KOMBINATORIKA

IEVADS

Kombinatorika (no latīņu valodas saknes ar nozīmi "apvienošana") – matemātikas nozare, kas nodarbojas ar saliktu diskrētas dabas objektu (kopu elementu, apakškopu, virkņu, u.c.) pētīšanu -

1) skaitīšanu;

2) novērtēšanu (asimptotikas);

3) salīdzināšanu;

4) vispārīgām skaitīšanas metodēm un likumsakarībām.

Matemātikā skaitīšanu parasti saprot kā empīriskā, fizikālā skaitīšanas procesa paātrināšanu ar matemātiskām metodēm – formulu vai ātrākas darbības algoritmu iegūšanu.

Tipisks kombinatorikas uzdevums ir skaitīt noteikta veida objektus, kas tiek kvantitatīvi raksturoti ar vienu vai varākiem parametriem, kas ir veseli skaitļi. Šādā gadījumā atbilde ir vairāk vai mazāk izsmeļoša informācija par objektu skaitu –

1) slēgta formula elementāras funkcijas veidā;

2) aprēķināšanas algoritms (formula) galīgas summas vai reizinājuma veidā;

3) aprēķināšanas algoritms vispār (ātrāks nekā izsmeļoša skaitīšana);

4) matemātiskās (algebriskās, analītiskās u.c.) īpašības u.c.

Par kombinatorikas sastāvdaļu uzskata arī

1) diskrētās matemātikas formulu vienkāršošanu;

2) speciāla veida diskrētu objektu konstruēšanu un

3) skaitīšanas rezultātu izmantošanu matemātisku izteikumu pierādījumos.

Kombinatorikas pirmsākumi ir meklējami Seno Laiku un Agro Viduslaiku matemātiķu darbos, bet arī mūsdienās kombinatorika ir aktīvas pētnieciskas darbības arēna ar daudzām interesantām neatrisinātām problēmām.

Priekšzināšanas

Priekšzināšanas kombinatorikas apgūšanai ietver šādus matemātikas pamatjēdzienus, kas parasti tiek apgūti diskrētās matemātikas pamatkursā:

1) kopa, apakškopa;
2) multikopa, n-multikopa, apakšmultikopa;

3) virkne,
4) operācijas ar kopām,
5) kopu tiešais reizinājums,
6) injektīva, surjektīva, bijektīva funkcija.

Faktoriāls:

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1.$$

Lietderīgas ir arī reālo skaitļu funkcijas

$[x]$ (skaitļa veselā daļa) un

$\lceil x \rceil$ (skaitļa „griesti” – mazākais veselais skaitlis, kas ir lielāks nekā x).

Atgādināsim arī šādu kopu teorijas pamatfaktu: galīgas kopas apjomu (ekvivalences klasi attiecībā uz kopu vienlieluma attieksmi) var identificēt ar kopas elementu skaitu.

PIEMĒRS Ir dots veselu skaitļu masīvs $(a_1, \ldots, a_{1000})$. Risinot kādu uzdevumu ar datoru, algoritmā ir jāapskata visi iespējamie sakārtotie pāri (a_i, a_j). Cik laika tam ir nepieciešams, ja viena pāra apstrādāšana aizņem 1 sekundi? Cik atmiņas būs vajadzīgs visu pāru saglabāšanai, ja katrs skaitlis aizņem 1 baitu?

KOMBINATORIKAS PAMATPRINCIPI

Jebkura kombinatorikas uzdevuma risināšana sastāv no diviem svarīgiem soļiem:

1) skaitāmo objektu *uzdošanas (kodēšanas)* ērtos matemātiskos terminos;

2) *kombinatorikas metožu pielietošanas* uzdevuma atrisināšanai.

Parasti kombinatorikas objekti var tikt uzdoti vienkāršos diskrētās vai nepārtrauktās matemātikas terminos kā

1) virknes fiksētā alfabētā ar noteiktām īpašībām vai

2) apakškopas ar noteiktām īpašībām fiksētā kopā.

