Otrās kārtas diskrētu dinamikas sistēmu stabilitāte

Linearizācijas metode

asoc. prof. A. Gricāns

Daugavpils Universitāte

Diskrētas dinamikas sistēmas

2013. gada 13. decembris

Saturs I

Saturs II

Līdzsvara punkta definīcija I

Aplūkosim otrās kārtas diskrētu dinamikas sistēmu (turpmāk vienkārši sistēmu)

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t), \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t), \end{cases} \tag{1}$$

kur $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ir nepārtrauktas funkcijas.

Tātad ir definēts nepārtraukts attēlojums $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kas jebkuram punktam $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ piekārto punktu

$$\mathcal{F}(p) = \big(f(p), g(p)\big) = \big(f(x, y), g(x, y)\big) \in \mathbb{R}^2.$$

Līdzsvara punkta definīcija II

Var aplūkot arī vispārīgāku situāciju, kad funkcijas f un g ir definētas kādā kopā $D \subset \mathbb{R}^2$ un attēlojums $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ punktam $p = (x, y) \in D$ piekārto punktu

$$\mathcal{F}(p) = \big(f(p), g(p)\big) = \big(f(x, y), g(x, y)\big) \in D.$$

Līdzsvara punkta definīcija III

Punktu $p^* = (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ sauc par sistēmas (1) līdzsvara punktu (nekustīgu punktu) [equilibrium point, fixed point], ja

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = x^*, \\ g(x^*, y^*) = y^*. \end{cases} \tag{2}$$

No ğeometriskā viedokļa sistēmas (1) līdzsvara punkti ir plaknes apakškopu, kuras nosaka vienādojumi $f(x, y) = x$ un $g(x, y) = y$, kopīgie punkti.

Sistēmas (1) līdzsvara punktus var raksturot arī kā attēlojuma $\mathcal{F}$ nekustīgos punktus [fixed points], t.i., punktus $p^* \in \mathbb{R}^2$, ka $\mathcal{F}(p^*) = p^*$.

Līdzsvara punkta definīcija IV

1.1. piemērs. Sistēmas

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t^2 + y_t, \\ y_{t+1} = x_t y_t \end{cases} \tag{3}$$

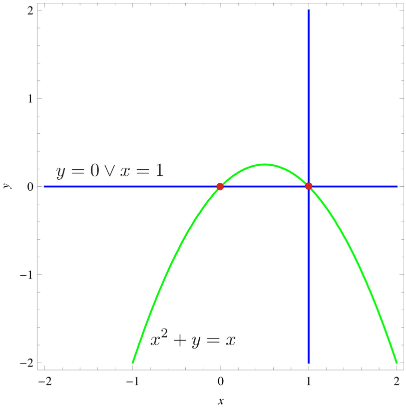
līdzsvara punktus atrod no vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x = x^2 + y, \\ y = xy \end{cases}$$

- Pieņemsim, ka $y \neq 0$. Tad no $xy = y$ izriet, ka $x = 1$. No pirmā vienādojuma $1 + y = 1$ jeb $y = 0$. Pretruna. Tātad, ja vienādojumu sistēmai eksistē atrisinājums (x, y), tad jābūt $y = 0$.
- Pieņemsim, ka $y = 0$. Tad otrais vienādojums izpildās, bet no pirmā vienādojuma atrodam, ka $x^2 = x$, no kurienes $x = 0$ vai $x = 1$.

Līdzsvara punkta definīcija V

Tātad sistēmai (3) ir divi līdzsvara punkti $(0, 0)$ un $(1, 0)$.



Orbītas jēdziens I

Apskatīsim sistēmu (1): $\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t), \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t). \end{cases}$

Par punkta $p_0 = (x_0, y_0)$ orbītu [orbit] sauc plaknes punktu

$$p_0 = (x_0, y_0),\ p_1 = (x_1, y_1),\ p_2 = (x_2, y_2), \dots,\ p_t = (x_t, y_t) \dots$$

sistēmu $\mathcal{O}(p_0) = \{p_t\}_{t \in \mathbb{N}_0}$, kur

$$\begin{cases} x_1 = f(x_0, y_0), \\ y_1 = g(x_0, y_0), \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = f(x_1, y_1), \\ y_2 = g(x_1, y_1), \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = f(x_2, y_2), \\ y_3 = g(x_2, y_2), \end{cases} \quad \dots$$

Plakni, kurā tiek attēlotas sistēmas (1) orbītas, sauc par fāzes plakni [phase plane].

Orbītas jēdziens II

Orbītas jēdzienu var raksturot arī šādi.

Aplūkosim attēlojuma $\mathcal{F}$ iterācijas [iterates] $\mathcal{F}^t$ $(t \in \mathbb{N}_0)$, t.i., attēlojumus $\mathcal{F}^t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, ka jebkuram $p \in \mathbb{R}^2$ ir spēkā

$$\mathcal{F}^0(p) = p,\ \mathcal{F}^1(p) = \mathcal{F}(p),\ \mathcal{F}^2(p) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(p)),$$
$$\mathcal{F}^3(p) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(p))), \ldots .$$

Atrodam:

$$\begin{aligned} p_1 &= \mathcal{F}(p_0), \\ p_2 &= \mathcal{F}(p_1) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(p_0)) = \mathcal{F}^2(p_0), \\ p_3 &= \mathcal{F}(p_2) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^2(p_0)) = \mathcal{F}^3(p_0), \ldots \end{aligned}$$

Līdz ar to punkta p_0 orbīta ir

$$\boxed{\mathcal{O}(p_0) = \left\{\mathcal{F}^t(p_0)\right\}_{t \in \mathbb{N}_0}}$$

Orbītas jēdziens III

Iepriekš konstatējām, ka sistēma (1) nosaka attēlojumu $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kas patvaļīgam punktam $p \in \mathbb{R}^2$ piekārto punktu $\mathcal{F}(p) \in \mathbb{R}^2$.

