Otrās kārtas lineāras homogēnas diskrētas dinamikas sistēmas ar konstantiem koeficientiem

asoc. prof. A. Gricāns

Daugavpils Universitāte

Diskrētas dinamikas sistēmas

2015. gada 17. oktobris

Saturs I

Saturs II

Ievads I

Aplūkosim otrās kārtas lineāru homogēnu diskrētu dinamikas sistēmu ar konstantiem koeficientiem (turpmāk vienkārši sistēmu)

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t + by_t, \\ y_{t+1} = cx_t + dy_t \end{cases} \tag{1}$$

ar matricu

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ievads II

Pirmais uzdevums: atrast sistēmas (1) vispārīgo atrisinājumu [general solution] $x_t = \varphi(t, C_1, C_2)$ un $y_t = \psi(t, C_1, C_2)$, t.i., atrast tādas funkcijas $\varphi(t, C_1, C_2)$ un $\psi(t, C_1, C_2)$, kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas reālas konstantes, bet $t \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ir diskrēts laiks, ka

a) jebkuriem $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ laika $t \in \mathbb{N}_0$ funkcijas

$$x_t = \varphi(t, C_1, C_2), \quad y_t = \psi(t, C_1, C_2)$$

ir sistēmas (1) atrisinājums;

b) patvaļīgam sistēmas (1) atrisinājumam x_t un y_t eksistē $C_1 = C_1^*$ un $C_2 = C_2^*$, ka jebkuram $t \in \mathbb{N}_0$ ir spēkā

$$x_t = \varphi(t, C_1^*, C_2^*), \quad y_t = \psi(t, C_1^*, C_2^*).$$

Ievads III

Otrais uzdevums: atrast Koši uzdevuma [Cauchy problem] (1), (2) atrisinājumu, kur

$$x_0 = x_0^*, \quad y_0 = y_0^* \tag{2}$$

ir sākumnosacījumi [initial conditions], t.i., atrast sistēmas (1) partikulāro atrisinājumu [particular solution] (t.i., konkrētu atrisinājumu), kas apmierina sākumnosacījumus (2).

Ja ir zināms sistēmas (1) vispārīgais atrisinājums, tad no iepriekš teiktā izriet, ka, lai atrastu sistēmas (1) partikulāro atrisinājumu, kas apmierina sākumnosacījumus (2), ir jāatrisina vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} x_0^* = \varphi(0, C_1, C_2), \\ y_0^* = \psi(0, C_1, C_2). \end{cases} \tag{3}$$

Ievads IV

Tā kā sistēmai (1) eksistē vienīgs partikulārais atrisinājums, kas apmierina sākumnosacījumus (2), tad vienādojumu sistēmai (3) eksistē vienīgs atrisinājums $C_1 = C_1^*$ un $C_2 = C_2^*$.

O. Košī (1857-1918, A. Cauchy) - franču matemātiķis, kurš ir sniedzis ievērojamu matemātiskajā analīzē, kompleksā mainīgā funkciju teorijā, matemātiskajā fizikā. Daudzi jēdzieni un teorēmas ir nosaukti viņa vārdā.

Matricas I

Apskatīsim 2×2 matricu ar reāliem koeficientiem

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Par matricas A determinantu [determinant] sauc skaitli

$$\det A = ad - bc.$$

Matricas determinantu apzīmē arī ar $|A|$.

Par matricas A pēdu [trace] sauc skaitli

$$\operatorname{tr} A = a + d.$$

Matricas II

Par matricas A inverso matricu [inverse matrix] sauc tādu 2×2 matricu A^{-1}, ka

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I,$$

kur

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ir vienības matrica [identity matrix].

Ne katrai matricai eksistē inversā matrica!

Matricu A sauc par nesingulāru (singulāru) [nonsingular matrix (singular matrix)], ja tai eksistē (neeksistē) inversā matrica.

Matrica A ir nesingulāra tad un tikai tad, kad $\det A \neq 0$.

Matricas III

Tātad, ja $\det A \neq 0$, tad matrica A ir nesingulāra un līdz ar to tai eksistē inversā matrica A^{-1}, kuru var aprēķināt šādi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Par matricas A raksturvienādojumu [characteristic equation] sauc vienādojumu

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Atrodam:

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} = 0, \quad (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0,$$

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0, \quad \boxed{\lambda^2 - \operatorname{tr} A\, \lambda + \det A = 0}.$$

Matricas IV

Polinomu $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\, \lambda + \det A$ sauc par matricas A raksturpolinomu [characteristic polynomial].

Par matricas A īpašvērtībām [eigenvalues] sauc matricas A raksturvienādojuma saknes.

Matricas A raksturpolinoma determinants

$$D = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A.$$

- Ja $D > 0$, tad matricai A eksistē divas dažādas reālas īpašvērtības

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr} A - \sqrt{D}}{2}.$$

- Ja $D = 0$, tad matricai A eksistē viena divkārša reāla īpašvērtība

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr} A}{2} =: \lambda_0.$$

Matricas V

- Ja $D < 0$, tad matricai A eksistē divas kompleksi saistītas īpašvērtības

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

kur

$$\alpha = \frac{\operatorname{tr} A}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{|D|}}{2} > 0,$$

kur $|D|$ ir diskriminta D absolūtā vērtība.

Par matricas A spektru [spectrum] sauc matricu $\Lambda(A)$, kuras pirmā rindiņa sastāv no savstarpēji dažādām matricas A īpašvērtībām, bet otrā rindiņa no šo īpašvērtību attiecīgajām kārtām.

Ja $D \neq 0$, tad matricas A spektrs ir

$$\Lambda(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matricas VI

Ja $D = 0$, tad matricas A spektrs ir

$$\Lambda(A) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Par matricas A spektrālo rādiusu [spectral radius] $r(A)$ sauc vislielāko matricas A īpašvērtības moduli.

Saka, ka matrica A ir līdzīga [similar] matricai B, ja eksistē tāda nesingulāra matrica M, ka

$$B = M^{-1}AM.$$

Visu 2×2 matricu kopā $\mathbb{R}^{2,2}$ līdzības attieksme ir ekvivalences attieksme, tāpēc kopa $\mathbb{R}^{2,2}$ sadalās savstarpēji nešķelošās ekvivalences klasēs.

Matricas VII

Matricas determinants un pēda ir līdzības attieksmes invarianti, t.i., līdzīgām matricām ir viens un tas pats determinants un pēda!

Tātad līdzīgām matricām ir viens un tas raksturpolinoms, raksturvienādojums un īpašvērtības!

Nenulles vektoru

$$e = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

sauc par matricas A īpašvektoru [eigenvector], kas atbilst īpašvērtībai λ, ja

$$Ae = \lambda e \quad \text{jeb} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Matricas VIII

jeb

$$\begin{cases} (a-\lambda)u & + & bv & = 0, \\ cu & + & (d-\lambda)v & = 0. \end{cases}$$

Tā kā λ ir matricas A īpašvērtība, tad pēdējai sistēmai eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumu, jo šīs sistēmas determinants

$$\det(A-\lambda I) = 0.$$

Ja nenulles vektors e ir matricas A īpašvektors, kas atbilst īpašvērtībai λ, tad vektors $\bar{e} = ce$, kur $c \neq 0$, arī ir matricas A īpašvektors, kas atbilst īpašvērtībai λ. Tiešām,

$$A\bar{e} = A(ce) = cAe = c(\lambda e) = \lambda(ce) = \lambda\bar{e}.$$

Matricas Žordāna normālforma I

Teorēma. [2] *Pieņemsim, ka* $A \in \mathbb{R}^{2,2}$.

