0, \quad \vec{r}_{vv}\vec{r}_u = 0, \quad E = 1, \quad F = 0,$$

$$\vec{r}_{uu}\vec{r}_v = 0, \quad \vec{r}_{uv}\vec{r}_v = 0, \quad \vec{r}_{vv}\vec{r}_v = 0, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Iegūstam diferenciālvienādojumu sistēmu:

$$\begin{cases} \frac{d^2u}{ds^2} = 0, \\ \frac{d^2v}{ds^2} = 0. \end{cases}$$

Sistēmas atrisinājumi

$$u = a_1 s + b_1,$$

$$v = a_2 s + b_2$$

ir ģeodēzisko līniju parametriskie vienādojumi ar naturālo parametru.

1. Ja $a_1 \neq 0$, $a_2 = 0$, tad $v = b_2$. No cilindra vienādojuma $x^2+y^2 = 1$ un plaknes vienādojuma iegūst, ka līkne ir riņķa līnija.
2. Ja $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, tad $u = b_1$, jeb $x = \cos b_1$, $y = \sin b_1$. Cilindra veidule te noteikta kā divu plakņu šķēlums.
3. Ja $(a_1; a_2) \neq (0; 0)$, tad ģeodēziskās līnijas vienādojums Dekarta sistēmā ir

$$\vec{r} = \big(\cos(a_1 s + b_1); \sin(a_1 s + b_1); a_2 s + b_2\big).$$

Izpildīsim pieļaujamu parametra maiņu

$$t = a_1 s + b_1,$$
$$s = \frac{1}{a_1} t - \frac{b_1}{a_1}.$$

Pēc parametra maiņas iegūstam vienādojumu

$$\vec{r} = \left(\cos t; \sin t; \frac{a_2}{a_1} - \frac{a_2 b_1}{a_1}\right)$$

jeb

$$\vec{r} = (\cos t; \sin t; bt + z_0).$$

Tātad šajā gadījumā ģeodēziskā līnija ir skrūves līnija.

Rotācijas cilindra ģeodēziskās līnijas ir tā riņķa līnijas, veidules un skrūves līnijas.

2.30. piemērs. Uzrakstīt ģeodēzisko līniju vienādojumus virsmām, kuru pirmā kvadrātiskā forma ir

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Minēt šādu virsmu piemērus.

Aprēķināsim diferenciālvienādojumu koeficientus

$$\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}=0,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}=0,\quad E=1,\quad F=0;$$
$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}=0,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}=0,\quad \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}=0,\quad F=0;\quad G=1.$$

Ģeodēzisko līniju vienādojumi ir sistēmas

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{ds^2}=0, \\ \dfrac{d^2v}{ds^2}=0 \end{cases}$$

atrisinājumi

$$\begin{cases} u=a_1s+b_1, \\ v=a_2s+b_2. \end{cases}$$

Virsmu piemēri, kurām, atbilstoši izvēloties parametrus, pirmā kvadrātiskā forma ir

$$ds^2=du^2+dv^2.$$

1. Plakne xOy $\vec{r}=(u;v;0)$.
   Ģeodēziskās līnijas ir taisnes.
2. Rotācijas cilindrs $\vec{r}=(\cos u;\sin u;v)$.
   Ģeodēziskās līnijas ir veidules, riņķa līnijas un skrūves līnijas.
3. Rotācijas konuss $\vec{r}=(av\cos u;av\sin u;bv)$.
   Šādai konusa parametrizācijai atbilst pirmā kvadrātiskā forma
   $$ds^2=a^2v^2du^2+(a^2+b^2)dv^2.$$

Izdarīsim pieļaujamu parametru maiņu

$$\begin{cases} u=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}, \\ v=\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Pēc parametru maiņas iegūstam pirmo kvadrātisko formu

$$ds^2=d\alpha^2+d\beta^2.$$

Veikto parametru maiņu iztulkosim ģeometriski.

Ja konusu izklājam uz plaknes, tad tā veidules dod taišņu šķipsnu ar centru O, bet riņķa līnijas (meridiāni) - riņķa līnijas lokus ar centru O.