Otrādi, jebkurš šāds attēlojums nosaka sistēmu (1). Tiešām, pieņemsim, ka $p_t = \mathcal{F}^t(p_0)$ $(t \in \mathbb{N}_0)$, kur $p_t = (x_t, y_t)$. Tad

$$p_{t+1} = \mathcal{F}^{t+1}(p_0) = \mathcal{F}\big(\mathcal{F}^t(p_0)\big) = \mathcal{F}(p_t),$$

t.i,

$$p_{t+1} = \mathcal{F}(p_t)$$

jeb

$$(x_{t+1}, y_{t+1}) = \big(f(x_t, y_t), g(x_t, y_t)\big),$$

t.i., nonākam pie sistēmas (1).

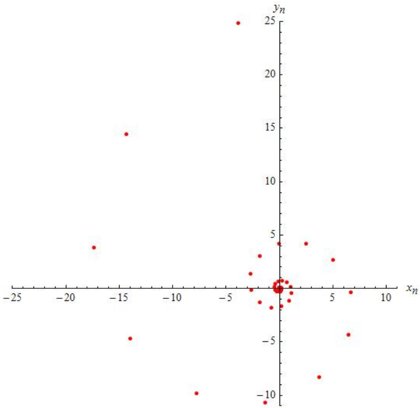
Orbītas jēdziens IV

2.1. piemērs. Apskatīsim sistēmu

$$\begin{cases} x_{t+1} = x + 0.6y(1 + 0.001x^2), \\ y_{t+1} = y - 0.6x(1 + 0.001y^2) \end{cases}$$

un punktu $p_0 = (0.01, 0.02)$.

Orbītas $\mathcal{O}(p_0)$ daļa, ja $t \in \{0, 1, \ldots, 50\}$.



Orbītas jēdziens V

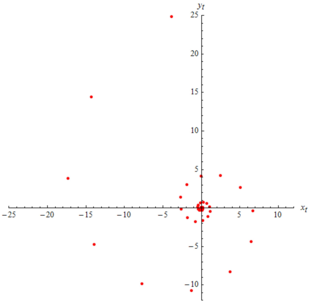
Iepriekš minētās orbītas iegūšana ar `Mathematica 7` paketi `Dynamica`; skat. [4].

```
In[1]:=
      << Dynamica`;
      $DynamicaVersion
Out[2]= Dynamica Version 3 (July 2009)

In[3]:= sys[{x_, y_}] := {x + a y (1 + b x^2), y - a x (1 + b y^2)};

In[4]:= a = 0.6; b = 0.001; PhasePortrait[Orbit[sys, {0.01, 0.02}, 45], Colors → {Red},
         PlotStyle → {Thickness[0.001], PointSize[0.0001]}, PlotRange -> {{-25, 12}, {-12, 25}},
         AxesLabel → {"xt", "yt"}]

Out[4]=
```



Orbītas jēdziens VI

Orbitas $\mathcal{O}(p_0)$ iterācija $p_{45} = (x_{45}, y_{45})$:

```
In[7]:= Iterate[sys, {0.01, 0.02}, 45]
Out[7]= {-3.90057, 24.824}
```

Orbītas $\mathcal{O}(p_0)$ iterācijas $p_t = (x_t, y_t)$, ja $t \in \{0, 1, \ldots, 45\}$:

```
In[6]:= Orbit[sys, {0.01, 0.02}, 45]
Out[6]= {{0.01, 0.02}, {0.022, 0.014}, {0.0304, 0.000799994}, {0.03088, -0.01744},
  {0.020416, -0.035968}, {-0.00116483, -0.0482176}, {-0.0300954, -0.0475187},
  {-0.0586067, -0.0294614}, {-0.0762836, 0.00570259}, {-0.072862, 0.0514727},
  {-0.0419782, 0.0951901}, {0.0151359, 0.120377}, {0.0873623, 0.111296}, {0.15414, 0.0588775},
  {0.189467, -0.0336069}, {0.169303, -0.147287}, {0.0809276, -0.248871}, {-0.0683962, -0.297431},
  {-0.246855, -0.256389}, {-0.400699, -0.108266}, {-0.465669, 0.132155}, {-0.386358, 0.411562},
  {-0.139384, 0.643416}, {0.246673, 0.727081}, {0.682948, 0.578999}, {1.03051, 0.169093},
  {1.13207, -0.44923}, {0.86219, -1.12861}, {0.18452, -1.64658}, {-0.803464, -1.7576},
  {-1.8587, -1.27403}, {-2.62576, -0.156997}, {-2.72061, 1.4185}, {-1.86321, 3.05415},
  {-0.0243589, 4.1825}, {2.48514, 4.19737}, {5.01912, 2.68002}, {6.66764, -0.353086},
  {6.44637, -4.35417}, {3.7253, -8.29532}, {-1.32096, -10.6843}, {-7.74273, -9.80126},
  {-13.976, -4.70934}, {-17.3536, 3.86226}, {-14.3383, 14.4297}, {-3.90057, 24.824}}
```

Līdzsvara punktu stabilitāte I

Vaļēju riņķi ar centru punktā $p^* \in \mathbb{R}^2$ un rādiusu $\varepsilon > 0$ apzīmēsim ar $U_\varepsilon(p^*)$:

$$U_\varepsilon(p^*) = \{p \in \mathbb{R}^2 : \ \|p - p^*\| < \varepsilon\},$$

kur $\|p - p^*\| = \sqrt{(x - x^*)^2 + (y - y^*)^2}$ ir Eiklīda attālums [Euclidean distance] starp punktiem $p = (x, y)$ un $p^* = (x^*, y^*)$.

Eiklīda attālums $\|p - p^*\|$ starp punktiem p un p^* ir vienāds ar plaknes nogriežņa, kas savieno punktus p un p^*, garumu.

Vaļējs riņķis $U_\varepsilon(p^*)$ sastāv no visiem tiem un tikai tiem plaknes punktiem p, ka Eiklīda attālums starp punktiem p un p^* ir mazāks par ε.