1. *Ja matricas A raksturvienādojuma diskriminants* $D > 0$, *tad matricai A ir divas dažādas reālas īpašvērtības* λ_1 *un* λ_2 *(pieņemsim, ka* $\lambda_1 < \lambda_2$*) un matrica A ir līdzīga matricai (a)* $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ *vai* $J = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

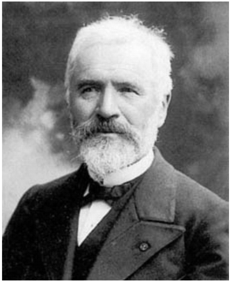
2. *Ja matricas A raksturvienādojuma diskriminants* $D = 0$, *tad matricai A ir viena divkārša reāla īpašvērtība* $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda_0$ *un matrica A ir līdzīga matricai*

$$(b)\ J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad \text{vai} \quad (c)\ J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

3. *Ja matricas A raksturvienādojuma diskriminants* $D < 0$, *tad matricai A ir divas kompleksi saistītas īpašvērtības* $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, *kur* $\beta > 0$, *un matrica A ir līdzīga matricai (d)* $J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Matricas Žordāna normālforma II

Matricu J sauc par matricas A Žordāna normālformu [Jordan normal form, Jordan canonical form].



K. Žordāns (1857-1918, C. Jordan) - franču matemātiķis, kurš ir sniedzis ievērojamu ieguldījumu matemātiskajā analīzē, matricu teorijā, grupu teorijā.

Matricas Žordāna normālforma III

Matrica $A \in \mathbb{R}^{2,2}$ ir līdzīga vienai un tikai vienai Žordāna normālformai (a), (b), (c) vai (d), ja (a) gadījumā vienoties, kādā secībā īpašvērtības tiek izvietotas uz galvenās diagonāles, piemēram, pieprasīt, ka $\lambda_1 < \lambda_2$. Protams, ka var arī aplūkot Žordāna normālformu $J = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Ja matricai A ir veids $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, kur $a \neq d$, tad matricas A Žordāna normālforma ir (a) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, kur $\lambda_1 = a$ un $\lambda_2 = d$. Šajā gadījumā pārejas matrica M ir vienāda ar vienības matricu.

Matricas Žordāna normālforma IV

Ja matricai A ir veids $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$, tad matricas A Žordāna normālforma ir (b) $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, kur $\lambda_0 = a$. Šajā gadījumā par pārejas matricu M var kalpot jebkura nesingulāra matrica.

Otrādi, tikai šāda tipa matricām A ir (b) tipa Žordāna normālforma. Tiešām, no $J = M^{-1}AM$ izriet

$$A = MJM^{-1} = M(\lambda_0 I)M^{-1} = \lambda_0 MIM^{-1} = \lambda_0 MM^{-1} = \lambda_0 I = \\ = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

kur $a = \lambda_0$.

Pārejas matricas atrašana I

Lai praktiski atrastu pārejas matricu

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22}, \end{pmatrix},$$

var lietot nenoteikto koeficientu metodi: no vienādības $MJ = AM$ iegūstam lineāru vienādojumu sistēmu attiecībā pret mainīgajiem m_{11}, m_{12}, m_{21} un m_{22}, kurai atrodam kādu konkrētu atrisinājumu, ka $\det M \neq 0$.

Apskatīsim citu paņēmienu, lai atrastu pārejas matricu M.

Ja **matricas A spektrs ir** $\boldsymbol{\Lambda(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$, tad matricas A Žordāna normālforma ir (a) vai (d): $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ un pārejas matricas M kolonnas nosaka šādi:

Pārejas matricas atrašana II

1) pirmā kolonna ir matricas A īpašvektors $e_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$, kas atbilst īpašvērtībai λ_1, kuru atrod no lineāras vienādojumu sistēmas

$$(A - \lambda_1)e_1 = \mathbb{O} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} (a - \lambda_1)u_1 + bv_1 = 0, \\ cu_1 + (d - \lambda_1)v_1 = 0; \end{cases}$$

2) otrā kolonna ir matricas A īpašvektors $e_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$, kas atbilst īpašvērtībai λ_2, kuru atrod no lineāras vienādojumu sistēmas

$$(A - \lambda_2)e_2 = \mathbb{O} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} (a - \lambda_2)u_2 + bv_2 = 0, \\ cu_2 + (d - \lambda_2)v_2 = 0. \end{cases}$$

Pārejas matricas atrašana III

Pieņemsim, ka **matricas A spektrs ir** $\mathbf{\Lambda(A)} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_0} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

Ja $\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda_0}\mathbf{I} = \mathbb{O}$, kur $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ir nulles matrica, tad matricas A Žordāna normālforma ir (b) $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ un par pārejas matricu M var kalpot jebkura nesingulāra matrica.

Pārejas matricas atrašana IV

Pieņemsim, ka **matricas A spektrs ir $\boldsymbol{\Lambda(A) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 2 \end{pmatrix}}$**.

Ja $\mathbf{A} - \boldsymbol{\lambda_0}\mathbf{I} \neq \mathbb{O}$, tad matricas A Žordāna normālforma ir (c)
$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ un pārejas matricas M kolonnas nosaka šādi:

1) pirmā kolonna ir matricas A īpašvektors $e_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \end{pmatrix}$, kas atbilst īpašvērtībai λ_0, kuru atrod no lineāras vienādojumu sistēmas

$$(A - \lambda_0)e_1 = \mathbb{O} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} (a - \lambda_0)u_1 + bv_1 = 0, \\ cu_1 + (d - \lambda_0)v_1 = 0; \end{cases}$$

Pārejas matricas atrašana V

2) otrā kolonna ir matricas A vispārinātais īpašvektors [generalized eigenvector] $e_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}$, kas atbilst īpašvērtībai λ_0, kuru atrod no lineāras vienādojumu sistēmas

$$(A - \lambda_0)e_2 = e_1 \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} (a - \lambda_0)u_2 + bv_2 = u_1, \\ cu_2 + (d - \lambda_0)v_2 = v_1. \end{cases}$$

Žordāna normālformas veida noteikšanas algoritms I

1) Ja $\Lambda(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, kur $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ un $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tad matricas A Žordāna normālformai ir veids (a) $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ vai $J = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

2) Ja $\Lambda(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, kur $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ $(\beta > 0)$, tad matricas A Žordāna normālformai ir veids (d) $J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Žordāna normālformas veida noteikšanas algoritms II

3) Ja $\Lambda(A) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 2 \end{pmatrix}$, kur $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, un $A - \lambda_0 I = \mathbb{O}$, tad matricas A Žordāna normālformai ir veids (b) $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

4) Ja $\Lambda(A) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 2 \end{pmatrix}$, kur $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, un $A - \lambda_0 I \neq \mathbb{O}$, tad matricas A Žordāna normālformai ir veids (c) $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

Pirmais paņēmiens ($b = 0$ un $c = 0$) - I

Ja $b = 0$ un $c = 0$, tad sistēmai (1) ir veids

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t, \\ y_{t+1} = dy_t. \end{cases}$$

Ja $a = 0$, tad sistēmas pirmā vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$x_t = \begin{cases} C_1, & \text{ja} \quad t = 0, \\ 0, & \text{ja} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

Ja $a \neq 0$, tad sistēmas pirmā vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$x_t = C_1 a^t.$$

Analoģiski tiek atrasts sistēmas otrā vienādojuma vispārīgais atrisinājums.