Ievērojam to, ka $u = \angle TO_0M$, $O_0M = av$ un $O_0O = bv$. Iegūstam, ka

$$
\begin{aligned}
&OM = OT = OM' = \sqrt{O_0M^2 + O_0O^2} = \sqrt{a^2+b^2}v = \rho,\\
&\smile TM' = \smile TM = O_0Mu = auv,\\
&\angle TOM' = \frac{\smile TM'}{OM'} = \frac{au}{\sqrt{a^2+b^2}} = \varphi.
\end{aligned}
$$

No šejienes iegūstam sakarības starp polārajām koordinātām $(\rho;\varphi)$ plaknē un Gausa koordinātām $(u;v)$ uz konusa

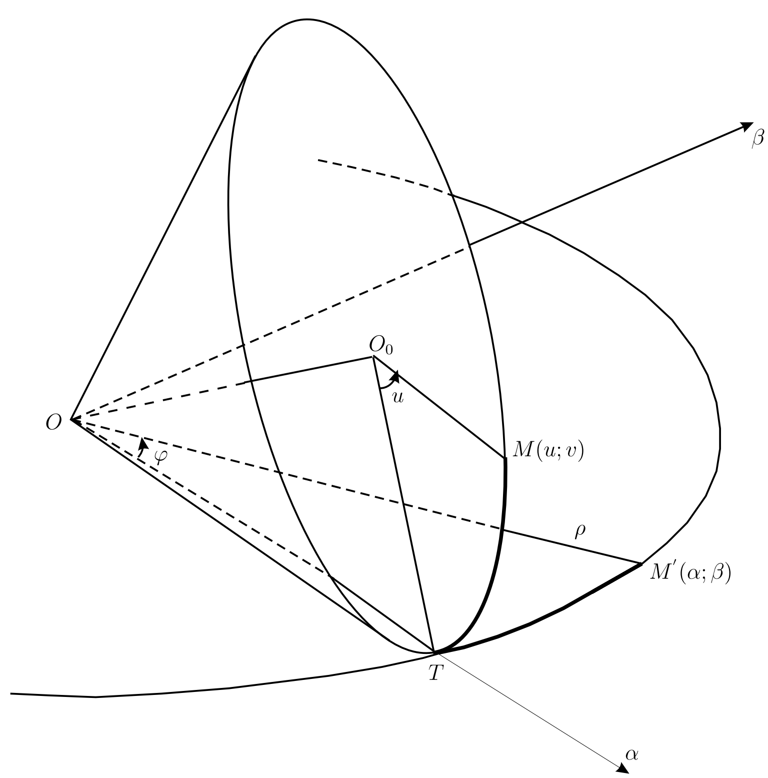
$$\rho = \sqrt{a^2+b^2}v, \quad \varphi = \frac{au}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{$*$}$$

Sakarības starp Dekarta $(\alpha;\beta)$ un polārajām koordinātām $(\rho;\varphi)$

$$\rho = \alpha^2 + \beta^2, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}. \tag{$**$}$$

No (*) un (**) iegūst jau aplūkoto parametru maiņu

$$u = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\alpha}, \quad v = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$



2.4. zīm.

III nodaļa

UZDEVUMI

1. $\rho = \rho(\varphi)$ ir līknes vienādojums polārajā koordinātu sistēmā. Uzrakstīt tās parametriskos vienādojumus Dekarta koordinātu sistēmā, pieņemot φ par parametru.

   Atbilde.

   $x = \rho(\varphi)\cos\varphi, y = \rho(\varphi)\sin\varphi.$

2. Riņķa līnijas rādiuss ir a, ap kādu tās punktu O rotē taisne, kura krusto riņķa līniju punktā A. Uz abām pusēm no punkta A uz taisnes atlikti nogriežņi $AM_1 = AM_2 = 2b$. Sastādīt kopas, ko veido punkti M_1 un M_2, vienādojumus. *(Paskāla līkne, $a = b$ - kardioīda).*

   Atbilde.

   $\rho = 2a\cos\varphi \pm 2b.$
   $x = (2a\cos\varphi \pm 2b)\cos\varphi, y = (2a\cos\varphi \pm 2b)\sin\varphi.$
   $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4b^2(x^2 + y^2).$

3. Riņķa līnija, kuras rādiuss ir a, ripo pa abscisu asi. Sastādīt riņķa līnijas punkta M trajektorijas vienādojumus, ja tas sākumā sakrita ar koordinātu sākumu O. (*Cikloīda*).

   Atbilde.

   $\vec{r}(t) = \big(a(t - \sin t); a(1 - \cos t)\big).$

4. Punkta M attālumu līdz punktiem $F_1(-a; 0)$ un $F_2(a; 0)$ reizinājums ir vienāds ar a^2. Sastādīt punktu kopas, ko veido punkti M, parametriskos vienādojumus. (*Bernulli lemniskāta*).

Atbilde.

$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.
$x = \pm a\sqrt{2\cos 2t}\cos t, y = \pm a\sqrt{2\cos 2t}\sin t$.

5. Uzrakstīt līknes $x = t + \frac{1}{t}, y = t - \frac{1}{t}$ vienādojumu aizklātā formā, uzzīmēt šo līkni. Kā pārvietojas punkts pa līkni, ja t pieaug no $-\infty$ līdz $+\infty$?