Līdzsvara punktu stabilitāte II

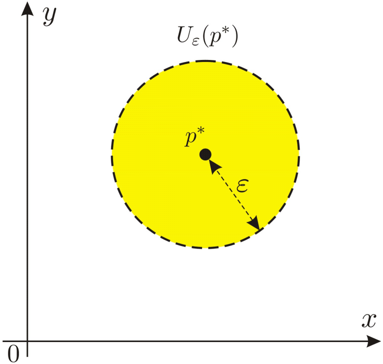
Kopas $A \subset \mathbb{R}^2$ punktu p sauc par kopas A iekšējo punktu [interiour point], ja eksistē $\varepsilon > 0$, ka $U_\varepsilon(p) \subset A$.

Kopu $A \subset \mathbb{R}^2$ sauc par vaļēju kopu [open set], ja katrs kopas A punkts ir kopas A iekšējais punkts.

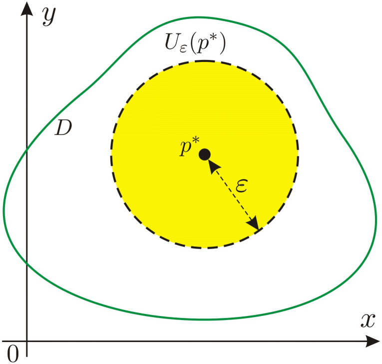
Par punkta $p \in \mathbb{R}^2$ apkārtni [neighborhood] sauc jebkuru vaļēju kopu, kas satur punktu p. Punkta p apkārtni apzīmē ar $U(p)$.

Tātad *vaļējs riņķis* $U_\varepsilon(p)$ *arī ir punkta* p *apkārtne*, jo $U_\varepsilon(p)$ ir vaļēja kopa, kas satur punktu p^*.

Līdzsvara punktu stabilitāte III



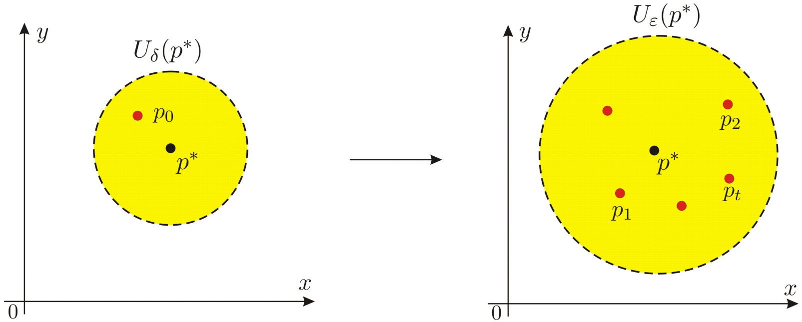
Vaļējs riņķis $U_\varepsilon(p^*)$ ar centru punktā $p^* \in \mathbb{R}^2$ un rādiusu $\varepsilon > 0$



Punkts p^* ir kopas D iekšējais punkts

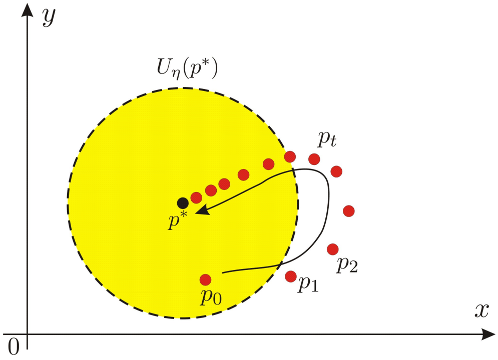
Līdzsvara punktu stabilitāte IV

Sistēmas (1) līdzsvara punktu p^* sauc par stabilu [stable], ja jebkurai šī punkta apkārtnei $U_\varepsilon(p^*)$ var atrast tādu šī punkta apkārtni $U_\delta(p^*)$, ka jebkuram sākumnosacījumam $p_0 \in U_\delta(p^*)$ ir spēkā $p_t \in U_\varepsilon(p^*)$ katram $t = 1, 2, \ldots$, kur $p_t = \mathcal{F}^t(p_0)$.



Līdzsvara punktu stabilitāte V

Sistēmas (1) līdzsvara punktu p^* sauc par atraktoru (pievilcējpunktu) [attractor], ja eksistē šī punkta apkārtne $U_\eta(p^*)$, ka jebkuram sākumnosacījumam $p_0 \in U_\eta(p^*)$ ir spēkā $\lim\limits_{t\to\infty} p_t = p^*$, kur $p_t = \mathcal{F}^t(p_0)$.



Līdzsvara punktu stabilitāte VI

Sistēmas (1) līdzsvara punktu sauc par asimptotiski stabilu [asymptotically stable], ja tas ir stabils atraktors.

Sistēmas (1) līdzsvara punktu p^* sauc par globālu atraktoru (globālu pievilcējpunktu) [global attractor], ja jebkuram sākumnosacījumam $p_0 \in \mathbb{R}^2$ ir spēkā $\lim_{t\to\infty} p_t = p^*$, kur $p_t = \mathcal{F}^t(p_0)$.

Sistēmas (1) līdzsvara punktu sauc par globāli asimptotiski stabilu [globally asympotically stable], ja tas ir stabils globāls atraktors.

Stabila līdzsvara punkta, atraktora, asimptotiski stabila līdzsvara punkta, globāla atraktora un globāli asimptotiski stabila līdzsvara punkta definīcijās sekojām [6, 176.-177. lpp.] un [8, 161. lpp.].

Līdzsvara punktu stabilitāte VII

No iepriekš apskatītajām definīcijām izriet šādas īpašības.