Pirmais paņēmiens ($b = 0$ un $c = 0$) - II

Tātad, ja $b = 0$ un $c = 0$, tad sistēmas vispārīgais atrisinājums ir

- $x_t = \begin{cases} C_1, & \text{ja} \quad t = 0, \\ 0, & \text{ja} \quad t \geq 1, \end{cases}$ $y_t = \begin{cases} C_2, & \text{ja} \quad t = 0, \\ 0, & \text{ja} \quad t \geq 1, \end{cases}$ ja $a = 0$ un $d = 0$;
- $x_t = \begin{cases} C_1, & \text{ja} \quad t = 0, \\ 0, & \text{ja} \quad t \geq 1, \end{cases}$ $y_t = C_2 d^t$, ja $a = 0$ un $d \neq 0$;
- $x_t = C_1 a^t$, $y_t = \begin{cases} C_2, & \text{ja} \quad t = 0, \\ 0, & \text{ja} \quad t \geq 1, \end{cases}$ ja $a \neq 0$ un $d = 0$;
- $x_t = C_1 a^t$, $y_t = C_2 d^t$, ja $a \neq 0$ un $d \neq 0$.

Pirmais paņēmiens ($b \neq 0$) - I

No sistēmas (1) vienādojumiem atrodam

$$\begin{aligned} x_{t+2} = ax_{t+1} + by_{t+1} = ax_{t+1} + b(cx_t + dy_t) = \\ = ax_{t+1} + bcx_t + d(x_{t+1} - ax_t) = \\ = (a+d)x_{t+1} - (ad - bc)x_t = \operatorname{tr} Ax_{t+1} - \det Ax_t, \end{aligned}$$

t.i.,

$$x_{t+2} = \operatorname{tr} Ax_{t+1} - \det Ax_t. \tag{4}$$

Atzīmēsim, ka vienādojuma (4) spektrs ir vienāds ar matricas A spektru. Atrodam vienādojuma (4) vispārīgo atrisinājumu

$$x_t = \varphi(t, C_1, C_2).$$

Pirmais paņēmiens ($b \neq 0$) - II

Tā kā $b \neq 0$,tad no sistēmas (1) pirmā vienādojuma iegūsim

$$y_t = \frac{1}{b}(x_{t+1} - ax_t) = \frac{1}{b}\big(\varphi(t+1, C_1, C_2) - a\varphi(t, C_1, C_2)\big) =: \psi(t, C_1, C_2).$$

Tātad sistēmas (1) vispārīgais atrisinājums ir

$$x_t = \varphi(t, C_1, C_2), \quad y_t = \psi(t, C_1, C_2)$$

jeb

$$x_t = \varphi(t, C_1, C_2), \quad y_t = \frac{1}{b}\big(\varphi(t+1, C_1, C_2) - a\varphi(t, C_1, C_2)\big).$$

Pirmais paņēmiens ($c \neq 0$) - I

No sistēmas (1) vienādojumiem atrodam

$$\begin{aligned} y_{t+2} = cx_{t+1} + dy_{t+1} = c(ax_t + by_t) + dy_{t+1} = \\ = a(y_{t+1} - dy_t) + bcy_t + dy_{t+1} = \\ = (a+d)y_{t+1} - (ad - bc)y_t = \operatorname{tr} Ay_{t+1} - \det Ay_t, \end{aligned}$$

t.i.,

$$y_{t+2} = \operatorname{tr} Ay_{t+1} - \det Ay_t. \tag{5}$$

Atzīmēsim, ka vienādojuma (5) spektrs ir vienāds ar matricas A spektru. Atrodam vienādojuma (5) vispārīgo atrisinājumu

$$y_t = \psi(t, C_1, C_2).$$

Pirmais paņēmiens ($c \neq 0$) - II

Tā kā $c \neq 0$,tad no sistēmas (1) otrā vienādojuma iegūsim

$$x_t = \frac{1}{c}(y_{t+1} - dy_t) = \frac{1}{c}\big(\psi(t+1, C_1, C_2) - d\psi(t, C_1, C_2)\big) =: \varphi(t, C_1, C_2).$$

Tātad sistēmas (1) vispārīgais atrisinājums ir

$$x_t = \varphi(t, C_1, C_2), \quad y_t = \psi(t, C_1, C_2)$$

jeb

$$x_t = \frac{1}{c}\big(\psi(t+1, C_1, C_2) - d\psi(t, C_1, C_2)\big), \quad y_t = \psi(t, C_1, C_2).$$

Otrais paņēmiens I

Apskatīsim sistēmu (1):

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t + by_t, \\ y_{t+1} = cx_t + dy_t. \end{cases}$$

Pārrakstīsim šo sistēmu matricu formā

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$$

jeb

$$p_{t+1} = Ap_t,$$

kur

$$p_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Otrais paņēmiens II

Tā kā

$$A = MJM^{-1},$$

kur J ir matricas A Žordāna normālforma, tad

$$p_{t+1} = MJM^{-1}p_t \quad \text{jeb} \quad M^{-1}p_{t+1} = JM^{-1}p_t.$$

Apzīmēsim:

$$M^{-1}p_t =: \bar{p}_t = \begin{pmatrix} \bar{x}_t \\ \bar{y}_t \end{pmatrix}.$$

Tad sistēma iegūs veidu

$$\bar{p}_{t+1} = J\bar{p}_t. \qquad (6)$$

Atrisinām sistēmu (6) attiecībā pret $\bar{x}_t$ un $\bar{y}_t$ un atgriežamies pie dotajiem mainīgajiem x_t un y_t ar formulas $p_t = M\bar{p}_t$ palīdzību.

