ATTĒLOJUMI UN FUNKCIJAS

Kopas parasti tiek uzskatītas par fiksētiem, statiskiem objektiem.

Lai atļautu kopu un to elementu pārveidojumus, ievieš *attēlojuma* jēdzienu.

Attēlojums ir kāda darbība vai operācija, kas pārveido, pārstrādā dotās kopas elementus par kādas citas (vai tās pašas) kopas elementiem.

DEFINĪCIJA Par *attēlojumu* f no kopas A uz kopu B ($f : A \to B$ vai $A \xrightarrow{f} B$) sauc atbilstības likumu, kas katram kopas A elementam a piekārto kādu kopas B apakškopu $f(a)$, ko sauc par elementa a *attēlu* attiecībā uz f.

Kopas A elementi, kuru attēli ir netukšas kopas, veido attēlojuma f *definīcijas apgabalu* $D(f)$.

Par kopas A apakškopas X f-attēlu (apzīmē ar pierakstu *Im(f,X),Im(f)* vai $f(X)$*)* sauc kopu $\bigcup_{a \in X} f(a)$.

Par attēlojuma f *vērtību kopu* sauc kopu $f(A)$.

Par kopas B elementa b *inverso attēlu* $f^{-1}(b)$ sauksim kopas A apakškopu

$$\{a \in A \mid b \in f(a)\}.$$

Par kopas B apakškopas B' inverso attēlu $f^{-1}(B)$ sauksim kopas A apakškopu $\bigcup_{b \in B'} f^{-1}(b)$.

Attēlojuma jēdziens ir viens no fundamentālākajiem matemātikas jēdzieniem, bez kura mūsdienu matemātika nav iedomājama, un kuru, tāpat kā kopas, cilvēki izmanto daudz biežāk nekā viņi to apzinās.

PIEMĒRI

a) skaitļu funkcijas, ar kurām lasītāji ir pazīstami no skolas matemātikas kursa, ir attēlojumi no kādas reālu skaitļu kopas R apakškopas uz kādu (iespējams, citu) kopas R apakškopu;

b) pieņemsim, ka kopa A ir visu cilvēku kopa, B ir visu cilvēku valodu kopa, katrs cilvēks principā ir spējīgs pārvaldīt vismaz vienu valodu, tāpēc apskatīsim attēlojumu f , kas piekārto katram cilvēkam to valodu kopu, kuras viņš vai viņa pārvalda, ievērojiet, ka ir cilvēki, kuriem tiek piekārtota tukša kopa (tie ir cilvēki, kas nepārvalda nevienu valodu, piemēram, mazi bērni), ir cilvēki, kas pārvalda vienu valodu (tādu ir vairākums) un ir cilvēki, kas pārvalda vairākas valodas;

c) (nenopietns piemērs) pieņemsim, ka A ir Jūsu augstskolas studentu kopa un B ir studenšu kopa, katram studentam var patikt viena vai vairākas studentes, tāpēc varam definēt attēlojumu, kas piekārto katram studentam to studenšu kopu, kas viņam patīk.

Attēlojuma uzdošanas veidi

Attēlojumu var uzdot šādos veidos :

a) tieši definējot attēlu katram kopas A elementam (šī metode der, ja kopas A un B ir galīgas kopas ar nelielu elementu skaitu);

b) uzdodot attēlojuma raksturīgu īpašību, izmantojot matemātiskas vai citas dabas terminus, piemēram, $f(x)=\sin x$

Attēlojumu ir lietderīgi vizualizēt šādā veidā: uz papīra lapas, tāfeles vai monitora ekrāna atzīmē visus kopu A un B elementus un katram $a\in A$ zīmē vienu bultiņu no a uz katru elementu apakškopā $f(a)$, šādu zīmējumu sauc par *attēlojuma grafu* vai *diagrammu*, kopu elementus sauc par grafa *virsotnēm* un bultiņas - par *šķautnēm*.

Ja attēlojums ir definēts no kopas A uz A(tādu attēlojumu sauc par *attēlojumu sevī*), tad pietiek atlikt tikai kopas A elementus vienā eksemplārā.

DEFINĪCIJA Divus attēlojumus $f:A\to B$ un $g:X\to Y$ sauc par *vienādiem* ($f=g$) tad un tikai tad, ja $A=X, B=Y$ un katram $a\in A=X$ izpildās nosacījums $f(a)=g(a)$.

