MATEMĀTISKĀS LOĢIKAS FORMULU UN BŪLA FUNKCIJU NORMĀLĀS FORMAS

Lietderīgi ir mēģināt meklēt matemātiskās loģikas formulu normālās formas – veidus kā jebkuru formulu pārveidot noteiktā formā. Tas ir vajadzīgs, lai varētu ērtāk salīdzināt un pētīt formulas, programmēšanā u.t.t.

Disjunktīvās un konjunktīvās normālās formas

DEFINĪCIJA Formulu sauc par *elementāro konjunkciju*, ja tā ir viena vai vairāku elementāro izteikumu vai to noliegumu konjunkcija.

Formulu sauc par *elementāro disjunkciju*, ja tā ir viena vai vairāku elementāro izteikumu vai to noliegumu disjunkcija.

Elementāro konjunkciju vai disjunkciju sauc par *pilnu*, ja tā satur visus dotā alfabēta elementāros izteikumus.

Ja formulu A ir elementāra konjunkcija vai disjunkcija un formulu B var iegūt no formulas A izsvītrojot dažus elementāros izteikumus, tad B sauc par A *apakškonjunkciju* vai *apakšdisjunkciju*.

Formula ir izteikta *disjunktīvajā normālformā* (*DNF*), ja tā ir vienas vai vairāku elementāru konjunkciju disjunkcija.

Formula ir izteikta *konjunktīvajā normālformā (KNF)*, ja tā ir vienas vai vairāku elementāru disjunkciju konjunkcija.

Pieraksta ekonomijas dēļ mēs nerakstīsim iekšējās iekavas elementārajās konjunkcijās un disjunkcijās, jo asociativitātes dēļ iekavu kārtība nav svarīga.

Visur zemāk šajos lekciju materiālos parasti rakstīsim

$$X \wedge Y = XY,\ X \vee Y = X + Y,\ \neg X = \overline{X}$$

PIEMĒRI Formula $X_1 X_2 \overline{X}_3 + X_2 X_3$ ir dota DNF formā, kas satur 2 elementārās konjunkcijas, bet formula

$$(X_1 + X_2 + \overline{X}_3)(X_2 + X_3)$$

– KNF formā, kas satur 2 elementārās disjunkcijas.

TEORĒMA Katrai formulai A eksistē formula D_A, tāda, ka D_A ir DNF un $A \equiv D_A$.

PIERĀDĪJUMS Ja formula A satur operācijas $\Rightarrow$ vai $\Leftrightarrow$, tad izmantojot līdzvērtības formulas

$$A \Rightarrow B \equiv (\overline{A} + B)$$

un

$$A \Leftrightarrow B \equiv AB + \overline{A}\,\overline{B}$$

pārveidosim formulu A par tai līdzvērtīgu formulu A_1, kas nesatur simbolus $\Rightarrow$ un $\Leftrightarrow$.

Tālāk pārveidosim formulu A_1 par formulu A_2, kurā nolieguma operācija tiek pielietota tikai elementārajiem mainīgajiem,

tas ir iespējams tāpēc, ka izmantojot dualitātes formulas

$$\overline{AB} \equiv \overline{A} + \overline{B}$$

un

$$\overline{A + B} \equiv \overline{A}\,\overline{B}$$

var pārnest nolieguma operāciju, kas pielietota divu formulu disjunkcijai vai konjunkcijai uz šīm formulām.

Šādi pārveidojumi tiek veikti tik ilgi, kamēr nolieguma operācija tiek pielietota tikai elementārajiem mainīgajiem.

Pēdējā solī formulu A_2 pārveidosim par līdzvērtīgu formulu, kas ir vairāku apakšformulu disjunkcija: ja $A_2 = D + BC$, kur D ir DNF un vismaz viena no formulām B vai C nav elementāra konjunkcija, tas ir, ir izsakāma formā $E + F$, tad izmantojot distributivitātes īpašību

$$A_2 = D + BC \equiv D + B(E + F) \equiv$$
$$\equiv D + BE + BF$$

ievērosim, ka formulas E un F satur stingri mazāku skaitu elementāro mainīgo nekā formula A_2.

Pielietojot šo pārveidojumu, ja ir nepieciešams, vairākas reizes, pārveidosim formulu A_2 disjunktīvajā normālformā.

