Otrās kārtas lineāru homogēnu diskrētu dinamikas sistēmu ar konstantiem koeficientiem līdzsvara punkti

asoc. prof. A. Gricāns

Daugavpils Universitāte

Diskrētas dinamikas sistēmas

2012. gada 20. novembris

Saturs I

1. Līdzsvara punkta definīcija
2. Sistēmas līdzsvara punkti
   - Pirmā shēma
   - Otrā shēma
   - Trešā shēma
3. Piemēri
   - Pirmais piemērs
   - Otrais piemērs
4. Otrās kārtas lineāru homogēnu diferenču vienādojumu sistēma
   - Pirmā shēma
   - Otrā shēma
   - Trešā shēma
5. Literatūra

Līdzsvara punkta definīcija I

Aplūkosim otrās kārtas lineāru homogēnu diskrētu dinamikas sistēmu ar konstantiem koeficientiem (turpmāk vienkārši sistēmu)

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t + by_t, \\ y_{t+1} = cx_t + dy_t \end{cases} \tag{1}$$

ar konstantiem koeficientiem $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Punktu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sauc par sistēmas (1) līdzsvara punktu [equilibrium point], ja

$$\begin{cases} ax + by = x, \\ cx + dy = y. \end{cases} \tag{2}$$

Pirmā shēma I

Sistēmu (2) pārrakstīsim matricu formā

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

jeb

$$Z = AZ,$$

kur

$$Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Tātad

$$AZ - IZ = \mathbb{O} \quad \text{jeb} \quad (A - I)Z = \mathbb{O},$$

kur

$$\mathbb{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pirmā shēma II

1) Matricu vienādojumam $(A - I)Z = \mathbb{O}$ eksistē tikai nulles atrisinājums $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tad un tikai tad, kad $\mathbf{det(A - I) \neq 0}$.

2) Matricu vienādojumam $(A - I)Z = \mathbb{O}$ eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumu tad un tikai tad, kad $\mathbf{det(A - I) = 0}$.

2.1) Ja $A = I$, tad vienādojumam $(A - I)Z = \mathbb{O}$ ir veids $(I - I)Z = \mathbb{O}$ jeb $\mathbb{O} = \mathbb{O}$. Līdz ar to šajā gadījumā par vienādojuma $(A - I)Z = \mathbb{O}$ atrisinājumu der $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, kur x un y ir patvaļīgi reāli skaitļi.

Pirmā shēma III

2.2) Pieņemsim, ka $A \neq I$, t.i., $A - I$ nav nulles matrica. Šajā gadījumā vienādojuma $(A - I)Z = \mathbb{O}$ atrisinājumi ir visi tie $Z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ka x un y atrodas uz kādas taisnes, kas iet caur koordinātu sākumpunktu $(0, 0)$.

- Tiešām, tā kā

$$A - I = \begin{pmatrix} a - 1 & b \\ c & d - 1 \end{pmatrix}$$

nav nulles matrica, tad vismaz viens no matricas $A - I$ elementiem nav vienāds ar nulli, t.i.,

$$a - 1 \neq 0 \ \text{ vai } \ b \neq 0 \ \text{ vai } \ b \neq 0 \ \text{ vai } \ d - 1 \neq 0,$$

Pirmā shēma IV

un $\det(A - I) = 0$, tad vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} (a-1)x + by & = 0, \\ cx + (d-1)y & = 0 \end{cases}$$

ir ekvivalenta tam no vienādojumiem

$$(a-1)x + by = 0 \quad \text{vai} \quad cx + (d-1)y = 0,$$

kuram ir vismaz viens nenulles koeficients. Attiecīgais vienādojums nosaka līdzsvara punktu taisni. ◀

Pirmā shēma V

$\det(A - I)$

$\det(A - I) \neq 0$

vienīgs līdzsvara punkts $(0,0)$

$\det(A - I) = 0$

bezgalīgi daudz līdzsvara punktu

$A = I$

līdzsvara punktu plakne

$A \neq I$

līdzsvara punktu taisne, kas iet caur koordinātu sākumpunktu

Sistēmas (1) līdzsvara punktu pirmā shēma.

