KOMBINATORIKAS PAMATUZDEVUMI

Daži kombinatorikas uzdevumi tiek bieži izmantoti kā apakšuzdevumi citos, sarežģītākos, uzdevumos, tāpēc tos mēs apskatīsim atsevišķi.

VARIĀCIJAS AR ATKĀRTOJUMIEM.

Cik veidos var konstruēt m vienības garas virknes, kurās var būt n dažādu tipu elementi, kas var atkārtoties (n-multikopas elementi)? Šo skaitli apzīmēsim ar $\overline{A}_n^m$. Termins „variācija” ir termina „virkne” sinonīms.

Lai atrisinātu šo uzdevumu, izmantosim reizināšanas likumu. Skaitīsim, cik dažādu m vienību garu virkņu var izveidot no n tipu neierobežoti lielas multikopas (n-multikopas).

Veidosim šādas virknes sākot no kreisās malas. Virknes pirmo elementu var izvēlēties n veidos, virknes otro elementu neatkarīgi no pirmā var izvēlēties n veidos, tātad pirmos divus virknes elementus var izvēlēties $n \cdot n = n^2$ veidos, u.t.t, visus virknes elementus var izvēlēties n^m veidos. Iegūstam, ka

$$\overline{A}_n^m = \underbrace{n \cdot n \cdots n}_{m} = n^m \qquad (2.1)$$

PIEMĒRS Cik dažādos veidos var izvēlēties piecciparu tālruņa numuru? Katru no pieciem cipariem var neatkarīgi izvēlēties 10 veidos, cipari var atkārtoties, tāpēc atbilde ir vienāda ar $\overline{A}_{10}^{5} = 10^{5}$.

Skaitļu $\overline{A}_{n}^{m}$ interpretācijas

1) Parādīsim, ka $\overline{A}_{n}^{m}$ var interpretēt kā visu funkciju skaitu no m elementu kopas uz n elementu kopu.

Uzdot funkciju no m elementu kopas A uz n elementu kopu B ir tas pats, kas uzdot sakārtotu virkni (iespējams, ar atkārtojumiem, ja funkcija nav injektīva): funkciju viennozīmīgi uzdot ar virkni $\underbrace{\{f(1),\dots,f(m)\}}_{m}$, kuras elementi ir kopas B elementi. Otrādi, katrai m elementus garai virknei, kuras elementi pieder kopai B var viennozīmīgi piekārtot atbilstošo funkciju. Tādējādi ir nodibināta bijektīva atbilstība starp virknēm un funkcijām.

Cik ir "daļēji definētu funkciju"?

2) $\overline{A}_{2}^{m}$ var interpretēt kā visu m elementu lielas kopas apakškopu skaitu, jo katru apakškopu var uzdot kā funkciju no kopas uz divu elementu kopu {0,1}, kas elementam piekārto 1, ja tas pieder apakškopai un 0, ja nepieder. Tādējādi m elementu lielas kopas visu apakškopu skaits ir 2^{m}.

3) $\overline{A}_n^m$ var interpretēt kā veidu skaitu kā m dažādus objektus var ievietot n dažādās kastēs, pierāda izmantojot funkcijas.

VARIĀCIJAS BEZ ATKĀRTOJUMIEM

Cik ir dažādu m vienības garu virkņu, kuru elementi ir dotās n elementus lielas kopas elementi? Šo skaitli apzīmē ar A_n^m. Atzīmēsim, ka atšķirībā no iepriekšējā uzdevuma elementi virknē nevar atkārtoties, jo tie tiek izvēlēti no kopas.

Arī šajā gadījumā izmantosim reizināšanas likumu. Skaitīšanu veiksim konstruējot visas iespējamās virknes.

Konstruēsim virknes, pievienojot jaunus elementus labajā pusē. Virknes pirmo elementu (sākot no kreisās puses) var izvēlēties n veidos, virknes otro elementu (ja pirmais elements jau ir izvēlēts) var izvēlēties neatkarīgi no pirmā n-1 veidā, Tātad, saskaņā ar reizinājuma likumu, pirmos divus virknes elementus var izvēlēties n(n-1) dažādos veidos. Spriežot līdzīgi, redzam, ka pirmos trīs virknes elementus var izvēlēties n(n-1)(n-2) dažādos veidos. Turpinot šo spriedumu, iegūstam, ka kopējais dažādu virkņu skaits ir n(n-1)...(n-m+1), tātad

$$A_n^m = n(n-1)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (2.2)$$

© 2005, Pēteris Daugulis

Apzīmē arī ar pierakstu $A_n^m = n^{\underline{m}}$.

PIEMĒRS Cik dažādos veidos var nostādīt ierindā piecus cilvēkus no desmit cilvēku lielas grupas? Atbilde ir vienāda ar $A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$.

Svarīgs speciālgadījums ir $A_n^n = P_n = n!$ (n elementus lielu kopu var sakārtot n! veidos).

P_n sauc par n elementus lielas kopas *permutāciju skaitu*.

Definēsim $A_n^m = 0$, ja $m > n,\ m \in N,\ n \in N$.