PIEMĒRS Apskatīsim formulu

$$A = ((X_1 \Rightarrow X_2) \Rightarrow X_1).$$

Pirmajā solī pārveidosim šo formulu tā, lai tā nesaturētu implikācijas:

$$A = (\neg(\overline{X}_1 + X_2) + X_1) \equiv X_1\overline{X}_2 + X_1$$

Iegūtā formula ir DNF formā, šajā gadījumā nākošie pārveidošanas soļi, kas tika izmantoti teorēmas pierādījumā, nav vajadzīgi.

Vēl viens piemērs:

$$A = (X_1 + X_2)(X_1 + X_3).$$

Lai pārveidotu šo formulu par DNF, pietiek izmantot distributivitātes un idempotences īpašības :

$$A = X_1 X_1 + X_1 X_3 + X_2 X_3 = X_1 + X_1 X_3 + X_2 X_3.$$

TEORĒMA Katrai formulai A eksistē formula K_A, tāda, ka K_A ir KNF un $A \equiv K_A$.

PIERĀDĪJUMS. Pierādījums ir pilnīgi analoģisks iepriekšējās teorēmas pierādījumam.

Vienīgā atšķirība ir tā, ka pēdējā solī ir jāizmanto distributivitātes īpašība formā

$$B + (EF) \equiv (B + E)(B + F)$$

Formulas DNF un KNF nav noteiktas viennozīmīgi, piemēram:

$$X \equiv XY + X\overline{Y}$$

Tas rada nepieciešamību meklēt citas normālformas, kuras būtu noteiktas viennozīmīgi vai ar “kontrolētu nenviennozīmīgumu” (piemēram, ar precizitāti līdz apakšformulu kārtībai kādā konjunkcijā vai disjunkcijā).

DEFINĪCIJA Pieņemsim, ka alfabētā ir n elementārie izteikumi $\{X_1, ..., X_n\}$. Formula A ir izteikta *pilnīgajā disjunktīvajā normālformā* (PDNF), ja izpildās šādi nosacījumi:

1) A ir DNF;

2) katra elementārā konjunkcija satur n izteikumus, tas ir, katra elementārā konjunkcija ir pilna;

3) katras elementārās konjunkcijas i-tais loceklis ir X_i vai $\overline{X}_i$;

4) visas elementārās konjunkcijas ir dažādas;

5) speciālgadījums 0 (nevienas konjunkcijas)

Formula A ir izteikta *pilnīgajā konjunktīvajā normālformā* (PKNF), ja izpildās šādi nosacījumi:
1) A ir KNF;
2) katra elementārā disjunkcija satur n izteikumus, tas ir, katra elementārā konjunkcija ir pilna;
3) katras elementārās disjunkcijas i-tais loceklis ir X_i vai $\overline{X}_i$;
4) visas elementārās disjunkcijas ir dažādas;
5) speciālgadījums 1 (nevienas konjunkcijas)

PIEMĒRS Formula

$$A = X_1X_2X_3 + X_1X_2\overline{X}_3 + \overline{X}_1X_2X_3$$

ir PDNF.

TEORĒMA Katrai formulai A eksistē formula B, tāda, ka $A \equiv B$ un B ir PDNF formā.

PIERĀDĪJUMS. Katrai formulai A eksistē tai līdzvērtīga formula A_1, kas ir DNF formā.

Pārveidosim formulu A_1 tā, lai saglabātu formulas vērtības visiem mainīgo sarakstiem un lai pārveidotā formula būtu PDNF formā. Darīsim to vairākos soļos.

Pirmajā solī izsvītrosim visas elementārās konjunkcijas, kas satur kādu mainīgo kopā ar tā noliegumu, tas ir visas elementārās konjunkcijas, kuras, izmantojot komutativitāti, var uzrakstīt formā $X_i \overline{X}_i)...$.

Šī operācija nemainīs formulas vērtību nekādam mainīgo vērtību sarakstam , jo katras izsvītrotās konjunkcijas vērtība ir 0 un katrai formulai C ir spēkā nosacījums $C \vee 0 \equiv C$.

Otrajā solī katrā no elementārajām konjunkcijām atstāsim tikai vienu katra tipa mainīgo, jo saskaņā ar idempotences likumu $X_i X_i \equiv X_i$.

