

SEPTĪTAIS MĀJASDARBS

7.1. Atrast veidotājfunkcijas elementāru funkciju veidā šādām virknēm:

a) $a_n = n + 1, n \geq 0,$

b) $a_n = \frac{1}{n}, n \geq 1,$

c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \geq 1,$

d) $a_n = \frac{1}{n!}, n \geq 0,$

e) $a_n = n^2, n \geq 0$

f) $a_n = \sin(\pi n), n \geq 0.$

7.2. Apzīmēsim ar a_n visu variantu skaitu kā skaitli n izteikt dažādu naturālu skaitļu summas veidā un apzīmēsim atbilstošo veidotājfunkciju ar $A(x)$. Pierādīt, ka

$$A(x) = \prod_{i \geq 1} (1 + x^i).$$

7.3. Kādai operācijai ar veidotājfunkcijām atbilst virknes i -tā elementa izsvīturošana?

7.4. Izsakiet veidotājfunkciju $\sum_{n \geq 0} C_n^k x^n$ kā elementāru funkciju no x .

7.5. Cik ir trajektoriju no punkta $(0,0)$ līdz punktam (n,m) ar soļiem $(0,1)$ un $(1,0)$, kuras nešķērso punktu (p,q) , kur $0 \leq p \leq n, 0 \leq q \leq m$?

PAAUGSTINĀTAS GRŪTĪBAS UN PĒTNIECISKA RAKSTURA UZDEVUMI

7.6. Apzīmēsim ar a_n visu iespējamo virkņu (bez atkārtojumiem, ieskaitot tukšo virkni) skaitu, kuras var izveidot no n -kopas elementiem, definēsim $a_0 = 1$. Pierādīt, ka ir spēkā rekurentā sakarība $a_n = na_{n-1} + 1$, atrodiet virknes $\{a_n\}$ eksponenciālo veidotājfunkciju.

7.7. a_n ir to kopas $\{1,2,\dots,n\}$ permutāciju skaits, kurām visi cikli ir ar garumu 1 vai 2.

Pierādīt, ka $A_{\text{exp}}(x) = \exp(x + \frac{x^2}{2})$. Vispārināt šo faktu uz gadījumu, kad permutācijas ciklu garums ir ierobežots ar naturālu skaitli k .

7.8. Apzīmēsim ar b_n trajektoriju skaitu no punkta $(0,0)$ līdz $(0,0)$ ar šādām īpašībām:

1) atļautie soļi ir $(1,1), (1,-1), (-1,1), (-1,-1)$;

2) trajektorija neiet caur $(0,0)$ savos iekšējos punktos.

Pierādīt, ka veidotājfunkcija $B(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ apmierina vienādību

$$B(x) = 1 - \frac{1}{\sum_{i \geq 0} (C_{2i}^i)^2 x^{2i}}.$$