Otrās kārtas diskrētu dinamikas sistēmu stabilitāte

Ļapunova funkcijas

asoc. prof. A. Gricāns

Daugavpils Universitāte

Diskrētas dinamikas sistēmas

2012. gada 3. decembris

Saturs I

Ievads I

Ļapunova metode ļauj analizēt sistēmas

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t), \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{cases} \tag{1}$$

līdzsvara punkta $p^* = (x^*, y^*)$ stabilitātes raksturu, nemeklējot sistēmas (1) Jakobi matricu $\mathcal{F}'(p^*)$ un tās īpašvērtības.

Ļapunova metodes būtība ir šāda: ja var atrast speciāla veida funkciju (-Ļapunova funkciju), kurai piemīt noteiktas īpašības sistēmas (1) līdzsvara punkta $p^* = (x^*, y^*)$ apkārtnē, tad var izdarīt secinājumus par šī līdzsvara punkta stabilitātes raksturu.

Vislielākās grūtības pielietot Ļapunova metodi sagādā Ļapunova funkcijas atrašana.

Ievads II

A. Ļapunovs (1857-1918, A. Lyapunov, A. Ляпунов) - krievu matemātiķis, kurš ir sniedzis ievērojamu ieguldījumu dinamikas sistēmu stabilitātes teorijā, matemātiskajā fizikā un varbūtību teorijā.

Ļapunova funkcijas definīcija I

Aplūkosim sistēmu (1):

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t), \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t), \end{cases}$$

kur $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ir nepārtrauktas funkcijas. Tad ir definēts nepārtraukts attēlojums $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kas jebkuram punktam $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ piekārto punktu

$$\mathcal{F}(p) = \big(f(p), g(p)\big) = \big(f(x, y), g(x, y)\big) \in \mathbb{R}^2.$$

Sistēmas (1) līdzsvara punktus, t.i., punktus $p^* = (x^*, y^*)$, ka

$$f(x^*, y^*) = x^*, \quad g(x^*, y^*) = y^*,$$

var raksturot kā attēlojuma $\mathcal{F}$ nekustīgos punktus, t.i., punktus p^*, ka $\mathcal{F}(p^*) = p^*$.

Ļapunova funkcijas definīcija II

Funkciju $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sauc par pozitīvi definētu funkciju [positive definite function] punktā $p^* \in \mathbb{R}^2$, ja

1. $V(p^*) = 0$,
2. jebkuram $p \in \mathbb{R}^2$, ka $p \neq p^*$, ir spēkā $V(p) > 0$.

Funkciju $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sauc par negatīvi definētu funkciju [negative definite function] punktā $p^* \in \mathbb{R}^2$, ja

1. $V(p^*) = 0$,
2. jebkuram $p \in \mathbb{R}^2$, ka $p \neq p^*$, ir spēkā $V(p) < 0$.

Ļapunova funkcijas definīcija III

Par sistēmas (1) līdzsvara punkta $p^* = (x^*, y^*)$ Ļapunova funkciju [Lyapunov function, Liapunov function] [1, 204. lpp.], [2, 164. lpp.] sauc funkciju $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ka

1. V ir nepārtraukta funkcija;
2. eksistē apkārtne $U_\eta(p^*)$, ka

$$\forall p \in U_\eta(p^*) : \ \Delta V(p) = V\big(\mathcal{F}(p)\big) - V(p) \leq 0. \qquad (2)$$

Ļapunova funkcijas definīcija IV

Atzīmēsim, ka

$$\Delta V(p^*) = V\big(\mathcal{F}(p^*)\big) - V(p^*) = V\big(p^*\big) - V(p^*) = 0,$$

jo p^* ir attēlojuma $\mathcal{F}$ nekustīgais punkts.