Otrā shēma I

Tā kā

$$\operatorname{tr} A = a + d, \quad \det A = ad - bc,$$

tad

$$\det(A - I) = \det\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix} = (a-1)(d-1) - bc = ad - a - b + 1 - bc =$$

$$= 1 - \operatorname{tr} A + \det A.$$

Otrā shēma II

1) Matricu vienādojumam $(A - I)Z = \mathbb{O}$ eksistē tikai nulles atrisinājums $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tad un tikai tad, kad $\mathbf{det(A - I) \neq 0}$, t.i., $\mathbf{tr\,A \neq 1 + det\,A}$.

Otrā shēma III

2) Matricu vienādojumam $(A-I)Z = \mathbb{O}$ eksistē bezgalīgi daudz atrisinājumu tad un tikai tad, kad $\mathbf{det(A-I) = 0}$, t.i., $\mathbf{tr\,A = 1 + det\,A}$. Šajā gadījumā matricas A raksturvienādojuma $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\,\lambda + \det A = 0$ diskriminants

$$D = (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A = (1+\det A)^2 - 4\det A =$$
$$= 1 + 2\det A + (\det A)^2 - 4\det A = 1 - 2\det A + (\det A)^2 =$$
$$= (1-\det A)^2 \geq 0,$$

t.i.,

$$\mathbf{D = (tr\,A)^2 - 4\,det\,A = (1 - det\,A)^2 \geq 0.}$$

Otrā shēma IV

Pieņemsim, ka $\det(A - I) = 0$. Tad $D = (1 - \det A)^2 \geq 0$, no kurienes $D > 0$ vai nu $D = 0$.

Otrā shēma V

2.1) Pieņemsim, ka $\det(A-I)=0$ un $D=(1-\det A)^2>0$, t.i., $\det A\neq 1$. Tad matricas īpašvērtības ir

$$\lambda_{1,2}=\frac{1+\det A\pm(1-\det A)}{2},$$

t.i.,

$$\lambda_1=\frac{1+\det A+(1-\det A)}{2}=1,$$
$$\lambda_2=\frac{1+\det A-(1-\det A)}{2}=\det A.$$

Tā kā $\lambda_1=1$ un $\lambda_2=\det A\neq 1$, tad matricai A ir divas dažādas reālas īpašvērtības. Matricas A Žordāna forma atbilst (a) gadījumam.

Otrā shēma VI

2.2) Pieņemsim, ka $\det(A-I)=0$ un $D=(1-\det A)^2=0$, t.i., $\det A = 1$. Tad $\operatorname{tr} A = 1+\det A = 2$ un matricas īpašvērtības ir

$$\lambda_{1,2} = \frac{\operatorname{tr} A \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1.$$

Tātad matrica A ir līdzīga matricai

$$(b)\ J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{vai} \quad (c)\ J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Otrā shēma VII

2.2.1) Pieņemsim, ka $\det(A - I) = 0$ un $D = (1 - \det A)^2 = 0$, t.i., $\det A = 1$.

Ja matrica A ir līdzīga matricai (b) $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$, tad

$$A = MJM^{-1} = MIM^{-1} = I,$$

t.i., matrica A ir vienāda ar vienības matricu.

Otrā shēma VIII

2.2.2) Pieņemsim, ka $\det(A - I) = 0$ un $D = (1 - \det A)^2 = 0$, t.i., $\det A = 1$. Atzīmēsim, ka matricas A Žordāna forma var būt vienāda arī ar (c) $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tiešām, matrica