DEFINĪCIJA Ja ir dots attēlojums $f:A\to B$, tad par tā *apvērsto attēlojumu* $g:B\to A$ sauc attēlojumu, kas katram $b\in B$ ir definēts ar nosacījumu $g(b)=f^{-1}(b)$ (apzīmē ar f^{-1})

Par attēlojuma f apvērsto attēlojumu ir lietderīgi domāt kā par attēlojumu, ko iegūst, izmainot uz pretējo visu bultiņu virzienus attēlojuma f grafā.

Pārejot uz apvērsto attēlojumu, definīcijas apgabals un vērtību apgabals mainās vietām.

$(f^{-1})^{-1} = f$, jo, mainot bultiņu virzienu divas reizes, nonākam sākotnējā stāvoklī.

Piemēra a) apvērstais attēlojums ir attēlojums, kas katrai valodai piekārto to cilvēku kopu, kuri pārvalda šo valodu, u.t.t.

DEFINĪCIJA Par attēlojuma $f : A \to B$ *grafiku* $G(f)$ sauc apakškopu

$$\{(a,b) \in A \times B \mid b \in f(a)\}$$

kopā $A \times B$.

Attēlojumu kompozīcija

DEFINĪCIJA Par attēlojumu $f : A \to B$ un $g : B \to C$ *kompozīciju (reizinājumu)* sauc attēlojumu $g \circ f : A \to C$, kas ir definēts šādi: katram $a \in A$

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Ja ir dots galīgs skaits attēlojumu $f_1 : A_1 \to A_2, f_2 : A_2 \to A_3, ..., f_n : A_n \to A_{n+1}$, tad par to kompozīciju $f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_n$ sauc attēlojumu, kas katram $a \in A_1$ ir definēts ar vienādību

$$(f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_n)(a) = f_1(f_2(...(f_n(a)...)),$$

kur labajā pusē elementam a tiek pielietoti attēlojumi $f_n, f_{n-1}, ..., f_1$.

Attēlojumus, kuri piedalās kompozīcijā, sauc par kompozīcijas *reizinātājiem.*

Attēlojuma $f : A \to A$ n-kārtīgo kompozīciju $\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n}$ sauksim par f *n-to pakāpi*.

Ja attēlojums $f : A \to B$ ir vienāds ar kompozīciju $g \circ h$, kur $h : A \to C$ un

$g: C \to B$, tad teiksim, ka attēlojums f *faktorizējas* caur C.

***TEORĒMA** (kompozīcijas asociativitātes īpašība).* Jebkuriem trīs attēlojumiem

$$f: A \to B, g: B \to C, h: C \to D$$

izpildās vienādība

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim, ka katram $a \in A$ izpildās vienādība

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ (g \circ f))(a).$$

Kopa pierādāmās vienādības kreisajā pusē ir

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))).$$

Kopa labajā pusē ir

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a)))$$

un vienādība ir acīmredzama.

ATTĒLOJUMU VEIDI (SPECIĀLGADĪJUMI)

DEFINĪCIJA Attēlojumu $f : A \to B$ sauc par *visur definētu*, ja $D(f) = A$.

Attēlojumu sauc par *sirjektīvu*, ja $f(A) = B$.

Attēlojumu sauc par *funkciju*, ja tas ir visur definēts un katram $a \in A$ $f(a)$ satur tieši vienu elementu.

Funkciju sauc par *injektīvu*, ja jebkuriem dažādiem kopas A elementiem a_1 un a_2 ir dažādi attēli, tas ir, ja $a_1 \neq a_2$, tad $f(a_1) \neq f(a_2)$, citos terminos, katram $b \in f(A)$ kopa $f^{-1}(b)$ satur tieši vienu elementu.

Funkciju, kas ir vienlaicīgi surjektīva un injektīva, sauc par *bijektīvu* (*savstarpēji viennozīmīgu*) funkciju (vai par *permutāciju*, ja iet runa par endofunkciju).

Jebkura kopā A funkciju f, kas katram $a \in A$ definēta ar formulu $f(a) = a$ sauc par *vienības attēlojumu* (id_A), kas atbilst kopai A.

Visplašāk pielietotais attēlojumu tips ir funkcijas.