Ļapunova funkcijas definīcija V

Par sistēmas (1) līdzsvara punkta $p^* = (x^*, y^*)$ stingru [strict] Ļapunova funkciju sauc funkciju $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ka

1. V ir nepārtraukta funkcija;
2. eksistē apkārtne $U_\eta(p^*)$, ka

$$\forall p \in U_\eta(p^*) : \; p \neq p^* \Rightarrow \Delta V(p) = V\big(\mathcal{F}(p)\big) - V(p) < 0. \qquad (3)$$

Teorēma par stabilitāti I

3.1. teorēma. [1, 205. lpp.], [2, 165. lpp.], [3] *Pieņemsim, ka sistēmas* (1) *līdzsvara punktam* p^* *eksistē pozitīvi definēta Ļapunova funkcija* V.

- *Tad līdzsvara punkts* p^* *ir stabils.*
- *Ja Ļapunova funkcija* V *ir stingra, tad līdzsvara punkts* p^* *ir asimptotiski stabils.*
- *Ja*
  1. $\forall p \in \mathbb{R}^2 : \; \Delta V(p) = V\big(\mathcal{F}(p)\big) - V(p) < 0$,
  2. $V(p) \to \infty$, *ja* $\|p\| \to \infty$,

  tad līdzsvara punkts p^* *ir globāli asimptotiski stabils.*

Teorēma par stabilitāti II

▶ Sniegsim vienkāršotu pierādījumu - ilustrāciju pirmajam apgalvojumam: *ja sistēmas* (1) *līdzsvara punktam* p^* *eksistē pozitīvi definēta Ļapunova funkcija* V*, tad līdzsvara punkts* p^* *ir stabils.*

Tā kā V ir Ļapunova funkcija, tad eksistē apkārtne $U_\eta(p^*)$, ka ir spēkā (2):

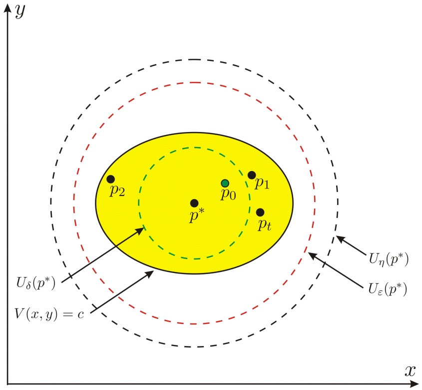
$$\forall p \in U_\eta(p^*) : \ \Delta V(p) = V\big(\mathcal{F}(p)\big) - V(p) \leq 0.$$

Apskatīsim patvaļīgu apkārtni $U_\varepsilon(p^*) \subset U_\eta(p^*)$. Vienkāršotajā pierādījumā pieņemsim, ka Ļapunova funkcija ir V ir tāda, ka tās līmeņlīnijas ir elipses ar centru punktā p^*. Tā kā V ir nepārtraukta pozitīvi definēta funkcija, tad eksistē tāda līmeņlīnija $V(x,y) = c$, kur $c > 0$, kura pilnībā iekļaujas apkārtnē $U_\varepsilon(p^*)$, līdz ar to

$$K_c = \{p \in \mathbb{R}^2 : \ V(x,y) \leq c\} \subset U_\varepsilon(p^*).$$

Teorēma par stabilitāti III

Apskatīsim tagad apkārtni $U_\delta(p^*)$ tādu, ka $U_\delta(p^*) \subset K_c$. Ja $p_0 \in U_\delta(p^*)$, tad $p_0 \in K_c$, t.i., $V(p_0) \leq c$.



3.1. zīm.

Teorēma par stabilitāti IV

Apskatīsim patvaļīgu $p_0 = (x_0, y_0) \in U_\delta(p^*)$. Atzīmēsim, ka

$$U_\delta(p^*) \subset K_c \subset U_\varepsilon(p^*) \subset U_\eta(p^*).$$

- Tā kā $p_0 \in U_\eta(p^*)$, bet V ir Ļapunova funkcija, tad

$$\Delta V(p_0) = V(p_1) - V(p_0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad V(p_1) \leq V(p_0) \leq c.$$

Tātad $V(p_1) \leq c$, t.i., $p_1 \in K_c \subset U_\varepsilon(p^*) \subset U_\eta(p^*)$.

