ATTIECĪBAS

Attiecības - īpašība, kas piemīt vai nepiemīt sakārtotai vienas vai vairāku kopu elementu virknei (var lietot arī terminu *attieksme*).

Bināra attiecība - īpašība, kas piemīt vai nepiemīt kopas (vai divu dažādu kopu) sakārtotiem elementu pāriem.

Ja elementu pārim x, y piemīt šī īpašība, tad teiksim, ka tie ir saistīti ar attiecību (kuru nosauksim vārdā r) un pierakstīsim to formā $x\ r\ y$, pretējā gadījumā - $x \not r\ y$.

Tātad attiecība definē kādu apakškopu kopā $A \times B$ (ja $x\ r\ y$, tad (x, y) ir šajā apakškopā, pretējā gadījumā - nav)

DEFINĪCIJA *Bināra attiecība* starp kopu A un B elementiem ir kāda apakškopa R kopā $A \times B$.

Ja $A = B$, tad bināru attiecību sauc par bināru attiecību kopā A.

Biežāk tiek izmantotas attiecības vienā kopā.

Attiecību r, kas atbilst apakškopai $R \subseteq A \times B$ ($R \subseteq A \times A$) apzīmēsim ar pierakstu $r = (A, B, R)$ ($r = (A, R)$).

Kopu R sauksim par *attiecības grafiku*.

Kopu A ar tajā uzdotu attiecību r var apzīmēt ar pierakstu (A, r), šis apzīmējums ir izdevīgs, ja attiecību uzdod ar attiecības aprakstu, nevis ar kopu R.

Ja $r = (A, B, R)$ un $(x, y) \in R$, tad saka, ka elementi x un y *ir saistīti ar attiecību* r, *atrodas attiecībā* r vai *ir salīdzināmi attiecībā* r (apzīmē ar $x\ r\ y$).

Strādājot ar konkrētām attiecībām, burta r vietā izmanto dažādus atdalošos simbolus, piemēram

$$<,\ =,\ \neq,\ \mathbf{p},\ |$$

un citus.

PIEMĒRI a) reālu skaitļu vienādība $(=)$, šajā gadījumā $r=(A,R)$, kur A ir reālo skaitļu kopa un $R=\{[x,y]\in A^2 \mid x=y\}$;

b) reālo skaitļu sakārtojums ($\leq$), jeb attiecība "mazāks vai vienāds", A ir reālo skaitļu kopa un $R=\{[x,y]\in A^2 \mid x\leq y\}$;

c) veselo skaitļu dalāmības attiecība (|) , $A=Z$ un $R=\{[x,y]\in A^2 \mid y \textit{ dalās ar } x\}$;

c) kopu ietilpšanas attiecība ($\subseteq$), A ir "visu kopu kopa" un $R=\{[x,y]\in A^2 \mid x\subseteq y\}$;

d) apakšprogrammu izsaukšanas attiecībair visu dotā programmas apakšprogrammu kopa, $R=\{(x,y)\in A^2 \mid y \textit{ izsauc } x\}$

e) cilvēku radniecības attiecība, A ir visu cilvēku kopa, $R=\{[x,y]\in A^2 \mid x \textit{ un } y \textit{ uzskata sevi par radiniekiem}\}$;

f) trijstūru līdzība, A ir visu plaknes trijstūru kopa, $R=\{[x,y]\in A^2 \mid x \textit{ un } y \textit{ ir līdzīgi}\}$.

Jebkuram sakārtotam kopu pārim (A,B) ir definētas divas speciālas attiecības:

a) *tukšā attiecība* $l = (A, B, \varnothing)$;
b) *pilnā attiecība* $w = (A, B, A \times B)$.

Jebkurai kopai A ir vēl papildus speciāla attieksme - *vienības attiecība*

$$e = (A, diag(A)),$$

kur

$$diag(A) = \{(x, y) \in A^2 \mid x = y\}$$

ir A^2 apakškopa, ko sauc par A^2 *diagonāli*.

