KOPU APJOMS

Kā salīdzināt kopas vai "skaitīt" elementus kopās?

Dabisks kopu salīdzināšanas veids ir attēlot vienu kopu otrā, jeb konstruēt funkcijas no vienas kopas uz otru.

DEFINĪCIJA Divas kopas A un B sauc par *izomorfām* vai *ekvivalentām* vai *vienlielām* (apzīmē ar pierakstu $A \cong B$) tad un tikai tad, ja eksistē bijektīva funkcija $f : A \to B$.

TEORĒMA 1 Attiecība $\cong$ ir ekvivalences attieksme.

PIERĀDĪJUMS. Attiecība $\cong$ ir refleksīva, jo katrai kopai A vienības attēlojums $id_A : A \to A$ ir bijektīvs attēlojums, tātad $A \cong A$.
Ja $A \cong B$, tad eksistē bijektīva funkcija $f : A \to B$, kurai ir definēta inversā funkcija $f^{-1} : B \to A$, kas arī ir bijektīva, tātad $B \cong A$ un attiecība ir simetriska.

Ja $A \cong B$ un $B \cong C$, tad eksistē bijektīvas funkcijas $f : A \to B$ un $g : B \to C$, kuru kompozīcija $g \circ f : A \to C$ ir bijektīva funkcija, tātad $A \cong C$ un attieksme ir tranzitīva.

DEFINĪCIJA Par kopas A *apjomu (elementu skaitu, kardinalitāti)* $c(A)$ sauc kopas ekvivalences klasi attiecībā uz attiecību $\cong$.

Galīgas kopas

TEORĒMA 2 Ja A un B ir galīgas kopas, tad $A \cong B$ tad un tikai tad, ja $|A|=|B|$.

PIERĀDĪJUMS Ja funkcija $f : A \to B$ ir bijektīva, tad tā ir sirjektīva (katram elementam kopā B eksistē netukšs inversais attēls), tātad $|A| \geq |B|$. Bijektīva funkcija f ir arī injektīva (katra kopas B elementa inversais attēls satur tieši vienu elementu), tātad $|A| \leq |B|$. Apvienojot nevienādības $|A| \geq |B|$ un $|A| \leq |B|$, iegūstam vienādību $|A|=|B|$.

Pieņemsim tagad, ka kopas A un B apmierina nosacījumu $|A|=|B|$. Sanumurēsim kopu A un B elementus patvaļīgā kārtībā: $A=\{a_1,...,a_n\}, B=\{b_1,...,b_n\}$. Definēsim funkciju $f : A \to B$ ar šādu formulu: katram $a_i \in A$ izpildās nosacījums $f(a_i)=b_i$. Acīmredzami funkcija f ir injektīva un surjektīva, tātad bijektīva. QED.

Ja kopa A ir galīga, tad saskaņā ar Teorēmu 2 tās apjomu var identificēt ar tās elementu skaitu $|A|$, kas ir naturāls skaitlis.

Bezgalīgas kopas

Visvienkāršākā bezgalīgā kopa, kas ir vienlaicīgi vēsturiski pirmais bezgalīgas kopas piemērs, ar kuru ir nācies sastapties matemātiķiem, ir naturālo skaitļu kopa $N = \{1,2,3,...\}$ - visi skaitļi, kurus var iegūt dabiskā skaitīšanas rezultātā.

Kopas N konstrukcijas vienkāršība motivē salīdzināt bezgalīgās kopas ar šo kopu.

DEFINĪCIJA Ja kopa A ir vienliela visu naturālo skaitļu kopai N, tad to sauc par *sanumurējamu*.

Nosaukuma izvēle ir saistīta, ar to, ka bijektīva funkcija $f: A \to N$, kas eksistē saskaņā ar kopu vienlieluma definīciju, katram kopas A elementam a piekārto naturālu skaitli $f(a)$, ko var interpretēt kā elementa a numuru, funkciju $f: A \to N$ vai tās inverso funkciju bieži sauc par kopas A *numurējošo funkciju*.