- Tā kā $p_1 \in U_\eta(p^*)$, bet V ir Ļapunova funkcija, tad

$$\Delta V(p_1) = V(p_2) - V(p_1) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad V(p_2) \leq V(p_1) \leq c.$$

Tātad $V(p_2) \leq c$, t.i., $p_2 \in K_c \subset U_\varepsilon(p^*) \subset U_\eta(p^*)$.

Teorēma par stabilitāti V

Tādējādi jebkuram t ir spēkā $V(p_t) \leq c$, t.i., $p_t \in K_c \subset U_\varepsilon(p^*)$. Saskaņā definīciju līdzsvara punkts p^* ir stabils. ◀

3.1 piezīme. Pierādījuma vienkāršojums ir tāpēc, ka vispārīgā gadījumā līmeņlīnija $V(x, y) = c$ var būt nesakarīga, t.i., tā var sastāvēt no "vairākiem gabaliem". Līdz ar to kopa K_c arī var sastāvēt no "vairākiem gabaliem", tikai viens no kuriem $\overline{K}_c$ saturēs līdzsvara punktu p^*. Šajā gadījumā apkārtne $U_\delta(p^*)$ ir jāizvēlas tā, lai tā iekļautos $\overline{K}_c$. Pateicoties tam, ka funkcija V ir nepārtraukta, punkti $p_1, p_2, \ldots \in \overline{K}_c$.

3.2 piezīme. Tā kā

$$\cdots \leq V(p_t) \leq \cdots \leq V(p_2) \leq V(p_1) \leq V(p_0) \leq c,$$

tad *Ļapunova funkcija V ir nedilstoša uz sistēmas* (1) *atrisinājumiem, ja tie sākas pietiekami tuvu līdzsvara punktam.*

Teorēma par nestabilitātāti

3.2. teorēma. [1, 213. lpp.] *Pieņemsim, ka* $p^* = (0,0)$ *ir sistēmas* (1) *līdzsvara punkts. Ja eksistē* $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *ka*

1. V *ir nepārtraukta funkcija un* $V(p^*) = 0$,
2. *funkcija* $\Delta V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *ir pozitīvi (negatīvi) definēta punktā* p^*,
3. *eksistē plaknes punktu virkne* (a_n), *ka*
   1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = p^*$,
   2. $V(a_n) > 0$ $\big(V(a_n) < 0\big)$ *jebkuram* n,

tad p^* *ir nestabils līdzsvara punkts.*

Silvestra kritērijs I

Ja

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

ir simetriska matrica, t.i., $b_{12} = b_{21}$, tad ar matricu B ir asociēta kvadratiska forma [quadratic form] - funkcija $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ka jebkuram $p = (x, y)$ ir spēkā

$$V(x, y) = b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2.$$

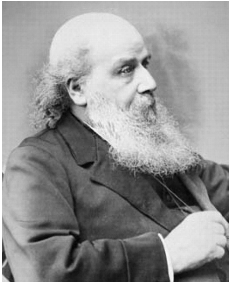
Silvestra kritērijs II

4.1. teorēma. [Silvestra kritērijs] *Kvadrātiskā forma* $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *kas ir saistīta ar simetrisku matricu* B, *ir pozitīvi (negatīvi) definēta punktā* $p^* = (0, 0)$ *tad un tikai tad, kad*

$$b_{11} > 0(< 0), \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} > 0(< 0).$$

Silvestra kritērijs III

Silvestra kritērijs uzrāda pozitīvi definētas funkcijas, kas var pretendēt uz sistēmas (1) Ļapunova funkciju līdzsvara punktā.



Dž. Silvestrs (1814-1897, J. Sylvester) - angļu matemātiķis, kurš ir sniedzis ievērojamu ieguldījumu matricu teorijā.