Attiecību var interpretēt kā attēlojuma grafiku, tāpēc pastāv savstarpēji viennozīmīga atbilstība starp attiecībām un attēlojumiem.

Attiecībām un attēlojumiem ir dažādas psiholoģiskas nianses, kuras ir lietderīgi izmantot dažādās situācijās:

- apakškopu tiešajā reizinājumā $A \times B$ ir ērti uzskatīt par attēlojuma grafiku, ja iet runa par kopas A elementu pārveidojumiem par kopas B elementiem vai apakškopām;

- šo pašu apakškopu ir ērti uzskatīt par attiecību, ja ir svarīgi domāt par šo apakškopu kā par sakārtotu elementu pāru kopu.

Attiecības uzdošanas veidi:

1) attiecību $r = (A, B, R)$ var uzdot definējot kopas A un B un pārskaitot visus kopas R elementus,

šī metode der, ja kopas A un B ir mazas galīgas kopas, šajā gadījumā bieži izmanto attiecības uzdošanu *matricas* (tabulas) veidā: ja $|A| = n$ un $|B| = m$, tad konstruē tabulu, kurā ir n kolonnas un m rindas, tabulas kolonnas tiek indeksētas ar kopas A elementiem un rindas – ar kopas B elementiem, tabulas rūtiņā, kas atbilst rindai $x \in A$ un kolonnai $y \in B$ ieraksta 1, ja $[x, y] \in R$ un 0, ja $[x, y] \notin R$, ja ir uzdota attiecības matrica to var vizualizēt *matricas grafa* vai *attiecības grafa* veidā: grafa virsotnes ir kopu A un B elementi, starp virsotnēm x un y ir orientēta šķautne (bultiņa no x uz y) tad un tikai tad, ja $[x, y] \in R$;

2) attiecību var uzdot ar kādu kopas $R \subseteq A \times B$ raksturīgu īpašību;

3) attiecību var uzdot ar salīdzināmo elementu pāru raksturojošo īpašību.

Attiecību vienādība un salīdzināšana

DEFINĪCIJA Divas attiecības $r_1 = (A, B, R_1)$ un $r_2 = (A, B, R_2)$ sauc par *vienādām* ($r_1 = r_2$) tad un tikai tad, ja $R_1 = R_2$.

Ja $R_1 \neq R_2$, tad saka, ka attiecības nav vienādas ($r_1 \neq r_2$).

Saka, ka attieksme r_1 *ietilpst* attiecībā r_2 vai, ka attiecība r_1 ir attiecības r_2 *apakšattiecība* ($r_1 \subseteq r_2$), tad un tikai tad, ja $R_1 \subseteq R_2$.

Ja $r_1 \subseteq r_2$ un $r_1 \neq r_2$, tad saka, ka attiecība r_1 *stingri ietilpst* attiecībā r_2 vai, ka attiecība r_1 ir attiecības r_2 *īsta* apakšattiecība.

PIEMĒRI

Jebkura attiecība ietilpst pilnajā attiecībā un tukšā attiecībā ietilpst jebkurā citā attieksmē.

Ja r_1 ir attiecība "mazāks vai vienāds"($\leq$) un r_2 ir attiecība =, tad $r_1 \subseteq r_2$;

ja r_1 ir attiecība "būt radiniekiem" un r_2 ir attiecība "būt pazīstamiem", tad $r_1 \subseteq r_2$ (mēs uzskatām, ka radinieki pazīst viens otru).