Attēlojumu, kas nav funkcija, bieži sauc par *daudzvērtīgu funkciju.*

Vairākas dabiski definējamas funkcijas var atrast, sīkāk aplūkojot kopu teorijas pamatdefinīcijas un operācijas ar kopām:

Ja $S \subseteq A$, tad ir definēta injektīva funkcija $i_S : S \to A$, ko sauc par apakškopai S atbilstošo *dabisko iekļaušanu (immersiju, iegremdēšanu),* un kas $\forall s \in S$ ir definēta ar formulu $i_S(s) = s$, kur labajā pusē elements s tiek uzskatīts par kopas A elementu.

Ja ir dots attēlojums $f : A \to B$, tad kompozīciju

$$f \circ i_S : S \to A \to B$$

sauc par attēlojuma f *sašaurināšanu uz apakškopu* S.

Ja ir dots attēlojums $g : S \to B$ un ja eksistē attēlojums $f : A \to B$, tāds, ka $f \circ i_S = g$, tad saka, ka f ir attēlojuma g *paplašinājums no apakškopas* A_S *uz* A.

Katrai kopas A apakškopai $S \subseteq A$ definēsim funkciju $c_S : A \to \{0,1\}$ ar šādu formulu: $c_S(a) = 1$, ja $a \in A_1$ un $c_S(a) = 0$, ja $a \notin A_1$. Funkciju c_S sauc par *apakškopas* S *raksturīgo (harakteristisko) funkciju*.

Ja $A_I = \{A_a\}_{a \in I}$ ir kopas A faktorkopa, tad ir definēta surjektīva funkcija $p : A \to A_I$, ko sauc par faktorkopai atbilstošo *dabisko projekciju*, un kas katram $a \in A_a$ ir definēta ar formulu $p(a) = A_a$.

Ja ir dotas divas kopas A un B, tad ir definētas divas surjektīvas funkcijas $p_A : A \times B \to A$ un $p_B : A \times B \to B$, kuras sauc par *dabiskajām projekcijām uz tiešā reizinājuma komponentēm (faktoriem, reizinātājiem)*, šīs funkcijas ir definētas ar formulām

$$p_A(a,b) = a,\ p_B(a,b) = b.$$

Ja attēlojumam $f : A \to B$ izpildās īpašība $\forall a \in A\ f(a) = b$, kur b ir fiksēts, tad tādu attēlojumu sauksim par *konstantu attēlojumu*.

Funkcijas starp mazām galīgām kopām ir ērti analizēt izmantojot funkciju grafus.

Tā, piemēram, funkcija $f : A \to B$ ir surjektīva tad un tikai tad, ja katrā kopas B elementā ieiet vismaz viena f - bultiņa. Funkcija ir injektīva tad un tikai tad, ja katrā kopas B elementā ieiet ne vairāk kā viena bultiņa.

Bijektīvu funkciju no (visbiežāk galīgas) kopas sevī parasti sauc par *permutāciju* (*pārkārtojumu*).

TEORĒMA Divu funkciju kompozīcija ir funkcija. Divu bijektīvu funkciju kompozīcija ir bijektīva funkcija. Ja funkcija $f : A \to B$ ir bijektīva funkcija, tad tās apvērstā funkcija f^{-1} arī ir bijektīva funkcija un izpildās vienādības $f \circ f^{-1} = id_B$, $f^{-1} \circ f = id_A$.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs.

TEORĒMA A - galīga kopa, $f : A \to A$.

1) ja f ir injektīva funkcija, tad tā ir bijektīva.

2) ja f ir sirjektīva funkcija, tad tā ir bijektīva.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs.

Orbītas un invariantās kopas

Pieņemsim, ka ir dots attēlojums $f : A \to A$.

Kopu $Orb_f(a) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(a)$ sauksim par elementa a *orbītu* attiecībā uz f. Apakškopai $S \subseteq A$ kopu $Orb_f(S) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(S)$ arī sauksim par tās orbītu.

Apakškopu $S \subseteq A$ sauksim par *invariantu (fiksētu)* apakškopu attiecībā uz f, ja $Orb_f(S) \subseteq S$ ($Orb_f(S) = S$).

Elementu a sauksim par *fiksētu punktu*, ja tam atbilstošā vienelementa apakškopa ir fiksēta, citiem vārdiem sakot - $f(a) = a$.

Katras apakškopas orbīta ir fiksēta apakškopa. Diviem kopas elementiem orbītas var sakrist.

