PREDIKĀTU LOĢIKA

Izteikumu sauc par *predikātu*, ja tas ir izteikums, kas ir atkarīgs no mainīgiem lielumiem.

Par predikātiem ir jādomā kā par funkcijām, kuru vērtības apgabals ir patiesumvērtību kopa.

Predikātu piemēri:

$P(u) =$ "u *ir pāra skaitlis*",
$P(u)$ ir patiess apgalvojums, ja u ir pāra skaitlis un aplams, ja u ir nepāra skaitlis;

$Q(u,v) =$ "u *dalās ar* v",
$Q(u,v)$ patiess, ja u dalās ar v, piemēram, $Q(6,2)$ ir patiess, un aplams, ja u nedalās ar v, piemēram, $Q(6,4)$ ir aplams.

Izteikumu un predikātu pielietojumi:

Nosacītās pārejas un ciklu operatori programmēšanā:

"if" ("ja") operators, "while"("kamēr") operators. "until"("līdz") operators

Operācijas ar predikātiem

Par predikāta *konkretizāciju* sauc izteikumu $P(c)$ ar kādu konkrētu argumenta vērtību c.

Par *predikāta* $P(u)$ *noliegumu* sauc predikātu $(\neg P)(u) = (\neg P(u))$.

Par *predikātu* $P(u)$ un $Q(u)$ *konjunkciju* $(P \wedge Q)(u)$, *disjunkciju* $(P \vee Q)(u)$, *implikāciju* $(P \Rightarrow Q)(u)$ un *ekvivalenci* $(P \Leftrightarrow Q)(u)$ sauc predikātus, kas katram u definēti ar formulām

$$(P \wedge Q)(u) = (P(u) \wedge Q(u)),$$
$$(P \vee Q)(u) = (P(u) \vee Q(u)),$$
$$(P \Rightarrow Q)(u) = (P(u) \Rightarrow Q(u)),$$
$$(P \Leftrightarrow Q)(u) = (P(u) \Leftrightarrow Q(u)).$$

Kvantori

Par predikāta $P(u)$ *universālkvantoru* $\forall u\, P(u)$ ("*katram* u *izteikums* $P(u)$ *ir patiess*") sauc visu izteikumu $P(x)$ konjunkciju $\bigwedge_{x \in X} P(x)$, kur x pieņem visas iespējamās vērtības.

Par predikāta $P(u)$ *eksistences kvantoru* $\exists u\, P(u)$ ("*vismaz vienam* u *izteikums* $P(u)$ *ir patiess*") sauc visu izteikumu $P(x)$ disjunkciju $\bigvee_{x\in X} P(x)$, kur x pieņem visas iespējamās vērtības.

Par predikāta $P(u)$ *unitātes kvantoru* $\exists! u\, P(u)$ ("*tieši vienam* u *izteikums* $P(u)$ *ir patiess*") sauc izteikumu, kas ir patiess tad un tikai tad, ja tieši viens no izteikumiem $P(x)$ ir patiess, kad x pieņem visas iespējamās vērtības.

Tāpat kā izteikumu (parastās matemātiskās loģikas) formulas, arī predikātu loģikas formulas ir pareizi jāpieraksta, lai tās varētu viennozīmīgi interpretēt.

Predikātu loģikas alfabēts ir kopa $A=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$, kur $A_1=\{x_1, x_2 ...\}$ ir argumentu (mainīgo) kopa, $A_2=\{P_i^{n_i}\}_{i\in I}$ ir predikātu simbolu kopa, $A_3=\{f_j^{n_j}\}_{j\in J}$ ir funkcionālo simbolu kopa, $A_4=\{a_k\}_{k\in K}$ ir konstanšu kopa, $A_5=\{\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists\}_{k\in K}$ ir loģisko simbolu kopa, $A_6 = \{,,(,)\}$ ir palīgsimbolu kopa. Kopas I, J, K ir galīgas indeksu kopas.

$P_i^{n_i}$ ir n_i argumentu predikāts, $f_j^{n_j}$ ir n_j argumentu Būla funkcija.

Kopu $s = \{A_2, A_3, A_4\}$ sauc par *signatūru.*

Definēsim signatūras s *termus*:

1) mainīgie un konstantes ir termi;
2) ja $t_1,...t_j$ ir termi, tad $f_j^{n_j}(t_1,...,t_j)$ arī ir terms;
3) citu termu nav.

Par s *atomāro formulu* sauksim jebkuru vārdu $P_i^{n_i}(t_1,...,t_i)$, kur $t_1,...t_i$ ir termi.