Operācijas ar attiecībām

DEFINĪCIJA Ja ir dotas divas attiecības $r_1 = (A, B, R_1)$ un $r_2 = (A, B, R_2)$, tad par šo attiecību *apvienojumu* sauc attiecību

$$r_1 \cup r_2 = (A, B, R_1 \cup R_2);$$

par attiecību *šķēlumu* sauc attiecību

$$r_1 \cap r_2 = (A, B, R_1 \cap R_2);$$

par attiecību *starpību* sauc attiecību

$$r_1 \setminus r_2 = (A, B, R_1 \setminus R_2).$$

Par attiecības $r=(A,B,R)$ *papildinājumu* jeb *papildinošo attiecību* sauc attiecību

$$r'=(A,B,(A\times B)\setminus R).$$

Par attieksmes $r=(A,B,R)$ *apvērsto attiecību* sauc attiecību $r^{-1}=(B,A,R^{-1})$, kur

$$R^{-1}=\{(y,x)\in B\times A\,|\,(x,y)\in R\}.$$

Ja ir dotas divas attiecību $r_1=(A,B,R_1)$ un $r_2=(B,C,R_2)$, tad par šo attiecību *kompozīciju* vai *reizinājumu* sauc attiecību $r_1r_2=(A,C,R_1R_2)$, kur

$$R_1R_2=\{(x,z)\in A\times C\,|\ \textit{eksistē}\ y\in B\ \textit{tāds, ka}\ (x,y)\in R_1\ \textit{un}\ (y,z)\in R_2\}.$$

Attiecību kompozīcija ir saistīta ar attēlojumu kompozīciju: attiecību $r_1=(A,B,R_1)$ un $r_2=(B,C,R_2)$ kompozīcijai

$$r_1r_2=(A,C,R_1R_2)$$

atbilst kopa R_1R_2, kas ir vienāda ar kopām R_1 un R_2 atbilstošo attēlojumu kompozīcijas grafiku.

PIEMĒRI <

TEORĒMA ***(attiecību īpašības)*** Ja $r=(A,R)$, $s=(A,S)$ un $t=(A,T)$ ir attiecības kopā, tad ir spēkā šādas īpašības

1) $er=re=r$; $lr=rl=l$;

2) $(r')^{-1}=(r^{-1})'$;

3) $(r\cup s)^{-1}=r^{-1}\cup s^{-1}$;
$(r\cap s)^{-1}=r^{-1}\cap s^{-1}$;

4) $r(s\cup t)=rs\cup rt$;
$(s\cup t)r=sr\cup tr$;

5) $r(s\cap t)\subseteq rs\cap rt$;
$(s\cap t)r\subseteq sr\cap tr$;

Attiecību speciālgadījumi

DEFINĪCIJA Attiecību $r=(A,R)$ sauksim par *refleksīvu*, ja katram $a\in A$ izpildās nosacījums ara.

Attiecības $r=(A,R)$ refleksivitāte nozīmē, ka $e\subseteq r$ vai arī, ka $r=r\cup e$, citos terminos, tās grafiks satur kopas A^2 diagonāli, refleksīvas attiecības grafā katrai virsotnei a var atrast šķautni, kuras abi gali pieder a (šādu šķautni sauc par *orientētu cilpu*).

Refleksīvu attiecību piemēri: skaitļu vienādība, ģeometrisku figūru vienādība un līdzība.

DEFINĪCIJA Attiecību sauc par *antirefleksīvu*, ja katram $a\in A$ izpildās nosacījums $ar'a$.

Antirefleksivitāte nozīmē, ka $r\subseteq e'$ vai arī, ka $r=r\setminus e$, antirefleksīvas attiecības grafā nav nevienas cilpas.

Antirefleksīvu attiecību piemēri: skaitļu nevienādība, taišņu perpendikularitāte.

DEFINĪCIJA Attiecību sauksim par *simetrisku*, ja jebkuriem diviem $a \in A$ un $b \in A$ izpildās šāds nosacījums: ja arb, tad bra.

Attiecības simetriskums nozīmē, ka $r^{-1} = r$ vai arī, ka $(r \setminus e)^2 = (r \setminus e)^2 \cup e$, simetriskas attiecības grafā starp jebkurām divām dažādām virsotnēm vai nu nav nevienas šķautnes, vai arī ir divas šķautnes (vērstas pretējos virzienos).

Simetrisku attiecību piemēri: skaitļu vienādība, figūru līdzība, cilvēku radniecība.