Attēlojumu izomorfisms

Divus attēlojumus $f : A \to B$ un $g : X \to Y$

sauksim par *izomorfiem*, ja eksistē bijektīvas funkcijas $j : A \to X$ un $y : B \to Y$ tādas, ka $y \circ f = g \circ j$.

Permutācijas un to struktūra

Permutāciju pieraksta veidi:

1) attēlu saraksts;
2) vertikālais pieraksts;
3) horizontālais pieraksts

- šajā gadījumā funkciju pieraksta divu rindu veidā, kas ir savienotas ar iekavām, augšējā rindā raksta kopas elementus kaut kādā noteiktā kārtībā, apakšējā rindā raksta kopas elementu attēlus attiecībā uz doto funkciju tā, ka katrā kolonnā apakšējais elements ir augšējā elementa attēls.

Piemēram, funkciju $f : A \to A$, ja $A = \{1,2,3,4\}$ un

$$f(1) = 3,\ f(2) = 1,\ f(3) = 4,\ f(4) = 2 ,$$

var pierakstīt šādi:

$$f = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3142 \end{pmatrix}.$$

4) diagrammas veidā.

Divu permutāciju kompozīcijas, permutācijas inversās permutācijas noteikšana.

DEFINĪCIJA Ja ir dots permutācija $f : A \to A$, tad divus kopas A elementus x un y sauksim par *f-ekvivalentiem*, ja $x \in Orb_f(y)$, citiem vārdiem sakot eksistē k tāds, ka $x = f^k(y)$.

TEORĒMA f-ekvivalence ir ekvivalences attiecībā kopā A (ekvivalences klases ir f-orbītas)

PIERĀDĪJUMS Nav grūts.
Pierādījām, ka kopa A ir savstarpēji šķirtu orbītu apvienojums. Tagad ir jāsaprot, kā f darbojas katrā orbītā.

DEFINĪCIJA Funkciju $f : A \to A$ no galīgas kopas A sevī sauc par *ciklisku attēlojumu* vai *ciklu*, ja

1) vai nu $|A| \geq 2$ un kopas A elementus var sanumurēt noteiktā kārtībā $[a_1, a_2, ..., a_n]$ tā, ka $f(a_i) = a_{i+1}$, ja $1 \leq i \leq n-1$ un $f(a_n) = a_1$,
2) vai arī $|A| = 1$ un kopas A vienīgais elements a apmierina vienādību $f(a) = a$.

Ja A ir galīga kopa un $f : A \to A$ ir funkcija no A sevī, tad kopas A apakškopu C sauc par f -*ciklu* vai *ciklu attiecībā uz funkciju* f, ja funkcijas f sašaurinājums uz C ir ciklisks attēlojums - vai nu $|C| \geq 2$ un kopas C elementus var sanumurēt noteiktā kārtībā $[c_1, c_2, ..., c_k]$ tā, ka $f(c_i) = c_{i+1}$, ja $1 \leq i \leq k-1$ un $f(c_k) = c_1$, vai arī $|C| = 1$ un kopas C vienīgais elements c apmierina vienādību $f(c) = c$.

Elementu skaitu ciklā sauc par *cikla garumu*.

Ciklu, kura garums ir 1, sauc par funkcijas *fiksēto punktu*. Ciklu, kura garums ir 2 sauksim par *transpozīciju*.

Ja cikla garums ir stingri lielāks nekā 1, tad ciklu sauc par *īstu (netriviālu)* ciklu.

Funkciju $f : A \to A$ sauc par *vispārinātu ciklu*, ja eksistē apakškopa $C \subseteq A$, kas ir īsts f - cikls un visi elementi kopā $A \setminus C$ ir fiksēti punkti.

Divus vispārinātus ciklus, kas uzdoti vienā kopā sauc, par *neatkarīgiem vispārinātiem cikliem*, ja to netriviālo ciklu šķēlums ir tukša kopa.

PIEMĒRS: $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, funkcija $f : A \to A$ ir definēta šādi:

$$f(1) = 1,\ f(2) = 3,\ f(3) = 2,\ f(4) = 5,\ f(5) = 6,\ f(6) = 7$$
$$f(7) = 8,\ f(8) = 9,\ f(9) = 4\,.$$

Viegli redzēt, ka šai funkcijai ir 3 cikli: 1 cikls $C_1 = \{1\}$ ar garumu 1, 1 cikls $C_2 = \{2,3\}$ ar garumu 2 un 1 cikls $C_6 = \{4,5,6,7,8,9\}$ ar garumu 6.