Trešajā solī apskatīsim katru elementāro konjunkciju, teiksim C, kas nesatur vismaz vienu elementāro mainīgo, teiksim X_i un aizvietosim šo konjunkciju ar līdzvērtīgu formulu

$$C_1 = CX_i + C\overline{X}_i .$$

Formulu C un C_1 līdzvērtību ir viegli saskatīt izmantojot šādu pārveidojumu virkni:

$$C \equiv C1 \equiv C(X_i + \overline{X}_i) \equiv CX_i + C\overline{X}_i$$

Pielietojot šādu operāciju vairākas reizes, ja nepieciešams, iegūsim formulu, kas ir DNF formā un kurā katra elementārā konjunkcija satur vienā eksemplārā visus elementāros mainīgos vai to noliegumus.

Ceturtajā solī katrā elementārajā konjunkcijā pārkārtosim, ja nepieciešams elementāros mainīgos tā, lai tie būtu pareizajā kārtība saskaņā ar PDNF definīciju. Šī operācija nemaina formulas vērtības, jo konjunkcija ir komutatīva.

Beidzot, *piektajā solī* izsvītrosim elementārās konjunkcijas, kas atkārtojas. Saskaņā ar absorbcijas likumu, šī operācija nemaina formulas vērtības.

Būla funkcijas un PDNF vienīguma pierādījums

Pētot formulu pārveidojumus ir lietderīgi uzskatīt formulas par funkcijām no argumentiem, kuru vērtības ir patiesumvērtības.

DEFINĪCIJA Par n–argumentu *Būla funkciju* sauc jebkuru funkciju no I^n uz I , kur $I = \{0,1\}$.

Šajā tekstā mēs parasti apzīmēsim Būla funkciju argumentus ar x_i .

Visu mainīgu kopu vai virkni $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ sauksim par mainīgo sarakstu un apzīmēsim ar X .

Visu Būla funkciju kopu, kas ir atkarīgas no dotā saraksta X , apzīmēsim ar B_X .

Saskaņā ar funkcijas definīciju, jebkuru Būla funkciju var uzdot ar tabulu, kurā katrai n elementus garai virknei, kurā ir ierakstītas argumentu vērtības 0 vai 1, tiek piekārtots viens no kopas $I = \{0,1\}$ elementiem.

Tā kā $|I| = 2$ un $|I^n| = 2^n$, tad n–argumentu Būla funkciju skaits ir vienāds ar 2^{2^n} .

DEFINĪCIJA Mēs teiksim, ka funkcija $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ ir līdzvērtīga formulai A, kas ir atkarīga no elementārajiem mainīgajiem $X_1, X_2, ..., X_n$, ja visām elementāro mainīgo saraksta vērtībām funkcijas $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ un formulas A vērtības ir vienādas.

Ja mainīgo skaits ir neliels, tad Būla funkciju var uzdot ar tabulas palīdzību: tabulas kolonnas atbilst mainīgajiem un funkcijas vērtībai un rindas atbilst mainīgo vērtību sarakstiem.

PIEMĒRS Būla funkciju var uzdot ar šādu tabulu:

X_1	X_2	X_3	f
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

Šādā tabulā funkcijas vērtība ar doto saraksta vērtību ir vienāda ar patiesumvērtību pēdējā kolonnā, piemēram, $f(1,0,1)=0$, $f(1,1,1)=1$, u.t.t.

TEORĒMA Ja $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ ir n-vietīga Būla funkcija, kas nav identiski vienāda ar 0 (identiski aplama), tad eksistē formula A_f, kuras elementārie mainīgie ir $X_1, X_2, ..., X_n$, kas ir līdzvērtīga funkcijai f un kas atrodas PDNF formā.

Šāda formula ir noteikta viennozīmigi ar precizitāti līdz kārtībai disjunkcijā.

PIERĀDĪJUMS Katrai formulai A definēsim $A^1 = A$ un $A^0 = \overline{A}$.

Ar tiešu pārbaudi var pārliecināties, ka $X_1^{t_1} X_2^{t_2} \ldots X_n^{t_n} = 1$ tad un tikai tad, ja katram i mainīgā X_i patiesumvērtība ir vienāda ar t_i.

Šo apgalvojumu mēs vairākas reizes izmantosim teorēmas pierādījumā.

Apskatīsim tabulu, ar kuru tiek uzdota funkcija f.

Katrai tabulas rindai, kurā funkcijas vērtība ir 1 un kas atbilst mainīgo vērtību sarakstam $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ sastādīsim elementāro konjunkciju

$$X_1^{s_1} X_2^{s_2} \ldots X_n^{s_n}.$$

Sastādīsim visu šādu elementāro konjunkciju disjunkciju A_f.

