BŪLA (BINĀRĀS) FUNKCIJAS UN/VAI MATEMĀTISKĀ LOĢIKA

Lietderīgi pētīt funkcijas, kuru argumenti un vērtības ir bināras virknes. Kopa {0,1} tiek asociēta ar {jā, nē} vai {patiess, aplams}. Lietderīgums ir saistīts ar to, ka skaitļus un jebkādus objektus var iekodēt bināru virkņu veidā.

Vēsturiski (sākot no Aristoteļa laikiem) matemātikā un loģikā ir pētīti izteikumi, kas var būt patiesi vai aplami, veidi kā konstruēt saliktus izteikumus no vienkāršiem.

19.gs un sevišķi 20.gs pēc datoru ieviešanas loģika un bināro (Būla) funkciju teorija tiek tieši vai netieši apvienotas.

DEFINĪCIJA *Izteikums (matemātisks izteikums)* ir frāze vai apgalvojums, kuras jēga normālā cilvēku izpratnē var būt patiesa vai nepatiesa (aplama).

Izteikumu sauc par *predikātu*, ja tas ir izteikums, kas ir atkarīgs no mainīgiem lielumiem.

Matemātiskā loģika ir matemātikas nozare, kas pēta izteikumus un operācijas ar izteikumiem.

Izteikumu patiesumu vai nepatiesumu sauc par *patiesumvērtībām.*

PIEMĒRI:

$A =$ "2x2=5",

$B =$ *"Rīga ir Latvijas galvaspilsēta 2001. gadā"*,

$C =$ *"uz Marsa ir dzīvība"*

A, B, C ir izteikumi, pie tam izteikums A ir aplams, izteikums B ir patiess un par izteikumu C uz šī teksta rakstīšanas brīdi nav zināms, vai tas ir patiess vai aplams.

Frāzes *"šodien ir labs laiks"*, *"3"*, *"cik laika ir palicis līdz lekcijas beigām?"* nav izteikumi mūsu definīcijas nozīmē, jo par tiem nevar nekādā nozīmē apgalvot, ka tie ir pareizi vai aplami.

Par predikātiem ir jādomā kā par funkcijām, kuru vērtības apgabals ir patiesumvērtību kopa.

Predikātu piemēri:

$P(u) =$ "u *ir pāra skaitlis*",

$P(u)$ ir patiess apgalvojums, ja u ir pāra skaitlis un aplams, ja u ir nepāra skaitlis;

$Q(u,v) =$ “u *dalās ar* v”,
$Q(u,v)$ patiess, ja u dalās ar v, piemēram, $Q(6,2)$ ir patiess, un aplams, ja u nedalās ar v, piemēram, $Q(6,4)$ ir aplams.

Izteikumu un predikātu pielietojumi:

Nosacītās pārejas un ciklu operatori programmēšanā:

“if” (“ja”) operators, “while”(“kamēr”) operators. “until”(“līdz”) operators
PIEMĒRS: programma, kas drukā 1, ja ievadīts pozitīvs skaitlis un 0, ja ievadīts 0 vai negatīvs skaitlis.

Operators “if X then A else B”: ja izteikums, kas seko pēc “if” ir patiess, tad izpildīt komandu A, ja aplams, tad izpildīt komandu B.

```
input n;
if n>0 then print 1;
   else print 0;
```

OPERĀCIJAS AR IZTEIKUMIEM

Sakarā ar to, ka mūs interesē tikai izteikuma patiesumvērtība, var identificēt izteikumus ar to patiesumvērtībām un domāt par operācijām ar izteikumiem kā funkcijām no bināru virkņu kopas uz kopu {0,1}.

Viena argumenta operācijas

DEFINĪCIJA Par izteikuma X *noliegumu* vai *negāciju* $\neg X$ ($\overline{X}$) sauc izteikumu, kas ir patiess tad un tikai tad, ja X ir aplams.

Izteikumu $\neg X$ parasti konstruē veidā "nav tiesa, ka X" vai, saīsināti, "ne-X".