Definēsim signatūras s *formulas*:

1) jebkura atomāra formula ir formula;

2) ja A un B ir formulas, tad $(\neg A),(A\wedge B),(A\vee B),(A\Rightarrow B),(A\Leftrightarrow B)$ ir formulas;

3) ja A ir formula un x ir mainīgais, tad $\forall x\, A$ un $\exists x\, A$ ir formulas (šajā gadījumā formulas $\forall x\, A$ un $\exists x\, A$ sauc par kvantoru $\forall x$ un $\exists x$ darbības diapazoniem);

4) citu formulu nav.

Argumentu x sauc par *saistītu*, ja tas atrodas kāda kvantora darbības diapazonā. Pretējā gadījumā argumentu sauc par *brīvu*.

Formulu sauc par *pareizi noformētu*, ja katrs kvantors saista vismaz vienu argumentu. Pareizi noformētu formulu, kurā visi argumenti ir saistīt, sauc par *teikumu*.

TEORĒMA (kvantoru pamatīpašības)

1) $\neg(\forall x\, P(x)) \equiv \exists x\, (\neg P)(x)$

2) $\neg(\exists x\, P(x)) \equiv \forall x\, (\neg P)(x)$

3) $(Qx\, P(x)) \wedge R \equiv Qx\, (P(x) \wedge R)$

4) $(Qx\, P(x)) \vee R \equiv Qx\, (P(x) \vee R)$

5)
$$(Q_1 x\, P(x)) \wedge (Q_2 x\, R(x)) \equiv Q_1 x Q_2 y\, (P(x) \wedge R(y))$$

6)
$$(Q_1 x\, P(x)) \vee (Q_2 x\, R(x)) \equiv Q_1 x Q_2 y\, (P(x) \vee R(y))$$

7) $(\exists x\, P(x)) \vee (\exists x\, R(x)) \equiv \exists x\, (P(x) \vee R(x))$

8) $(\forall x\, P(x)) \wedge (\forall x\, R(x)) \equiv \forall x\,(P(x) \wedge R(x))$
9)
$\exists! xP(x) \equiv \exists x(P(x) \wedge (\forall y(P(y) \Rightarrow (x = y))))$
10) $\forall x \forall y\ P(x, y) \equiv \forall y \forall x\ P(x, y)$
11) $\exists x \exists y\ P(x, y) \equiv \exists y \exists x\ P(x, y)$.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs.

Pareizi noformēta formula ir *preneksa normālajā formā (PNF)*, ja visi kvantori ir formulas sākumā un katra kvantora diapazons ir apakšformula, kas atrodas pa labi no tā. Vispārīgā veidā PNF izskatās šādi:

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 ... Q_n x_n\ F\ ,$$

kur visi Q_i ir kvantori, visi argumenti x_i ir dažādi un F ir matemātiskās loģikas formula, kas ir atkarīga no argumentiem x_i un kas nesatur kvantorus (F sauc par *matricu*).

PIEMĒRS Formula $\exists x \forall y\, P(x, y)$ ir PNF, bet formula $\exists x\,(P(x, y) \wedge (\forall y\, P(x, y))$ nav PNF.

Ja visi kvantori Q_i ir universālie kvantori, tad PNF sauc par $\forall$ - formulu, ja visi kvantori ir eksistences kvantori, tad to sauc par $\exists$ - formulu.

Ja eksistē indekss $1 \le i \le n$ tāds, ka visi kvantori Q_k, $1 \le k \le i$ ir eksistences kvantori un visi pārējie kvantori ir universālie kvantori, tad šāda PNF ir *Skolema normālajā formā (SNF)* , šādu formu sauc arī par $\exists\forall$ - formu.

TEORĒMA Jebkura formula ar kvantoriem ir ekvivalenta formulai preneksa normālajā formā.

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim šo teorēma dodot algoritmu, ar kura palīdzību jebkuru predikāti formulu var pārveidot PNF:

1.solis – atbrīvoties no implikācijām un ekvivalencēm tāpat kā izteikumu gadījumā.
2.solis – pielietojot iepriekšējās teorēmas formulas 1) un 2) ienest negācijas pēc predikātiem.
3.solis pielietojot iepriekšējās teorēmas formulas 3) - 9) pārnest kvantorus preneksa formā.