Ar formulu $A_a^m = a(a-1)...(a-m+1)$ varam definēt skaitļus A_a^m arī tad, ja a ir jebkurš reāls un ne obligāti naturāls skaitlis.

Skaitļu A_n^m *interpretācija*

1) A_n^m ir vienāds ar injektīvu funkciju skaitu no m elementu lielas kopas uz n elementus lielu kopu, tāpēc, ka injektīvas funkcijas uzdošana ir ekvivalenta virknes bez atkārtojumiem uzdošanai Gadījumā, kad m=n mēs iegūstam visu injektīvu un tātad arī bijektīvu funkciju skaitu no n elementu kopas uz n elementu kopu, ko var interpretēt arī kā n elementus lielas kopas permutāciju skaitu.

2) A_n^m var interpretēt kā veidu skaitu, kādos m dažādus objektus var ievietos n kastēs, ja katrā kastē ir atļauts likt vienu objektu.

FAKTS Visu iespējamo virkņu bez atkārtojumiem (ieskaitot tukšo virkni) skaits M_n kopai ar n elementiem ir vienāds ar $[n!\cdot e]$.
PIERĀDĪJUMS Tiešām, šis skaitlis ir vienāds ar

$$\sum_{i=0}^{n} A_n^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{(n-i)!} = \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!} = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!}.$$

Tagad ievērosim, ka iegūtā summa ir funkcijas e^x Teilora rindas parciālsumma, kad izvirzījuma punkts ir 0 un $x=1$ un, tātad,

$$n!e^1 - M_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots < \sum_{i \geq 1} \frac{1}{(n+1)^i} = \frac{1}{n} \leq 1.$$

Redzam, ka skaitļa $n!\cdot e$ veselā daļa ir vienāda ar M_n.

KOMBINĀCIJAS BEZ ATKĀRTOJUMIEM

Cik ir dažādu m elementus lielu apakškopu kopā, kas satur n elementus? Šo skaitli apzīmēsim ar C_n^m (Austrumeiropā) vai $\binom{n}{m}$ (Rietumeiropā un Rietumu Puslodē). Termins „kombinācija” kā apakškopas sinonīms ir matemātiska tradīcija, kas pakāpeniski atmirst.

Atradīsim C_n^m izmantojot dalīšanas likumu. Saskaņā ar spriedumu, ar kura palīdzību mēs aprēķinājām A_n^m, katru m elementus lielu apakškopu var sakārtot m! veidos, tātad vienai m elementus lielai apakškopai atbilst m! sakārtotas virknes, tātad ir spēkā vienādība

$$A_n^m = C_n^m m!$$

un

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \qquad (2.3)$$

PIEMĒRS Cik dažādos veidos var izvēlēties piecus cilvēkus no desmit cilvēku lielas grupas? Atbilde ir vienāda ar $C_{10}^5 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$.

Ja m>n, tad definēsim $C_n^m = 0$.

Ar formulu

$$C_a^m = \frac{a(a-1)...(a-m+1)}{m!} \qquad (2.4)$$

divu argumentu funkciju C_a^m var definēt arī ne obligāti veselām argumenta a vērtībām.

Skaitļu C_n^m interpretācijas

Skaitļiem C_n^m ir vēl vairākas lietderīgas interpretācijas:

1) C_n^m var interpretēt kā n vienības garu bināru virkņu skaitu, kurās ir m vieninieki, jo katrai n elementus lielas kopas m - apakškopai var viennozīmīgi piekārtot tās bitu vektoru - n vienības garu bināru virkni ar m vieniniekiem, un otrādi, katrai binārai virknei var viennozīmīgi piekārtot apakškopu šādā veidā: sakārtojam kopas elementus virknē (ar garumu n), ja elements x ir dotajā apakškopā, tad attiecīgajā vietā rakstām 1, ja nē, tad 0, katrai apakškopai viennozīmīgi atbilst tieši viena bināra virkne;

2) C_n^m var interpretēt kā fiksēta garuma augošu (dilstošu) virkņu skaitu pilnīgi sakārtotā kopā: katru m-apakškopu no n elementus lielā pilnīgi sakārtotā kopā var sakārtot augošā vai dilstošā kārtībā tieši vienā veidā, otrādi, katrai augošai vai dilstošai virknei var piekārtot atbilstošo apakškopu;

3) C_n^m var interpretēt kā koeficientus, ko iegūst atverot iekavas izteiksmē $(a+b)^n$, šo faktu var pierādīt, izmantojot matemātiskās indukcijas metodi, to var vispārināt arī uz gadījumu, kad kāpinātājs nav vesels skaitlis (*binomiālā teorēma*): $(1+x)^r = \sum_{i \geq 0} C_r^i x^i$, šādā gadījumā summa ir bezgalīga un sakrīt ar kreisās puses funkcijas Teilora rindu.

Pārskaitīsim dažas vienkāršākās *skaitļu* C_n^m *īpašības:*

1) $C_n^0 = 1,\ C_n^1 = n,\ C_n^n = 1$,

2) $C_n^m = C_n^{n-m}$, pierāda mainot vietām 0 un 1 binārajās virknēs;

3) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$ (Paskāla trijstūra īpašība), pierāda izmantojot rekursiju: skaitīsim bināras virknes ar garumu n+1, kurās ir m+1 vieninieks, pēdējā vietā var būt 0 (tādu variantu skaits ir C_n^{m+1}) vai 1 (tādu variantu ir C_n^{m+1}).