Attēlosim izteikuma $\neg X$ vērtības ar tā saucamo patiesumvērtību tabulu:

X	$\neg X$
0	1
1	0

Vēl ir 3 viena argumenta operācijas:
1) identiskā operācija (izteikums);
2) 1 (jebkuram izteikumam tiek piekārtots patiess izteikums 1);

3) 0 (jebkuram izteikumam tiek piekārtots aplams izteikums 0).

Divu argumentu operācijas

Par divu izteikumu X un Y *konjunkciju* $X \wedge Y$ sauc izteikumu, kas ir patiess tad un tikai tad, ja abi izteikumi ir patiesi.

Konjunkcijai $X \wedge Y$ atbilst tabula

X	Y	$X \wedge Y$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Izteikumu $X \wedge Y$ parasti konstruē veidā “ X un Y ”.

Var vispārināt uz vairāku izteikumu gadījumu. Ja ir dota (iespējams, bezgalīga) izteikumu kopa $\{X_a\}_{a \in I}$, tad par šīs kopas izteikumu konjunkciju $\bigwedge_{a \in I} X_a$ sauc izteikumu, kas ir patiess tad un tikai tad, ja visi izteikumi šajā kopā ir patiesi.

Par divu izteikumu X un Y *disjunkciju* $X \vee Y$ sauc izteikumu, kas ir patiess tad un tikai tad, ja vismaz viens no izteikumiem ir patiess.

Disjunkcijai $X \vee Y$ atbilst šāda tabula

X	Y	$X \vee Y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Izteikumu $X \vee Y$ konstruē veidā "X vai Y".

Ja ir dota izteikumu kopa $\{X_a\}_{a\in I}$, tad par šīs kopas izteikumu disjunkciju $\bigvee_{a\in I} X_a$ sauc izteikumu, kas ir patiess tad un tikai tad, ja vismaz izteikums šajā kopā ir patiess.

Konjunkciju dažreiz pieraksta bez atdalošā simbola - XY un disjunkciju bieži apzīmē ar pierakstu $X+Y$.

Noliegums, konjunkcija un disjunkcija ir vienkāršākās operācijas kā no dotiem izteikumiem konstruēt saliktus izteikumus.

Par *implikāciju no* X *uz* Y sauc izteikumu $X \Rightarrow Y$, kas ir aplams tad un tikai tad, ja X ir patiess un Y ir aplams. Izteikumu $X \Rightarrow Y$ konstruē veidā "ja X, tad Y".

Implikācijai $X \Rightarrow Y$ atbilst šāda tabula:

X	Y	$X \Rightarrow Y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Par divu izteikumu X un Y *ekvivalenci* $X \Leftrightarrow Y$ sauc izteikumu, kas ir patiess tad un tikai tad, ja izteikumu X un Y patiesumvērtības ir vienādas.

Ekvivalencei $X \Leftrightarrow Y$ atbilst šāda tabula:

X	Y	$X \Leftrightarrow Y$
0	0	1
0	1	0
1	0	0

1	1	1

Izteikumu $X \Leftrightarrow Y$ konstruē veidā “ X tad un tikai tad, ja Y ”.

PIEMĒRI:

$X =$ ”*Jānis dzīvo Rīgā*”, tad $\neg X$ = ”*nav tiesa, ka Jānis dzīvo Rīgā*”,

ja Y = ”*Andris dzīvo Rīgā*”,

tad $X \wedge Y$ = “*Jānis un Andris dzīvo Rīgā*”, $X \vee Y$ = “*Jānis vai Andris dzīvo Rīgā*”.

Implikācija un ekvivalence ir operācijas ar izteikumiem, kuras ir lietderīgi izmantot pierādot matemātiskus apgalvojumus.

To patiesumvērtību izvēles motivācija ir saistīta ar šādiem novērojumiem: no patiesa apgalvojuma loģisku secinājumu ceļā var iegūt kādu citu patiesu apgalvojumu un nav iespējams iegūt aplamu apgalvojumu, savukārt no aplama apgalvojuma var iegūt gan aplamu, gan patiesu apgalvojumu, tātad izteikums “ja X , tad Y ” ir noteikti aplams tad, ja X ir patiess un Y ir aplams, un var būt patiess visos citos gadījumos.