Attiecību sauksim par *antisimetrisku*, ja jebkuriem diviem $a \in A$ un $b \in A$ izpildās nosacījums: ja arb un bra, tad $a = b$.

Attiecību antisimetriskums nozīmē, ka $r \cap r^{-1} \subseteq e$ vai arī, ka $(r \setminus e)^2 = (r \setminus e)^2 \setminus e$, antisimetriskas attiecības grafā nav virsotņu pāru, starp kuru elementiem ir divas šķautnes.

Antisimetrisku attiecību piemēri: skaitļu attiecība "mazāks vai vienāds", veselu skaitļu dalāmība.

Attieksmi sauc par *asimetrisku*, ja jebkuriem diviem $a \in A$ un $b \in A$ izpildās nosacījums: ja arb, tad $br'a$.

Attieksmes asimetriskums nozīmē, ka $r \cap r^{-1} = l$ vai arī, ka $r^2 = r^2 \setminus e$, asimetriskas attieksmes grafā nav cilpu un nav virsotņu pāru, starp kuru elementiem ir divas šķautnes.

Asimetrisku attieksmju piemēri: skaitļu attieksme "mazāks".

Attieksmi sauc par *tranzitīvu*, ja jebkuriem trīs elementiem $a \in A$, $b \in A$ un $c \in A$ izpildās nosacījums: ja arb un brc, tad arc.

Attieksmes tranzitivitāte nozīmē, ka $r^2 \subseteq r$ vai arī, ka $(r \cup e)^2 = r \cup e$.

Ja r ir patvaļīga attieksme, tad attieksmi $t = \bigcup_{i \in N} r^i$ sauc par attieksmes r *tranzitīvo slēgumu* (pierādīt patstāvīgi, ka t ir tranzitīva attieksme!).

Tranzitīvu attieksmju piemēri: skaitļu attieksme "mazāks" (<), skaitļu dalāmības attieksme, ģeometrisku figūru līdzības attieksme.

Attieksmi sauc par *dihotomisku (aptverošu)*, ja jebkuriem diviem $a \in A$ un $b \in A$, tādiem, ka $a \neq b$ izpildās nosacījums: arb vai bra.

Attieksmes dihotomiskums nozīmē, ka $e' \subseteq r \cup r^{-1}$.

Dihotomisku attieksmju piemēri: skaitļu attieksme "mazāks vai vienāds".

Sakārtojumi

DEFINĪCIJA Attiecību sauc par *daļēju sakārtojumu*, ja tā ir

1) refleksīva,
2) antisimetriska,
3) tranzitīva.

Daļēju sakārtojumu sauc par *pilnu (lineāru) sakārtojumu*, ja tas ir dihotomisks.

Attiecību sauc par *stingru* (pilnu) sakārtojumu, ja tā ir antirefleksīva, antisimetriska un tranzitīva (un dihotomiska).

Refleksīvu un tranzitīvu attiecību sauc par pirmsakārtojumu vai kvazisakārtojumu.

Kopu ar tajā uzdotu daļēju sakārtojumu sauc par *daļēji sakārtotu kopu*, kopu ar pilnu sakārtojumu sauc par *pilnīgi sakārtotu kopu* vai *ķēdi*.

Daļēja un pilna sakārtojuma attieksmes parasti apzīmē ar izteikti nesimetriskiem, orientētiem atdalošiem simboliem, piemēram $<, \leq, \mathbf{p}, <, \propto, \leftarrow, \in \subseteq$, u un citiem. Mēs apzīmēsim vispārīgu sakārtojumu ar $\leq$.

Duālo DSK iegūst no dotās mainot uz pretējo salīdzināšanas kārtību.

PIEMĒRS Vienības attiecība e acīmredzami ir daļējs sakārtojums, to sauc par *triviālo* vai *diskrēto* sakārtojumu. Daži klasiski sakārtojumu piemēri:

$$(N, \leq), (N, |), (P(A), \subseteq),$$

Elementus x un y sauksim par *salīdzināmiem*, ja $x \leq y$ (x ir mazāks vai vienāds kā y) vai $x \geq y$ (x ir lielāks vai vienāds kā y), pretējā gadījumā tos sauksim par *nesalīdzināmiem*.