4) $\sum_{i=0}^{n} C_n^i = 2^n$ (visu apakškopu skaits ir 2^n), pierāda izmantojot summas likumu.

5) $\sum_{i=0}^{n-m} C_{m+i}^m = C_{n+1}^{m+1}$, pierāda izmantojot summas likumu: pirmais vieninieks varbūt vietā k, kur $1 \le k \le n-m+1$, atlikušās daļas garums ir n+1-k. Atlikušos m vieniniekus var izvietot atlikušajā daļā C_{n+1-i}^m veidos. Veicot substitūciju i=n+m+1-k, iegūsim doto formulu.

6) $C_n^m C_m^k = C_n^k C_{n-k}^{m-k}$, pierāda izmantojot skaitīšanu 2 veidos: kreisajā pusē ir veidu skaits, kā var izvēlēties pāri (A,B), kur |A|=k,|B|=m un $A \subseteq B$ (no sākuma izvēlamies B, pēc tam A), to pašu objektu var konstruēt, no sākuma izvēloties A un pēc tam B\A.

Ir vēl liels daudzums formulu skaitļiem C_n^m, kuras parasti pierāda, izmantojot kombinatorikas pamatprincipus.

PIEMĒRS Apskatīsim kādu formulu vienkāršošanas uzdevumu, kurā ir iesaistīti skaitļi C_n^m un kurš ilustrē arī kombinatorikas pamatprincipu „skaitīšana divos dažādos veidos”. Vienkāršosim summu $S_n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k k$.

Redzam, ka $S_n = s_1 + s_2 + ... + s_n,\ kur\ \ s_i = C_n^i i$.

s_i var interpretēt kā visu to veidu skaitu, kā no n elementu lielas kopas izvēlēties i elementus lielu apakškopu un vienu šīs apakškopas elementu.

Mainot i mēs iegūsim dažādas apakškopas, tātad izmantojot “Summas likumu” redzam, ka S_n ir vienāds ar visu veidu skaitu, kā no n elementu lielas kopas izvēlēties (netukšu) apakškopu un vienu šīs apakškopas elementu (komiteju kopā ar tās priekšsēdi). Cik dažādos veidos to var izdarīt? Redzam, ka

$$S_n = n \cdot 2^{n-1}$$

(no sākuma izvēlamies priekšsēdi, pēc tam apakškopu, iespējams, tukšu, no atlikušās n-1 cilvēku kopas).

KOMBINĀCIJAS AR ATKĀRTOJUMIEM

Cik ir dažādu m elementus lielu apakšmultikopu multikopā, kas satur n dažādu tipu elementus (n-multikopā)? Šo skaitli apzīmēsim ar $\overline{C}_n^m$.

Atrisināsim šo uzdevumu ar vienlieluma likuma metodi - piekārtosim savstarpēji viennozīmīgi katrai apakšmultikopai noteikta veida bināru virkni.

Katrai apakšmultikopai ar dotajām īpašībām piekārtosim bināru virkni šādā veidā:

1) sanumurēsim n-multikopas elementu tipus ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz *n*;

2) pieņemsim, ka apakšmultikopā ir r_i elementi, kuru tips ir i $(\sum_{i=1}^{n} r_i = m)$,

Veidosim bināro virkni šādā veidā: sākot no kreisās puses rakstīsim

r_1 nulles un 1 vieninieku,

r_2 nulles un 1 vieninieku,...,

r_n nulles un 1 vieninieku

(piemēram, ja elementu tipi ir kopā {1,2,3}, tad apakšmultikopai {1,1,1,2,2,3} atbilst binārā virkne (0,0,0,1,0,0,1,0,1)). Beigās nodzēsīsim pēdējo vieninieku.

Iegūsim viennozīmīgi definētu virkni, kurā ir *m* nulles un *n-1* vieninieks. Otrādi, katrai šādai virknei atbilst viena vienīga apakšmultikopa ar dotajām īpašībām.

Tātad meklējamais multikopu skaits $\overline{C}_n^m$ ir vienāds ar tādu bināru virkņu skaitu, kuras satur *m* nulles un *n-1* vieninieku, jo ir konstruēta bijektīva funkcija no mūs interesējošās apakšmultikopu kopas uz aprakstīto bināro virkņu kopu.

Saskaņā ar iepriekš pierādīto bijekciju starp binārām virknēm un apakškopām, šis skaits ir vienāds ar *n-1* elementus lielu apakškopu skaitu *n+m-1* elementus lielā kopā, tātad

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m \qquad (2.5)$$

PIEMĒRS Veikalā ir 5 dažādu veidu markas neierobežotā skaitā. Cik dažādos veidos var iegādāties 10 marku komplektu? Redzam, ka mums ir jāatrod 10 elementus lielu apakšmultikopu skaits multikopā, kas satur 5 tipu elementus. Atbilde ir vienāda ar

$$\overline{C}_5^{10} = C_{14}^{10} = C_{14}^4 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 13 \cdot 11 = 1001 .$$

APAKŠKOPU VIRKŅU SKAITS

Cik veidos kopu, kas satur *n* elementus, var sadalīt *k* apakškopu virknē, tā, ka *i*- tā apakškopa satur m_i elementus, kur $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$, šo skaitli apzīmēsim ar $C_n^{m_1, m_2, ..., m_k}$ vai $P_n(m_1, m_2, ..., m_k)$.