   Atbilde.

   $x^2 - y^2 = 4$.

6. Noteikt līniju $x = a\cos^2 t, y = a\cos t\sin t, z = \pm a\sin t$ kā divu virsmu šķēlumu. Nosaukt šīs virsmas. (*Viviāni līnija*).

   Atbilde.

   $$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 - ax = 0. \end{cases}$$

7. Divu rotācijas cilindru asis ir koordinātu sistēmas asis Oy un Oz, cilindru rādiusi vienādi ar a. Uzrakstīt virsmu šķēluma parametriskos vienādojumus.

   Atbilde.

   $\vec{r} = (a\cos t; a\sin t; a\sin t)$,
   $\vec{r} = (a\cos t; -a\sin t; a\sin t)$.

8. Uzrakstīt parametra maiņu $t = t(u)$, kas attēlo segmentu $a \leq u \leq b$ par segmentu $0 \leq t \leq 1$; intervālu $-\infty < u < +\infty$ par intervālu $0 < t < 1$.

   Atbilde.

   $t = \frac{1}{b-a}(u - a), \quad t = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} u$ un bezgalīgi daudz citu funkciju.

9. Pierādīt, ka parametra maiņa $t = \operatorname{arctg}\frac{u}{2}$ ir pieļaujama. Izpildīt šo parametra maiņu vienādojumos $x = \cos t$, $y = \sin t$, $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. Kā kustas punkts pa līkni, ja t aug no $-\frac{\pi}{2}$ līdz $\frac{\pi}{2}$, u aug no $-\infty$ līdz $+\infty$?

   Atbilde.

   $x = \frac{2}{\sqrt{u^2+4}}$, $y = \frac{u}{\sqrt{u^2+4}}$.

10. Aprēķināt līknes $x = \operatorname{ch} t, y = \operatorname{sh} t, z = t$ loka garumu starp punktiem $A_1(t_1 = 0)$ un $A_2(t_2 = 1)$.

   Atbilde.

   $s \approx 1,661.$

11. Aprēķināt cikloīdas $\vec{r} = (t - \sin t; 1 - \cos t)$ vienas arkas garumu.

   Atbilde.

   $s = 8.$

12. Uzrakstīt līknes $\rho = \rho(\varphi)$, kas dota polārajā koordinātu sistēmā, loka garuma aprēķināšanas formulu.

   Atbilde.

   $s = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2} d\varphi.$

13. Aprēķināt Arhimēda spirāles $\rho = a\varphi$ pirmā vijuma garumu.

   Atbilde.

   $s = \frac{a}{2}\Big(2\pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln\big(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}\,\big)\Big).$

14. Uzrakstīt līknes $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t$ parametriskos vienādojumus ar naturālo parametru s.

   Atbilde.

   $t = \ln\left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right).$

   $\vec{r} = \left(\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cos\ln\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}};\ \frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \sin\ln\frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}};\ \frac{s+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right).$

15. Uzrakstīt līknes $\vec{r} = \big(\sin^2 t; \cos t \sin t; \cos t\big)$, $-\pi < t < \pi$ pieskares vienādojumus punktā $M_o\left(\frac{3}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{2}\right).$

   Atbilde.

   $\frac{x - \frac{3}{4}}{3} = \frac{y + \frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{3}} = \frac{z - \frac{1}{2}}{-3}.$

16. Uzrakstīt parabolas $y = 2x^2 - x + 3$ pieskares, kas paralēla taisnei $6x - 2y + 1 = 0$, vienādojumu.

   Atbilde.

   $3x - y + 1 = 0.$

17. Atrast Bernulli lemniskātas $(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2-y^2) = 0$ punktus, kuros pieskares paralēlas Ox asij.

Atbilde.

$A_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a; \frac{1}{2}a\right)$, $A_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a; -\frac{1}{2}a\right)$, $A_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a; \frac{1}{2}a\right)$, $A_4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a; -\frac{1}{2}a\right)$.

18. Uzrakstīt līknes, kas ir rotācijas paraboloīda $x^2+y^2=z$ un plaknes $x-y=0$ šķēlums, pieskares vienādojumus punktā $M_0(1;1;2)$.

Atbilde.

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{4}$.

19. Pierādīt, ka līkne $\vec{r} = (e^t \cos t; e^t \sin t; e^t)$ pieder pie rotācijas konusa $x^2+y^2-z^2=0$ un krusto tā veidules nemainīgā leņķī.

Atbilde.

$\cos\varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

20. Atrast līniju, pa kuru līknes $\vec{r} = \left(t; t^2; t^3\right)$ pieskares krusto plakni xOy.

Atbilde.