Ja uzdota daļēji sakārtota kopa $(A,\leq)$, tad apakškopu $B\subseteq A$ sauc par *ķēdi*, ja $(B,\leq)$ ir pilnīgi sakārtota kopa, apakškopu B sauc par *antiķēdi*, ja $(B,\leq)$ ir triviāli sakārtota kopa.

Ķēdi (attiecīgi, antiķēdi) B sauc par maksimālu, ja jebkuram $a\in A\setminus B$ apakškopa $B\cup\{a\}$ nav ķēde (attiecīgi, antiķēde).

Saka, ka daļēji sakārtotas kopas *garums* (attiecīgi, *platums*) ir n, ja tajā eksistē ķēde (attiecīgi, antiķēde), kas satur n elementus un neeksistē ķēde (attiecīgi, antiķēde), kas satur $n+1$ elementu.

DSK, kuras garums ir 1, sauksim par divdaļīgu DSK.

Elementu $x\in A$ sauc par *vislielāko* (attiecīgi, *vismazāko*), ja katram $a\in A$ izpildās $a\leq x$ (attiecīgi, $x\leq a$).

Ja DSK eksistē vislielākais (vismazākais) elements, tad to sauc par ierobežotu no augšas (apakšas).

Elementu $x \in A$ sauc par *maksimālu* (attiecīgi, *minimālu*), ja no tā, ka $x \leq a$ seko, ka $x = a$ (attiecīgi, no tā, ka $a \leq x$ seko, ka $a = x$).

Grafi sakārtojumu vizualizēšanai

Salīdzināmības orientētais grafs – grafs kā vispārīgai attiecībai.

Salīdzināmības (neorientētais) grafs - dažādi elementi tiek savienoti ar neorientētu šķautni tad un tikai tad, ja tie ir salīdzināmi. Izmanto arī *nesalīdzināmības grafu*.

Hasses grafs

Vizualizējot daļējus sakārtojumus grafu veidā, ir lietderīgi nedaudz modificēt attieksmes grafa jēdzienu: ja ir dots daļējs sakārtojums $(A, \leq)$, tad no sākumā konstruē šī sakārtojuma grafu parastajā nozīmē un pēc tam izdzēš visas cilpas un visas šķautnes, kuru eksistence ir tranzitivitātes sekas.

Šādu grafu sauc par *sakārtojuma (vai Hasses) grafu*.

Ja kopa A ir galīga, tad šī definīcija nozīmē, ka starp dažādiem elementiem a un b ir šķautne ($a \leftarrow b$) tad un tikai tad, ja $a \leq b$ un neeksistē $c \in A$ tāds, ka $c \neq a, c \neq b, a \leq c$ un $c \leq b$. Saka, ka *b nosedz a*.

Papildus DSK īpašības

Par DSK $(A, \leq)$ apakšattiecību sauksim DSK $(B, \leq_B)$, kur $B \subseteq A$ un $b_1 \leq_B b_2$ tad un tikai tad, ja $b_1 \leq b_2$ (kopā A).

Par *intervālu* [x,y] sauksim apakšattiecību, kas satur visus z: $x \leq z \leq y$.

Ja ir dotas divas DSK $(A, \leq_A)$ un $(B, \leq_B)$ tad funkciju $f : A \to B$ sauksim par *izotonu* (tādu, kas saglabā kārtību), ja no tā, ka $a \leq_A a'$ seko, ka $f(a) \leq_B f(a')$.

Divas DSK $(A, \leq_A)$ un $(B, \leq_B)$ sauksim par izomorfām, ja eksistē bijektīva funkcija

$f : A \to B$ tāda, ka $a \leq_A a'$ tad un tikai tad, ja $f(a) \leq_B f(a')$.

Var definēt arī *antiizomorfisma* jēdzienu, kad eksistē bijektīva funkcija $f : A \to B$ tāda, ka $a \leq_A a'$ tad un tikai tad, ja $f(a) \geq_B f(a')$.