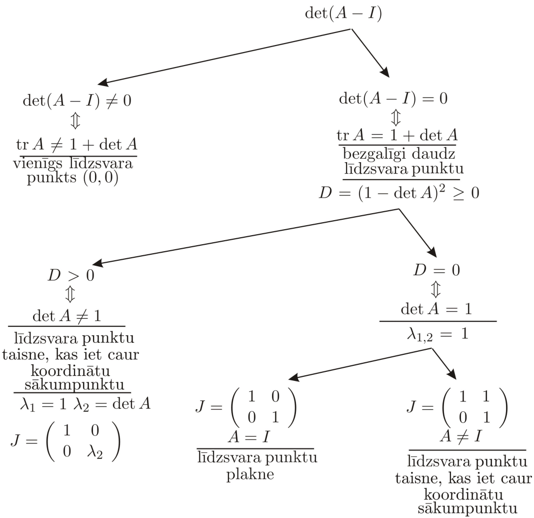
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ir līdzīga matricai J:

$$A = MJM^{-1}, \quad \text{kur} \quad M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

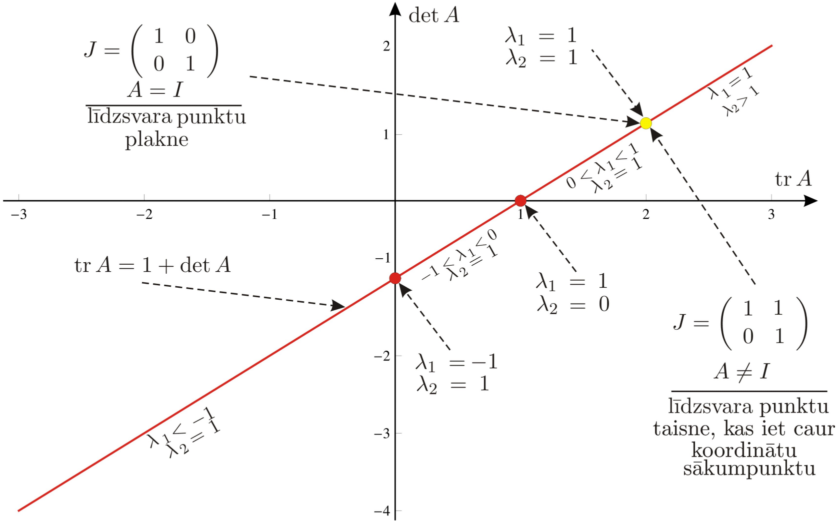
pie tam $\det A = 1$ un $\operatorname{tr} A = 2 = 1 + \det A$.

Otrā shēma IX



Sistēmas (1) līdzsvara punktu otrā shēma.

Trešā shēma I



Pirmais piemērs I

Noteikt sistēmas līdzsvara punktus:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t - 3y_t, \\ y_{t+1} = 5x_t + 4y_t. \end{cases}$$

Tā kā

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad A - I = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

un $\det(A - I) = 18 \neq 0$, tad sistēmai ir tikai viens līdzsvara punkts $(0, 0)$.

Otrais piemērs I

Noteikt sistēmas līdzsvara punktus:

$$\begin{cases} x_{t+1} = 3x_t + 4y_t, \\ y_{t+1} = -6x_t - 11y_t. \end{cases}$$

Tā kā

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}, \quad A - I = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}$$

un $\det(A - I) = 0$, bet $A \neq I$, tad sistēmai ir līdzsvara punktu taisne. Atradīsim šīs taisnes vienādojumu. Vienādojumu sistēma

$$\begin{cases} 2x + 4y & = 0, \\ -6x - 12y & = 0 \end{cases}$$

Otrais piemērs II

ir ekvivalenta vienam vienādojumam $x + 2y = 0$, kurš arī nosaka nekustīgo punktu taisni. Piemēram, punkts $(-2, 1)$ ir līdzsvara punkts, jo

$$\begin{cases} x_1 = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 = -2, \\ y_1 = -6 \cdot (-2) - 11 \cdot 1 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -2, \\ y_2 = 1, \end{cases} \quad \ldots$$

Sistēma I

Tagad aplūkosim otrās kārtas diskrētu dinamikas sistēmu formā

$$\begin{cases} \Delta x_t = ax_t + by_t, \\ \Delta y_t = cx_t + dy_t, \end{cases} \tag{3}$$

kur $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ un

$$\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$$

ir diferenču operators [forward difference operator].