Vērtību tabula izteikumam $X \Rightarrow Y$ ir tāda pati kā izteikumam $(\neg X) \vee Y$.

Par izteikumu X un Y ekvivalenci ir jādomā kā par konjunkciju $(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)$, tiem vērtību tabulas ir vienādas.

Implikāciju un ekvivalenci pielietojumos izmanto relatīvi retāk nekā konjunkciju un disjunkciju.

Vēl ir dažas praktiski bieži sastopamas matemātiskās loģikas operācijas, piemēram *xor*:

$$X \; xor \; Y = X \oplus Y = (X \wedge \overline{Y}) \vee (\overline{X} \wedge Y)$$

Kopā ir 16 dažādas divu argumentu operācijas. Atlikušās ir šādas:

1) f(X,Y)=1 vai 0;
2) f(X,Y)=X vai $\overline{X}$, Y vai $\overline{Y}$;
3) $f(X,Y) = X \wedge \overline{Y}$ (X, bet ne Y);
4) $f(X,Y) = \overline{X} \wedge Y$ (ne X, bet Y);
5) $f(X,Y) = \overline{X} \wedge \overline{Y} = X \downarrow Y$ (ne X, ne Y, Pīrsa bulta);
6) $f(X,Y) = X \vee \overline{Y}$ (X, ja Y);
7) $f(X,Y) = \overline{X} \vee \overline{Y} = X \mid Y$ (ne abi X un Y, nand, Šefera svītra)

Trīs argumentu operācijas sīkāk neapskatīsim. n-argumentu operāciju skaits ir 2^{2^n} .

MATEMĀTISKĀ LOĢIKAS FORMULAS UN TO ĪPAŠĪBAS

Matemātiskajā loģikā ir lietderīgi uzskatīt saliktus izteikumus par formulām vai vārdiem noteiktā alfabētā.

DEFINĪCIJA Par *alfabētu* sauksim jebkuru netukšu kopu A.

Par *vārdu* alfabētā sauc jebkuru virkni, kuras elementi ir alfabēta elementi.

Vārdu x sauc par *apakšvārdu* vārdā w, ja eksistē vārdi u un v tādi, ka $w = uxv$.

Par *matemātiskās loģikas alfabētu* sauksim alfabētu, kas satur *elementāro izteikumu* apakškopu, operāciju simbolus $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ un iekavu simbolus (,).

Vārdu matemātiskās loģikas alfabētā sauksim par *matemātiskās loģikas formulu* vai vienkārši *formulu*, ja izpildās šādi nosacījumi:

1) jebkurš elementārais izteikums ir formula;

2) ja A un B ir formulas, tad vārdi $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \Rightarrow B), (A \Leftrightarrow B)$ arī ir formulas;

3) citu formulu nav.

Par formulas F *apakšformulu* sauc jebkuru F apakšvārdu, kas ir formula.

Matemātiskās loģikas formula ir jebkurš izteikums, ko var konstruēt no dotajiem (elementārajiem) izteikumiem izmantojot definētās operācijas ar izteikumiem.

Pieņemsim, ka elementāro izteikumu kopa ir vienāda ar $\{X_1, X_2\}$.

Vārds $(X_1 \vee X_2) \Rightarrow (\neg X_1)$ ir formula, bet vārds $X_1 \wedge X_2 \vee X_1$ nav formula.

DEFINĪCIJA Ja ir dots matemātiskās loģikas alfabēts un katra elementārā izteikuma patiesumvērtība, tad par formulas patiesumvērtību sauc formulai atbilstošā izteikuma patiesumvērtību.

Pieņemsim, ka ir doti 3 elementārie izteikumi X_1, X_2, X_3 un formula $(((\neg X_1) \wedge X_2) \vee X_3)$. Ja elementāro izteikumu X_1, X_2, X_3 patiesumvērtības ir, attiecīgi, *patiess, aplams, patiess(1,0,1)*, tad formulas patiesumvērtība ir *patiess(1)*.

Izteikumus, kuru patiesumvērtības ir zināmas, ir pieņemts apzīmēt ar 1 (patiess izteikums) vai 0 (aplams izteikums).