Ciklu ir viegli interpretēt funkcijas grafa terminos: tas ir *sakarīgs* grafs (grafs, kuru nevar sadalīt divos vai lielākā skaitā grafos), kurā katrai virsotnei ir tieši viena izejoša un tieši viena ieejoša šķautne.

Ja funkcija $f : A \to A$ ir cikls, un $f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, ..., f(a_n) = a_1$, tad šādu funkciju ir pieņemts apzīmēt ar pierakstu $f = (a_1 a_2 ... a_n)$.

TEORĒMA *(permutācijas sadalījums ciklos)* Galīgas kopas permutācija ir vienāda ar galīgu neatkarīgu vispārinātu ciklu kompozīciju. Šādas kompozīcijas reizinātāji ir noteikti viennozīmīgi ar precizitāti līdz to kārtībai kompozīcijā.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka ir dota galīgas kopas A permutācija $f : A \to A$ un $|A| = n$.

Interpretēsim galīgās kopas permutāciju f kā grafu.

Tā kā permutācija ir injektīva un surjektīva funkcija, tās grafam piemīt īpašība, ka katrai virsotnei ir tieši viena ieejoša un tieši viena izejoša šķautne.

Tas nozīmē, ka sākot ar jebkuru virsotni a_1 šajā grafā mēs iegūsim virsotņu kopu $C_1 = \{a_1, ...a_k\}$, kas apmierinās vienādības

$$f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, ..., f(a_k) = a_1.$$

Ja $k = n$, tad permutācija ir cikls un teorēma ir pierādīta. Ja $k < n$, tad izvēlēsimies jebkuru elementu kopā $A \setminus C_1$ un atradīsim otro ciklu C_2. Turpināsim šo procedūru tik ilgi, kamēr nebūsim ieguvuši kopas A sadalījumu $\{C_1, ..., C_m\}$, tādu, ka permutācijas f sašaurinājums uz katru apakškopu C_i ir cikls.

Katrs kopas A elements pieder vienam un tikai vienam ciklam, tāpēc šāds sadalījums ir noteikts viennozīmīgi.

Ja $c_1, c_2, \ldots, c_m$ ir vispārināti cikli, kuru netriviālo ciklu šķēlums ir tukša kopa, tad visu šo ciklu kompozīcija nav atkarīga no reizinātāju kārtības, tas izriet no tiešas pārbaudes.

Apzīmēsim permutācijas f sašaurinājumu uz kopu C_i ar f_i. Ar tiešu pārbaudi var pārliecināties, ka kompozīcija $f_1 \circ f_2 \circ \ldots \circ f_m$ ir vienāda ar f.

SECINĀJUMS *(permutācijas cikliskais pieraksts)* Teorēma rāda, ka permutāciju var uzdot pārskaitot tās ciklus un kārtību, kādā tiek sakārtoti elementi katrā ciklā, šo pierakstu sauc par permutācijas *ciklisko pierakstu*.

Šajā pierakstā ciklus ar garumu 1 parasti neuzrāda.

PIEMĒRS permutāciju

$$f = \begin{pmatrix} 123456789 \\ 132567498 \end{pmatrix}$$

var pierakstīt formā

$$f = (23)(4567)(89).$$

Funkcijas kārta

Par funkcijas $f : A \to A$ *kārtu* sauksim mazāko naturālo skaitli k tādu, ka $f^k = id_A$.

TEORĒMA Katra permutācija ir vienāda ar transpozīciju kompozīciju.

PIERĀDĪJUMS Tā kā jebkura permutācija ir neatkarīgu ciklu kompozīcija, pietiek pierādīt teorēmu, ja permutācija ir cikls. Vienkāršības pēc uzskatīsim, ka A={1,2,...,n}.

Pieņemsim, ka ir dots cikls f=(1;2;...;n-1;n). Var redzēt, ka $f = (1;n)(1;n-1)\ldots(13)(12)$ (paskatīties katra elementa attēlu).

TEORĒMA Dota permutācija $f : A \to A$, kas ir izteikta kā transpozīciju kompozīcija $f = t_1 t_2 \ldots t_k$. Tad ir spēkā šādi apgalvojumi:

1) skaitlis $e_f = (-1)^k$ ir atkarīgs tikai no f un nav atkarīgs no transpozīcijām (to sauksim par f *paritāti*);

2) izpildās vienādība $e_{fg} = e_f e_g$ (*paritātes multiplikatīvā īpašība*).