Sistēma (3) ir ekvivalenta otrās kārtas lineārai homogēnai diskrētai dinamikas sistēmai ar konstantiem koeficientiem

$$\begin{cases} x_t = (a+1)x_t + by_t, \\ y_t = cx_t + (d+1)y_t. \end{cases} \tag{4}$$

Sistēma II

Apskatīsim matricas

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{un} \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}.$$

Tad

$$\mathbf{\overline{A} = A + I, \quad tr\,\overline{A} = tr\,A + 2, \quad det\,\overline{A} = det\,A + tr\,A + 1.}$$

Punkts $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ir sistēmas (4) līdzsvara punkts tad un tikai tad, kad

$$\begin{cases} (a+1)x + by = x, \\ cx + (d+1)y = y \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} ax + by = 0, \\ cx + dy = 0. \end{cases}$$

Ņemot vērā iepriekš teikto, nonāksim pie šādām sistēmas (3) jeb (4) līdzsvara punktu shēmām.

Pirmā shēma I

$$\begin{cases} \Delta x_t = a x_t + b y_t \\ \Delta y_t = c x_t + d y_t \end{cases}$$

$\det A$

$\det\ A \neq 0$ — vienīgs līdzsvara punkts $(0,0)$

$\det A = 0$ — bezgalīgi daudz līdzsvara punktu

$A = \mathbb{O}$ — līdzsvara punktu plakne

$A \neq \mathbb{O}$ — līdzsvara punktu taisne, kas iet caur koordinātu sākumpunktu

Sistēmas (3) jeb (4) līdzsvara punktu pirmā shēma.

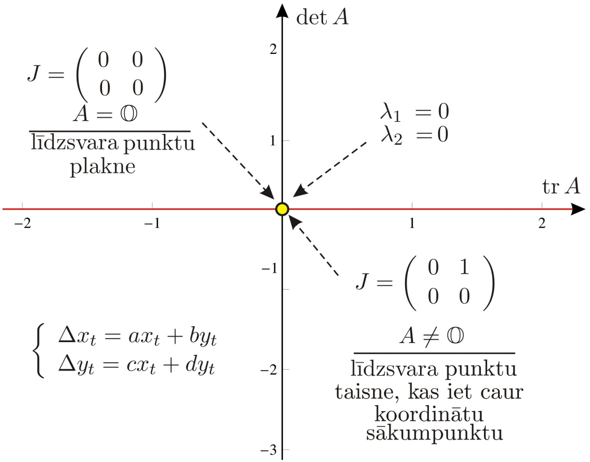
Otrā shēma I

$$\begin{cases} \Delta x_t = a x_t + b y_t \\ \Delta y_t = c x_t + d y_t \end{cases}$$

- $\det A$
  - $\det A \neq 0$ — vienīgs līdzsvara punkts $(0,0)$
  - $\det A = 0$ — bezgalīgi daudz līdzsvara punktu — $D = (\operatorname{tr} A)^2 \geq 0$
    - $D > 0 \Updownarrow \operatorname{tr} A \neq 0$ — līdzsvara punktu taisne, kas iet caur koordinātu sākumpunktu — $\lambda_1 = 0 \; \lambda_2 = \operatorname{tr} A$ — $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
    - $D = 0 \Updownarrow \operatorname{tr} A = 0$ — $\lambda_{1,2} = 0$
      - $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A = \mathbb{O}$ — līdzsvara punktu plakne
      - $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A \neq \mathbb{O}$ — līdzsvara punktu taisne, kas iet caur koordinātu sākumpunktu

Sistēmas (3) jeb (4) līdzsvara punktu otrā shēma, kur J ir matricas A Žordāna normālforma.

Trešā shēma I



Sistēmas (3) jeb (4) līdzsvara punktu trešā shēma, kur J ir matricas A Žordāna normālforma.

Literatūra I

[1] S. Elaydi.
An Introduction to difference equations, Springer, 2005.

[2] W.G. Kelley, A.C. Peterson.
Difference equations: An introduction with applications, Academic Press, 2000.