Pirmo apakškopu var izvēlēties $C_n^{m_1}$ veidos, otro apakškopu, ja pirmā ir izvēlēta, var izvēlēties $C_{n-m_1}^{m_2}$ veidos, trešo var izvēlēties $C_{n-m_1-m_2}^{m_2}$ veidos, u.t.t, iegūstam, ka $C_n^{m_1,m_2,...,m_k} = C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} ... C_{n-m_1-...-m_{k-1}}^{m_k}$. Pēc pārveidojumiem iegūstam, ka

$$C_n^{m_1,m_2,...,m_k} = \frac{n!}{m_1! m_2! ... m_k!} \qquad (2.6)$$

Skaitļu $C_n^{m_1,m_2,...,m_k}$ *interpretācija*

Multinomiālā teorēma:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_k)^n = \sum_{m_1+...+m_k=n} C_n^{m_1,m_2,...,m_k} x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_k^{m_k}$$

KOPAS SADALĪJUMS APAKŠKOPĀS AR NOTEIKTU ELEMENTU SKAITU

Cik veidos kopu, kas satur n elementus, var sadalīt šķirtās apakškopās, tā, ka katram $i : 0 \le i \le n$ ir tieši m_i apakškopas, kas satur i elementus, kur

$$1m_1 + 2m_2 + ... + n \cdot m_n = n\ ?$$

Šo skaitli apzīmēsim ar $S_n^{m_1,m_2,...,m_n}$.

Tāpat kā gadījumā ar skaitļiem A_n^m un C_n^m, no sākuma atradīsim noteikta veida apakškopu virkņu skaitu tā, lai tiktu izpildīts nosacījums $1m_1 + 2m_2 + ... + n \cdot m_n = n$. Konstruējot šādu apakškopu virkni sākot ar mazāka elementu skaita apakškopām, iegūstam, ka apakškopu virkņu skaits, kuru mēs apzīmēsim ar $R_n^{m_1,m_2,...,m_n}$ ir vienāds ar

$$\underbrace{C_n^1\cdot C_{n-1}^1\cdot\ldots\cdot C_{n-1m_1+1}^1}_{m_1}\cdot\underbrace{C_{n-1m_1}^2\cdot C_{n-1m_1-2}^2\cdot\ldots}_{m_2}\cdot\underbrace{C_{n-1m_1-2m_2}^3\cdot\ldots}_{m_3}\cdot\ldots\cdot C_{n-1m_1-\ldots-(n-1)m_{n-1}}^n$$

Vienkāršosim $R_n^{m_1,m_2,\ldots,m_n}$:

$$R_n^{m_1,m_2,\ldots,m_n}=\frac{n!}{1!(n-1)}\cdot\frac{(n-1)!}{1!(n-2)!}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1m_1+1}{1!(n-1m_1)}\cdot\frac{(n-1m_1)!}{2!(n-1m_1-2)!}\cdot\ldots=\frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\ldots(n!)^{m_n}}$$

Lai atrastu nesakārtotu šādu sadalījumu skaitu, ievērosim, ka katram i apakškopas, kas satur i elementus var sakārtot $m_i!$ veidos neatkarīgi no citu elementu skaita apakškopām, tātad, saskaņā ar dalīšanas likumu

$$S_n^{m_1,m_2,\ldots,m_n}=\frac{R_n^{m_1m_2\ldots m_n}}{m_1!m_2!\ldots m_n!}=\frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\ldots(n!)^{m_n}m_1!m_2!\ldots m_n!}\qquad(2.7)$$

CIKLISKAS VIRKNES UN SADALĪJUMI

Cik veidos n elementus lielu kopu var izvietot ciklā (ap riņķa līniju)?

Šis uzdevums atšķiras no uzdevuma par A_n^m ar to, ka katram ciklam var piekārtot vairākas virknes, atkarībā no tā, no kuras vietas šo ciklu sāk lasīt. Katrai n elementus garai virknei atbilst n cikli, tāpēc, izmantojot dalīšanas likumu, redzam ciklu skaits ir

$$\frac{A_n^n}{n}=(n-1)!\qquad(2.8)$$

Par kopas *ciklisko sadalījumu* sauksim tās sadalījumu ar papildus struktūru – katrā sadalījuma kopā elementi ir izkārtoti ciklā.

Par *Stirlinga cikla skaitli* $[{n \atop m}]$ sauksim veidu skaitu, kādos n-kopai var konstruēt ciklisko sadalījumu ar m netukšiem cikliem. Par *pirmā veida Stirlinga skaitli s(n,m)* sauksim $(-1)^{n-m}[{n \atop m}]$.

Atsevišķi definējami speciālgadījumi - $s(n,m)=0$, ja n<m, s(n,0)=0, s(0,0)=1, s(n,n)=1.