Diezgan bieži tiek izmantotas *binārās virknes* (virknes alfabētā {0,1}).

Kodēšana ar virkņu palīdzību ir iespējama arī tad, ja skaitāmie objekti nav lineāri, piemēram, ja tos ērtāk ir uzdot kā skaitļu tabulas vai ģeometriskus objektus. Šādā gadījumā ir nepieciešams pētāmos objektus attēlot virkņu veidā.

Papildus tam tiek izmantota arī dažādas ģeometriskas kodēšanas metodes, piemēram, virkņu vai apakškopu kodēšana plaknes vai telpas līniju veidā.

Pareiza skaitāmo objektu kodēšana ir svarīgs un bieži vien pat kritisks solis uzdevuma atrisināšanā.

Skaitāmie objekti parasti ir atkarīgi no viena vai vairākiem diskrētiem parametriem, kas pieņem vērtības naturālo skaitļu kopā.

Kombinatorikas uzdevumi var būt saistīti gan ar tādu objektu skaitīšanu, kuru sastāvdaļas tiek kodētas kā "iezīmētas", gan arī ar objektiem, kuru sastāvdaļas nav atšķiramas – "neiezīmētas".

PIEMĒRS Bināras virkne ar garumu n un m vieniniekiem =

1) n-kopas m-apakškopas bitu vektors;
2) skaitļa n+1 kompozīcijas kods ar m+1 saskaitāmo (kompozīcija – naturāla skaitļa pieraksts sakārtotas naturālu skaitļu summas veidā);
3) maršruta no (0,0) līdz (n,m) ar atļautiem soļiem (0,1) un (1,0) kods.

PIEMĒRS Ir dots kubs ar izmēriem $n \times n \times n$, kas sastāv no n^3 mazākiem kubiem ar izmēriem $1\times1\times1$. Šajā kubā divi cilvēki spēlē spēli „krustiņi-nullītes". Cik ir dažādu vinnējošo kubiņu virkņu?

Lai eleganti atrisinātu šo uzdevumu, iekodēsim vinnējošās virknes šādā veidā. Konstruēsim dotā kuba „apvalku" – kuba ar izmēriem $(n+2)\times(n+2)\times(n+2)$ un dotā kuba starpību. Katra vinnējošā virkne „caururbj" apvalku tieši divās vietās, tātad vinnējošo virkņu skaits ir divreiz mazāks nekā apvalka kubiņu skaits, tātad atbilde ir $\frac{(n+2)^3 - n^3}{2}$. Šajā gadījumā vinnējošo virkņu kodēšana tiek veikta ar apvalka palīdzību.

PIEMĒRS Izmantojot permutācijas sadalījumu ciklos, to var iekodēt kā ciklu apvienojumu.

Zemāk mēs uzskaitīsim vienkāršākos skaitīšanas principus, uz kuriem balstās kombinatorika.

Sāksim ar šādu vienkāršu novērojumu. Galīgas kopas A elementu skaitu |A| var interpretēt kā kopas A elementu skaitīšanas rezultātu, kurā katrs elements tiek skaitīts vienu reizi (ar svaru 1): $|A| = \sum_{a \in A} 1$.

REKURSIJAS (SKALDI UN VALDI) LIKUMS.

Risinot kombinatorikas uzdevumus, ir lietderīgi sadalīt skaitāmos objektus mazākās daļās, atkārtojot šo soli vairākas reizes, kamēr skaitīšanas uzdevums kļūst ļoti vienkāršs. Plaši izplatīts šī principa veids ir *rekurento sakarību metode*, kurai šajā kursā ir veltīta nodaļa.

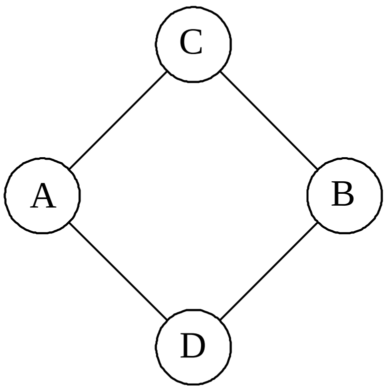
SUMMAS LIKUMS

Ja $A = A_1 \cup A_2$, *un* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, *tad* $|A| = |A_1| + |A_2|$.