Pirmais piemērs

Apskatīsim Košī uzdevumu:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 4x_t - 2y_t, \\ y_{t+1} = x_t + y_t, \end{cases} \tag{7}$$

$$x_0 = 1, \quad y_0 = -5. \tag{8}$$

Pirmais paņēmiens I

Tā kā $b = -2 \neq 0$, tad atrodam:

$$x_{t+2} = 4x_{t+1} - 2y_{t+1} = 4x_{t+1} - 2(x_t + y_t) = 4x_{t+1} - 2x_t - 2y_t = \\ = 4x_{t+1} - 2x_t + (x_{t+1} - 4x_t) = 5x_{t+1} - 6x_t,$$

t.i.,

$$x_{t+2} = 5x_{t+1} - 6x_t. \tag{9}$$

Diferenču vienādojuma (9) raksturvienādojums ir

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0,$$

līdz ar to tā spektrs ir

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tātad diferenču vienādojuma (9) vispārīgais atrisinājums ir

$$x_t = C_1 2^t + C_2 3^t.$$

Pirmais paņēmiens II

No sistēmas (7) pirmā vienādojuma iegūsim:

$$
\begin{aligned}
y_t = \frac{1}{2}(4x_t - x_{t+1}) = 2x_t - \frac{1}{2}x_{t+1} = \\
&= 2(C_1 2^t + C_2 3^t) - \frac{1}{2}(2C_1 2^t + 3C_2 3^t) = \\
&= (2C_1 - C_1)2^t + \left(2C_2 - \frac{3}{2}C_2\right)3^t = C_1 2^t + \frac{1}{2}C_2 3^t.
\end{aligned}
$$

Tātad sistēmas (7) vispārīgais atrisinājums ir

$$
\begin{aligned}
x_t &= C_1 2^t + C_2 3^t =: \varphi(t, C_1, C_2), \\
y_t &= C_1 2^t + \frac{1}{2}C_2 3^t =: \psi(t, C_1, C_2).
\end{aligned}
$$

Pirmais paņēmiens III

Lai atrastu Košī uzdevuma (7), (8) atrisinājumu, risinām vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_0^* = \varphi(0, C_1, C_2), \\ y_0^* = \psi(0, C_1, C_2) \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ -5 = C_1 + \frac{1}{2} C_2. \end{cases}$$

Saskaņā ar Krāmera formulām

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{11}{2}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6,$$

$$C_1 = \frac{\frac{11}{2}}{-\frac{1}{2}} = -11, \quad C_2 = \frac{-6}{-\frac{1}{2}} = 12.$$

Pirmais paņēmiens IV

G. Krāmers (1704-1752, G. Cramer) - šveiciešu matemātiķis, kurš 1750. gadā publicēja viņa vārdā nosaukto likumu - Krāmera likumu. G. Krāmers ir sniedzis ievērojamu ieguldījumu algebrisko līkņu teorijā.

Pirmais paņēmiens V

Tātad Košī uzdevuma (7), (8) atrisinājums ir

$$\mathbf{x_t = -11 \cdot 2^t + 12 \cdot 3^t, \quad y_t = -11 \cdot 2^t + 6 \cdot 3^t.}$$

Veiksim pārbaudi:

$$x_0 = -11 + 12 = 1, \quad y_0 = -11 + 6 = 5,$$

$$x_{t+1} - 4x_t + 2y_t = (-22 \cdot 2^t + 36 \cdot 3^t) - 4(-11 \cdot 2^t + 12 \cdot 3^t) + 2(-11 \cdot 2^t + 6 \cdot 3^t) = \\ = (-22 + 44 - 22)2^t + (36 - 48 + 12)3^t = 0,$$

$$y_{t+1} - x_t - y_t = (-22 \cdot 2^t + 18 \cdot 3^t) - (-11 \cdot 2^t + 12 \cdot 3^t) - (-11 \cdot 2^t + 6 \cdot 3^t) = \\ = (-22 + 11 + 11)2^t + (18 - 12 - 6)3^t = 0.$$

Otrais paņēmiens I

Atrisināsim Koši uzdevumu (7), (8):

$$\begin{cases} x_{t+1} = 4x_t - 2y_t, \\ y_{t+1} = x_t + y_t, \end{cases}$$

$$x_0 = 1, \quad y_0 = -5$$

ar otro paņēmienu.

Tātad

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} A = 4 + 1 = 5, \quad \det A = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Sastādām raksturvienādojumu

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A\, \lambda + \det A = 0 \quad \text{jeb} \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Otrais paņēmiens II

Šī vienādojuma saknes, t.i., matricas A īpašvērtības, ir

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2.$$

Matricas A Žordāna forma ir

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

pie tam

$$J = M^{-1}AM,$$

kur

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

ir pārejas matrica.

Otrais paņēmiens III

Tātad

$$MJ = AM, \quad \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 3m_{11} & 2m_{12} \\ 3m_{21} & 2m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4m_{11} - 2m_{21} & 4m_{12} - 2m_{22} \\ m_{11} + m_{21} & m_{12} + m_{22} \end{pmatrix},$$

no kurienes iegūstam lineāru vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} 3m_{11} = 4m_{11} - 2m_{21}, \\ 2m_{12} = 4m_{12} - 2m_{22}, \\ 3m_{21} = m_{11} + m_{21}, \\ 2m_{22} = m_{12} + m_{22} \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} m_{11} = 2m_{21}, \\ 2m_{12} = 2m_{22}, \\ 2m_{21} = m_{11}, \\ m_{22} = m_{12} \end{cases} \quad \text{jeb}$$

$$\begin{cases} m_{11} = 2m_{21}, \\ m_{22} = m_{12}. \end{cases}$$

Otrais paņēmiens IV

Šai sistēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu. Izvēlēsimies vienu: ņemsim

$$m_{21} = 1, \quad m_{12} = 1,$$

tad

$$m_{11} = 2, \quad m_{22} = 1.$$

Tātad pārejas matrica

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tā kā

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

tad matricas M inversā matrica ir

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Otrais paņēmiens V

Pāriesim pie jaunas sistēmas

$$\bar{p}_{t+1} = J\bar{p}_t \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} \bar{x}_{t+1} = 3\bar{x}_t, \\ \bar{y}_{t+1} = 2\bar{y}_t. \end{cases}$$

Šīs sistēmas vispārīgais atrisinājums ir

$$\bar{x}_t = C_1\, 3^t, \quad \bar{y}_t = C_2\, 2^t.$$

Atgriežamies pie dotajiem mainīgajiem x_t un y_t ar formulas

$$p_t = M\bar{p}_t \quad \text{jeb} \quad \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_t \\ \bar{y}_t \end{pmatrix}$$

palīdzību, t.i.,

Otrais paņēmiens VI

$$x_t = 2\bar{x}_t + \bar{y}_t, \quad y_t = \bar{x}_t + \bar{y}_t$$

jeb

$$x_t = 2C_1\,3^t + C_2\,2^t, \quad y_t = C_1\,3^t + C_2\,2^t.$$

Pēdējās formulas sniedz sistēmas (7) vispārīgo atrisinājumu.

Lai atrastu sistēmas (7) partikulāro atrisinājumu, kas apmierina sākumnosacījumus (8), risinām sistēmu

$$\begin{cases} 1 = 2C_1 + C_2, \\ -5 = C_1 + C_2. \end{cases}$$

Saskaņā ar Krāmera formulām

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

Otrais paņēmiens VII

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 6, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -11,$$

$$C_1 = \frac{6}{1} = 6, \quad C_2 = \frac{-11}{1} = -11.$$

Tātad

$$\mathbf{x_t = 12 \cdot 3^t - 11 \cdot 2^t, \quad y_t = 6 \cdot 3^t - 11 \cdot 2^t}$$

ir Košī uzdevuma (7), (8) atrisinājums, kas sakrīt ar iepriekš iegūto atrisinājumu izmantojot pirmo paņēmienu.