Pārbaudīt, ka s(3,2)=-3, s(4,2)=11, s(4,3)=-6.

Var redzēt, ka $s(n,1)=(-1)^{n-1}(n-1)!$, $s(n,n-1)=-C_n^2$.

OBJEKTU IEVIETOŠANA KASTĒS

Cik veidos m objektus var ievietot n kastēs? Šim uzdevumam ir vairākas variācijas, kuras mēs apskatīsim atsevišķi.

Dažādu objektu ievietošana dažādās kastēs – katrai šādai ievietošanai atbilst funkcija no m elementu kopas uz n elementu kopu, tāpēc variantu skaits ir $\overline{A}_n^m$.

Identisku objektu ievietošana dažādās kastēs – katrai šādai ievietošanai atbilst n-multikopas m-apakšmultikopa, tātad variantu skaits ir $\overline{C}_n^m = C_{m+n-1}^m$.

Dažādu objektu ievietošana identiskās kastēs – katrai šādai ievietošanai atbilst m elementu lielas kopas sadalījums ne vairāk kā n apakškopās. Ar $\left\{ {j \atop i} \right\}$ vai $S(j,i)$ apzīmēsim j elementus lielas kopas dažādu sadalījumu skaitu i netukšās apakškopās. Definēsim arī $S(n,0) = \begin{cases} 0, & ja\ n \neq 0 \\ 1, & ja\ n = 0 \end{cases}$.

Kopējais variantu skaits šajā uzdevumā ir $\sum_{i=1}^{n} S(m,i)$.

Jāpiebilst, ka nav zināma vienkārša formula skaitļiem $S(j,i)$, tos sauc par *Stirlinga apakškopu skaitļiem* vai *otrā veida Stirlinga skaitļiem.*

Atsevišķi definējami speciālgadījumi – S(n,m), ja n<m, S(n,0)=0, S(0,0)=1, S(n,n)=1, S(n,1)=1.

Pārbaudīt, ka S(4,2)=7, S(4,3)=6, S(5,2)=15.

Var redzēt, ka $S(n,n-1) = C_n^2$, $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$.

Visu m elementu lielas kopas sadalījumu skaitu netukšās apakškopās sauksim par *m-to Bella skaitli* un apzīmēsim ar B_m.

Identisku objektu ievietošana identiskās kastēs – katrai šādai ievietošanai atbilst naturāla skaitļa m izteikšana ne vairāk kā n naturālu skaitļu summā, kopējo variantu skaitu apzīmēsim ar $p_n(m)$.

Arī šajā gadījuma vienkārša formula skaitļiem $p_n(m)$ nav zināma.

Naturāla skaitļa n izteikšanu naturālu skaitļu summā mēs sauksim par tā *sadalījumu*, apzīmēsim sadalījumu skaitu ar $p(n)$ un sauksim to par *n-to sadalījuma skaitli*.

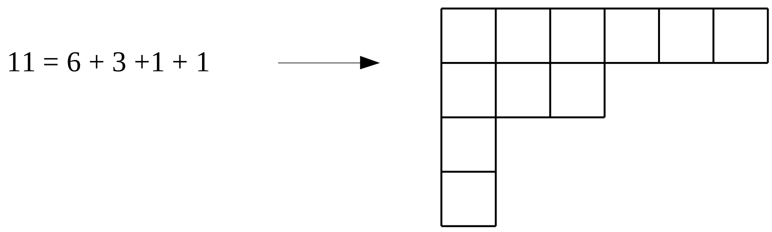
p(0)=1, p(1)=1, p(2)=2, p(3)=3,
p(4)=5, p(5)=7.

Parasti skaitļa n sadalījumu uzdod kā monotonu, piemēram, nedilstošu, naturālu skaitļu virkni $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$, kas apmierina nosacījumu $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.
Sadalījumu var definēt arī kā vienādojuma

$$x_1 + 2x_2 + \ldots m x_m = n$$

atrisinājumu nenegatīvos skaitļos, šajā gadījumā x_i nozīmē skaitļa i multiplicitāti jeb kārtu sadalījumā.

Sadalījumus var arī vizualizēt izmantojot *Janga diagrammas*: ja ir dots sadalījums $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, kur $n_i \geq n_j$, ja $i > j$, tad šādu sadalījumu uzdosim kā kreisajā malā nolīdzinātu tabulu ar mainīga garuma rindām, kur i-tā rindas satur n_i rūtiņas.



Zīm. 2.4. – sadalījuma Janga diagrammas piemērs.

Katram sadalījumam var konstruēt *duālo sadalījumu*, kas atbilst transponētajai (simetriskajai attiecībā pret diagonāli, kas iziet no augšējā kreisā stūra) Janga diagrammai. Zīmējuma 2.4. piemēra duālais sadalījums ir 11=4+2+2+1+1+1. Tā kā transponēšana ir bijektīva operācija, tad saskaņā ar vienlieluma likumu varam iegūt šādu rezultātu: naturāla skaitļa n to sadalījumu skaits, kuros katrs saskaitāmais nepārsniedz m, ir vienāds ar to sadalījumu skaitu, kuros ir ne vairāk kā m saskaitāmie.