Formula A_f satur vismaz vienu konjunkciju, jo funkcijas vērtība ir 1 ar vismaz vienu saraksta vērtību.

Pārbaudīsim, ka A_f ir līdzvērtīga funkcijai f:

- ja mainīgo vērtību saraksts ir tāds, ka funkcijas vērtība ar šo sarakstu ir 1, tad eksistē elementārā konjunkcija, kuras vērtība ar šo sarakstu ir 1 un visas formulas vērtība ir 1,

- ja funkcijas vērtība ar doto mainīgo vērtību sarakstu ir 0, tad katras konjunkcjas vērtība ar šo sarakstu ir 0 saskaņā ar apgalvojumu, kas dots pierādījuma sākumā un visas formulas vērtība ir 0.

Pierādīsim, ka šāda formula ir noteikta viennozīmīgi ar precizitāti līdz elementāro konjunkciju kārtībai.

Pieņemsim pretējo: eksistē 2 formulas A_1 un A_2 PDNF formā, kurās ir elementāro konjunkciju kopas ir dažādas.

Pieņemsim, ka formula A_1 satur elementāru konjunkciju $X_1^{t_1} X_2^{t_2} ... X_n^{t_n}$, kuru nesatur formula A_2.

Ar mainīgo sarakstu $\langle t_1, ..., t_n \rangle$ formulas A_1 vērtība ir 1. Formulas A_2 vērtība ar sarakstu $\langle t_1, ..., t_n \rangle$ ir 0 saskaņā ar apgalvojumu pierādījuma sākumā, tātad ir iegūta pretruna.

Līdzīgi iegūst pretrunu, ja pieņem, ka formula A_2 satur elementāru konjunkciju $X_1^{t_1}X_2^{t_2}...X_n^{t_n}$, kuru nesatur formula A_1.

SECINĀJUMS Formulas PDNF ir noteikta viennozīmīgi ar precizitāti līdz elementāro konjunkciju kārtībai.

PIERĀDĪJUMS Katrai formulai piekārtosim atbilstošo Būla funkciju. Tai atbilst viena (ar precizitāti līdz elementāro konjunkciju kārtībai) PDNF, kas ir PDNF arī attiecībā uz sākotnējo formulu.

TEORĒMA Ja $f(X_1, X_2,..., X_n)$ ir n-vietīga Būla funkcija, kas nav identiski vienāda ar 1 (tautoloģija), tad eksistē formula A_f, kuras elementārie mainīgie ir $X_1, X_2,..., X_n$, kas ir līdzvērtīga funkcijai f un kas atrodas PKNF formā.

Šāda formula ir noteikta viennozīmīgi ar precizitāti līdz kārtībai konjunkcijā.

PIERĀDĪJUMS Šo teorēmu pierāda līdzīgi iepriekšējai teorēmai izmantojot dualitāti.

Žegalkina normālā forma

Var pierādīt, ka $\neg, \wedge, \vee$ var izteikt ar operācijām $1, \oplus, \wedge$:

1) $\neg X \equiv X \oplus 1$;
2) $X \vee Y \equiv (X \wedge Y) \oplus X \oplus Y$

TEORĒMA
1) $X \oplus Y \equiv Y \oplus X$;
2) $(X \oplus Y) \oplus Z \equiv X \oplus (Y \oplus Z)$;
3) $X \oplus X \equiv 0$;
4) $(X \oplus Y)Z \equiv XZ \oplus YZ$

PIERĀDĪJUMS Izmatot vērtību tabulas.

Tādējādi var mēģināt meklēt kādu loģikas formulu/Būla funkciju normālo formu, kurā tiek izmantotas tikai šīs operācijas.

Par *Žegalkina polinomu* sauc polinomu, kurā saskaitīšanas vietā ir operācija $\oplus$ un katrs arguments ir ne vairāk kā pirmajā pakāpē, var būt arī brīvais loceklis 0 vai 1.

Katru formulu var uzrakstīt līdzvērtīgā ŽP formā - pārveidot DNF veidā un aizvietot disjunkciju izmantojot $\oplus$.

n-argumentu Būla funkciju skaits ir 2^{2^n}, dažādo ŽP skaits ar n argumentiem arī ir vienāds ar 2^{2^n}, tāpēc šis pārveidojums ir bijektīvs un ir pierādīts, ka ŽP normālā forma eksistē.