Sanumurējamu kopu piemēri: pati naturālo skaitļu N, visu pozitīvo pāra skaitļu kopa, visu veselo skaitļu kopa Z, visu racionālo skaitļu kopa Q, visu kopas N^m elementu kopa, kur m ir naturāls skaitlis, u.c.

Pierādīsim, ka visu pozitīvo pāra skaitļu kopa $2N$ ir sanumurējama: lai to izdarītu ir jāuzrāda bijektīva funkcija $f : N \to 2N$, definēsim šādu funkciju ar formulu $f(x) = 2x$, viegli redzēt, ka tā ir bijektīva.

TEORĒMA 3 Katra sanumurējamas kopas apakškopa ir galīga vai sanumurējama.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka A ir sanumurējama kopa un $B \subseteq A$. Sanumurēsim kopas A elementus: $A = \{a_1, a_2, ...\}$, pieņemsim, ka $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, ...\}$, kur $i_k < i_{k+1}$ katram k. Ja kopa B nav galīga, tad funkcija $f : B \to N$, kas definēta ar formulu $f(b_{i_k}) = k$ ir kopas B numurējošā funkcija.

TEORĒMA 5 Pieņemsim, ka ir dota galīga vai sanumurējama kopa $\{A_i\}_{i \in N}$, kur katrs elements ir sanumurējama kopa. Apvienojums $\bigcup_{i\in N} A_i$ ir sanumurējama kopa.

PIERĀDĪJUMS Uzskatīsim, ka $A_i \cap A_j = \varnothing$, ja $i \neq j$, jo pretējā gadījumā mēs varam pāriet uz kopu $\{A_1, A_2 \setminus A_1, A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots, A_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i), \ldots\}$, kuras elementu apvienojums ir vienāds ar $\bigcup_{i\in N} A_i$, bet katru divu elementu šķēlums ir tukša kopa.

Katrā kopā A_i sanumurēsim elementus: $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}$ un ierakstīsim visu kopu elementus tabulā šādā veidā:

a_{11}	a_{12}	a_{13}	...
a_{21}	a_{22}	a_{23}	...
a_{31}	a_{32}	a_{33}	...
...	...	...	...

Tabula turpinās bezgalīgi par labi un uz leju. Ievērosim, ka katrs apskatāmā apvienojuma elements šajā tabulā tiek ierakstīts vienu un tieši vienu reizi.

Sanumurēsim tabulas elementus šādā veidā: sāksim ar elementu a_{11}, iesim pa labi uz elementu a_{12}, pa diagonāli uz leju un pa kreisi uz elementu a_{21}, uz leju uz elementu a_{31}, pa diagonāli uz augšu un pa labi uz elementiem a_{22} un a_{13}, pēc tam pa labi uz elementu a_{14}.

Definēsim tagad nākošo numurējamo elementu vispārīgā gadījumā, izmantosim apzīmējumu $a_{ij} \to a_{kl}$, kas nozīmē to, ka elements a_{kl} seko elementam a_{ij}. Pārejas ir šādas: $a_{1,n} \to a_{1,n+1}$, ja n ir nepāra skaitlis, $a_{1,n} \to a_{2,n-1}$, ja n ir pāra skaitlis, $a_{n,1} \to a_{n+1,1}$, ja n ir pāra skaitlis, $a_{n,1} \to a_{n-1,2}$, ja n ir nepāra skaitlis, $a_{i.j} \to a_{i-1,j+1}$, ja ne i, ne j nav vienādi ar 1 un $i+j$ ir pāra skaitlis, $a_{i.j} \to a_{i+1,j-1}$, ja ne i, ne j nav vienādi ar 1 un $i+j$ ir nepāra skaitlis.
Konstruētā numerācija pierāda, ka apskatāmais apvienojums ir sanumurējama kopa.

TEORĒMA Galīga skaita sanumurējamu kopu Dekarta reizinājums ir sanumurējama kopa.