PIEMĒRS Pārveidosim formulu $(\exists x \forall y\ P(x,y)) \Rightarrow (\exists x \forall y\ R(x,y))$ PNF veidā:

$$\neg(\exists x \forall y\ P(x,y)) \vee (\exists x \forall y\ R(x,y)) \equiv$$

$$\equiv (\forall x \exists y (\neg P(x,y))) \vee (\exists x \forall y R(x,y)) \equiv$$

$$\equiv \forall x_1 \exists x_2 ((\exists y \neg P(x_1,y)) \vee (\forall y R(x_2,y))) \equiv$$

$$\equiv \forall x_1 \exists x_2 \exists x_3 \forall x_4 (\neg P(x_1,x_3) \vee R(x_2,x_4))$$

Pareizi noformētu formulu sauc par *atomāru*, ja tajā nav loģikas operāciju. Pretējā gadījumā formulu sauc par *saliktu*.

Par *pirmās kārtas loģiku* sauc tādu formulu pētīšanu, kurās kvantori ir pielietoti matemātiskās loģikas formulām.

Par *otrās kārtas loģiku* sauc tādu formulu pētīšanu, kurās kvantori ir pielietoti attieksmēm matemātiskās loģikas formulu kopā.

PAPILDMATERIĀLS

PREDIKĀTU PIELIETOJUMI MATEMĀTISKO PIERĀDĪJUMU TEORIJĀ UN TEHNIKĀ

Spēja izdarīt loģiski pareizus secinājumus un pietiekoši garas un saskaņotas šādu secinājumu virknes ir svarīga iemaņa, kas ir vajadzīga jebkuram cilvēkam. Vēl jo vairāk šī iemaņa ir vajadzīga tiem, kas ikdienā saskaras ar skaitļošanu un algoritmiem – piemēram, programmētājiem vai inženieriem. Šajā nodaļā mēs apskatīsim vienkāršākos matemātisko pierādījumu teorijas un tehnikas jautājumus. Priekšzināšanas, kas ir nepieciešamas šīs nodaļas apgūšanai ir matemātiskās loģikas pamatjēdzieni – matemātiskie izteikumi, predikāti u operācijas ar tiem, matemātiskās loģikas formulas, Būla funkcijas, to normālās formas. Matemātisko pierādījumu formalizācijas pirmos mēģinājumus veica matemātiķis G.Leibnics 17.gadsimta otrajā pusē, taču sistēmātiska matemātisko pierādījumu kā matemātikas objekta pētīšana sākās 19.gadsimta beigās.

Cilvēka spēja izdarīt pareizus secinājumus un prognozes nākotnes paredzēšanas nolūkā ir augstākās nervu darbības funkcionalitāte, kas ir radusies evolucionārās atlases ceļā. Pamatproblēma, kas katru brīdi ir jārisina dzīviem organismiem, ir šāda – ja ir dota noteikta situācija laikā vai telpā, kāda būs šī situācija vēlākā laika momentā vai citos telpas punktos. Šī pamatproblēma liek definēt un pētīt saliktus izteikumus formā

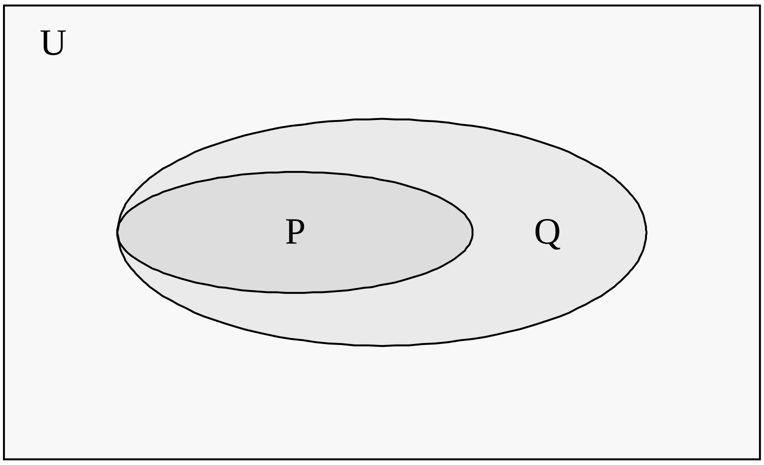
„JA A (ir patiess izteikums), TAD B (arī ir patiess izteikums)”, (1.1)

kur A un B ir izteikumi.