Ja ir dota formula, tad elementāro izteikumu virkni $(X_1, ..., X_n)$, kas piedalās formulā, sauksim par *formulas argumentu sarakstu*.

Funkciju, kas katram formulas mainīgajam piekārto patiesumvērtību, sauksim, par *saraksta novērtējumu* vai *vērtību sarakstu.*

Mēs apzīmēsim vērtību sarakstu kā virkni, kuras elementi ir skaitļi 1 vai 0.

Piemēram, ja formulā ir trīs elementārie mainīgie X_1, X_2, X_3, tad pieraksts $(X_1, X_2, X_3) = (1,0,1)$ nozīmē, ka izteikums X_1 ir patiess, izteikums X_2 ir aplams un izteikums X_3 ir patiess.

Formulas patiesumvērtību, ja mainīgo vērtības ir vienādas ar saraksta vērtībām, sauksim par *formulas vērtību* ar doto vērtību sarakstu.

Piemēram, formulas $(((\neg X_1) \wedge X_2) \vee X_3)$ patiesumvērtība ar elementāro notikumu vērtību sarakstu $(X_1, X_2, X_3) = (1,0,1)$ ir 1 (patiess).

Bieži elementāro izteikumu vērtību sarakstu apzīmē ar vienu burtu (piemēram, X) un formulas A vērtību ar šo sarakstu apzīmē ar $A(X)$.

DEFINĪCIJA Divas formulas A un B, kas ir atkarīgas no viena mainīgo saraksta sauc par *līdzvērtīgām* (apzīmē ar pierakstu $A \equiv B$), ja šo formulu vērtības ir vienādas ar jebkurām saraksta vērtībām, tas ir, jebkuram vērtību sarakstam X izpildās vienādība $A(X) = B(X)$.

Formulu līdzvērtība ir ekvivalences attieksme formulu kopā līdzīgi kā funkciju vienādība ir ekvivalence funkciju kopā.

PIEMĒRI: formulas $(((\neg X_1) \wedge X_2) \vee X_3)$ un $((\neg X_1 \wedge X_3) \wedge (X_2 \vee X_3))$ ir līdzvērtīgas.

TEORĒMA (formulu līdzvērtības un pārveidojumu pamatīpašības) Jebkurām formulām A, B, C ir spēkā šādas līdzvērtības:

1) $(A \vee A) \equiv A, (A \wedge A) \equiv A$ (idempotences likumi);

2) $(\neg(\neg A)) \equiv A$ (nolieguma involūcijas likums);

3) $(A \wedge B) \equiv (B \wedge A), (A \vee B) \equiv (B \vee A)$
(komutativitātes likumi, var mainīt kārtību konjunkcijās un disjunkcijās);

4) $((A \wedge B) \wedge C) \equiv (A \wedge (B \wedge C))$
(asociativitātes likumi, var nerakstīt iekavas);

5) $(A \wedge (B \vee C)) \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$,
$(A \vee (B \wedge C)) \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$
(distributivitātes likumi);

6) $(A \wedge (A \vee B)) \equiv A, (A \vee (A \wedge B)) \equiv A$
(absorbcijas likumi);

7) $(\neg(A \wedge B)) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$,
$(\neg(A \vee B)) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$
(dualitātes likumi);

8) $A \equiv ((A \wedge B) \vee (A \wedge (\neg B)))$,

$A \equiv ((A \vee B) \wedge (A \vee (\neg B)))$

(sašķelšanas likumi).

9)

$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A) \vee B, (A \Leftrightarrow B) \equiv (A \wedge B) \vee ((\neg A) \wedge (\neg B))$

(implikācijas un ekvivalences aizvietošanas likumi);

10) Ja $A \equiv B$, tad

$\neg A \equiv \neg B, A \wedge C \equiv B \wedge C, A \vee C \equiv B \vee C$,

$(A \Rightarrow C) \equiv (B \Rightarrow C)$, $(C \Rightarrow A) \equiv (C \Rightarrow B)$,

$(A \Leftrightarrow C) \equiv (B \Leftrightarrow C)$;

PIERĀDĪJUMS. Visas formulas pierāda aprēķinot labo un kreiso pušu vērtības visām mainīgo vērtībām.