PIERĀDĪJUMS Ir dotas sanumurējamas kopas $A_1, A_2, ..., A_n$, jāpierāda, ka $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ ir sanumurējama kopa.

TEORĒMA 6 Katra bezgalīga kopa satur sanumurējamu apakškopu.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka A ir bezgalīga kopa. Izvēlēsimies patvaļīgu kopas A elementu un apzīmēsim to ar a_1. Tā kā kopa A ir bezgalīga, tad tajā eksistē elements, kas nav vienāds ar a_1, apzīmēsim to ar a_2. Tā kā kopa A ir bezgalīga, tad tajā eksistē elements, kas nav vienāds ne ar a_1, ne ar a_2, apzīmēsim šo elementu ar a_3, un yā tālāk.

Šis elementu apzīmēšanas process nevar pārtraukties tā kā kopā A ir bezgalīgi daudz elementu. Rezultātā iegūsim apakškopu $\{a_1, a_2, ...\}$, kas ir sanumurējama.

KONTINUĀLĀS KOPAS

Vai eksistē kopas, kas nav ne galīgas, ne sanumurējamas?

Atbilde ir pozitīva un vienkāršākais nesanumurējamas kopas piemērs – bezgalīgu virkņu kopa.

TEORĒMA Ja A ir sanumurējama kopa un $|B| \geq 2$, tad $Fun(A, B)$ nav sanumurējama kopa.

PIERĀDĪJUMS Izmantosim diagonalizācijas metodi.

Sakārtosim kopas A atbilstoši numerācijai. Funkcija $f: A \to B$ ir bezgalīga virkne $f_1, f_2, \ldots\ldots$, kur $f_i \in B$. Pieņemsim, ka kopa $Fun(A,B)$ ir sanumurējama, tad sakārtosim tās elementus kādā noteiktā kārtībā $f_1, f_2, \ldots$:

$f_{11}, f_{12}, f_{13}, \ldots\ldots$
$f_{21}, f_{22}, f_{23}, \ldots\ldots$
....
$f_{k1}, f_{k2}, f_{k3}, \ldots\ldots$
....

Konstruēsim funkciju f_0 tā, lai $f_{0i} \neq f_{ii}$, tad $f_0 \neq f_i, \forall i$ un tātad $Fun(A,B)$ elementus nevar sanumurēt.

Bez naturāliem un racionāliem skaitļiem, matemātikā plaši izmanto arī reālos skaitļus, kurus var definēt kā bezgalīgus, ne obligāti periodiskus, daļskaitļus.

Reālo skaitļu kopas var interpretēt arī ģeometriski, piemēram, reālo skaitļu intervālu $[0,1]$ var interpretēt kā taisnes nogriezni.

DEFINĪCIJA Kopu, kas ir ekvivalenta reālo skaitļu kopas apakškopai $I=[0,1]$, sauc par *kontinuumu* vai *kontinuālu kopu*.

TEORĒMA 7 Kopa I nav sanumurējama.

PIERĀDĪJUMS (Kantora diagonalizācijas process) Pierādīsim, ka nekāda sanumurējama kopa nevar saturēt visus reālos skaitļus intervālā $I=[0,1]$.

Atgādināsim, ka visu reālo skaitļu kopas apakškopu $I=[0,1]$ var interpretēt kā kopu, kas satur visus pozitīvus bezgalīgus decimāldaļskaitļus, kuru veselā daļa ir 0 un vēl skaitļus 0 un 1.

Pieņemsim pretējo: eksistē kopa $A\subseteq I$, kas ir sanumurējama un $A=I$. Sanumurēsim visus kopas A elementus un sarakstīsim tos stabiņā:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\ldots\\
a_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\ldots\\
a_3 &= 0.a_{31}a_{32}a_{33}\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_n &= 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots
\end{aligned}
$$

Konstruēsim reālu skaitli $x=0.x_1x_2x_3\ldots$ saskaņā ar šādu konstrukciju: $x_i\neq a_{ii}$. Viegli redzēt, ka nekādam n skaitlis x nav vienāds ar a_n, jo x atšķiras no a_n $n-$ tajā pozīcijā. Tātad kopa A nevar saturēt visus kopas I elementus.