Šo likumu izmanto, ja skaitāmo objektu kopu var sadalīt vairākās šķirtās daļās, katrā no kurām šos objektus var skaitīt neatkarīgi un, iespējams, pat ar dažādām metodēm.

Summas likumu var vispārināt arī uz vairāku šķirtu kopu apvienojuma gadījumu: ja $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ un $A_i \cap A_j = \emptyset$ visiem $i \neq j$, tad $|A| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$.

PIEMĒRS Ja no pilsētas A var aizbraukt uz pilsētu B caur pilsētām C vai D N_C vai N_D veidos, tad kopējais ceļu skaits no A uz B ir vienāds ar $N_C + N_D$.



Zīm. 2.1. – summas likuma pielietošanas ilustrācija.

Pielietojot summas likumu, var sastapties ar dažādiem iespējamo variantu skaita sadalījumiem:

1) varianti var būt sadalīti “vienmērīgi”;

2) dažas kopas A_i ir jāuzskata par īpašiem speciālgadījumiem, kuros variantu skaits ir būtiski mazāks nekā citās kopā.

Ir uzdevumi, kuros elementi dažādās kopās A_i ir jāskaita ar dažādām metodēm.

Ir lietderīgi izmantot *gadījumu pārlases koku*.

REIZINĀŠANAS LIKUMS

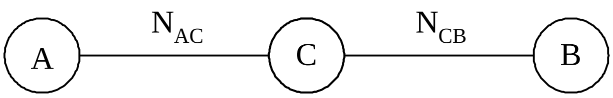
Ja $A = B \times C$ *, tad* $|A| = |B| \cdot |C|$.

Šo likumu izmanto, ja skaitāmos objektus var uzdot kā virknes, kuru elementi var tikt skaitīti neatkarīgi viens no otra.

Kopas B un C var būt gan fiksētas, gan arī atkarīgas viena no otras.

Reizināšanas likumu var vispārināt arī uz vairāku kopu tiešā reizinājuma gadījumu: ja $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, tad $|A| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|$.

PIEMĒRS Pieņemsim, ka visi ceļi no A uz B iet caur C. Ja no A uz C var aizbraukt N_{AC} veidos un no C uz B var aizbraukt N_{CB} veidos, tad no A uz C var aizbraukt $N_{AC} \times N_{CB}$ veidos, jo katru ceļu no A uz C var aprakstīt kā sakārtotu elementu pāri (u, v), kur u ir ceļš no A uz C un v ir ceļš no C uz B.



Zīm. 2.2. – reizināšanas likuma pielietošanas ilustrācija.

DALĪŠANAS LIKUMS

Ja kopa A ir sadalīta m elementus lielās apakškopās, tad šādu apakškopu skaits ir vienāds ar $\frac{|A|}{m}$.

Šo likumu izmanto, ja skaitāmo objektu kopu var sadalīt vienāda un zināma lieluma apakškopās, kuru skaitu var noteikt relatīvi viegli.

Dalīšanas likumu var formulēt izmantojot funkcijas: ja ir dotas divas galīgas kopas A un B un funkcija $f : A \to B$ ar īpašību $|f^{-1}(b)| = m$ katram $b \in B$ (citiem vārdiem sakot, tieši m elementi tiek sūtīti uz katru kopas B elementu), tad $|A| = |B| \cdot m$.

PIEMĒRS Cik ir divu elementu apakškopu kopā, kas satur 10 elementus?