VIENĀDOJUMA $x_1 + ... + x_n = m,\ m \in N$
ATRISINĀJUMI VESELOS SKAITĻOS

Arī šim uzdevumam var būt dažādas variācijas.

Nenegatīvu atrisinājumu skaits – katram šādam atrisinājumam atbilst n-multikopas m-apakšmultikopa, tātad kopējais variantu skaits ir $\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m$.

Pozitīvu atrisinājumu skaits – katram šādam atrisinājumam atbilst nenegatīvs atrisinājums vienādojumam $x_1 + ... + x_n = m - n$, tātad variantu skaits ir
$$\overline{C}_n^{\,m-n} = C_{m-1}^{m-n} = C_{m-1}^{n-1}.$$

No apakšas ierobežotu nenegatīvu atrisinājumu skaits. Meklēsim atrisinājumus ar īpašību $0 \le a_i \le x_i$ – katram šādam atrisinājumam atbilst nenegatīvs atrisinājums vienādojumam $x_1 + ... + x_n = m - (a_1 + ... + a_n)$. Apzīmēsim $a_1 + ... + a_n$ ar S, tad variantu skaits ir
$$\overline{C}_n^{\,m-S} = C_{n+m-S-1}^{m-S} = C_{n+m-S-1}^{n-1}.$$

Augošu atrisinājumu skaits. Meklēsim atrisinājumus ar īpašību $0 \le x_1 \le ... \le x_n$. Katram šādam atrisinājumam atbilst skaitļa m sadalīšana ne vairāk kā n pozitīvu saskaitāmo summā, tātad kopējais variantu skaits ir $p_n(m)$.

IESLĒGŠANAS-IZSLĒGŠANAS PRINCIPS (SIETA PRINCIPS)

Šo metodi pielieto, ja ir jāatrod elementu skaits vairāku tādu kopu apvienojumā, kurām ir kopīgi elementi.

Ieslēgšanas-izslēgšanas princips ir summas likuma vispārinājums uz gadījumu, kad ir dots kopas pārklājums, nevis sadalījums. Atgādināsim, ka summas likums saka, ka

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

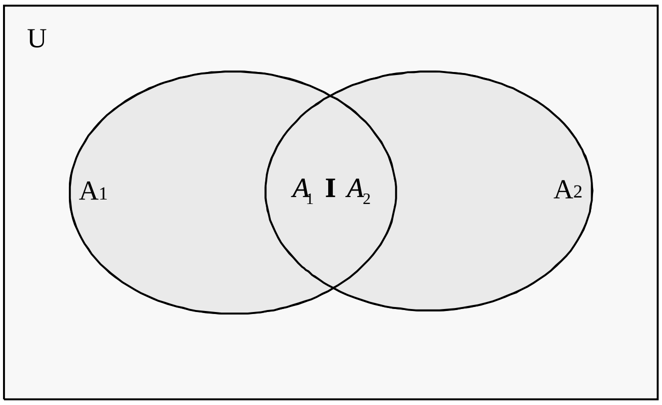
ja $A_i \cap A_j = \varnothing$ dažādiem indeksiem.

Šajā nodaļā mēs nedaudz vispārināsim skaitīšanas ideju, atļaujot skaitīt elementus arī ar negatīvu zīmi: ja ir dotas divas galīgas kopas A un B, tad starpību $|A| - |B|$ var interpretēt kā tādas skaitīšanas rezultātu, kurā katrs kopas A elements tiek skaitīts parastajā nozīmē (ar + zīmi), bet katrs kopas B elements tiek skaitīts negatīvā nozīmē (ar – zīmi).

Sāksim izstrādāt šo metodi apskatot speciālgadījumus, kad kopu skaits ir 2 un 3. Atradīsim elementu skaitu divu kopu A_1, A_2 apvienojumā, ja ir zināms elementu skaits katrā no kopām un to šķēlumā. Viegli redzēt, ka

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \qquad (2.9)$$

Loceklis $-|A_1 \cap A_2|$ formulas labajā pusē ir tāpēc, lai kompensētu summā $|A_1| + |A_2|$ divas reizes skaitītos šķēluma elementus. Otrs veids kā pierādīt formulu (2.9) ir šāds. Ievērosim, ka $A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 \setminus A_1)$ un $(A_1 \cap A_2) \cap (A_2 \setminus A_1) = \varnothing$. Saskaņā ar summas likumu iegūstam, ka $|A_2| = |A_1 \cap A_2| + |A_2 \setminus A_1|$. Ievērosim, arī, ka $|A_2 \setminus A_1| = |A_1 \cup A_2| - |A_1|$, tāpēc $|A_2| = |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cup A_1| - |A_1|$ un formula (2.9) ir pierādīta.



Zīm. 2.4. – divu kopu apvienojums.

Formulu (2.9) var pārrakstīt ekvivalentā veidā $|A_1 \cup A_2| + |A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2|$.

Atradīsim elementu skaitu trīs kopu A_1, A_2, A_3 apvienojumā, ja ir zināms elementu skaits katrā no kopām un to šķēlumos.