Parabola $y = \frac{3}{4}x^2$ un taisne $y=0$ (Ox ass).

21. Pierādīt, ja $\rho = \rho(\varphi)$ ir līknes vienādojums polārajā koordinātu sistēmā, tad $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\rho}{\rho'}$, kur α ir leņķis starp ρ un pieskari dotajā punktā.

22. Logaritmiskās spirāles vienādojums polārajā koordinātu sistēmā ir $\rho = a^{\varphi}$, kur $a>0$ ir konstants skaitlis. Pierādīt, ka leņķis α starp ρ un pieskari ir konstants.

Atbilde.

$\cos\alpha = \frac{\ln a}{\sqrt{1+\ln^2 a}}$.

23. Par punkta P dotās līknes poedru attiecībā sauc kopu, ko izveido no punkta P pret līknes pieskarēm novilkto perpendikulu pamati. Uzrakstīt koordinātu sākuma skrūves līnijas $\vec{r} = (\cos t; \sin t; t)$ poedras vienādojumus.

Atbilde.

$\vec{r} = \left(\cos t + \frac{t}{2}\sin t;\ \sin t - \frac{t}{2}\cos t;\ \frac{t}{2}\right)$.

24. Uzrakstīt līknes $\rho = \rho\,(\varphi)$ pieskares punktā $M_0\,(\rho_0;\ \varphi_0)$ vienādojumu polārajā koordinātu sistēmā.

    Atbilde.

    $\rho = \frac{\rho_0^2}{\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)-\rho_0'\sin(\varphi-\varphi_0)}$.

25. Aprēķināt līknes $\vec{r} = (e^t\cos t;\ e^t\sin t;\ e^t)$ liekumu tās krustpunktā ar plakni $z = 1$.

    Atbilde.

    $k = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

26. Aprēķināt hiperbolas $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t - \frac{1}{t}$ liekumu punktā $M_0(t_0 = 1)$.

    Atbilde.

    $k = \frac{1}{2}$.

27. Aprēķināt parabolas $y = x^2 + x + 1$ liekumu tās virsotnē.

    Atbilde.

    $k = 2$.

28. Aprēķināt līknes $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ liekumu punktā $M_0(1; 1)$.

    Atbilde.

    $k = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

29. Izvest līknes $\rho = \rho\,(\varphi)$ liekuma aprēķināšanas formulu polārajā koordinātu sistēmā.

    Norādījums: liekums $k = \frac{d\beta}{ds}$, kur β ir pieskares pagrieziena leņķis, s atbilstošais līknes loka garums (skat. 12. un 21. uzdevumu).

    Atbilde.

    $k = \frac{\rho^2+2\rho'^2-\rho\rho''}{(\rho^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

30. Pierādīt, ka logaritmiskās spirāles $\rho = a^\varphi$ liekums ir apgriezti proporcionāls ρ.

31. Aprēķināt līknes $\vec{r} = (e^t;\ e^{-t};\ t)$ vērpumu punktā $M_0(1; 1; 0)$.

    Atbilde.

    $\varkappa = -\frac{1}{3}$.

32. Pierādīt, ka līkne $x = t^2 - 1, y = t^2 + 2, z = \sin t$ ir plakana. Uzrakstīt plaknes vienādojumu, kurai pieder šī līkne.

Atbilde.

$x - y + 3 = 0.$

33. Aprēķināt tādu funkciju $f(t)$, ka līkne $x = a\cos t, y = b\sin t, z = f(t)$ ir plakana.

Atbilde.

$f(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t + C_3.$

34. Uzrakstīt skrūves līnijas $\vec{r} = (\cos t; \sin t; t)$ pavadošā trijskaldņa plakņu un asu vienādojumus punktā $M_0(1; 0; 0)$. Aprēķināt vektorus $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$ un $\vec{\beta}$ šajā punktā.

Atbilde.

Pieskare: $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$,
normālplakne: $y + z = 0; \vec{\tau} = \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Galvenā normāle: $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{0}$,
pieslejplakne: $x - 1 = 0$; $\vec{\nu} = (-1; 0; 0)$.
Binormāle: $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$,
iztaisnojošā plakne: $y - z = 0$; $\vec{\beta} = \left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

35. Pierādīt, ka katrā līknes $\vec{r} = \left(3t; 3t^2; 2t^3\right)$ punktā vienai no leņķa, ko veido pieskare un binormāle, bisektrisēm ir nemainīgs virziens.

Atbilde.