Silvestra kritērijs IV

4.1. piemērs. Aplūkosim funkciju $V(x,y) = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2$. Tad V var uzlūkot kā kvadrātisku formu, kas ir asociēta ar matricu

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{pmatrix}.$$

Tātad funkcija V ir pozitīvi definēta punktā $p^* = (0,0)$ tad un tikai tad, kad

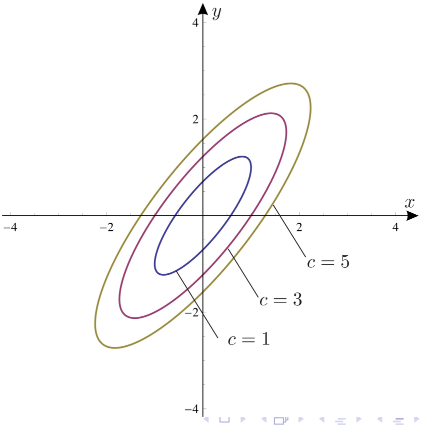
$$\alpha > 0, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \frac{\beta}{2} \\ \frac{\beta}{2} & \gamma \end{vmatrix} = \alpha\gamma - \frac{\beta^2}{4} > 0.$$

Piemēram, funkcija $V(x,y) = 3x^2 - 4xy + 2y^2$ ir pozitīvi definēta punktā $p^* = (0,0)$.

Silvestra kritērijs V

Atgādināsim (skat. saiti), ka par funkcijas $z = f(x, y)$ līmeņlīniju [level curve] sauc funkcijas $z = f(x, y)$ grafika šķēluma ar plakni $z = c$ projekciju uz (x, y) plakni.

Funkcijas
$z = 3x^2 - 4xy + 2y^2$
līmeņlīnijas
$3x^2 - 4xy + 2y^2 = c$,
ja $c = 1, 3, 5$.



Pirmais piemērs I

5.1. piemērs. Izpētīsim sistēmas [2, 167. lpp.]

$$\begin{cases} x_{t+1} = y_t - y_t(x_t^2 + y_t^2), \\ y_{t+1} = x_t - x_t(x_t^2 + y_t^2) \end{cases} \tag{4}$$

līdzsvara punkta $p^* = (0, 0)$ stabilitātes raksturu.

Salīdzinājumam pielietosim arī linearizācijas metodi.

Pirmais piemērs II

Linearizācijas metode. Sistēmas (4) līdzsvara punktā $p^* = (0,0)$ Jakobi matricas

$$\mathcal{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

īpašvērtības ir $\lambda_1 = 1$ un $\lambda_2 = -1$. Tātad līdzsvara punkts $(0,0)$ ir *nehiperbolisks*, bet spektrālais rādiuss

$$r\big(\mathcal{F}'(0,0)\big) = \max\{|1|, |-1|\} = \max\{1,1\} = 1.$$

Linearizācijas pieeja nesniedz atbildi par līdzsvara punkts $(0,0)$ *stabilitātes raksturu.*

Pirmais piemērs III

Ļapunova metode. Pārliecināsimies, ka sistēmas (4) līdzsvara punktam $p^* = (0, 0)$ funkcija $V(x, y) = x^2 + y^2$ ir pozitīvi definēta stingra Ļapunova funkcija.

Funkcija V ir *pozitīvi definēta* punktā $p^* = (0, 0)$, jo

1. $V(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$,
2. jebkuram $p \in \mathbb{R}^2$, ka $p \neq p^*$, ir spēkā $V(p) = x^2 + y^2 > 0$.

Pirmais piemērs IV

Funkcija V ir *nepārtraukta*, pie tam

$$\begin{aligned}\Delta V(x,y) = V\big(\mathcal{F}(x,y)\big) - V(x,y) = \\ V\big(y - y(x^2+y^2), x - x(x^2+y^2)\big) - V(x,y) = \\ = \big(y - y(x^2+y^2)\big)^2 + \big(x - x(x^2+y^2)\big)^2 - (x^2+y^2) = \\ = (x^2+y^2)^2\,\big((x^2+y^2-2\big).\end{aligned}$$

Apskatīsim līdzsvara punkta $p^* = (0,0)$ apkārtni

$$U_{\sqrt{2}}(p^*) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 < 2\big\}.$$

Ja $p \in U_{\sqrt{2}}(p^*)$, pie tam $p \neq p^*$, tad

$$\Delta V(x,y) = (x^2+y^2)^2\,\big((x^2+y^2-2\big) < 0.$$

Tātad V ir *stingra Ļapunova funkcija*.