Par DSK *kēžu sadalījumu* sauksim tās elementu kopas sadalījumu apakškopās, kurām atbilstošās apakšDSK ir ķēdes.

TEORĒMA (Dilvorts) Galīgai DSK platums ir vienāds ar minimālo ķēžu sadalījuma elementu skaitu (minimālo skaitu ķēžu, kurās var sadalīt doto DSK).

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgi, izmantot matemātisko indukciju pēc platuma.

Operācijas ar DSK:

1) *apvienojums* - ja dotas DSK $D_1 = (A_1, R_1)$ un $D_2 = (A_2, R_2)$ un $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, tad $D_1 + D_2 = (A_1 \cup A_2, R_1 \cup R_2)$

2) *lineārā summa* - ja dotas DSK $D_1 = (A_1, R_1)$ un $D_2 = (A_2, R_2)$ un

$A_1 \cap A_2 = \emptyset$, tad $D_1 \oplus D_2 = (A_1 \cup A_2, R_1 \cup R_2 \cup A_1 \times A_2)$, visi viena kopas elementi ir mazāki nekā visi otrās kopas elementi;

3) Dekarta reizinājums - ja dotas DSK $D_1 = (A_1, R_1)$ un $D_2 = (A_2, R_2)$, tad $D_1 \times D_2 = (A_1 \times A_2, S)$, kur elementi (a_1, a_2) un (b_1, b_2) ir salīdzināmi tad un tikai tad, ja $a_1 \leq_{R_1} b_1$ un $a_2 \leq_{R_2} b_2$.

PIEMĒRI Kēde ir viena elementa DSK iterētā lineārā summa. Antiķēde ir viena elementa DSK iterēts apvienojums.

Ja ir dotas divas DSK $D_1 = (A_1, R_1)$ un $D_2 = (A_2, R_2)$, tad var definēt *leksikogrāfisko sakārtojumu* (kopu) Dekarta reizinājumā $A_1 \times A_2$ šādi: $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ tad un tikai tad, ja $a_1 \leq b_1$ vai $a_1 = b_1$ un $a_2 \leq b_2$.

PIEMĒRS Ja ir dota pilnīgi sakārtota kopa $(A, \leq)$, tad katram $n \in N$ kopā A^n var definēt pilnu sakārtojumu, ko sauc par sakārtojumam $\leq$ atbilstošo *leksikogrāfisko* sakārtojumu, kuru mēs apzīmēsim ar $\mathbf{p}$, šādā veidā: $(a_1,...,a_n)\,\mathbf{p}\,(b_1,...,b_n)$ tad un tikai tad, ja mazākajam indeksam i, tādam, ka $a_i \neq b_i$ izpildās nosacījums $a_i \leq b_i$.

DSK sauc par *graduētu*, ja visām maksimālām ķēdēm ir vienāds garums. Par graduētas kopas *rangu* sauc jebkuras tās maksimālas ķēdes garumu.

Par DSK *ranga funkciju* sauc funkciju r, kas katram elementam piekārto veselu skaitli tā, ka ja y nosedz x, tad r(y)=r(x)+1. DSK, kurai eksistē ranga funkciju sauc par *ranžētu* DSK. Par *k-tā ranga kopu* sauc DSK apakškopu, kuras elementi rangs vienāds ar k.

DSK $(B,\leq_B)$ ir DSK $(A,\leq_A)$ *paplašinājums*, ja $(\leq_A)\subseteq(\leq_B)$. Ja B ir lineārs sakārtojums, to sauc par *lineāru paplašinājumu*.

Topoloģiskās šķirošanas problēma: atrast dotās DSK lineāro paplašinājumu.

Par DSK A *realizatoru* sauc visu tādu tās lineāro paplašinājumu kopu, kuru šķēlums ir A. Par DSK A *dimensiju* sauc minimāli iespējamo elementu skaitu tās realizatorā.