$\vec{l} = (1; 0; 1).$

36. Frenē formulas

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\tau}}{ds} = & & k\vec{\nu}, & \\ \frac{d\vec{\nu}}{ds} = & -k\vec{\tau} & & +\varkappa\vec{\beta}, \\ \frac{d\vec{\beta}}{ds} = & & -\varkappa\vec{\nu} & \end{cases}$$

var pierakstīt šādi:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{\omega} \times \vec{\tau}, \\ \frac{d\vec{\nu}}{ds} = \vec{\omega} \times \vec{\nu}, \\ \frac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{\omega} \times \vec{\beta}. \end{cases}$$

Vektoru $\vec{\omega}$ sauc par Darbū vektoru. Izteikt vektoru $\vec{\omega}$ ar $k, \varkappa, \vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ palīdzību.

Atbilde.

$\vec{\omega} = \varkappa\vec{\tau} \times k\vec{\beta}.$

37. Pārbaudīt, vai punkti $A(4;2;3)$ un $B(1;4;-2)$ pieder pie hiperboliskā paraboloīdam $x = u + v, y = u - v, z = uv$.

Atbilde.

$A \in P,\ B \notin P.$

38. Uzrakstīt cilindra vienādojumu aizklātā formā $F(x, y, z) = 0$, ja tā veidules krusto līkni $x = \sin t, y = \cos t, z = 0$ un ir paralēlas vektoram $\vec{a} = (1;4;-2)$.

Atbilde.

$\left(x - \frac{1}{2}z\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}z\right)^2 - 1 = 0.$

39. Uzrakstīt konusa vienādojumu aizklātā formā $F(x, y, z) = 0$, ja tā veidules krusto hiperbolu $x^2 - y^2 = 1, z = 0$ un virsotne ir punkts $S(0;0;1)$.

Atbilde.

$x^2 - y^2 - (z - 1)^2 = 0.$

40. Uzrakstīt virsmas vienādojumu aizklātā formā $F(x, y, z) = 0$, ja to izveido taisne $x - 1 = 0$, rotējot ap Oz asi.

Atbilde.

$x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0.$

41. Uzrakstīt virsmas, ko izveido līkne $x = \alpha(t), y = \beta(t), z = \gamma(t)$, rotējot ap Oz asi, parametriskos vienādojumus.

Atbilde.

$$x = \sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)} \cos\varphi,$$
$$y = \sqrt{\alpha^2(t) + \beta^2(t)} \sin\varphi,$$
$$z = \gamma(t).$$

42. Uzrakstīt parametriskos vienādojumus virsmai, ko izveido skrūves līnijas $\vec{r} = (a\cos u; a\sin u; bu)$ pieskares.

Atbilde.

$x = a\cos u - av\sin u,$
$y = a\sin u + av\cos u,$
$z = bu + bv.$

43. Uzrakstīt vienādojumus virsmai, kas sastāv no nogriežņu AB viduspunktiem, ja A ir parabolas $x^2 = 2p^2 z, y = 0$, bet punkts B ir parabolas $y^2 = -2q^2 z, x = 0$ punkts.

Atbilde.

$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = z.$

44. Nosaukt plaknes xOy apgabalu u-līnijas un v-līnijas, kas atbilst šādām to parametrizācijām:

$a)$ $x = u, y = v, z = 0, -\infty < u < +\infty, -\infty < v < +\infty,$
$b)$ $x = u\cos v, y = u\sin v, z = 0, u \geq 0, 0 < v < \pi,$
$c)$ $x = \cos u \operatorname{ch} v, y = \sin u \operatorname{sh} v, z = 0, 0 < u < \pi, 0 < v < +\infty.$

Atbilde.

a) taisnes,
b) stari un riņķa līnijas loki,
c) elipšu un hiperbolu loki, Oy ass stars $y > 0$.

45. Nosaukt virsmas $\vec{r} = (2u + \cos v; u + \sin v; u)$ u-līnijas un v-līnijas. Kā sauc doto virsmu?

Atbilde.

Taisnes, riņķa līnijas. Cilindrs.

46. Nosaukt rotācijas paraboloīda u-līnijas un v-līnijas, ja tā parametriskie vienādojumi ir:
a) $\vec{r} = \big(u; v; u^2 + v^2\big),$
b) $\vec{r} = \big(v\cos u; v\sin u; v^2\big).$

Atbilde.

a) parabolas,
b) riņķa līnija, parabolas puse ar sākumu virsotnē.

47. Aprēķināt virsmas $\vec{r} = \left(u; v; u^2 - v^2\right)$ vektoru $\vec{r}_u$ un $\vec{r}_v$ koordinātas punktā $M_0(1;1)$. Uzzīmēt šo virsmu, līknes $u = 1$, $v = 1$ un vektorus $\vec{r}_u$ un $\vec{r}_v$ punktā M_0.

Atbilde.

$\vec{r}_u = (1;0;2)$, $\vec{r}_v = (0;1;-2)$.