PIERĀDĪJUMS Vienkāršības pēc uzskatīsim, ka A={1,2,...,n}.

1) Pieņemsim, ka eksistē vēl viens sadalījums $f = s_1 s_2 ... s_l$, kur skaitļiem k un l ir dažādas paritātes veselo skaitļu teorijas nozīmē (atlikums pēc moduļa 2). Iegūstam, ka $t_1 t_2 ... t_k = s_1 s_2 ... s_l$. Ievērosim, ka katras transpozīcijas kvadrāts ir vienības attēlojums, tātad $t_i^2 = id_A$. Veidosim kompozīcijas ar $t_1, t_2, ...$ (no kreisās puses), beigās iegūsim vienādību $id_A = t_k t_{k-1} ... t_2 t_1 s_1 s_2 ... s_l$, ievērosim, ka k+l ir nepāra skaitlis pēc pieņēmuma.

Pierādīsim šādu apgalvojumu: ja $id_A = s_1 s_2 ... s_m$, kur visas s_i ir transpozīcijas, tad m ir pāra skaitlis, no tā sekos pretruna un teorēmas pirmā punkta pierādījums. Šo apgalvojumu mēs pierādīsim, parādot, ka reizinājums $id_A = s_1 s_2 ... s_m$ ir vienāds ar m-2 transpozīciju reizinājumu, atkārtojot šo operāciju vairākas reizes, iegūsim, ka vienības attēlojums ir vienāds ar vienu transpozīciju, kas ir pretruna.

Pieņemsim, ka visas transpozīcijas, sākot ar s_{j+1}, kur j ir fiksēts, nesatur elementu 1 (1ir to fiksētais punkts). Pieņemsim, ka $s_j = (1p)$. Attiecībā uz s_{j-1} ir iespējami 4 gadījumi:

a) $s_{j-1} = (1p)$;

b) $s_{j-1} = (1q),\ q \neq p$;

c) $s_{j-1} = (pq),\ q \neq p$;

d) $s_{j-1} = (qr),\ q \neq p,\ r \neq p$.

Ja ir spēkā gadījums a) tad $s_{j-1}s_j = id_A$ un $id_A = s_1 s_2 ... s_{j-2} s_{j+1} s_m$.

Ja ir spēkā gadījums b), tad $s_{j-1}s_j = (1q)(1p) = (1p)(pq)$.

Ja ir spēkā gadījums c), tad $s_{j-1}s_j = (pq)(1p) = (1q)(pq)$.

Ja ir spēkā gadījums d), tad $s_{j-1}s_j = (qr)(1p) = (1p)(qr)$.

Gadījumā a) mēs jau esam samazinājuši transpozīciju skaitu par 2. Ja ir gadījumi b),c) vai d), tad mēs varam panākt, ka elements 1 tiek kustināts transpozīcijā, kuras indekss ir par 1 mazāks, turpinām šo procesu, kamēr vai nu nonākam pie gadījuma a), vai arī panākam, ka $id_A = s'_1 s'_2 ... s'_m$, kur $s'_1 = (1s)$ un pārējās transpozīcijas nekustina elementu 1. Iegūstam, ka $id_A(1) = (s'_1 s'_2 ... s'_m)(1) = s'_1(1) \neq 1$, kas ir pretruna.

2) Ja $f = t_1 t_2 ... t_k$ un $g = t'_1 t'_2 ... t'_l$, tad $fg = t_1 t_2 ... t_k t'_1 ... t'_l$ un

$$e_{fg} = (-1)^{k+l} = (-1)^k (-1)^l = e_f e_g .$$

Atkarībā no paritātes permutāciju sauksim par *pāra* vai *nepāra* permutāciju.

Operācijas

DEFINĪCIJA Ja ir dota kopa A, tad funkciju $A^n \to A$ sauc par n-vietīgu operāciju.

1-vietīga operācija ir vienkārši funkcija $A \to A$.

2-vietīga operācija *(bināra operācija)* ir funkcija, kas katram sakārtotam kopas A elementu pārim piekārto kādu kopas A elementu.

Bināru operāciju piemēri: skaitļu aritmētiskās operācijas, funkciju kompozīcija.

n - vietīgās operācijas ar $n > 2$ tiek pielietotas relatīvi reti.