- *Visu sistēmas* (1) *līdzsvara punktu kopa* L *ir slēgta kopa [closed set], t.i., sistēmas* (1) *līdzsvara punktu patvaļīgas konverģentas virknes robeža arī ir sistēmas* (1) *līdzsvara punkts.*

- *Ja* p^* *ir sistēmas* (1) *atraktors, tad kādā šī punkta apkārtnē nav neviena cita sistēmas* (1) *līdzsvara punkta (tātad arī atraktora).*

- *Ja* p^* *ir sistēmas* (1) *globāls atraktors, tad sistēmai* (1) *nav citu līdzsvara punktu (tātad arī atraktoru).*

Līdzsvara punktu stabilitāte VIII

- *Ja sistēmas* (1) *līdzsvara punkta* p^* *jebkura apkārtne satur kādu citu šīs sistēmas līdzsvara punktu, tad līdzsvara punkts* p^* *nav atraktors (līdz ar to nav arī asimptotiski stabils līdzsvara punkts).* Piemēram, ja visu sistēmas (1) līdzsvara punktu kopa L ir taisne (plakne vai nepārtraukta līkne ar parametriskajiem vienādojumiem $x = x(t)$, $y = y(t)$, kur $t \in J$, J ir slēgts intervāls), tad neviens līdzsvara punkts $p^* \in L$ nav atraktors.

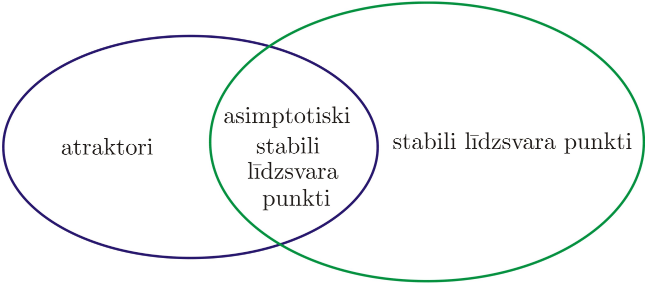
Līdzsvara punktu stabilitāte IX

- Tas, ka sistēmas (1) līdzsvara punkta p^* jebkura apkārtne satur kādu citu šīs sistēmas līdzsvara punktu, nozīmē, ka līdzsvara punkts p^* ir kopas L akumulācijas punkts [accumulation point, cluster point]. Tātad, *ja līdzsvara punkts p^* ir kopas L akumulācijas punkts, tad līdzsvara punkts p nav atraktors*.

- Uz atraktoriem var pretendēt tikai tādi līdzsvara punkti p^*, kuri ir kopas L izolēti punkti: punktu p^* sauc par kopas L izolētu punktu [isolated point], ja eksistē šī punkta apkārtne, kas nesatur nevienu citu sistēmas līdzsvara punktu.

Līdzsvara punktu stabilitāte X

- Eksistē sistēmas, kurās līdzsvara punkts ir atraktors, bet nav stabils līdzsvara punkts, skat. [6, 181. lpp.].
- Eksistē sistēmas, kurās līdzsvara punkts ir stabils, bet nav atraktors; skat., piemēram, sistēmu $\begin{cases} x_{t+1} = x_t, \\ y_{t+1} = y_t. \end{cases}$



Linearizācija I

Apskatīsim sistēmu (1), kur $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ir nepārtrauktas funkcijas.

Iepriekš jau tika atzīmēts, ka ar sistēmu (1) ir asociēts attēlojums $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kas jebkuram punktam $p \in \mathbb{R}^2$ piekārto punktu $\mathcal{F}(p) = \big(f(p), g(p)\big) \in \mathbb{R}^2$.

Attēlojumu $\mathcal{F}$ sauc par gludu [smooth], ja funkcijām f un g eksistē nepārtraukti pirmās kārtas parciālie atvasinājumi visā plaknē $\mathbb{R}^2$.

Linearizācija II

Ja attēlojums $\mathcal{F}$ ir gluds, tad dotā plaknes punkta $p^* = (x^*, y^*)$ pietiekami mazā apkārtnē funkcijas $z = f(x, y)$ un $z = g(x, y)$ var tuvināt ar to pieskarplaknēm punktā p^*:

$$z = f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*),$$
$$z = g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*),$$

t.i.,

$$f(x, y) \approx f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*),$$
$$g(x, y) \approx g(x^*, y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*).$$

Linearizācija III

Ja $p^* = (x^*, y^*)$ ir attēlojuma $\mathcal{F}$ nekustīgs punkts, t.i.,

$$f(x^*, y^*) = x^*, \quad g(x^*, y^*) = y^*,$$

tad

$$f(x, y) \approx x^* + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*),$$
$$g(x, y) \approx y^* + \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)(y - y^*).$$

Linearizācija IV

Ja apzīmēt

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*), \qquad b = \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*), \qquad h = x^* - ax^* - by^*,$$
$$c = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*), \qquad d = \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*), \qquad k = y^* - cx^* - dy^*,$$

tad

$$f(x, y) \approx ax + by + h,$$
$$g(x, y) \approx cx + dy + k.$$

Linearizācija V

Apskatīsim attēlojumu $\mathcal{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kas jebkuram punktam $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ piekārto punktu $\mathcal{L}(p) = (ax + by + h, cx + dy + k)$.

Attēlojumu $\mathcal{L}$ sauc par attēlojuma $\mathcal{F}$ linearizāciju [linearization] tā nekustīgajā punktā p^*.

Tātad punktiem p, kas ir pietiekami tuvi attēlojuma $\mathcal{F}$ nekustīgajam punktam p^*, ir spēkā

$$\mathcal{F}(p) \approx \mathcal{L}(p),$$

t.i., attēlojumu $\mathcal{F}$ var tuvināt ar tā linearizāciju $\mathcal{L}$ punktā p^*.

Linearizācija VI

Tā kā sistēmas (1):

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t), \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{cases} \quad \text{jeb} \quad p_{t+1} = \mathcal{F}(p_t)$$

līdzsvara punkti ir nekas cits kā attēlojuma $\mathcal{F}$ nekustīgie punkti, tad no iepriekš teiktā izriet, ka *sistēma* (1) *tās līdzsvara punkta* p^* *pietiekami mazā apkārtnē var tikt tuvināta ar otrās kārtas lineāru diskrētu dinamikas sistēmu*

$$\begin{cases} x_{t+1} = ax_t + by_t + h, \\ y_{t+1} = cx_t + dy_t + k \end{cases} \quad \text{jeb} \quad p_{t+1} = \mathcal{L}(p_t). \tag{4}$$

Sistēmu (4) sauc par sistēmas (1) linearizāciju tās līdzsvara punktā p^*.