48. Uzrakstīt virsmas $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ pieskarplaknes un normāles vienādojumus punktā $M_0(3;1;-1)$.

Atbilde.

$3x - 2y + 3z - 4 = 0$, $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$.

49. Uzrakstīt virsmas $\vec{r} = \left(u; u^2 - 2uv; u^3 - 3u^2 v\right)$ pieskarplaknes un normāles vienādojumus punktā $M_0(1;3;4)$.

Atbilde.

$6x + 3y - 2z - 7 = 0$, $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{-2}$.

50. Aprēķināt rotācijas paraboloīda $x^2 + y^2 = 2z$ tāda punkta M_0 koordinātas, kurā pieskarplakne ir paralēla plaknei $2x - 6y + z - 1 = 0$.

Atbilde.

$M_0(-2;6;20)$.

51. Virsmu izveido skrūves līnijas $\vec{r} = (a\cos t; a\sin t; bt)$ pieskares (skat. 43. uzdevumu). Pierādīt, ka normāle jebkurā virsmas punktā veido nemainīgu leņķi ar Oz asi.

Atbilde.

$\cos\angle\left(\vec{n}, \vec{k}\right) = \frac{a}{\sqrt{a+b^2}}$.

52. Aprēķināt doto līkņu, kas pieder hiperboliskajam paraboloīdam $\vec{r} = \left(u; v; u^2 - v^2\right)$, krustpunktu koordinātas Gausa un Dekarta koordinātu sistēmās. Uzrakstīt līkņu vienādojumus Dekarta koordinātu sistēmā:
a) $u^2 - v = 0$ un $u = t, v = t^2 - 1$;
b) $u^2 - v^2 = 1$ un $u - v - 1 = 0$;
c) $u = \cos t, v = \sin t$ un $u = t^2 + 1, v = t$.

Atbilde.

a) $M_0(0;0), M_0(0;0;0)$; $\vec{r} = \left(t; t^2; t^2 - t^4\right)$;
$\vec{r} = \left(t-1; t^2-1; -t^4 + 3t^2 - 2t\right)$.
b) $M_0(0;1), M_0(1;0;1)$; $\vec{r} = (-\operatorname{ch} t; \operatorname{sh} t; 1)$; $\vec{r} = (t; t-1; 2t-1)$;
c) $M_0(0;1), M_0(1;0;1)$; $\vec{r} = (\cos t; \sin t; \cos 2t)$; $\vec{r} = \left(t^2+1; t; 2t^2+1\right)$.

53. Uz hiperboliskā paraboloīda $\vec{r} = \left(u; v; u^2 - v^2\right)$ atrodas šādas līknes:
a) $u^2 - v = 0$ un $u = t, v = t^2 - 1$,
b) $u^2 - v^2 = 1$ un $u - v - 1 = 0$,
c) $u = \cos t, v = \sin t$ un $u = t^2 + 1, v = t$.
Aprēķināt leņķus starp tām to krustpunktos. Izmantot 52. uzdevuma atrisinājumu.

Atbilde.

a) $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, b) $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}$, c) $\varphi = 0$.

54. Uz virsmas $\vec{r} = (2u + \cos v; u + \sin v; u)$ aprēķināt u-līnijas loka garumu starp punktiem $A_1\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ un $A_2\left(1; \frac{\pi}{2}\right)$, v-līnijas loka garumu starp punktiem $B_1(1;0)$ un $B_2(1;\pi)$.

Atbilde.

$s_1 = \sqrt{6}$; $\quad s_2 = \pi$.

55. Pierādīt, ka virsmas $\vec{r} = (u; \sin u; v)$ u-līnijas galvenā normāle jebkurā punktā sakrīt ar virsmas normāli.

56. Noskaidrot, kādu līniju uz virsmas $\vec{r} = \left(u + v; u^2 + v^2; u^3 + v^3\right)$ nosaka vienādojums $u + v - 1 = 0$.

Atbilde.

Stars $x = 1, y = t, z = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t$; $t \geq 0$.

57. Uzrakstīt līknes, kas sadala uz pusēm leņķi starp u un v-līnijām uz rotācijas cilindra $x = \cos u, y = \sin u, z = v$.

Atbilde.

$v = u + C, v = -u + C$.

58. Uzrakstīt rotācijas konusa $x = u\cos v, y = u\sin v, z = u$ līknes, kas perpendikulāras tā līknēm $u = e^{v+C}$.

Atbilde.

$u + v + \ln|u| = C$.

59. Uzrakstīt pirmās kvadrātiskās formas, kas atbilst šādām plaknes xOy parametrizācijām:
a) $x = u, y = v, z = 0$;
b) $x = u\cos v, y = u\sin v, z = 0$;
c) $x = \cos u \operatorname{ch} v, y = \sin u \operatorname{sh} v, z = 0$
(sk. 45. uzdevumu).