MATEMĀTISKĀS LOĢIKAS UN BŪLA FUNKCIJU PIERAKSTA MINIMIZĒŠANA

DEFINĪCIJA Būla funkciju sauc par *minimālu*, ja mainīgo skaits tās pierakstā ir vismazākais salīdzinājumā ar visām tai līdzvērtīgajām funkcijām.

PIEMĒRI X un $XY + X\overline{Y}$

TEORĒMA Ja pilnā elementārā konjunkcija $K = X_1^{s_1} X_2^{s_2} ... X_n^{s_n}$ neieiet funkcijas f PDNF izteiksmē, tad nekāda konjunkcija, ko iegūst, izsvītrojot dažus K mainīgos, neieiet nekādā DNF izteiksmē, kas ir līdzvērtīga funkcijai f.

PIERĀDĪJUMS. Ja pilnā konjunkcija

$$K = X_1^{s_1} X_2^{s_2} \ldots X_n^{s_n}$$

neieiet funkcijas f PDNF izteiksmē, tad $f(s_1,\ldots,s_n)=0$.

Pieņemsim, ka kāda konjunkcija K_1, ko iegūst izsvītrojot dažus K mainīgos, ieiet kādā no DNF formulām, kas ir līdzvērtīgas funkcijai f.

Tādā gadījumā f vērtība ar mainīgo sarakstu $\langle s_1,\ldots,s_n \rangle$ ir 1, jo vienas konjunkcijas (K_1) vērtība ar šo sarakstu ir 1. Ir iegūta pretruna, kas pierāda teorēmu.

Būla funkciju DNF formu minimizācijas algoritms (tabulas metode)

Solis Nr1.
Konstruējam tabulu, kurā rindas ir indeksētas ar visām iespējamajām pilnajām elementārajām konjunkcijām un kolonnas ir indeksētas ar visām iespējamajām apakškonjunkcijām.

Pēdējā kolonnā ieraksta visas pilnās konjunkcijas un rindas pārējās rūtiņās ieraksta apakškonjunkcijas, kuras iegūst, izsvītrojot elementātoros mainīgos no pēdējā kolonnā ierakstītās pilnās konjunkcijas.

Solis Nr 2
Tabulas pēdēja kolonnā izsvītrosim visas pilnās konjunkcijas, kuras neieiet dotās minimizējamās funkcijas PDNF pierakstā.

Solis Nr 3
Izsvītrosim visas konjunkcijas, kas atrodas rindās ar jau izsvītrotajām pilnajām konjunkcijām.

Solis Nr 4
Izsvītrosim citur tabulā visas konjunkcijas, kas jau ir izsvītrotas iepriekšējā solī.

Solis Nr 5
Katrā rindā atstāsim tikai konjunkcijas ar vismazāko mainīgo skaitu un pārējās konjunkcijas šajā rindā izsvītrosim.

Solis Nr 6
Katrā rindā izvēlēsimies vienu konjunkciju un sastādīsim visu šādu konjunkciju disjunkciju. Sastādīsim visas iespējamās DNF, ko var iegūt šādā veidā, samazināsim mainīgo skaitu, izmantojot idempotences īpašību.

Solis Nr 7

No visām DNF, kas ir iegūtas iepriekšējā solī, izvēlēsimies vienu ar vismazāko mainīgo skaitu.

ALGORITMA PAREIZĪBAS PIERĀDĪJUMS. Apzīmēsim formulu, kas ir iegūta šī algoritma rezultātā ar F .

Ja $f(s_1,...,s_n)=1$, tad pilnā konjunkcija $X_1^{s_1}X_2^{s_2}...X_n^{s_n}$ nav izsvītrota un tāpēc tai atbilstošajā rindā nav izsvītrota vismaz viena konjunkcija, tas nozīmē, ka $F(s_1,...,s_n)=1$.

Ja $f(s_1,...,s_n)=0$, tad visas konjunkcijas, kas apakškonjunkcijas pilnajai konjunkcijai $X_1^{s_1}X_2^{s_2}...X_n^{s_n}$, ir izsvītrotas, tātad pāri palikušas tikai tās konjunkcijas, kuru vērtības ar jebkuru saraksta $\langle s_1,...,s_n\rangle$ apakškopu ir 0.