No sākuma atradīsim, cik ir sakārtotu dažādu elementu pāru 10 elementu kopā.
Tā kā sakārtots dažādu elementu pāris ir elements kopas Dekarta kvadrātā, tad saskaņā ar reizināšanas likumu šādu pāru skaits ir 10(10-1)=90.
Katru divu elementu apakškopu var sakārtot divos veidos: pirmais veids ir tāds, ka pirmais elements ir mazāks nekā otrais un otrais – tāds, ka pirmais elements ir lielāks nekā otrais.
Tādējādi visa sakārtoto pāru kopa ir sadalīta divās vienādās daļās un meklējamais apakškopu skaits ir vienāds ar elementu skaitu jebkurā no šīm daļām. Atbilde ir vienāda ar $\frac{90}{2}=45$.

VIENLIELUMA LIKUMS

Ja eksistē bijektīva (savstarpēji viennozīmīga) funkcija no galīgas kopas A uz galīgu kopu B, tad $|A|=|B|$.

Šo likumu izmanto, ja dotajā kopā B ir grūti saskaitīt elementus, bet eksistē kāda cita kopu A, kuras elementus ir iespējams relatīvi viegli saskaitīt, un bijektīva funkcija no A uz B .

Vienlieluma likumu sauksim arī par *skaitīšanu ar bijekcijas palīdzību*.

Pielietojot šo metodi, ir iespējami šādi gadījumi:

1) kopa B pēc savas dabas būtiski atšķiras no kopas A, tādējādi kopas B ieviešana būtiski izmaina uzdevuma risināšanas gaitu;

2) kopa B atšķiras no kopas A ar tādām detaļām, kas tikai palīdz atrisināt uzdevumu, neizmainot to būtiski.

PIEMĒRS Pieņemsim, ka katram studentam pieder tieši viena cepure. Lai saskaitītu studentus, pietiek saskaitīt to cepures un, otrādi, lai saskaitītu cepures, pietiek saskaitīt studentus.

PIEMĒRS Katrai kopas $\{1,...,n\}$ permutācijai var viennozīmīgi piekārtot tās sadalījumu neatkarīgajos ciklos un, otrādi, katram n elementu kopas sadalījumam permutāciju ciklu kopā var viennozīmīgi piekārtot atbilstošo permutāciju. Ir pierādīts, ka n elementu lielas kopas permutāciju skaits ir vienāds ar n elementus lielas kopas permutāciju ciklu kopu skaitu.

Vienlieluma likumu vispārināt, ja ir dota patvaļīga funkcija $f : A \to B$.

TEORĒMA 2.1 Ja A un B ir galīgas kopas un f ir funkcija no A uz B, tad

1) ja f ir injektīva funkcija, tad $|A| \le |B|$,

2) ja f ir sirjektīva funkcija, tad $|A| \ge |B|$,

3) ja f ir bijektīva funkcija, tad $|A|=|B|$.

PIERĀDĪJUMS Visi apgalvojumi seko no funkciju speciālgadījumu definīcijām. *QED*

PIEMĒRS Pieņemsim, ka katram studentam pieder ne vairāk kā viena cepure. Lai novērtētu studentu skaitu no apakšas, pietiek saskaitīt cepures. Lai novērtētu cepuru skaitu no augšas, pietiek saskaitīt studentus. Šajā gadījumā kopa A ir cepuru kopa, kopa B ir studentu kopa un funkcija f katrai cepurei piekārto tās īpašnieku, viegli redzēt, ka f ir injektīva funkcija.

SKAITĪŠANA IZMANTOJOT PAPILDINĀJUMU.

Šo metodi izmanto, ja ir vieglāk noteikt elementu skaitu sākotnējās kopas papildinājumā nekā sākotnējā kopā, kuras elementus ir uzdots saskaitīt.

Apzīmēsim universu ar U, tad $U = A \cup (U \setminus A)$, $|U| = |A| + |U \setminus A|$ un

$$|A| = |U| - |U \setminus A|.$$

Ja kopa A tiek definēta ar kādu nosacījumu P, tad kopa $U \setminus A$ tiek definēta ar nosacījumu $\neg P$ un šo kopu elementu skaitīšanas grūtības pakāpe var būt dažāda.

(kopas var attiekties vien pret otru kā, piemēram, apgabals un tā virsma).