Atbilde.

a) $ds^2 = du^2 + dv^2$;
b) $ds^2 = du^2 + u^2dv^2$;
c) $ds^2 = (\cos^2 u \operatorname{sh}^2 v + \sin^2 u \operatorname{ch}^2 v)(du^2 + dv^2)$.

60. Aprēķināt doto virsmu pirmo kvadrātisko formu:
a) rotācijas virsma $x = f(v)\cos u, y = f(v)\sin u, z = g(v)$;
b) rotācijas cilindrs $x = a\cos u, y = a\sin u, z = v$;
c) rotācijas konuss $x = v\cos u, y = v\sin u; z = bv$;
d) hiperboliskais paraboloīds $x = u, y = v, z = u^2 - v^2$.

Atbilde.

a) $ds^2 = f^2du^2 + (f_v^2 + g_v^2)dv^2$,
b) $ds^2 = a^2du^2 + dv^2$,
c) $ds^2 = v^2du^2 + (b^2 + 1)dv^2$,
d) $ds^2 = (4u^2 + 1)du^2 - 8uvdudv + (4v^2 + 1)dv^2$.

61. Raksturot u-līniju un v-līniju savstarpējo novietojumu uz virsmām ar šādām pirmajām kvadrātiskajām formām:
a) $ds^2 = du^2 + 2Fdudv + dv^2$,
b) $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$.

Atbilde.

a) u-līniju lokiem, kuru galapunkti pieder divām fiksētām v-līnijām, ir vienādi garumi, analoģiski v-līnijām,
b) u-līnijas un v-līnijas ir ortogonālas.

62. Aprēķināt perimetru līklīniju trijstūrim, ko norobežo līknes $u = \frac{1}{2}v^2$; $u = -\frac{1}{2}v^2$; $v = 1$, ja virsmas pirmā kvadrātiskā forma ir $ds^2 = du^2 + (u^2+1)dv^2$.

Atbilde.

$s = \frac{7}{3}$.

63. Virsmas pirmā kvadrātiskā forma ir $ds^2 = du^2+(u^2+1)dv^2$. Aprēķināt leņķi, kurā krustojas šīs virsmas līknes $u+v=0$ un $u-v=0$.

Atbilde.

$\alpha = \frac{\pi}{2}$.

64. Aprēķināt virsmas līklīniju trijstūra laukumu, ja to ierobežo līknes $u-v=0, u+v=0, v-1=0$ un ja virsmas pirmā kvadrātiskā forma ir $ds^2 = du^2 + (u^2+1)dv^2$.

Atbilde.

$L = \ln(1+\sqrt{2}) + \frac{10}{3} - \sqrt{2}$.

65. Uzrakstīt virsmas, kuras pirmā kvadrātiskā forma ir $ds^2 = du^2+u^2dv^2$, līknes, kas ortogonāli krusto līkni $u+v=0$.

Atbilde.

$u^{-1} + v = C$.

66. Uzrakstīt šādu virsmu otro kvadrātisko formu:
a) rotācijas virsma $x = f(v)\cos u, y = f(v)\sin u, z = g(v), f(x) > 0$,
b) rotācijas cilindrs $x = a\cos u, y = a\sin u, z = v$;
c) rotācijas konuss $x = v\cos u, y = v\sin u; z = bv$;
d) hiperboliskais paraboloīds $x = u, y = v, z = u^2 - v^2$.

Atbilde.

a) $\varphi_2 = -\frac{fg_v}{\sqrt{f_v^2+g_v^2}}du^2 + \frac{f_{vv}g_v}{\sqrt{f_v^2+g_v^2}}dv^2$,
b) $\varphi_2 = -adu^2$,
c) $\varphi_2 = -\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}du^2 + \frac{2b\sin 2u}{\sqrt{1+b^2}}dudv$,
d) $\varphi_2 = 2(du^2 - dv^2)$.

67. Aprēķināt virsmas $z = f(x; y)$ otro kvadrātisko formu.

Atbilde.

$\varphi_2 = \frac{f_{xx}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} dx^2 + \frac{2f_{xy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} dxdy + \frac{f_{yy}}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} dy^2.$

68. Uzrakstīt sakarību, kas saista sfēras pirmo un otro kvadrātisko formu.

Atbilde.

$ds^2 + a\varphi_2 = 0.$

69. Aprēķināt līknes $u = t, v = 2t^2 - t + 1$, kas atrodas uz konusa $\vec{r} = (v\cos u; v\sin u; a\sin u)$, normālo liekumu k_n punktā $M_0(t_0 = 0)$.