Tas nozīmē, ka šajā gadījumā $F(s_1,...,s_n)=0$, tātad iegūtā formula ir līdzvērtīga funkcijai f .

Formula F ir minimāla saskaņā ar konstrukciju.

PIEMĒRI $X_1X_2\overline{X}_3+X_1\overline{X}_2X_3+X_1\overline{X}_2\overline{X}_3+\overline{X}_1\overline{X}_2X_3$

Elektriskās shēmas

Būla funkcijas un matemātisko loģiku izmanto elektrisko shēmu teorijā.

Kontaktu shēmas

Shēma satur kontaktus, kurus kontrolē Būla argumenti. Var sastādīt tabulu (*darba tabulu*), kuras rindas indeksētas ar visām argumentu vektoru vērtībām un pēdējā kolonā ir 1 vai 0 atkarībā no tā vai ķēdē ir strāva.

Var redzēt, ka paralēlajam slēgumam atbilst disjunkcija, un virknes slēgumam – konjunkcija.

Ja divām shēmām ir vienādas darba tabulas, tad tās sauc par *funkcionāli ekvivalentām*.

Matemātiskās loģikas formulu sauc par kontaktu shēmas *funkcionālo modeli*, ja tās vērtību tabula sakrīt ar shēmas darba tabulu. Funkcionālais modelis vienmēr eksistē.

Matemātiskās loģikas formulu sauc par kontaktu shēmas *stukturālo modeli*, ja tā ir iegūta, shēmas paralēlos slēgumus aizstājot ar disjunkciju un virknes slēgumus ar konjunkciju. Ir shēmas, kurām strukturālais modelis neeksistē.

Shēmas analīze – funkcionālā modeļa atrašana. *Shēmas sintēze* – shēmas fizikālā modeļa konstruēšana, ja ir dota darba tabula.

Loģiskie elementi un to shēmas

Elektronikā tiek izmantotas ierīces, kas realizē noliegumu, konjunkciju, disjunkciju un citas loģikas operācijas.

Jebkuru funkciju no $\{0,1\}^n$ uz $\{0,1\}^m$ var uzdot tikai ar noliegumu, konjunkciju un disjunkciju (izmantojot PDNF vai PKNF) vai ar xor un konjunkciju (izmantojot ŽP).

BŪLA FUNKCIJU ĪPAŠĪBAS

Visu Būla funkciju kopu, kas ir atkarīga no elementāro mainīgo saraksta $X = \{X_1,.,,,X_m\}$, apzīmēsim ar B_X .

Viegli redzēt, ka $|B_X| = 2^{2^m}$, tāpēc, ka Būla funkciju var viennozīmīgi uzdot ar tās vērtību tabulu, kurā ir 2^n rindu (tik daudz ir dažādu elementāro mainīgo vērtību sarakstu) un katrai rindai (vērtību sarakstam) funkcijas vērtība ir 0 vai 1.

DEFINĪCIJA Teiksim, ka Būla funkcijas $f(X_1,...,X_m)$ ir *būtiski atkarīga* no mainīgā X_i, ja eksistē mainīgo vērtību vektors $\langle s_1,...,s_{i-1},s_{i+1},...,s_m\rangle$ tāds, ka

$$f(s_1,...,s_{i-1},0,s_{i+1},...,s_m) \neq f(s_1,...,s_{i-1},1,s_{i+1},...,s_m)$$

Šajā gadījumā mainīgo X_i sauc par *būtisku mainīgo*. Ja mainīgais nav būtisks, tad to sauc par *fiktīvu mainīgo*.

DEFINĪCIJA Ja ir dota Būla funkciju kopa $C_0 = \{f_1, f_2,..., f_n\}$, kas ir atkarīgas no elementāro mainīgo kopas $\{X_1,.,,,X_m\}$, tad par kopas C_0 funkciju *elementāro superpozīciju* vai *elementāro kompozīciju* sauc Būla funkciju, ko var iegūt no kādas kopas C_0 funkcijas pielietojot vienu no šādām operācijām:

a) pārdēvējot kādu no šīs funkcijas mainīgajiem X_i par kādu citu mainīgo;

b) ievietojot kādas funkcijas f_i mainīgā X_j vietā citu (vai to pašu) funkciju f_k.

Apzīmēsim kopas C_0 visu elementāro superpozīciju kopu ar $S(C_0)$.