Linearizācija VII

Ja punktu $p_t = (x_t, y_t)$ interpretēt kā $p_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix}$ un apzīmēt $q = \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$, tad sistēmu (4) var pierakstīt matricu formā

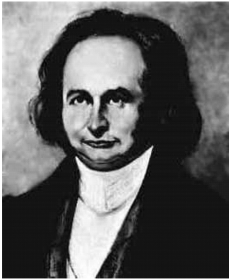
$$p_{t+1} = \left[\mathcal{F}'(p^*)\right] p_t + q \quad \text{jeb} \quad \begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Matricu

$$\mathcal{F}'(p^*) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ t.i., } \mathcal{F}'(p^*) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \dfrac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{pmatrix},$$

sauc par attēlojuma $\mathcal{F}$ (sistēmas (1)) Jakobi matricu [Jacobian matrix] punktā p^*.

Linearizācija VIII



K. Jakobi (1804-1851, C. Jacobi) - franču matemātiķis, kurš ir sniedzis ievērojamu eliptisko funkciju teorijā, diferenciālvienādojumu un skaitļu teorijā.

Asimptotiskās stabilitātes pazīme I

5.1. teorēma. [8, 170.-172.] *Pieņemsim, ka ar sistēmu* (1) *asociētais attēlojums* $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *ir gluds, bet* p^* *ir sistēmas* (1) *līdzsvara punkts.*

1. *Ja spektrālais rādiuss* $r\big(\mathcal{F}'(p^*)\big) < 1$, *tad līdzsvara punkts* p^* *ir asimptotiski stabils.*
2. *Ja spektrālais rādiuss* $r\big(\mathcal{F}'(p^*)\big) > 1$, *tad līdzsvara punkts* p^* *ir nestabils.*
3. *Ja spektrālais rādiuss* $r\big(\mathcal{F}'(p^*)\big) = 1$, *tad jāveic tālāki pētījumi.*

Asimptotiskās stabilitātes pazīme II

Iepriekšējās teorēmas punktus 1., 2. un 3. var formulēt šādā ekvivalentā veidā:

1'. *Ja Jakobi matricas $\mathcal{F}'(p^*)$ visas īpašvērtības atrodas vienības riņķa iekšienē, tad līdzsvara punkts p^* ir asimptotiski stabils.*

2'. *Ja Jakobi matricas $\mathcal{F}'(p^*)$ vismaz viena īpašvērtība atrodas ārpus vienības riņķa, tad līdzsvara punkts p^* ir nestabils.*

3'. *Ja Jakobi matricas $\mathcal{F}'(p^*)$ viena īpašvērtība atrodas vienības riņķī, bet otra uz šī riņķa robežas, tad jāveic tālāki pētījumi.*

Asimptotiskās stabilitātes pazīme III

Pieņemsim, ka ar sistēmu (1) asociētais attēlojums $\mathcal{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ir gluds, bet p^* ir sistēmas (1) līdzsvara punkts.

Sistēmas (1) līdzsvara punktu p^* sauc par hiperbolisku [hyperbolic] [1, 70. lpp.], ja uz vienības riņķa līnijas nav nevienas Jakobi matricas $\mathcal{F}'(p^*)$ īpašvērtības.

Sistēmas (1) līdzsvara punktu p^* sauc par nehiperbolisku [non-hyperbolic], ja uz vienības riņķa līnijas atrodas vismaz viena Jakobi matricas $\mathcal{F}'(p^*)$ īpašvērtība.

Noteka

Dažkārt [1, 58. lpp.] atraktoru sauc arī par noteku [sink].

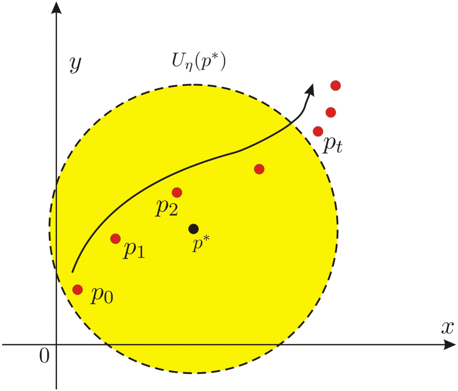
Tā kā asimptotiski stabils līdzsvara punkts ir atraktors, tātad arī noteka, tad ir spēkā 5.1. teorēmas speciālgadījums.

6.1. teorēma. *Pieņemsim, ka funkcijām f un g eksistē nepartraukti pirmās kārtas parciālie atvasinājumi sistēmas (1) līdzsvara punkta p^* kādā apkārtnē $U(p^*)$.*

- *[1, 70. lpp.], [8, 170.-172.] Ja Jakobi matricas $\mathcal{F}'(p^*)$ abas īpašvērtības atrodas vienības riņķa līnijas iekšienē, t.i., $r\big(\mathcal{F}'(p^*)\big) < 1$, tad līdzsvara punkts p^* ir noteka.*

Avots I

Sistēmas (1) līdzsvara punktu p^* sauc par avotu (atgrūdējpunktu) [source, repeller], skat. [1, 58. lpp.], ja eksistē šī punkta apkārtne $U_\eta(p^*)$, ka jebkuram sākumnosacījumam $p_0 \in U_\eta(p)$, kas ir atšķirīgs no p^*, visi orbītas $\mathcal{O}(p_0)$ punkti, sākot ar kādu, atrodas ārpus apkārtnes $U_\eta(p^*)$.



Avots II

No stabila līdzsvara punkta definīcijas izriet, ka *avots ir nestabils līdzsvara punkts*.