Atbilde.

$k_n = -\frac{1}{3\sqrt{2}}.$

70. Aprēķināt virsmas $\vec{r} = (2u + \cos v; u + \sin v; u)$ u-līniju un v-līniju normālo liekumu k_n.

Atbilde.

u-līnijām $k_n = 0$,
v-līnijām $k_n = 1$.

71. Uzrakstīt hiperboliskā paraboloīda $\vec{r} = (3u; 2v; 9u^2 - 4v^2)$ indikatrises vienādojumu reperī $(O; \vec{i}; \vec{j})$, kur O ir koordinātu sākuma punkts.

Atbilde.

$\frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \pm 1.$

72. Aprēķināt viendobuma rotācijas hiperboloīda $\vec{r} = (\operatorname{ch} v \cos u; \operatorname{ch} v \sin u; \operatorname{sh} v)$ pilno un vidējo liekumu punktā $M_0(\frac{\pi}{2}; 0)$.

Atbilde.

$K = -1, H = 0.$

73. Aprēķināt hiperboliskā paraboloīda $z = xy$ galvenos liekumus punktā $M_0(1; -1; -1)$.

Atbilde.

$k_1 = -\frac{\sqrt{3}}{9}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$

74. Pierādīt, ka virsmas noapaļojuma punktā $H^2 = K$.

75. Uzrakstīt šādu virsmu liekuma līniju vienādojumus:
a) $z^2 - 2x - 2y = 0$,
b) $\vec{r} = (u; v; uv)$.

Atbilde.

a) $v = C,\ v^2 + 4u + C = 0$,
b) $u + \sqrt{1+u^2} = C\left(v + \sqrt{1+v^2}\right)$;
$\left(u + \sqrt{1+u^2}\right) \quad \left(v + \sqrt{1+v^2}\right) = C$.

76. Pierādīt: virsmas u-līnijas un v-līnijas ir tās liekuma līnijas tad un tikai tad, ja $F = M = 0$.

77. Uzrakstīt rotācijas viendobuma hiperboloīda $\vec{r} = (\operatorname{ch} v \cos u; \operatorname{ch} v \sin u; \operatorname{sh} v)$ asimptotisko līniju vienādojumus.

Atbilde.

$e^v = \operatorname{tg} \frac{u+C}{2}; \quad e^v = -\operatorname{tg} \frac{u+C}{2}$.

78. Pierādīt, ka virsmas $\vec{r} = \big((1+v)\cos u; (1+v)\sin u; v\big)$ v-līnijas ir tās asimptotiskās līnijas.

Atbilde.

v-līnijas ir taisnes.

79. Pierādīt, ka virsmas $\vec{r} = (u; v; \ln\cos u - \ln\sin v)$ asimptotiskās līnijas ir ortogonālas.

80. Aprēķināt riņķa līnijas, kuras rādiuss ir r un kura pieder sfērai ar rādiusu R, ģeodēzisko liekumu k_g.

Atbilde.

$k_g = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{rR}$.

81. Pierādīt, ka plaknes ģeodēziskās līnijas ir taisnes un tikai tās.

82. Virsmas pirmā kvadrātiskā forma ir $ds^2 = \left(1 + v^2\right) du^2 + dv^2$. Uzrakstīt ģeodēzisko līniju vienādojumus.

Atbilde.

$u = C_1 \ln\left(v + \sqrt{1+v^2}\right) + C_2$.

LITERATŪRA

[1] T. Cīrulis, V. Neimanis. Diferenciālğeometrija. - R.: Zvaigzne, 1990. - 300 lpp.

[2] B. Klotzek. Einführung in die differentialgeometrie I. - Berlin, 1981. - 144 S.

[3] B. O'Neill. Elementary Differential Geometry. - Academic Press, 1966. - 412 p.

[4] А.П. Норден. Краткий курс дифференциальной геометрии. - М.: Физматгиз, 1958. - 244 с.

[5] А.В. Погорелов. Дифференциальная геометрия. - М.: Наука, 1974. - 176 с.

[6] Э.Г. Позняк, Е.В. Шикин. Дифференциальная геометрия. - М.: Издательство МГУ, 1990. - 384 с.

[7] П.К. Рашевский. Курс дифференциальной геометрии. - М.: Гостехиздат, 1956. - 420 с.

[8] Сборник задач по дифференциальной геометрии (И.В. Белько, В.И. Ведерников, В.Т. Воднев, А.А. Гусак, А.И. Нахимовская, А.П. Рябушко, А.С. Феденко). - М.: Наука, 1979. - 272 с.

[9] Сборник задач по дифференциальной геометрии (под редакцией А.С. Феденко). - М.: Наука, 1979. - 272 с.

SATURS