PIEMĒRS DSK pielietojumi *šķirošanā*. Šķirošanas uzdevuma mērķis ir sakārtot dotos skaitļus (vispārīgā gadījumā, lineāri sakārtotas kopas elementus) pieaugošā kārtībā veicot vairākkārtīgi divu elementu salīdzināšanas operācijas. Tādējādi, jebkurā laika momentā uzkrāto zināšanu apjoms ir DSK, kas apraksta visu salīdzināšanu rezultātus. Algoritms ir jāizstrādā tā, lai katra nākamā salīdzināšana pēc iespējas samazinātu DSK dimensiju.

Ekvivalence

DEFINĪCIJA Attiecību sauc par *ekvivalenci*, ja tā ir

1) refleksīva;
2) simetriska;
3) tranzitīva.

Ekvivalences parasti apzīmē ar simboliem, kas ir izteikti simetriski attiecība pret vertikālo asi, piemēram, $=, \equiv, \cong$.

Klasiski ekvivalenču piemēri: skaitļu un, vispārīgāk, matemātisku objektu vienādība vai “izomorfisms”, ģeometrisku figūru līdzība.

TEORĒMA Jebkurai kopai A pastāv bijekcija starp ekvivalencēm, kas uzdotas kopā A un kopas A sadalījumiem.

PIERĀDĪJUMS Ja ir dots kopas A sadalījums $A_I = \{A_a\}_{a \in I}$, tad definēsim tam atbilstošu ekvivalenci $\equiv$ šādā veidā: $a \equiv b$ tad un tikai tad, ja a un b pieder vienai un tai pašai sadalījuma apakškopai A_x, apzīmēsim šo attēlojumu no kopas A sadalījumu kopas uz kopas A attieksmju kopu ar j .

Pierādīsim, ka katram sadalījumam definētā attieksme tiešām ir ekvivalence:

refleksivitāte - katram $a \in A$ izpildās $a \equiv a$,

simetrija - ja $a \equiv b$, tad $\{a,b\} \subseteq A_x$ kādai apakškopai A_x un $b \equiv a$,

tranzitivitāte - ja $a \equiv b$ un $b \equiv c$, tad $\{a,b\} \subseteq A_x$ un $\{b,c\} \subseteq A_y$, tātad $A_x = A_y$ un $a \equiv c$.

No otras puses, pieņemsim, ka ir dota ekvivalence $\equiv$ un parādīsim, ka šādai attieksmes var viennozīmīgi piekārtot kopas A sadalījumu, apzīmēsim šo attēlojumu no kopas A ekvivalenču kopas uz kopas A sadalījumu kopu ar ψ .

Katram $a \in A$ definēsim $A_a = \{x \in A \mid x \equiv a\}$. Katram $a \in A$ $a \in A_a$, tātad $A_a \neq \varnothing$ un $\bigcup_{a \in A} A_a = A$, tātad kopa $\{A_a\}_{a \in A}$ ir kopas A pārklājums.

Pierādīsim vēl, ka ja $A_a \neq A_b$, tad $A_a \cap A_b = \varnothing$. Ja $A_a \cap A_b \neq \varnothing$, tad eksistē $c \in A$ tāds, ka $c \in A_a, c \in A_b$, no kā seko, ka $a \equiv c, c \equiv b$ un $a \equiv b$.

Pieņemsim, ka eksistē $x \in A$ tāds, ka $x \in A_a, x \notin A_b$, tad iegūstam, ka $x \equiv a$ un $x \equiv' b$. Tā kā $a \equiv b$, tad no attieksmes tranzitivitātes seko, ka $x \equiv b$, kas ir pretruna.

Līdzīgā veidā iegūsim pretrunu, ja pieņemsim, ka eksistē $x \in A$ tāds, ka $x \in A_b, x \notin A_a$.

No funkciju φ un ψ konstrukcijām seko, ka to kompozīcijas jebkurā kārtībā ir vienādas ar vienības attēlojumiem attiecīgajās kopās, tātad abas šīs funkcijas ir bijekcijas.