6.2. teorēma. *Pieņemsim, ka funkcijām f un g eksistē nepartraukti pirmās kārtas parciālie atvasinājumi sistēmas (1) līdzsvara punkta p^* kādā apkārtnē $U(p^*)$.*

- *[1, 70. lpp.] Ja Jakobi matricas $\mathcal{F}'(p^*)$ abas īpašvērtības atrodas ārpus vienības riņķa līnijas, tad līdzsvara punkts p^* ir avots.*

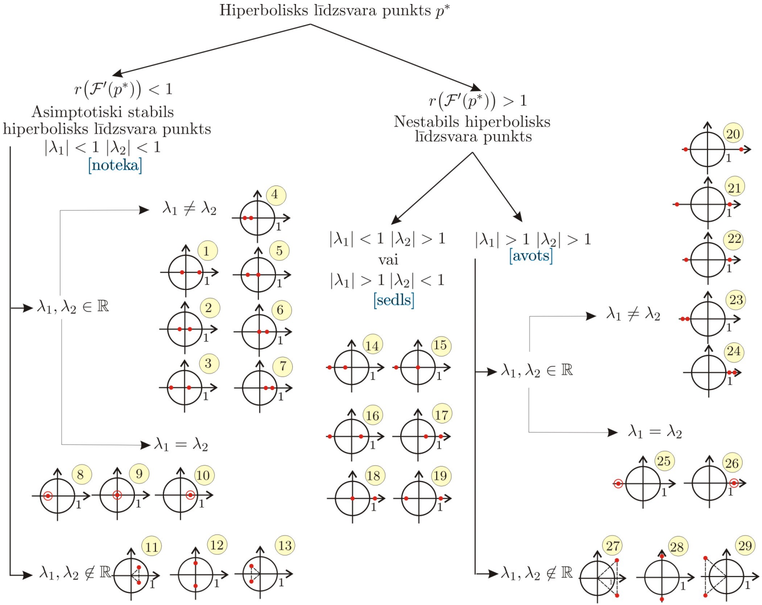
Sedls I

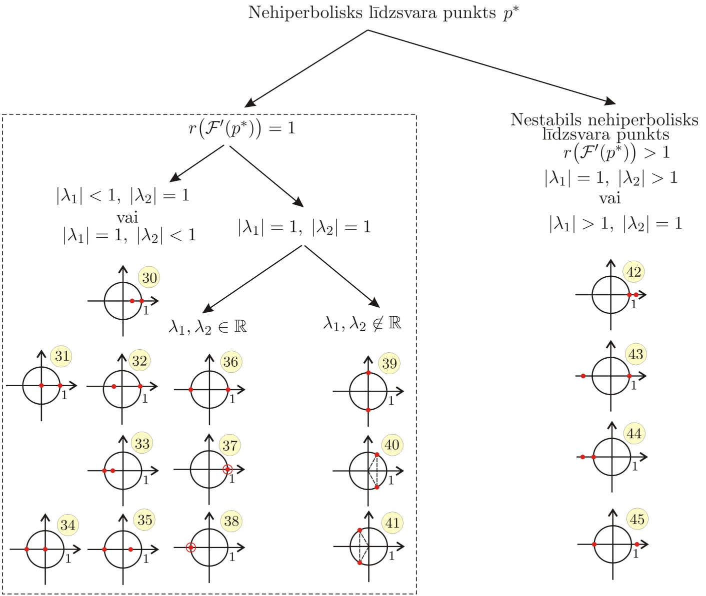
Pieņemsim, ka funkcijām f un g eksistē nepārtraukti pirmās kārtas parciālie atvasinājumi sistēmas (1) līdzsvara punkta p^* kādā apkārtnē $U(p^*)$.

Sistēmas (1) līdzsvara punktu p^* sauc par sedlu [saddle], skat. [1, 70. lpp.], ja Jakobi matricas $\mathcal{F}'(p^*)$ viena īpašvērtība atrodas vienības riņķa līnijas iekšienē, bet otra - ārienē.

No 5.1. teorēmas izriet, ka *sedls ir nestabils līdzsvara punkts*.

Sedla punkta p^* pietiekami mazā apkārtnē $U_\eta(p^*)$ lielākai daļai sākumnosacījumu $p_0 \in U_\eta(p)$ orbītas $\mathcal{O}(p_0)$ uzvedas [1, 70. lpp.] kā avota gadījumā, t.i., visi orbītas $\mathcal{O}(p_0)$ punkti, sākot ar kādu, atrodas ārpus apkārtnes $U_\eta(p^*)$.


Hiperbolisks līdzsvara punkts p^*
$r\big(\mathcal{F}'(p^*)\big) < 1$
Asimptotiski stabils
hiperbolisks līdzsvara punkts
$|\lambda_1| < 1 \; |\lambda_2| < 1$
[noteka]
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$\lambda_1 \neq \lambda_2$
$\lambda_1 = \lambda_2$
$\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$
$r\big(\mathcal{F}'(p^*)\big) > 1$
Nestabils hiperbolisks
līdzsvara punkts
$|\lambda_1| < 1 \; |\lambda_2| > 1$
vai
$|\lambda_1| > 1 \; |\lambda_2| < 1$
[sedls]
$|\lambda_1| > 1 \; |\lambda_2| > 1$
[avots]
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$\lambda_1 \neq \lambda_2$
$\lambda_1 = \lambda_2$
$\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29


Nehiperbolisks līdzsvara punkts p^*
$r\big(\mathcal{F}'(p^*)\big) = 1$
$|\lambda_1| < 1,\ |\lambda_2| = 1$
vai
$|\lambda_1| = 1,\ |\lambda_2| < 1$
$|\lambda_1| = 1,\ |\lambda_2| = 1$
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
$\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{R}$
Nestabils nehiperbolisks līdzsvara punkts
$r\big(\mathcal{F}'(p^*)\big) > 1$
$|\lambda_1| = 1,\ |\lambda_2| > 1$
vai
$|\lambda_1| > 1,\ |\lambda_2| = 1$
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
1

Pirmais piemērs I

8.1. piemērs. Apskatīsim sistēmu [3, 312. lpp.]:

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t + \frac{1}{6}x_t(1 - x_t - y_t), \\ y_{t+1} = y_t(1 + x_t - y_t). \end{cases} \tag{5}$$

Šajā gadījumā funkcijas

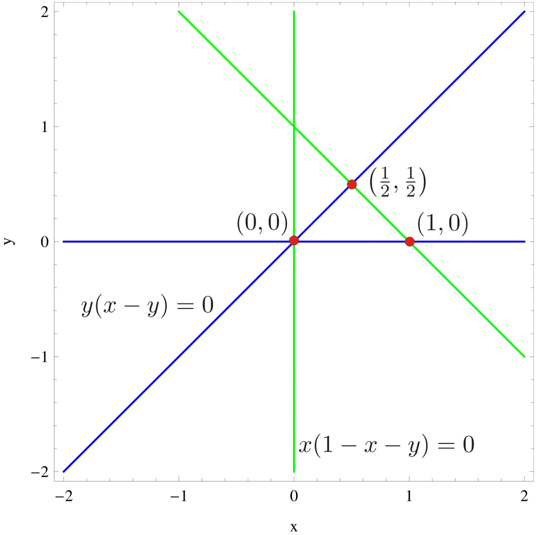
$$f(x, y) = x + \frac{1}{6}x(1 - x - y), \; g(x, y) = y(1 + x - y).$$

Sistēmas (5) līdzsvara punktus atrod no sistēmas

$$\begin{cases} x = x + \frac{1}{6}x(1 - x - y), \\ y = y(1 + x - y) \end{cases} \quad \text{jeb} \quad \begin{cases} x(1 - x - y) = 0, \\ y(x - y) = 0. \end{cases}$$

Līdzsvara punkti ir $(0, 0)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Pirmais piemērs II



Pirmais piemērs III

Atrodam

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{1}{6}(1 - x - y) - \frac{1}{6}x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{6}x,$$
$$\frac{\partial g}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = 1 + x - 2y$$

un sastādām sistēmas (5) Jakobi matricu

$$\mathcal{F}'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{6}(1 - x - y) - \frac{1}{6}x & -\frac{1}{6}x \\ y & 1 + x - 2y \end{pmatrix}.$$

Pirmais piemērs IV

Līdzsvara punktā $(0,0)$ Jakobi matricas

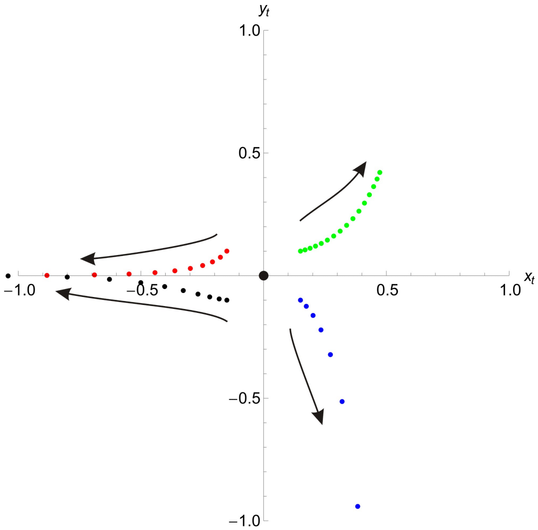
$$\mathcal{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{7}{6} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

īpašvērtības ir $\lambda_1 = \frac{7}{6}$ un $\lambda_2 = 1$. Tātad līdzsvara punkts $(0,0)$ ir *nehiperbolisks*, bet spektrālais rādiuss

$$r\big(\mathcal{F}'(0,0)\big) = \max\left\{\left|\frac{7}{6}\right|, |1|\right\} = \max\left\{\frac{7}{6}, 1\right\} = \frac{7}{6} > 1.$$

No 5.1. teorēmas izriet, ka līdzsvara punkts $(0,0)$ ir *nestabils*.

Pirmais piemērs V



Pirmais piemērs VI

Līdzsvara punktā $(1, 0)$ Jakobi matricas

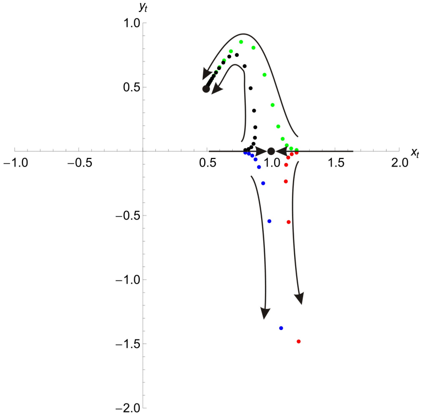
$$\mathcal{F}'(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

īpašvērtības ir $\lambda_1 = \frac{5}{6}$ un $\lambda_2 = 2$. Tātad līdzsvara punkts $(1, 0)$ ir *hiperbolisks*, bet spektrālais rādiuss

$$r\big(\mathcal{F}'(0,0)\big) = \max\left\{\left|\frac{5}{6}\right|, |2|\right\} = \max\left\{\frac{5}{6}, 2\right\} = 2 > 1.$$

No 5.1. teorēmas izriet, ka līdzsvara punkts $(1, 0)$ ir *nestabils*. Tā kā viena īpašvērtība $\lambda_1 = \frac{5}{6}$ atrodas vienības riņķa līnijas iekšienē, bet otra $\lambda_2 = 2$ - ārienē, tad līdzsvara punkts $(1, 0)$ ir *sedls*.

Pirmais piemērs VII



Sākumnosacījumiem $p_0 = (x_0, 0)$, kas ir pietiekami tuvi līdzsvara punktam $p = (1, 0)$ orbītas $\mathcal{O}(p_0)$ punkti konverģē uz uz līdzsvara punktu p.