Pirmajā tuvinājumā šo skaitu varētu pieņemt vienādu ar $|A_1| + |A_2| + |A_3|$, bet tad elementi jebkuru divu kopu šķēlumos tiks skaitīti divas reizes, tāpēc nākošajā tuvinājumā uzskatīsim, ka elementu skaits trīs kopu apvienojmā ir vienāds ar

$$|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|.$$

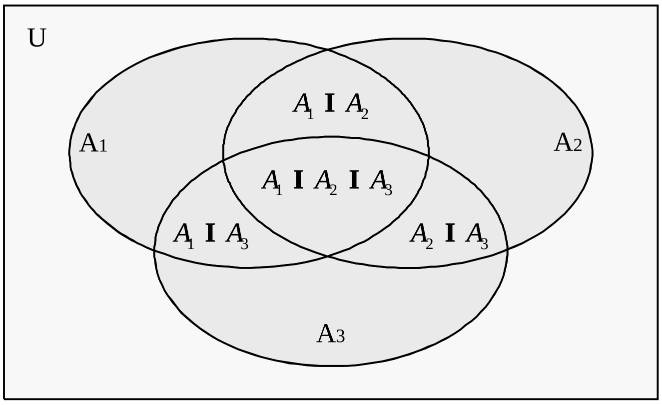
Savukārt tagad ir problēmas ar elementiem visu trīs kopu šķēlumā, jo katrs no tiem vispār netiek skaitīts (tiek skaitīs ar multiplicitāti 0). Var redzēt, ka

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - \\ - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Līdzīgi tam, kā tas bija 2 kopu gadījumā, arī šoreiz papildus locekļu summu

$$-|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

var interpretēt kā kompensējošo labojumu, lai panāktu to, ka katrs elements labajā pusē tiek algebriski (ņemot vērā skaitīšanas zīmi) skaitīts tieši vienu reizi.



Zīm. 2.5. – trīs kopu apvienojums.

Tagad apskatīsim vispārīgu gadījumu. Pieņemsim, ka ir dota galīga indeksu kopa $U = \{1, \ldots, n\}$ un galīga kopa A_i katram indeksam i. Katrai netukšai U apakškopai I definēsim $A_I = \bigcap_{i \in I} A_i$. Ir spēkā šāda teorēma.

TEORĒMA 2.2 $\left| \bigcup_{i \in U} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq U} (-1)^{|I|+1} |A_I|$, citos apzīmējumos -

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + \\ + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| \qquad (2.11)$$

PIERĀDĪJUMS Saskaitāmo $\pm|X|$ domāsim kā kopas X elementu skaitīšanu ar atbilstošo zīmi. Pierādīsim, ka katrs elements, kas pieder vismaz vienai kopai A_i, labajā pusē tiek skaitīts tieši vienu reizi, tas nozīmēs, ka ir spēkā pierādāmā vienādība. Pieņemsim, ka elements a pieder tieši k kopām A_i, $1 \le k \le n$. Atzīmēsim, ka tas nozīmē, ka a pieder C_k^2 divu kopu A_i šķēlumiem, C_k^3 trīs šādu kopu šķēlumiem, ..., C_k^m m kopu šķēlumiem, ..., vienam (= C_k^k) k kopu šķēlumam. Cik reizes šis elements a tiek skaitīts labajā pusē? Pirmajā summā tas tiek skaitīts $k = C_k^1$ reizes, otrajā summā tas tiek skaitīts C_k^2 reizes (vienu reizi katrā no šķēlumiem tipa $A_i \cap A_j$), ..., m- tajā summā tas tiek skaitīts C_k^m reizes (vienu reizi katrā no šķēlumiem, kuram tas pieder). Tātad kopā elements a tiek skaitīts

$$C_k^1 - C_k^2 + C_k^3 - \ldots = 1 - (1 - C_k^1 + C_k^2 - \ldots) = 1 - (1-1)^k = 1$$

reizes. Katrs elements pierādāmās formulas abajā pusē tiek skaitīts tieši vienu reizi un teorēma ir pierādīta *QED*

Formulu (2.11) var pierādīt arī izmantojot matemātiskās indukcijas principu ar argumentu n. Pieņemsim, ka ir spēkā formula

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots +$$
$$+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

un apskatīsim lielumu $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}|$. Redzam, ka

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cup A_{n+1}| =$$
$$= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}| =$$
$$= |A_1 \cup \ldots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cap A_{n+1}) \cup (A_2 \cap A_{n+1}) \cup \ldots \cup (A_n \cap A_{n+1})|$$

Izmantojot indukcijas pieņēmumu tagad var pārveidot vienādības labo pusi un pārliecināties par (2.11) pareizību.

Ieslēgšanas-izslēgšanas formulas labās puses dažus pirmos locekļus var izmantot kreisās puses novērtēšanai no vienas vai otras puses.

Piemēram, var redzēt, ka

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \le \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

(*Būla nevienādība*), tāpēc, ka nevienādības labās puses summā apvienojuma elementi, kas pieder vairāk kā vienai kopai, tiek skaitīti vairāk kā vienu reizi.