Kontinuālu kopu piemēri: visa reālo skaitļu kopa, visu iracionālo skaitļu kopa, visu jebkuras nepārtrauktas līknes punktu kopa, plaknes un telpas punktu kopa, plaknes vai telpas apgabala punktu kopa

Daži pamatfakti par kopu apjomu

TEORĒMA (Kantora-Bernšteina teorēma) 8 Dotas divas kopas A un B. Ja eksistē injektīva funkcija $f : A \to B$ un injektīva funkcija $g : B \to A$, tad $A \cong B$.

PIERĀDĪJUMS Uzskatīsim, ka $A \cap B = \emptyset$. Fiksēsim elementu $a \in A$ un konstruēsim elementu virkni $\{a_0, a_1, ...\}$ šādā veidā: $a_0 = a,$ ja n ir pāra skaitlis, tad $a_{n+1} \in B$, ja eksistē, apmierina nosacījumu $g(a_{n+1}) = a_n$, ja n ir nepāra skaitlis, tad a_{n+1}, ja eksistē, apmierina nosacījumu $f(a_{n+1}) = a_n$. Ir iespējami divi varianti: a) eksistē n tāds, ka a_{n+1} neeksistē, citiem vārdiem sakot, virkne $\{a_0, a_1, ...\}$ ir galīga, šajā gadījumā sauksim

n par elementa a *kārtu*; b) virkne $\{a_0, a_1, ...\}$ ir bezgalīga, šajā gadījumā teiksim, ka elementa a kārta ir bezgalīga.

Definēsim trīs apakškopas kopā A: A_P - visu to elementu kopa, kuru kārta ir pāra skaitlis, A_N - visu to elementu kopa, kuru kārta ir nepāra skaitlis, A_∞ - visu to elementu kopa, kuru kārta ir bez-galīga.

Acīmredzami šīs apakškopas definē kopas A sadalījumu: $A = A_P \bigcup A_N \bigcup A_\infty$.

Līdzīgā veidā katram elementam $b \in B$ konstruēsim elementu virkni $\{b_0, b_1, ...\}$, kur $b_0 = b$, ja n ir pāra skaitlis, tad $b_{n+1} \in A$, ja eksistē, apmierina nosacījumu $f(b_{n+1}) = b_n$, ja n ir nepāra skaitlis, tad b_{n+1}, ja eksistē, apmierina nosacījumu $g(b_{n+1}) = b_n$. Definēsim elementa kārtu tāpat kā kopas A gadījumā, definēsim atbilstošo kopas B sadalījumu: $B = B_P \bigcup B_N \bigcup B_\infty$.

Viegli redzēt, ka $f|_{A_P}$ ir sirjektīva funkcija no A_P uz B_N, $f|_{A_\infty}$ ir sirjektīva funkcija no A_∞ uz B_∞, $g^{-1}|_{A_N}$ ir sirjektīva funkcija no A_N uz B_P.

Funkcija $f' = (f|_{A_P}) \cup (f|_{A_\infty}) \cup (g^{-1}|_{A_N})$ ir bijektīva funkcija no A uz B un līdz ar to teorēma ir pierādīta.

Kopām A un B ir iespējami 4 gadījumi:

a) eksistē injektīva funkcija $f : A \to B$ un injektīva funkcija $g : B \to A$,

b) eksistē injektīva funkcija $f : A \to B$ un neeksistē injektīva funkcija $g : B \to A$,

b) neeksistē injektīva funkcija $f : A \to B$ un eksistē injektīva funkcija $g : B \to A$,

c) neeksistē injektīva funkcija $f : A \to B$ un neeksistē injektīva funkcija $g : B \to A$.