Teiksim, ka predikāts q seko (loģiski seko) no predikāta p (apzīmē ar pierakstu $p \to q$), ja q ir patiess ar visām tām predikāta argumentu vērtībām, ar kurām p ir patiess. Citiem vārdiem sakot, ja predikāts p ir patiess ar kādu argumentu vērtību sarakstu x, tad predikāts q arī ir patiess ar šo vērtību sarakstu x. Šādā gadījumā izteikumu vai predikātu $p \to q$ sauksim par nosacījuma apgalvojumu. Izteikuma (predikāta) $p \to q$ patiesumvērtība tiek definēta kā „patiess”, ja tas ir nosacījuma apgalvojums un „nepatiess” pretējā gadījumā. Var domāt, ka $p \to q = \forall x (p(x) \Rightarrow q(x))$, kur $\Rightarrow$ ir matemātiskās loģikas implikācijas operācija. Predikātu p sauc par nosacījumu vai pietiekamo nosacījumu attiecībā uz q, bet predikātu q - par secinājumu vai nepieciešamo nosacījumu attiecībā uz p.

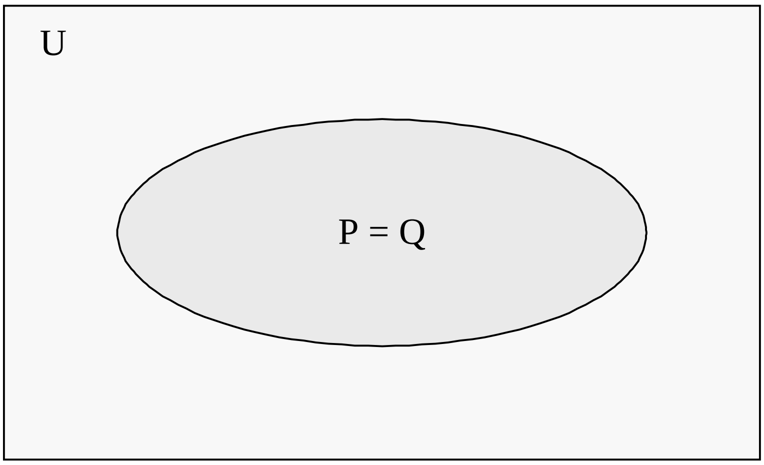
Par nosacījuma apgalvojumu var domāt kā par predikātu, kura argumenti ir predikāti vai kā par attiecību (attieksmi) predikātu kopā, kurā tiek saistīts nosacījums un secinājums. Izteikumu $p \to q$ parasti formulē veidā „ja p, tad q”. Izteikumu $(p \to q) \wedge (q \to p)$ formulēsim veidā „p tad un tikai tad, ja q”, to sauksim par loģisko ekvivalenci un apzīmēsim ar $p \leftrightarrow q$. Nosacījuma apgalvojumu var saukt arī par pareizu secinājumu.

Nosacījuma apgalvojumu var mēģināt vizualizēt, izmantojot Eilera-Venna diagrammas šādā veidā. Ja ir doti divi predikāti p un q, tad uzskatīsim, ka katrai argumentu virknei atbilst punkts universā un piekārtosim katram no predikātiem to universa apakškopu, ar kuras elementu vērtībām predikāts ir patiess, apzīmēsim šos apgabalus ar P, Q. Apakškopas P un Q sauc par predikātu p un q patiesumvērtību kopām. Viegli redzēt, ka nosacījuma apgalvojuma $p \to q$ patiesums nozīmē, ka $P \subseteq Q$:



Zīm.1.1. – nosacījuma apgalvojuma vizualizācija ar predikātu patiesumvērtību kopu palīdzību.

Izteikuma $p \leftrightarrow q$ patiesums nozīmē, ka $P = Q$ (predikātu patiesumvērtību kopas sakrīt):



Zīm.1.2. – loģiskās ekvivalences vizualizācija.

Nosacījuma apgalvojumu interpretācija ar patiesumvērtību kopu izmantošanu ļauj viegli noformulēt nosacījuma apgalvojuma kritēriju gadījumā, kad predikātu argumenti ir Būla mainīgie un predikāti ir izteikti PDNF:

TEORĒMA 1.1 $p \to q$ ir nosacījuma apgalvojums tad un tikai tad, ja katra elementārā konjunkcija, kas piedalās predikāta p PDNF, piedalās arī predikāta q PDNF.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka $p \to q$ ir nosacījuma apgalvojums, tātad, ja $p(X_1^{e_1}, X_2^{e_2}, ..., X_n^{e_n})$ ir patiess, tad arī $q(X_1^{e_1}, X_2^{e_2}, ..., X_n^{e_n})$. Izteikums $p(X_1^{e_1}, X_2^{e_2}, ..., X_n^{e_n})$ ir patiess, tad un tikai tad, ja elementāra konjunkcija $X_1^{e_1} X_2^{e_2} ... X_n^{e_n}$ piedalās predikāta p PDNF, $q(X_1^{e_1}, X_2^{e_2}, ..., X_n^{e_n})$ ir patiess, tad un tikai tad, ja tā piedalās arī predikāta q PDNF. Tātad, ja $X_1^{e_1} X_2^{e_2} ... X_n^{e_n}$ piedalās predikāta p PDNF, tad $X_1^{e_1} X_2^{e_2} ... X_n^{e_n}$ piedalās predikāta q PDNF.