PIEMĒRS Izmantojot papildināšanas metodi atradīsim, cik ir divu elementu virkņu (sakārtotu pāru) kopā, kas satur 10 elementus, kurās abi elementi ir dažādi.
Saskaņā ar reizināšanas likumu, ir $10 \cdot 10$ dažādu sakārtotu pāru, no kuriem 10 pāros abi elementi ir vienādi. Sakārtotā elementu pārī elementi var būt vai nu vienādi, vai arī dažādi, tāpēc pāru skaits ar dažādiem elementiem ir vienāds ar $100 - 10 = 90$.

PIEMĒRS Ir dota pilsēta, kuras pašvaldība plāno uzsākt ielu remontu. Ir zināms, ka 98% ielu ir jāremontē. Kā uzdot remontējamās ielas?
Acīmredzams risinājums ir šāds: pārskaitīt ielas, kuras NAV jāremontē.

SKAITĪŠANA DIVOS DAŽĀDOS VEIDOS

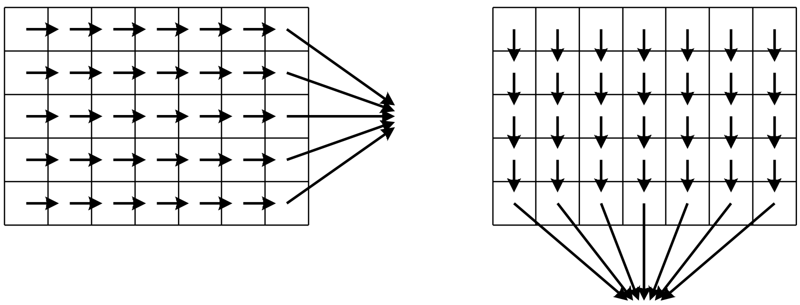
Šo metodi izmanto, lai pierādītu formulas. Skaitot vienas kopas elementus divos vai vairāk veidos, atbilde, protams, ir viena un tā pati, bet tā var būt izteikta un interpretēta dažādos veidos, kurus analizējot var iegūt interesantus kombinatoriskus rezultātus. Par šo metodi var domāt arī kā par saskaitāmo maiņu summā.

Klasisks šī principa pielietošanas piemērs ir skaitļu tabulas (matricas) elementu skaitīšana. Skaitļu tabulas elementu summu var atrast divos veidos:

1) no sākuma saskaitīt skaitļu summu katrā rindā, pēc tam atrast visu šādi iegūto skaitļu (katras rindas locekļu summu) summu;

2) no sākuma saskaitīt skaitļu summu katrā kolonnā, pēc tam atrast visu šādi iegūto skaitļu (katras kolonnas locekļu summu) summu.

Ir skaidrs, ka abi paņēmieni dos vienu rezultātu, jo summa nemainās, ja saskaitāmos maina vietām.



Zīm. 2.3 – matricas elementu skaitīšana divos dažādos veidos.

DIRIHLĒ PRINCIPS

Risinot kombinatorikas uzdevumus nereti nākas noteikt cik daudzi no apskatāmajiem objektiem apmierina kādu īpašību. Šī uzdevuma atrisināšanai ir lietderīgi domāt par doto īpašību kā par objekta ievietošanu kastēs vai kā par objektu kopas attēlošanu uz īpašības vērtību kopu, šādās interpretācijās objektu skaits ar doto īpašību ir vienāds ar to skaitu kastē vai ar īpašības vērtības inversā attēla elementu skaitu. Atbilstošo kombinatorikas principu sauksim par *Dirihlē principu*, par godu franču matemātiķim L.Dirihlē.