Par *k-tās kārtas superpozīciju* kopu sauksim kopu $S^k(C_0)$, citiem vārdiem, tās ir funkcijas, kuras var iegūt no kopas C_0 pielietojot superpozīcijas operācijas ne vairāk kā k reizes.

Par funkciju kopas C_0 *slēgumu* vai *kompozicionālo slēgumu* sauc kopu $\overline{C_0} = \bigcup_{i=0}^{\infty} S^i(C_0)$.

PIEMĒRI

DEFINĪCIJA No mainīgo saraksta $X = \{X_1,..,, X_m\}$ atkarīgu Būla funkciju kopu C sauc par *slēgtu*, ja $S(C) = C$ (vai $\overline{C} = C$).

Kopu C sauc par *pilnu*, ja $\overline{C} = B_X$.

Kopu C sauc par *neatkarīgu*, ja katrai funkcijai $f \in C$ izpildās nosacījums $f \notin \overline{(C \setminus f)}$.

Kopu C sauc par *bāzi*, ja tā ir neatkarīga un $\overline{C} = B_X$.

PIEMĒRI

TEORĒMA Pieņemsim, ka funkciju kopa $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ ir pilna un katram i f_i var tikt izteikta kā kopas $\{g_1, g_2, ..., g_m\}$ elementu superpozīcija. Tad kopa $\{g_1, g_2, ..., g_m\}$ arī ir pilna.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgi.

DEFINĪCIJA Būla funkciju f sauc par *funkciju, kas saglabā 0*, ja $f(0,...,0) = 0$. Visu šādu funkciju kopu apzīmē ar C_0

$$C_0 = \{ f \mid f(0,...,0) = 0\}.$$

Būla funkciju f sauc par *funkciju, kas saglabā 1*, ja $f(1,...,1) = 1$. Visu šādu funkciju kopu apzīmē ar C_1

$$C_1 = \{ f \mid f(1,...,1) = 1\}.$$

Būla funkciju f sauc par *pašduālu funkciju*, ja $f \equiv f^*$

(atgādinājums $f^*(X_1,...,X_m) := \overline{f(\overline{X}_1,...,\overline{X}_m)}$).

Visu pašduālu funkciju kopu apzīmē ar SD:

$$SD = \{ f \mid f \equiv f^* \}.$$

Atkāpe: elementāro mainīgo vērtību sarakstu salīdzināšana: ir doti divi saraksti - $s = \langle s_1,...,s_m \rangle$ un $t = \langle t_1,...,t_m \rangle$, saka, ka $s \le t$, ja $\forall\ i\ \ s_i \le t_i$.

Būla funkciju f sauc par *monotonu funkciju*, ja no tā, ka $s \le t$ seko, ka $f(s) \le f(t)$. Visu montonu funkciju kopu apzīmē ar M:

$$M = \{ f \mid s \le t \Rightarrow f(s) \le f(t) \}.$$

Būla funkciju f sauc par *lineāru funkciju*, ja to var izteikt formā

$$f(X_1,...,X_m) = c_0 \oplus c_1 X_1 \oplus c_2 X_2 \oplus ... \oplus c_m X_m,$$

kur saskaitīšana ir pēc “moduļa 2”, $0X = 0,\ 1X = X$, c var būt 0 vai 1.

Visu lineāru funkciju kopu apzīmē ar L:
$L = \{ f \mid f(X_1,...,X_m) = c_0 \oplus c_1 X_1 \oplus ... \oplus c_m X_m \}$.

TEORĒMA Kopas C_0, C_1, SD, M, L ir slēgtas kopas.
PIERĀDĪJUMS Patstāvīgi.

TEORĒMA (Posts) Būla funkciju kopa A ir pilna tad un tikai tad, ja $C_0 \setminus A \neq \varnothing$, $C_1 \setminus A \neq \varnothing$, $SD \setminus A \neq \varnothing$, $M \setminus A \neq \varnothing$, $L \setminus A \neq \varnothing$

(īsāk, bet nepārskatāmāk :

$$(C_0 \setminus A) \cap (C_1 \setminus A) \cap (SD \setminus A) \cap (M \setminus A) \cap (L \setminus A) \neq \varnothing$$

vai, izmantojot dualitāti:

$$C_0 \cup C_1 \cup SD \cup M \cup L \cup A' \neq B_X \text{).}$$

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgi (grūti).