Pieņemsim, ka katra elementārā konjunkcija, kas piedalās predikāta p PDNF, piedalās arī predikāta q PDNF. Tātad, ja $X_1^{e_1} X_2^{e_2} ... X_n^{e_n}$ piedalās predikāta p PDNF, tad $X_1^{e_1} X_2^{e_2} ... X_n^{e_n}$ piedalās arī predikāta q PDNF. Ja $X_1^{e_1} X_2^{e_2} ... X_n^{e_n}$ piedalās predikātu p un q PDNF, tad $p(X_1^{e_1}, X_2^{e_2}, ..., X_n^{e_n})$ un $q(X_1^{e_1}, X_2^{e_2}, ..., X_n^{e_n})$ ir patiesi un teorēma ir pierādīta. QED

Par divu nosacījuma apgalvojumu $p \to q$ un $q \to r$ kompozīciju sauksim izteikumu $p \to r$. Par pierādījumu sauksim vairāku nosacījuma apgalvojumu kompozīciju:

$$(p \ \mathbf{a} \ q) = (p \to p_2 \to \ldots \to p_{n-1} \to q)\,. \tag{1.2}$$

Viegli redzēt, ka pierādījums arī ir nosacījuma apgalvojums: ja visi izteikumi $p_1 \to p_2, p_2 \to p_3, \ldots, p_{n-1} \to p_n$ ir patiesi, tad, ja izteikums $p_1(x)$ ir patiess, tad $p_2(x)$ ir patiess; ja $p_2(x)$ ir patiess, tad $p_3(x)$ ir patiess; ... ; ja $p_{n-1}(x)$ ir patiess, tad $p_n(x)$ ir patiess. Tātad kompozīcija $p_1 \to p_n$ arī ir nosacījuma apgalvojums.

Par teorēmu (grieķu valodā – „skaties!”) sauksim apgalvojumu, kas tiek iegūts pareiza pierādījuma ceļā no aksiomām (dotiem predikātiem vai izteikumiem, kas tiek uzskatīti par patiesiem, grieķu valodā atbilstošā vārda nozīme ir „vērtīgs”). Parasti teorēmas veido formā $p \to q$ (“no p seko q”) vai $p \leftrightarrow q$(“ p tad un tikai tad, ja q”, “ $p \to q$ un $q \to p$”) Par lemmu sauksim teorēmu, kas ir starpposms kādas svarīgākas teorēmas pierādījumā. Par secinājumu no teorēmas sauksim izteikumu, ko var relatīvi viegli pierādīt, pieņemot šo teorēmu.

Par apgalvojuma/teorēmas $p \to q$ apgriezto apgalvojumu sauksim $\bar{q} \to \bar{p}$, par pretējo apgalvojumu sauksim $q \to p$, par pretējam apgriezto apgalvojumu sauksim $\bar{p} \to \bar{q}$.

Par matemātisku teoriju (pierādījumu sistēmu) sauc struktūru, kas satur fiksētu alfabētu, apgalvojumu veidošanas likumus, fiksētu aksiomu kopu un fiksētu nosacījuma apgalvojumu veidu (likumu) kopu. Aksiomas var būt gan vispārīgas (loģiskas), gan arī specifiskas dotajai teorijai (neloģiskas). Aksiomu kopa var būt gan galīga, gan arī bezgalīga. Aksiomu kopu sauksim par neatkarīgu, ja nekāda no aksiomām nav pierādāma, izmantojot pārējās aksiomas. Parasti dotajā teorijā atļauto nosacījuma apgalvojumu veidu kopa ir galīga. Katras matemātiskās teorijas attīstība sastāv no tās objektu un valodas koordinatizēšanas un formalizēšanas, grūtu teorēmu pierādīšana, teorijas galamērķu noteikšanas un sasniegšanas. Matemātisku teoriju sauc par nepretrunīgu, ja tajā nav iespējams pierādīt kādu apgalvojumu s un tā noliegumu $\neg s$. Matemātisku teoriju sauc par pilnu, ja tajā katra patiesa teorēma ir pierādāma. Matemātisku teoriju sauc par atrisināmu, ja eksistē algoritms (piemēram, Tjūringa mašīna), kas katram teorijas apgalvojumam nosaka, vai tas ir pierādāms.