Dirihlē princips ("baložu būru princips", "pigeon hole principle") –

***vienkāršākajā (klasiskajā) formā** - sadalot $n+1$ elementus lielu kopu n apakškopās, vismaz viena apakškopa satur vismaz 2 elementus (saliekot $n+1$ baložus n būros, vismaz vienā būrī ir vismaz 2 baloži),*

***klasiskā forma izmantojot funkcijas**: funkcija no $n+1$ elementus lielas kopas uz n elementus lielu kopu nevar būt injektīva,*

***vispārīgā forma izmantojot funkcijas:** ja A un B ir galīgas kopas un $|A|>|B|$, tad jebkurai funkcijai $f: A \to B$ eksistē divi dažādi elementi $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, kuriem izpildās nosacījums $f(a_1)=f(a_2)$,*

***daļveida formā** - sadalot m elementus lielu kopu k apakškopās, vismaz viena apakškopa satur vismaz $\left\lceil \frac{m}{k} \right\rceil$*

elementus, kur $\lceil x \rceil$ *ir skaitļa* x *"griesti" (mazākais veselais skaitlis, kas nav mazāks kā* x *),*

bezgalīgajā formā – sadalot bezgalīgu kopu galīga skaita apakškopās, vismaz vienā apakškopa būs bezgalīga.

Dirihlē principu izmanto gan kombinatorikā, gan ģeometrijā.

PIEMĒRI Jebkuru astoņu cilvēku kolektīvā ir divi, kas ir dzimuši vienā nedēļas dienā.

Jebkurā 25 cilvēku grupā eksistē 4 cilvēki, kas ir dzimuši vienā nedēļas dienā.

Jebkurā n+1 veselu skaitļu kopā eksistē 2 skaitļi x un y, kuru starpība dalās ar n.

Jebkurā cilvēku kopā eksistē 2 cilvēki, kuriem ir vienāds draugu skaits šajā kopā.

Ja kvadrātā ar malas garumu 2 tiek ievietoti 5 punkti, tad vismaz divi no tiem atrodas attālumā ne lielākā kā $\sqrt{2}$ viens no otra.

PIEMĒRS Jebkurā 10 pozitīvu veselu skaitļu kopā, kas ir mazāki kā 100 eksistē divas šķirtas apakškopas, kurās skaitļu summas ir vienādas.

Maksimāli iespējamā vienas apakškopas elementu summa (tā, lai eksistē ari otra netukša apakškopa) ir 99+98+97+96+95+94+93+92+91=885. Netukšu un īstu apakškopu skaits ir $2^{10}-2$ =1022.

Piekārtosim katrai īstai apakškopai tās elementu summu. Pielietosim Dirihlē principu – eksistē vismaz 2 īstas apakškopas A un B, kurām elementu summas ir vienādas. Ja to šķēlums ir tukšs tad tās arī dod atbildi, ja nē, tad der kopas $A' = A \setminus (A \cap B)$ un $B' = B \setminus (A \cap B)$.

PIEMĒRS *Erdeša-Šekereša teorēma*. Jebkurā n^2+1 dažādu reālu skaitļu virknē eksistē vai nu augoša apakšvirkne ar garumu n+1 vai arī dilstoša apakšvirkne ar garumu n+1.

Dota virkne $X = \{x_1, ..., x_{n^2+1}\}$. Katram $1 \le i \le n^2+1$ atradīsim pāri (a_i, d_i), kur a_i ir maksimālas augošas apakšvirknes garums, sākot no x_i un d_i ir maksimālas dilstošas apakšvirknes garums, sākot no x_i.

Pieņemsim, ka virknē X neeksistē ne augoša, ne dilstoša apakšvirkne ar garumu vismaz n+1 un iegūsim pretrunu.

Pieņēmums nozīmē, ka eksistē ne vairāk kā n^2 dažādu pāru (a_i, d_i), tātad vismaz diviem dažādiem indeksiem i un j to pāri ir vienādi: $(a_i, d_i) = (a_j, d_j)$. Ja $x_i < x_j$, tad garākā augošā apakšvirkne sākot no x_i ir ar garumu vismaz $a_i + 1$

- to veido x_i plus garākā augošā apakšvirkne sākot no x_j. Ir iegūta pretruna.

Līdzīgi pretruna tiek iegūta, ja $x_i > x_j$, tad ir jāskatās dilstošās virknes.