Otrais piemērs I

Atrisināsim Košī uzdevumu

$$\begin{cases} x_{t+1} = 3x_t, \\ y_{t+1} = 3y_t, \end{cases} \tag{10}$$

$$x_0 = -2, \quad y_0 = 5. \tag{11}$$

Šajā gadījumā uzreiz atrodam sistēmas (10) vispārīgo atrisinājumu:

$$x_t = C_1 3^t, \quad y_t = C_2 3^t.$$

Lai atrastu sistēmas (10) partikulāro atrisinājumu, kas apmierina sākumnosacījumus (11), nosakām konstantes:

$$x_0 = C_1,\ y_0 = C_2 \quad \text{jeb} \quad C_1 = -2,\ C_2 = 5.$$

Košī uzdevuma (10), (11) atrisinājums ir

$$x_t = -2 \cdot 3^t, \quad y_t = 5 \cdot 3^t.$$

Trešais piemērs

Apskatīsim Košī uzdevumu:

$$\begin{cases} x_{t+1} = -x_t + 9y_t, \\ y_{t+1} = -4x_t + 11y_t, \end{cases} \tag{12}$$

$$x_0 = -1, \quad y_0 = -3. \tag{13}$$

Pirmais paņēmiens I

Tā kā $b = 9 \neq 0$, tad atrodam:

$$x_{t+2} = -x_{t+1} + 9y_{t+1} = -x_{t+1} + 9(-4x_t + 11y_t) = -x_{t+1} - 36x_t + 11 \cdot 9y_t = \\ = -x_{t+1} - 36x_t + 11(x_{t+1} + x_t) = 10x_{t+1} - 25x_t,$$

t.i.,

$$x_{t+2} = 10x_{t+1} - 25x_t. \tag{14}$$

Diferenču vienādojuma (14) raksturvienādojums ir

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0,$$

līdz ar to tā spektrs ir

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tātad diferenču vienādojuma (14) vispārīgais atrisinājums ir

$$x_t = (C_1 + C_2 t)5^t.$$

Pirmais paņēmiens II

No sistēmas (12) pirmā vienādojuma iegūsim:

$$
\begin{aligned}
y_t = \frac{1}{9}(x_t + x_{t+1}) = \frac{1}{9}x_t + \frac{1}{9}x_{t+1} = \\
= \frac{1}{9}(C_1 + C_2 t)5^t + \frac{5}{9}\big(C_1 + C_2(t+1)\big)5^t = \\
= \left(\frac{1}{9}C_1 + \frac{1}{9}C_2 t + \frac{5}{9}C_1 + \frac{5}{9}C_2 t + \frac{5}{9}C_2\right)5^t = \\
= \left(\frac{2}{3}C_1 + \frac{5}{9}C_2 + \frac{2}{3}C_2 t\right)5^t.
\end{aligned}
$$

Tātad sistēmas (12) vispārīgais atrisinājums ir

$$
\begin{aligned}
x_t &= (C_1 + C_2 t)5^t &&=: \varphi(t, C_1, C_2),\\
y_t &= \left(\frac{2}{3}C_1 + \frac{5}{9}C_2 + \frac{2}{3}C_2 t\right)5^t &&=: \psi(t, C_1, C_2).
\end{aligned}
$$

Pirmais paņēmiens III

Lai atrastu Koši uzdevuma (12), (13) atrisinājumu, risinām vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_0^* = \varphi(0, C_1, C_2), \\ y_0^* = \psi(0, C_1, C_2) \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} -1 = C_1, \\ -3 = \frac{2}{3}C_1 + \frac{5}{9}C_2. \end{cases}$$

Tātad $C_1 = -1$ un $C_2 = \frac{9}{5}\left(-3 + \frac{2}{3}\right) = -\frac{21}{5}$.

Tātad Koši uzdevuma (12), (13) atrisinājums ir

$$\mathbf{x_t = -\left(1 + \frac{21}{5}t\right)5^t, \quad y_t = -\left(3 + \frac{14}{5}t\right)5^t.}$$

Veiksim pārbaudi:

$$x_0 = -\left(1 + \frac{21}{5}\cdot 0\right)5^0 = -1, \quad y_0 = -\left(3 + \frac{14}{5}\cdot 0\right)5^0 = -3,$$

Pirmais paņēmiens IV

$$x_{t+1} + x_t - 9y_t =$$

$$= -5\left(1 + \frac{21}{5}t + \frac{21}{5}\right)5^t - \left(1 + \frac{21}{5}t\right)5^t + 9\left(3 + \frac{14}{5}t\right)5^t =$$

$$= \left(-5 - 21t - 21 - 1 - \frac{21}{5}t + 27 + \frac{126}{5}t\right)5^t = 0,$$

$$y_{t+1} + 4x_t - 11y_t =$$

$$= -5\left(3 + \frac{14}{5}t + \frac{14}{5}\right)5^t - 4\left(1 + \frac{21}{5}t\right)5^t + 11\left(3 + \frac{14}{5}t\right)5^t =$$

$$= \left(-15 - 14t - 14 - 4 - \frac{84}{5}t + 33 + \frac{154}{5}t\right)5^t = 0.$$

Otrais paņēmiens I

Atrisināsim Koši uzdevumu (12), (13):

$$\begin{cases} x_{t+1} = -x_t + 9y_t, \\ y_{t+1} = -4x_t + 11y_t, \end{cases}$$

$$x_0 = -1, \quad y_0 = -3.$$

ar otro paņēmienu.

Tātad

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -4 & 11 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} A = -1 + 11 = 10, \quad \det A = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 25.$$

Sastādām raksturvienādojumu

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A\, \lambda + \det A = 0 \quad \text{jeb} \quad \lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0.$$

Otrais paņēmiens II

Šīm vienādojumam ir viena divkārša sakne $\lambda_0 = 5$, tātad matricas A spektrs ir

$$\Lambda(A) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Tā kā

$$A - \lambda_0 I = \begin{pmatrix} -1-5 & 9 \\ -4 & 11-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \neq \mathbb{O},$$

tad matricas A Žordāna forma ir

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},$$

pie tam

$$J = M^{-1}AM,$$

Otrais paņēmiens III

kur

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

ir pārejas matrica. Tātad

$$MJ = AM, \quad \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -4 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 5m_{11} & m_{11} + 5m_{12} \\ 5m_{21} & m_{21} + 5m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m_{11} + 9m_{21} & -m_{12} + 9m_{22} \\ -4m_{11} + 11m_{21} & -4m_{12} + 11m_{22} \end{pmatrix},$$

no kurienes iegūstam lineāru vienādojumu sistēmu

$$\left\{ \begin{array}{c} 5m_{11} = -m_{11} + 9m_{21}, \\ m_{11} + 5m_{12} = -m_{12} + 9m_{22}, \\ 5m_{21} = -4m_{11} + 11m_{21}, \\ m_{21} + 5m_{22} = -4m_{12} + 11m_{22} \end{array} \right. \quad \text{jeb} \quad \left\{ \begin{array}{c} 2m_{11} = 3m_{21}, \\ m_{11} + 6m_{12} = 9m_{22}, \\ 2m_{11} = 3m_{21}, \\ m_{21} + 4m_{12} = 6m_{22} \end{array} \right. \quad \text{jeb}$$