Otrs piemērs –

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| \ge \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j|$$

(*Bonferroni nevienādība*), šī nevienādība ir spēkā, tāpēc, ka labajā pusē apvienojuma elementi, kas pieder tieši vienai vai tieši divām kopām, tiek skaitīti pareizi, bet elementi, kas pieder vairāk kā divām kopām, tiek skaitīti ar negatīvu zīmi. Izrādās, ka šīs nevienādības var vispārināt.

TEORĒMA 2.4 Visiem nepāra naturāliem $k \leq n$ izpildās

$$|\bigcup_{i \in U} A_i| \leq \sum_{\emptyset \neq I \subseteq U : |I| \leq k} (-1)^{|I|+1} |A_I|.$$

Visiem pāra naturāliem $k \leq n$ izpildās

$$|\bigcup_{i \in U} A_i| \geq \sum_{\emptyset \neq I \subseteq U : |I| \leq k} (-1)^{|I|+1} |A_I|.$$

PIERĀDĪJUMS. Patstāvīgs darbs lasītājam. *QED.*

PIEMĒRS Svarīgs uzdevums, kuru var atrisināt ar ieslēgšanas-izslēgšanas principu ir uzdevums par sirjektīvu funkciju skaitīšanu. Cik ir sirjektīvu funkciju no n elementus lielas kopas $X = \{1, ..., n\}$ uz m elementus lielu kopu $Y = \{1, ..., m\}$?

Risinot šo uzdevumu, mums būs jāizmanto skaitīšana izmantojot papildinājumu un ieslēgšanas-izslēgšanas princips.

Visu funkciju skaits no X uz Y ir vienāds ar $\overline{A}_m^n = m^n$. Skaitīsim, cik ir nesirjektīvu funkciju. Apzīmēsim ar F_i to funkciju kopu, kuru attēls nesatur elementu $i \in Y$ un ar F_I - to funkciju kopu, kuru attēls nesatur nevienu indeksu $i \in I \subseteq Y$, viegli redzēt, ka $F_I = \bigcap_{i \in I} F_i$. Atradīsim elementu skaitu kopā F_I - funkcijas no šīs kopas ir visas funkcijas no X uz Y\I, kuru skaits ir vienāds ar $\overline{A}^n_{m-|I|} = (m - |I|)^n$. Visu nesirjektīvo funkciju kopa ir vienāda ar $\bigcup_{i\in Y} F_i$, tāpēc, ka katrai nesirjektīvai funkcijai attēlā iztrūkst vismaz viens kopas Y elements. Saskaņā ar ieslēgšanas-izslēgšanas principu

$$|\bigcup_{i\in Y} F_i| = \sum_{\varnothing\neq I\subseteq Y} (-1)^{|I|+1} |F_I| = \sum_{\varnothing\neq I\subseteq Y} (-1)^{|I|+1} (m - |I|)^n .$$

Katram naturālam skaitlim $0 < i \le m$ to apakškopu I skaits, kas apmierina nosacījumu |I|=i, ir vienāds ar C^i_m. Ņemot vērā šo faktu mēs varam summā pārgrupēt saskaitāmos un pāriet uz summēšanas indeksu i:

$$|\bigcup_{i\in Y} F_i| = \sum_{0<i\le m} (-1)^{i+1} C^i_m (m-i)^n .$$

Ja visu funkciju skaits ir m^n un nesirjektīvo funkciju skaits ir $\sum_{0<i\le m} (-1)^{i+1} C^i_m (m-i)^n$, tad sirjektīvo funkciju skaits ir

$$m^n - \sum_{0<i\le m} (-1)^{i+1} C^i_m (m-i)^n = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i C^i_m (m-i)^n . \quad (2.14)$$

Izdarot summēšanas indeksa substitūciju $i \to m - i$, iegūsim, ka sirjektīvu funkciju skaits ir vienāds arī ar $\sum_{i=1}^{m} (-1)^{m-i} C^i_m i^n$.

Kā speciālgadījumu, kad n=m, iegūstam formulu

$$n! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (n-i)^n , \qquad (2.15)$$

kas lieliski ilustrē principu „skaitīšana divos dažādos veidos”!

PIEMĒRS Cik ir tādu n elementu lielas kopas $\{1,...,n\}$ permutāciju f, kas nesaglabā nevienu elementu (citiem vārdiem sakot, $f(x) \neq x, \ \forall x$)?

Apzīmēsim ar U_n - visu permutāciju kopu, ar F_n - permutāciju bez fiksētiem punktiem kopu, ar G_n - to permutāciju kopu, kuras fiksē vismaz vienu elementu, ar A_i - to permutāciju kopu, kuras fiksē ***i-to*** elementu.

Redzam, ka $|U_n| = |F_n| + |G_n|$, tātad $|F_n| = |U_n| - |G_n|$. Redzam ar $G_n = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. Varam pielietot ieslēgšanas-izslēgšanas formulu. Tā kā

$$|A_i| = (n-1)!, \ |A_i \cap A_j| = (n-2)!, \ ..., |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

tad iegūstam, ka

$$|G_n| = |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = C_n^1 (n-1)! + C_n^2 (n-2)! + ... + C_n^n 0! = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} C_n^i (n-k)!$$

un

$$|F_n| = |U_n| - |G_n| = n! - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} C_n^i (n-i)! = n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{1}{i!}.$$