Pirmais piemērs V

No 3.1. teorēmas izriet, ka sistēmas (4) līdzsvara punkts $p^* = (0,0)$ ir *asimptotiski stabils*. Atzīmēsim, ka līdzsvara punkts $p^* = (0,0)$ nav globāli asimptotiski stabils, jo sistēmai (4) eksistē vēl citi līdzsvara punkti: $(1,-1)$ un $(-1,1)$.

Tādējādi varam secināt, ka dažos gadījumos Ļapunova metode ir efektīvāka nekā linearizācijas metode sistēmas (1) līdzsvara punktu stabilitātes rakstura noteikšanā.

Ja linearizācijas metode ir algoritmizēta, tad Ļapunova metode balstās uz veiksmīgu Ļapunova funkcijas izvēli.

Otrais piemērs I

5.2. piemērs. Izpētīsim sistēmas [1, 213. lpp.]

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + x_t^2 + y_t^2, \\ y_{t+1} = y_t \end{cases} \tag{5}$$

līdzsvara punkta $p^* = (0, 0)$ stabilitātes raksturu.

Salīdzinājumam pielietosim arī linearizācijas metodi.

Otrais piemērs II

Linearizācijas metode. Sistēmas (5) līdzsvara punktā $p^* = (0,0)$ Jakobi matricas

$$\mathcal{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

īpašvērtības ir $\lambda_1 = 1$ un $\lambda_2 = 1$. Tātad līdzsvara punkts $(0,0)$ ir *nehiperbolisks*, bet spektrālais rādiuss

$$r\big(\mathcal{F}'(0,0)\big) = \max\{|1|, |1|\} = \max\{1,1\} = 1.$$

Linearizācijas pieeja nesniedz atbildi par līdzsvara punkts $(0,0)$ *stabilitātes raksturu.*

Otrais piemērs III

Ļapunova metode. Funkcija $V(x, y) = x + y$ ir *nepārtraukta* un $V(0, 0) = 0 + 0 = 0$.

Atrodam:

$$\Delta V(x, y) = V\big(\mathcal{F}(x, y)\big) - V(x, y) = V(x + x^2 + y^2, y) - V(x, y) = \\ = x + x^2 + y^2 + y - (x + y) = x^2 + y^2.$$

Funkcija ΔV ir *pozitīvi definēta* punktā $p^* = (0, 0)$, jo

1. $\Delta V(0, 0) = 0^2 + 0^2 = 0$,
2. jebkuram $p \in \mathbb{R}^2$, ka $p \neq (0, 0)$, ir spēkā $\Delta V(x, y) = x^2 + y^2 > 0$.

Otrais piemērs IV

Plaknes punktu virknei $a_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $(n \in \mathbb{N})$ ir spēkā

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = (0, 0)$,
2. $V(a_n) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} > 0$ jebkuram $n \in \mathbb{N}$.

No 3.2. teorēmas izriet, ka sistēmas (5) līdzsvara punkts $p^* = (0, 0)$ ir *nestabils*.

5.1. un 5.2. piemēri rāda, ka, ja sistēmas (1) līdzsvara punktā p^* Jakobi matricas spektrālais rādiuss $r\big(\mathcal{F}'(p^*)\big) = 1$, tad līdzsvara punkts p^* var būt gan asimptotiski stabils, gan nestabils.

Literatūra I

[1] S. Elaydi.
An Introduction to difference equations, Springer, 2005.

[2] W.G. Kelley, A.C. Peterson.
Difference equations: An introduction with applications, Academic Press, 2000.

[3] W.B. Zhang.
Discrete dynamical systems, bifurcations and chaos in economics, Elsevier, 2006.