Otrais paņēmiens IV

$$\begin{cases} 2m_{11} = 3m_{21}, \\ m_{11} + 6m_{12} = 9m_{22}, \\ m_{21} + 4m_{12} = 6m_{22} \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} 2m_{11} = 3m_{21}, \\ m_{11} + 6m_{12} = 9m_{22}, \\ 3m_{21} + 12m_{12} = 18m_{22} \end{cases} \quad \text{jeb}$$

$$\begin{cases} 2m_{11} = 3m_{21}, \\ m_{11} + 6m_{12} = 9m_{22}, \\ 2m_{11} + 12m_{12} = 18m_{22} \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} 2m_{11} = 3m_{21}, \\ m_{11} + 6m_{12} = 9m_{22}. \end{cases}$$

Šai sistēmai ir bezgalīgi daudz atrisinājumu. Izvēlēsimies vienu atrisinājumu, ka $\det M \neq 0$. Ja ņemt $m_{11} = 3$, $m_{21} = 2$, tad pēdējās sistēmas pirmais vienādojums tiek apmierināts, bet otrais vienādojums iegūst veidu $3 + 6m_{12} = 9m_{22}$. Šis vienādojums būs spēkā, ja ņemt $m_{12} = 1$ un $m_{22} = 1$. Tātad pārejas matrica

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Otrais paņēmiens V

Tā kā

$$\det M = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

tad matricas M inversā matrica ir

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{12} \\ -m_{21} & m_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pāriesim pie jaunas sistēmas

$$\bar{p}_{t+1} = J\bar{p}_t \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} \bar{x}_{t+1} = 5\bar{x}_t + y_t, \\ \bar{y}_{t+1} = 5\bar{y}_t. \end{cases} \tag{15}$$

Šīs sistēmas otrā vienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$\bar{y}_t = C_2\, 5^t.$$

Otrais paņēmiens VI

Tad no sistēmas pirmā vienādojuma iegūstam pirmās kārtas lineāru nehomogēnu diferenču vienādojumu ar konstantiem koeficientiem

$$\bar{x}_{t+1} = 5\bar{x}_t + C_2\,5^t. \tag{16}$$

Nehomogēnā vienādojuma (16) vispārīgais atrisinājums $\bar{x}_t^{\text{neh.visp.}}$ ir vienāds ar tam atbilstošā homogēnā vienādojuma

$$\bar{x}_{t+1} = 5\bar{x}_t \tag{17}$$

vispārīgā atrisinājuma $\bar{x}_t^{\text{hom.visp.}}$ un nehomogēnā vienādojuma partikulārā atrisinājuma $\bar{x}_t^*$ summu:

$$\bar{x}_t^{\text{neh.visp.}} = \bar{x}_t^{\text{hom.visp.}} + \bar{x}_t^*.$$

Otrais paņēmiens VII

Homogēnā vienādojuma (17) vispārīgais atrisinājums ir

$$\bar{x}_t^{\text{hom.visp.}} = C_1 5^t.$$

Tātad

$$\bar{x}_t^{\text{neh.visp.}} = C_1 5^t + \bar{x}_t^*.$$

Nehomogēnā vienādojuma partikulāro atrisinājumu $\bar{x}_t^*$ meklēsim ar nenoteikto koeficientu metodi. Tā kā nehomogēnā vienādojuma brīvajam loceklim ir veids $f_t = Ar^t$, kur $A = C_1$ un $r = 5$, bet $r = 5$ pieder atbilstošā homogēnā vienādojuma spektram ar kārtu $s = 1$, tad nehomogēnā vienādojuma partikulāro atrisinājumu $\bar{x}_t^*$ ir jāmeklē formā

$$\bar{x}_t^* = Bt^s r^t \quad \text{jeb} \quad \bar{x}_t^* = Bt5^t, \tag{18}$$

Otrais paņēmiens VIII

kur B ir nenoteiktais koeficients, kuru atrodam $\bar{x}_t^*$ izteiksmi (18) ievietojot nehomogēnajā vienādojumā (16):

$$\bar{x}_{t+1}^* = 5\bar{x}_t^* + C_2\, 5^t,$$

$$B(t+1)5^{t+1} = 5Bt5^t + C_2 5^t.$$

Tā kā pēdējai vienādībai ir jāizpildās pie visiem $t \in \mathbb{N}_0$, tad

$$5B(t+1) - 5Bt - C_2 = 0,$$

no kurienes $B = \frac{C_2}{5}$. Tātad nehomogēnā vienādojuma partikulārajam atrisinājumam ir veids

$$\bar{x}_t^* = \frac{C_2}{5}\, t5^t.$$

Otrais paņēmiens IX

Līdz ar to nehomogēnā vienādojuma (16) vispārīgais atrisinājums ir

$$\bar{x}_t^{\text{neh.visp.}} = C_1 5^t + \frac{C_2}{5}\, t5^t. \tag{19}$$

Tādējādi sistēmas (15) vispārīgajam atrisinājumam ir veids

$$\bar{x}_t = C_1 5^t + \frac{C_2}{5}\, t5^t, \quad \bar{y}_t = C_2 5^t.$$

Atgriežamies pie dotajiem mainīgajiem x_t un y_t ar formulas

$$p_t = M\bar{p}_t \quad \text{jeb} \quad \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_t \\ \bar{y}_t \end{pmatrix}$$

palīdzību, t.i.,

$$x_t = 3\bar{x}_t + \bar{y}_t, \quad y_t = 2\bar{x}_t + \bar{y}_t,$$

Otrais paņēmiens X

$$x_t = 3\left(C_1 5^t + \frac{C_2}{5}\, t5^t\right) + C_2 5^t, \quad y_t = 3\left(C_1 5^t + \frac{C_2}{5}\, t5^t\right) + C_2 5^t,$$

$$x_t = \left(3C_1 + C_2 + \frac{3C_2}{5}\, t\right) 5^t, \quad y_t = \left(2C_1 + C_2 + \frac{2C_2}{5}\, t\right) 5^t.$$

Pēdējās formulas sniedz sistēmas (12) vispārīgo atrisinājumu.

Lai atrastu sistēmas (12) partikulāro atrisinājumu, kas apmierina sākumnosacījumus (13), risinām sistēmu

$$\begin{cases} -1 = 3C_1 + C_2, \\ -3 = 2C_1 + C_2. \end{cases}$$

Saskaņā ar Krāmera formulām

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

Otrais paņēmiens XI

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -7,$$

$$C_1 = \frac{2}{1} = 2, \quad C_2 = \frac{-7}{1} = -7.$$

Tātad

$$\mathbf{x_t = -\left(1 + \frac{21}{5}t\right) 5^t, \quad y_t = -\left(3 + \frac{14}{5}t\right) 5^t.}$$

ir Košī uzdevuma (12), (13) atrisinājums, kas sakrīt ar iepriekš iegūto atrisinājumu izmantojot pirmo paņēmienu.