Ja ir spēkā gadījums a), tad saskaņā ar Teorēmu kopas ir ekvivalentas. Var pierādīt, ka gadījums d) nekad nerealizējas. Gadījumi b) un c) realizējas, ja kopām ir dažādi apjomi.

Ja eksistē injektīva funkcija $f : A \to B$, tad saka, ka kopas A apjoms ir mazāks vai vienāds nekā kopas B apjoms (apzīmē ar pierakstu $c(A) \le c(B)$).

Ja eksistē injektīva funkcija $f : A \to B$ un neeksistē injektīva funkcija $g : B \to A$, tad saka, ka kopas A apjoms ir stingri mazāks nekā kopas B apjoms (apzīmē ar pierakstu $c(A) < c(B)$).

Viegli redzēt, ka jebkurai galīgai kopai A un jebkurai bezgalīgai kopai B izpildās nosacījums $c(A) < c(B)$.

Ja A ir sanumurējama un B ir jebkura bezgalīga kopa, tad no Teorēmas 6 seko, ka $c(A) \leq c(B)$. Ja kopa B ir kontinuāla, tad ko Teorēmas T.9 seko, ka $c(A) < c(B)$.

TEORĒMA 9 Jebkurai kopai A izpildās nosacījums $c(A) < c(P(A))$.

PIERĀDĪJUMS Tā kā $A \subseteq P(A)$, tad dabiskā immersija $i : A \to P(A)$ ir injektīva funkcija no A uz apakškopu $A \subseteq P(A)$.

Atliek pierādīt, ka neeksistē injektīva funkcija no $P(A)$ uz kopu A .

Pieņemsim pretējo: eksistē injektīva funkcija $f : P(A) \to A$. Konstruēsim kopas A apakškopu C šādā veidā: $c \in C$ tad un tikai tad, ja $c \notin f^{-1}(c)$ un $f^{-1}(c) \neq \varnothing$.

Apskatīsim kopas A elementu $x = f(C)$. Ja $x \notin C$, tad saskaņā ar kopas C konstrukciju $x \in C$, jo $x = f(C)$. Ja $x \in C$, tad $x \notin C$, jo atkal jāievēro tas fakts, ka $x = f(C)$.

Mēs esam ieguvuši pretrunu, kas nozīmē to, ka nav iespējam konstruēt injektīvu funkciju $P(A) \to A$.

Kā mēs noskaidrojām iepriekš, ja kopa A ir galīga kopa un $|A| = n$, tad $|P(A)| = 2^n$. Šis novērojums dažreiz stimulē apzīmēt kopu $P(A)$ ar pierakstu 2^A.

(Var pierādīt, ka kopa $P(N)$, kur N - naturālo skaitļu kopa, ir kontinuāla, tas ir, tās apjoms ir vienāds ar kopas $I = [0,1]$ apjomu).

Kardinālie skaitļi un darbības ar tiem

Kopu apjomu sauc arī par kopas *kardinālo skaitli*, jo tas vispārina skaitļa jēdzienu.

Var mēģināt definēt operācijas ar kardinālajiem skaitļiem, kas vispārina operācijas ar parastajiem skaitļiem.

Kardinālo skaitli (KS) m sauksim par KS n_1 un n_2 summu n_1+n_2, ja m ir vienāds ar n_1 un n_2 apjomu kopu apvienojuma apjomu.

Kardinālo skaitli (KS) r sauksim par KS n_1 un n_2 reizinājumu $n_1 n_2$, ja r ir vienāds ar n_1 un n_2 apjomu kopu Dekarta reizinājuma apjomu.

Kardinālo skaitli (KS) e sauksim par KS n_1 un n_2 pakāpi $n_1^{n_2}$, ja e ir vienāds ar jebkuras kopas Fun(A,B) apjomu, kur A apjoms ir n_2 un B apjoms ir n_1.

TEORĒMA (kardinālo skaitļu īpašības)

1) a+b=b+a, ab=ba;
2) (a+b)+c=a+(b+c);
3) (a+b)c=ac+bc;
4) $a^{b+c} = a^b a^c$.