Pirmais piemērs VIII

Līdzsvara punktā $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ Jakobi matricas $\mathcal{F}'(1/2, 1/2) = \begin{pmatrix} \frac{11}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ raksturvienādojums ir

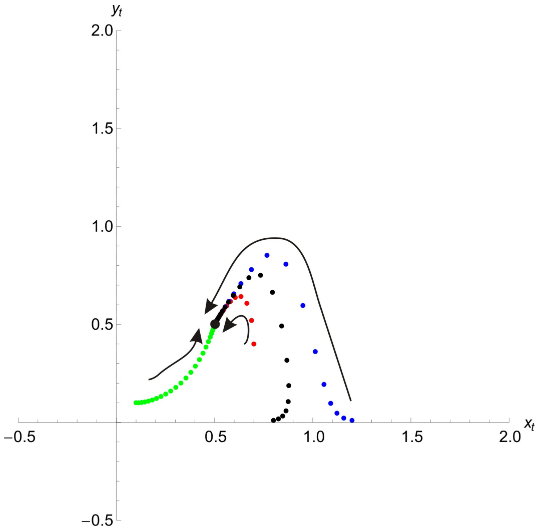
$$\begin{vmatrix} \frac{11}{12} - \lambda & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{jeb} \quad \lambda^2 - \frac{17}{12}\lambda + \frac{1}{2} = 0,$$

kura saknes, t.i., Jakobi matricas īpašvērtības, ir $\lambda_1 = \frac{2}{3}$ un $\lambda_2 = \frac{3}{4}$. Tātad līdzsvara punkts $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ir *hiperbolisks*, bet spektrālais rādiuss

$$r\big(\mathcal{F}'(1/2, 1/2)\big) = \max\left\{\left|\frac{2}{3}\right|, \left|\frac{3}{4}\right|\right\} = \max\left\{\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4} < 1.$$

No 5.1. teorēmas izriet, ka līdzsvara punkts $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ir *asimptotiski stabils* un tātad arī *noteka*.

Pirmais piemērs IX



Otrais piemērs I

8.2. piemērs. Otrās kārtas lineāras homogēnas sistēmas ar konstantiem koeficientiem

$$\begin{cases} x_{t+1} &= \left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)x_t \quad -\frac{1}{4}y_t, \\ y_{t+1} &= \frac{1}{2}x_t \quad + \left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)y_t \end{cases} \tag{6}$$

matrica ir $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$. Tā kā

$$A - I = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \quad \text{un} \quad \det(A-I) = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0,$$

tad sistēmai ir vienīgs līdzsvara punkts $(0,0)$.

Otrais piemērs II

Sistēmas (6) Jakobi matrica līdzsvara punktā $(0,0)$ ir vienāda ar matricu A, t.i., $\mathcal{F}'(0,0) = A$. No matricas A raksturvienādojuma

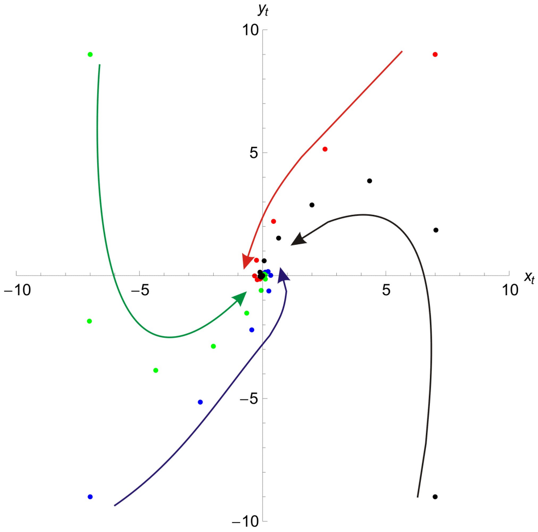
$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A\,\lambda + \det A = 0 \quad \text{jeb} \quad \lambda^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda + \frac{1}{4} = 0$$

atrodam matricas A īpašvērtības: $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$ un $\lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i$. Tā kā spektrālais rādiuss

$$r(A) = \max\left\{\left|\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i\right|;\left|\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i\right|\right\} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{1}{2} < 1,$$

tad līdzsvara punkts $(0,0)$ ir *asimptotiski stabils* un līdz ar to arī *noteka*.

Otrais piemērs III



Trešais piemērs I

8.3. piemērs. Sistēmai $\begin{cases} x_{t+1} = 2x_t, \\ y_{t+1} = \frac{1}{3}y_t \end{cases}$ ir vienīgs līdzsvara punkts $p^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, kurš ir sedls.

- Jebkuriem sākumnosacījumiem $p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in U_\eta(p)$ orbītas $\mathcal{O}(p_0)$ punkti uzvedas kā notekas gadījumā, t.i., $\lim\limits_{t\to\infty} p_t = p^*$.
- Savukārt visiem pārējiem sākumnosacījumiem $p_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in U_\eta(p^*)$, kur $x_0 \neq 0$, orbītas $\mathcal{O}(p_0)$ uzvedas kā avota gadījumā.

Literatūra I

[1] K.T. Alligood, T.D. Sauer, J.A. Yorke.
Chaos: An introduction to dynamical systems, Springer, 2000.

[2] I. Bula.
Haoss, Rīga, LU, 2005.
http://home.lu.lv/~ibula/lv/studentiem/index.html

[3] P. Cull, M. Flahive, R. Robson.
Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005.

[4] Dynamica
A computer package for the study of discrete dynamical systems and difference equations http://www.math.uri.edu/Dynamica/

[5] R.W. Easton.
Geometric methods for discrete dynamical systems, OUP, 1998.

Literatūra II

[6] S. Elaydi.
An Introduction to difference equations, Springer, 2005.

[7] K. Jacobi.
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Jacobi.html

[8] W.G. Kelley, A.C. Peterson.
Difference equations: An introduction with applications, Academic Press, 2000.

[9] M.R.S. Kulenovic, O. Merino.
Discrete dynamical systems and difference equations with Mathematica, Chapman & Hall/CRC, 2002.

Literatūra III

[10] F.R. Marotto.
Introduction to mathematical modeling using discrete dynamical systems, Thomson Brooks/Cole, 2000.