Ceturtais piemērs

Apskatīsim Košī uzdevumu:

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t - y_t, \\ y_{t+1} = x_t + y_t, \end{cases} \tag{20}$$

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 3. \tag{21}$$

Pirmais paņēmiens I

Tā kā $b = -1 \neq 0$, tad atrodam:

$$x_{t+2} = x_{t+1} - y_{t+1} = x_{t+1} - (x_t + y_t) = x_{t+1} - x_t - y_t =$$
$$= x_{t+1} - x_t + (x_{t+1} - x_t) = 2x_{t+1} - 2x_t,$$

t.i.,

$$x_{t+2} = 2x_{t+1} - 2x_t. \tag{22}$$

Diferenču vienādojuma (22) raksturvienādojums ir

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

līdz ar to tā spektrs ir

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tātad diferenču vienādojuma (22) vispārīgais atrisinājums ir

$$x_t = C_1(1+i)^t + C_2(1-i)^t.$$

Pirmais paņēmiens II

No sistēmas (20) pirmā vienādojuma iegūsim:

$$y_t = x_t - x_{t+1} = \left[C_1(1+i)^t + C_2(1-i)^t\right] - \left[C_1(1+i)^{t+1} + C_2(1-i)^{t+1}\right] = \\ = -iC_1(1+i)^t + iC_2(1-i)^t.$$

Tātad sistēmas (20) vispārīgais atrisinājums ir

$$x_t = C_1(1+i)^t + C_2(1-i)^t =: \varphi(t, C_1, C_2),$$
$$y_t = -iC_1(1+i)^t + iC_2(1-i)^t =: \psi(t, C_1, C_2).$$

Pirmais paņēmiens III

Lai atrastu Koši uzdevuma (20), (21) atrisinājumu, risinām vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x_0^* = \varphi(0, C_1, C_2), \\ y_0^* = \psi(0, C_1, C_2) \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} 1 = C_1 + C_2, \\ 3 = -iC_1 + iC_2. \end{cases}$$

Saskaņā ar Krāmera formulām

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{vmatrix} = 2i,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & i \end{vmatrix} = -3 + i, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 - i & 3 \end{vmatrix} = 3 + i,$$

$$C_1 = \frac{-3 + i}{2i} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i, \quad C_2 = \frac{3 + i}{2i} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i.$$

Pirmais paņēmiens IV

Tātad Košī uzdevuma (20), (21) atrisinājums ir

$$x_t = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)(1+i)^t + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)(1-i)^t,$$
$$y_t = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right)(1+i)^t + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1-i)^t.$$

Veiksim pārbaudi:

$$x_0 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i = 1, \ y_0 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i = 3,$$

Pirmais paņēmiens V

$$
\begin{aligned}
x_{t+1}-x_t+y_t &= \left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)(1+i)(1+i)^t+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)(1-i)(1-i)^t\right]- \\
&-\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)(1+i)^t+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)(1-i)^t\right]+ \\
&+\left[\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\right)(1+i)^t+\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right)(1-i)^t\right]= \\
&=\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i+\frac{3}{2}i-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\right](1+i)^t+ \\
&+\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}i-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i\right](1-i)^t=0.
\end{aligned}
$$

Līdzīgā veidā pārliecinās, ka $y_{t+1}-x_t-y_t=0$.

Pirmais paņēmiens VI

Atradīsim Košī uzdevuma (20), (21) atrisinājuma x_t un y_t reālas izteiksmes. Vispirms uzrakstām matricas A īpašvērtību $\lambda_1 = 1 + i$ trigonometriskajā formā:

$$\lambda_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Tad

$$\lambda_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Ņemot vērā Muavra formulu, iegūsim

$$\lambda_1^t = (1+i)^t = (\sqrt{2})^t\left(\cos\frac{\pi t}{4} + i\sin\frac{\pi t}{4}\right),$$
$$\lambda_2^t = (1-i)^t = (\sqrt{2})^t\left(\cos\frac{\pi t}{4} - i\sin\frac{\pi t}{4}\right).$$

Pirmais paņēmiens VII

Tātad

$$
\begin{aligned}
x_t = \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)(1+i)^t + \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)(1-i)^t = \\
= \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)(\sqrt{2})^t\left(\cos\frac{\pi t}{4}+i\sin\frac{\pi t}{4}\right)+ \\
+ \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)(\sqrt{2})^t\left(\cos\frac{\pi t}{4}-i\sin\frac{\pi t}{4}\right) = \\
= (\sqrt{2})^t\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)\cos\frac{\pi t}{4}+ \\
+ (\sqrt{2})^t\left(\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i-\frac{3}{2}\right)\sin\frac{\pi t}{4} = \\
= (\sqrt{2})^t\cos\frac{\pi t}{4} - 3(\sqrt{2})^t\sin\frac{\pi t}{4};
\end{aligned}
$$

Pirmais paņēmiens VIII

$$
\begin{aligned}
y_t = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right)(1+i)^t + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)(1-i)^t = \\
= \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right)(\sqrt{2})^t \left(\cos\frac{\pi t}{4} + i\sin\frac{\pi t}{4}\right) + \\
+ \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)(\sqrt{2})^t \left(\cos\frac{\pi t}{4} - i\sin\frac{\pi t}{4}\right) = \\
= (\sqrt{2})^t \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right)\cos\frac{\pi t}{4} + \\
+ (\sqrt{2})^t \left(\frac{3}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right)\sin\frac{\pi t}{4} = \\
= 3(\sqrt{2})^t \cos\frac{\pi t}{4} + (\sqrt{2})^t \sin\frac{\pi t}{4}.
\end{aligned}
$$

Pirmais paņēmiens IX

Tādējādi Košī uzdevuma (20), (21) atrisinājums ir

$$\mathbf{x_t} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathbf{i}\right)(1+\mathbf{i})^t + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\mathbf{i}\right)(1-\mathbf{i})^t,$$
$$\mathbf{y_t} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathbf{i}\right)(1+\mathbf{i})^t + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}\right)(1-\mathbf{i})^t$$

jeb

$$\mathbf{x_t} = (\sqrt{2})^t \cos\frac{\pi t}{4} - 3(\sqrt{2})^t \sin\frac{\pi t}{4},$$
$$\mathbf{y_t} = 3(\sqrt{2})^t \cos\frac{\pi t}{4} + (\sqrt{2})^t \sin\frac{\pi t}{4}.$$

Otrais paņēmiens I

Atrisināsim Koši uzdevumu (20), (21):

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t - y_t, \\ y_{t+1} = x_t + y_t, \end{cases}$$

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 3$$

ar otro paņēmienu. Tātad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} A = 1 + 1 = 2, \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Sastādām raksturvienādojumu

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A\, \lambda + \det A = 0 \quad \text{jeb} \quad \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Otrais paņēmiens II

Šī vienādojuma saknes, t.i., matricas A īpašvērtības, ir

$$\lambda_1 = 1 + i = \alpha + i\beta = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$
$$\lambda_2 = 1 - i = \alpha - i\beta = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Tā kā $\alpha = 1$ un $\beta = 1$, tad matricas A Žordāna forma ir

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Šajā gadījumā pārejas matrica $M = I$. Līdz ar to pāreja pie jauniem mainīgajiem

$$M^{-1}p_t =: \bar{p}_t = \begin{pmatrix} \bar{x}_t \\ \bar{y}_t \end{pmatrix},$$

Otrais paņēmiens III

t.i., pāreja pie jaunās sistēmas

$$\bar{p}_{t+1} = J\bar{p}_t, \tag{23}$$

nedod neko jaunu, jo (23) faktiski ir tā pati dotā sistēma

$$p_{t+1} = Ap_t$$

tikai ar citiem mainīgo apzīmējumiem. Tomēr uzskatīsim, ka esam pārgājuši pie sistēmas (23), jo tā būtu jārīkojas vispārīgā gadījumā.