DEFINĪCIJA Matemātiskās loģikas formulu sauc par *tautoloģiju* vai *identiski patiesu*, ja ar jebkuru elementāro mainīgo vērtību sarakstu formula ir patiesa.

Formulu sauc par *izpildāmu*, ja eksistē mainīgo vērtību saraksts, ar kuru formula ir patiesa.

Formulu sauc par *identiski aplamu* vai *pretrunīgu*, ja jebkurai mainīgo vērtību sarakstam formula ir aplama.

Formulu sauc par *apgāžamu*, ja eksistē mainīgo vērtību saraksts, ar kuru formula ir aplama.

Formulu vidū īpaši svarīgu lomu ieņem tautoloģijas. Par tautoloģijām ir jādomā kā par loģikas likumiem, kas izpildās visiem izteikumiem.

Svarīgākās tautoloģijas:

1) $A \Rightarrow A$;

2) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$;

3) $(A \vee (\neg A))$ (trešās iespējas izslēgšanas likums, *tertium non datur*);

4) $((A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)))$ (pēctecīgas secināšanas likums);

5) $((A \wedge B) \Rightarrow A)$;

6) $(A \Rightarrow (A \vee B))$;

Ja formula $A \Rightarrow B$ ir tautoloģija, tad saka, ka formula B *ir loģisks secinājums no formulas* A.

Ja $A \equiv B$ ir tautoloģija, tad saka, ka *formulas* A *un* B *ir loģiski ekvivalentas.*

Izteikumu, ko iegūst ievietojot kādas tautoloģijas elementāro izteikumu vietā konkrētus izteikumus, sauc par *loģiski pareizu izteikumu*,

loģiski pareizs izteikums ir patiess neatkarīgi no tā vai konkrētie to veidojošie izteikumi ir patiesi.

TEORĒMA Ja formulas A un $A \Rightarrow B$ ir tautoloģijas, tad formula B ir tautoloģija.

PIERĀDĪJUMS. Ja eksistē elementāro mainīgo vērtību saraksts X tāds, ka $B(X) = 0$, tad $A(X) = 1$, jo A ir tautoloģija un $(A \Rightarrow B)(X) = 0$, kas ir pretrunā ar to, ka $A \Rightarrow B$ ir tautoloģija, tātad B ir tautoloģija.

DEFINĪCIJA Ja ir dota formula A, tad formulu A^*, kuru iegūst apmainot vietām simbolus $\wedge$ un $\vee$, sauc par *duālo* formulu attiecībā uz A.

Ja ir dots elementāro mainīgo vērtību saraksts X, tad par tā *duālo vērtību* sauc vērtību sarakstu X^*, kurā elementāro mainīgo patiesumvērtības ir mainītas vietām, tas ir 0 tiek aizvietots ar 1 un 1 tiek aizvietots ar 0.

PIEMĒRI Formulas $((X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_3))$ duālā formula ir $((X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_3))$.

Ja $(X_1, X_2, X_3) = (0,1,0)$, tad duālā vērtība ir $(1,0,1)$.

TEORĒMA A ir formula, kas ir atkarīga no argumentu saraksta $X = (X_1, ..., X_n)$. A vērtība ar sarakstu S ir 1 tad un tikai tad, ja A^* vērtība ar X^* ir 0.
PIERĀDĪJUMS Patstāvīgi. Izmantot matemātisko indukciju pēc operāciju skaita. Pieņemam, ka teorēma ir patiesa, ja operāciju skaits ir mazāks kā k un pierādām, ka tad teorēma ir patiesa, ja A ir veidā $\neg B,\ B \wedge C,\ B \vee C$, kur B un C satur ne vairāk kā k operācijas.

TEORĒMA Jebkurai formulai A, kas satur tikai operācijas $\neg, \wedge, \vee$ un jebkuram vērtību sarakstam X ir spēkā vienādība $A(X) \equiv (\neg(A^*(X^*)))$. Ja $A \equiv B$, tad $A^* \equiv B^*$.
PIERĀDĪJUMS. Patstāvīgs darbs.