No sistēmas (23) atrodam:

$$\begin{aligned} \bar{p}_1 &= J\bar{p}_0, \\ \bar{p}_2 &= J\bar{p}_1 = J(J\bar{p}_0) = J^2\bar{p}_0, \\ \bar{p}_3 &= A\bar{p}_2 = J(J^2\bar{p}_0) = J^3\bar{p}_0, \ \ldots \end{aligned}$$

Otrais paņēmiens IV

no kurienes secinām, ka

$$\bar{p}_t = J^t \bar{p}_0. \tag{24}$$

Formula (24) sniedz sistēmas (23) vispārīgo atrisinājumu, ja uzskatīt, ka

$$\bar{p}_0 = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Otrais paņēmiens V

Atzīmēsim, ka

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

kur $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\rho = \sqrt{2}$ un $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

Atrodam:

$$J^2 = \rho^2 \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \rho^2 \begin{pmatrix} \cos^2\varphi - \sin^2\varphi & -2\sin\varphi\cos\varphi \\ 2\sin\varphi\cos\varphi & -\sin^2\varphi + \cos^2\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \rho^2 \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & -\sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{pmatrix}.$$

Otrais paņēmiens VI

Izmantojot matemātiskās indukcijas principu [1], var pierādīt, ka

$$\boxed{J^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos t\varphi & -\sin t\varphi \\ \sin t\varphi & \cos t\varphi \end{pmatrix}} \quad \text{jeb} \quad J^t = (\sqrt{2})^t \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi t}{4} & -\sin \frac{\pi t}{4} \\ \sin \frac{\pi t}{4} & \cos \frac{\pi t}{4} \end{pmatrix}.$$

Tātad sistēmas (23) vispārīgais atrisinājums ir

$$\bar{p}_t = J^t \bar{p}_0$$

jeb

$$\bar{x}_t = (\sqrt{2})^t \left(C_1 \cos \frac{\pi t}{4} - C_2 \sin \frac{\pi t}{4} \right),$$
$$\bar{y}_t = (\sqrt{2})^t \left(C_1 \sin \frac{\pi t}{4} + C_2 \sin \frac{\pi t}{4} \right).$$

Otrais paņēmiens VII

Atgriežamies pie dotajiem mainīgajiem x_t un y_t ar formulas

$$p_t = M\bar{p}_t \quad \text{jeb} \quad \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_t \\ \bar{y}_t \end{pmatrix}$$

palīdzību, t.i.,

$$x_t = \bar{x}_t, \quad y_t = \bar{y}_t$$

jeb

$$x_t = (\sqrt{2})^t \left(C_1 \cos \frac{\pi t}{4} - C_2 \sin \frac{\pi t}{4} \right),$$
$$y_t = (\sqrt{2})^t \left(C_1 \sin \frac{\pi t}{4} + C_2 \sin \frac{\pi t}{4} \right).$$

Pēdējās formulas sniedz sistēmas (20) vispārīgo atrisinājumu.

Otrais paņēmiens VIII

Lai atrastu sistēmas (20) partikulāro atrisinājumu, kas apmierina sākumnosacījumus (21), risinām sistēmu

$$\begin{cases} 1 = C_1 + 0 \cdot C_2, \\ 3 = 0 \cdot C_1 + C_2, \end{cases}$$

t.i.,

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 3.$$

Tātad

$$\mathbf{x_t = (\sqrt{2})^t \left(\cos \frac{\pi t}{4} - 3 \sin \frac{\pi t}{4}\right),}$$
$$\mathbf{y_t = (\sqrt{2})^t \left(\sin \frac{\pi t}{4} + 3 \cos \frac{\pi t}{4}\right).}$$

ir Košī uzdevuma (20), (21) atrisinājums, kas sakrīt ar iepriekš iegūto atrisinājumu izmantojot pirmo paņēmienu.

Pielikums I

Aplūkojot ceturto piemēru, tika konstatēts, ka, ja matricas A spektrs ir

$$\Lambda(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

kur

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$\lambda_2 = \alpha - i\beta = \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi)$$

un $\beta > 0$, tad matricas A Žordāna normālformai ir veids

$$(d) \quad J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \text{jeb} \quad J = \rho \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

un

$$\boxed{J^t = \rho^t \begin{pmatrix} \cos t\varphi & -\sin t\varphi \\ \sin t\varphi & \cos t\varphi \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{N}.}$$

Pielikums II

Atzīmēsim, ka tiek uzskatīts [6, 22. lpp.], ka jebkuras kvadrātveida matricas A (tajā skaitā nulles matricas) nultā pakāpe ir vienāda ar vienības matricu, t.i.,

$$A^0 = I.$$

Ja matricas A spektrs ir

$$\Lambda(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

kur $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ un $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tad matricas A Žordāna normālformai ir veids

$$(a) \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{vai} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Pielikums III

Ja

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

tad

$$J^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix},$$

$$J^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 \end{pmatrix}.$$

Izmantojot matemātiskās indukcijas principu [1], var pierādīt, ka

$$\boxed{J^t = \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 \\ 0 & \lambda_2^t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{N}.}$$

Pielikums IV

Ja matricas A spektrs ir

$$\Lambda(A) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

kur $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, un $(A - \lambda_0 I) = \mathbb{O}$, tad matricas A Žordāna normālformai ir veids

$$(b) \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Spriežot līdzīgi kā iepriekš,

$$\boxed{J^t = \begin{pmatrix} \lambda_0^t & 0 \\ 0 & \lambda_0^t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{N}.}$$

Pielikums V

Ja matricas A spektrs ir $\Lambda(A) = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ 2 \end{pmatrix}$, kur $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, un $(A - \lambda_0 I) \neq \mathbb{O}$, tad matricas A Žordāna normālformai ir veids (c) $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$. Tad

$$J^2 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & 2\lambda_0 \\ 0 & \lambda_0^2 \end{pmatrix},$$

$$J^3 = \begin{pmatrix} \lambda_0^2 & 2\lambda_0 \\ 0 & \lambda_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0^3 & 3\lambda_0^2 \\ 0 & \lambda_0^3 \end{pmatrix}.$$

Izmantojot matemātiskās indukcijas principu [1], var pierādīt, ka

$$\boxed{J^t = \begin{pmatrix} \lambda_0^t & t\lambda_0^{t-1} \\ 0 & \lambda_0^t \end{pmatrix}, \quad t \in \{2, 3, \ldots\}.}$$

Literatūra I

[1] A. Andžāns, P. Zariņš.
Matemātiskās indukcijas metode un varbūtību teorijas elementi, Rīga, Zvaigzne, 1983.

[2] D. Arrowsmith, C.M. Place.
Dynamical systems: Differential equations, maps, and chaotic behaviour, Chapman & Hall/CRC, 1992.

[3] S. Elaydi.
An Introduction to difference equations, Springer, 2005.

[4] Jordan normal form
http://en.wikipedia.org/wiki/Jordan_normal_form

[5] W.G. Kelley, A.C. Peterson.
Difference equations: An introduction with applications, Academic Press, 2000.

Literatūra II

[6] Ф.Р. Гантмахер.
Теория матриц, Физматлит, 2004.

[7] В.К. Романко.
Разностные уравнения, Бином, 2006.